

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ÉLÉMENTS DE DISTORSION DE $\text{Diff}_0^\infty(M)$

Emmanuel Militon

Tome 141
Fascicule 1

2013

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 35-46

ÉLÉMENTS DE DISTORSION DE $\text{Diff}_0^\infty(M)$

PAR EMMANUEL MILITON

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on montre que, dans le groupe $\text{Diff}_0^\infty(M)$ des difféomorphismes isotopes à l'identité d'une variété compacte M , tout élément récurrent est de distorsion. Pour ce faire, on généralise une méthode de démonstration utilisée par Avila pour le cas de $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{S}^1)$. La méthode nous permet de retrouver un résultat de Calegari et Freedman selon lequel tout homéomorphisme de la sphère isotope à l'identité est un élément de distorsion.

ABSTRACT (*Distortion elements of $\text{Diff}_0^\infty(M)$*). — We consider, on a compact manifold, the group of diffeomorphisms that are isotopic to the identity. We show that every recurrent element is a distortion element. To prove this, we generalize a method used by Avila in the case of the group of diffeomorphisms of the circle. The method also provides a new proof of a result by Calegari and Freedman: on a sphere, in the group of homeomorphisms that are isotopic to the identity, every element is distorted.

Texte reçu le 25 mars 2010, accepté le 9 janvier 2012.

EMMANUEL MILITON, Fondation mathématique Jacques Hadamard-Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex •
E-mail : emmanuel.militon@math.polytechnique.fr

Classification mathématique par sujets (2010). — 37C85.

Mots clefs. — Difféomorphisme, système dynamique, théorie géométrique des groupes.

1. Énoncé des résultats

L'étude des éléments de distorsion des groupes de difféomorphismes ou d'homéomorphismes non-conservatifs d'une variété trouve son origine dans une question de Franks et Handel (voir [6] et [5]) : une rotation du cercle est-elle distordue dans le groupe des homéomorphismes du cercle ou des difféomorphismes du cercle ? Qu'en est-il si l'on remplace le cercle par la sphère de dimension 2 ?

La réponse à ces questions est fournie par Calegari et Freedman dans [4] : une rotation du cercle est distordue dans le groupe des difféomorphismes de classe C^1 du cercle. Cependant, les auteurs précisent ne pas savoir s'il en est de même en régularité C^∞ . Dans le même article, ils prouvent qu'une rotation de la sphère S^2 est distordue dans le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de la sphère. Enfin, en ce qui concerne la régularité C^0 , Calegari et Freedman ont prouvé un résultat très général : en toute dimension N , un homéomorphisme h de la sphère S^N est distordu.

Dans un article ultérieur, Avila a montré que, dans le groupe des difféomorphismes du cercle de classe C^∞ , tout élément récurrent est distordu. Nous généralisons dans cet article le résultat d'Avila à toute variété.

2. Résultats

Avant toute chose, commençons par introduire des définitions et des notations qui nous seront utiles par la suite.

DÉFINITION 1. — Soit G un groupe. Pour une partie finie S de G , si un élément g de G est dans le groupe engendré par S , on note :

$$l_S(g) = \inf \left\{ n \in \mathbb{N}, \exists (\epsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{\pm 1\}^n, \exists (s_i)_{1 \leq i \leq n} \in S^n, g = \prod_{i=1}^n s_i^{\epsilon_i} \right\}.$$

Un élément g de G est dit distordu (ou de distorsion) s'il existe une partie finie S de G telle que g appartient au groupe engendré par S et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{l_S(g^n)}{n} = 0.$$

On remarque que, comme la suite $(l_S(g^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sous-additive, il suffit de montrer que :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{l_S(g^n)}{n} = 0$$

pour obtenir que l'élément g est distordu.

Étant donnée une variété différentiable M , on note :

- $\text{Homeo}_0(M)$ l'ensemble des homéomorphismes à support compact dans M isotopes à l'identité par une isotopie à support compact ;

- pour un élément r de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\text{Diff}_0^r(M)$ l'ensemble des difféomorphismes de M de classe C^r isotopes à l'identité par une isotopie à support compact (en particulier, $\text{Homeo}_0(M) = \text{Diff}_0^0(M)$).

Le support d'un homéomorphisme f de M est ici défini par :

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in M, f(x) \neq x\}}.$$

On note d_r une distance qui définit la topologie de $\text{Diff}_0^r(M)$.

DÉFINITION 2. — *On dit qu'un difféomorphisme f de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ est récurrent si et seulement si :*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} d_\infty(f^n, Id_M) = 0.$$

L'objet de la présente note est de démontrer les théorèmes suivants. Ce premier théorème généralise le résultat d'Avila pour les difféomorphismes du cercle (voir [1]).

THÉORÈME 1. — *Si M est une variété compacte, tout élément récurrent de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ est distordu.*

Comme dans [1], la méthode employée permet de démontrer que toute suite d'éléments récurrents $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ est simultanément distordue, au sens où l'on peut trouver un ensemble fini S tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \liminf_{p \rightarrow +\infty} \frac{l_S(f_n^p)}{p} = 0.$$

La méthode employée par [1] permet de donner une nouvelle démonstration du résultat de Calegari et Freedman (voir [4]).

THÉORÈME 2 (Calegari-Freedman). — *Tout élément de $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^n)$ est distordu.*

Là encore, on pourrait montrer que toute suite d'éléments de $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^n)$ est simultanément distordue.

3. Démonstration des théorèmes

La démonstration des théorèmes 1 et 2 repose sur une généralisation des résultats de [1] à toute variété. La démarche et les notations sont similaires à celles présentées dans [1] mais la généralisation de la méthode aux dimensions supérieures nécessite de manière cruciale des résultats de perfection locale qui proviennent de [8]. On ne démontrera le théorème 1 que dans le cas d'une variété M de dimension supérieure ou égale à 2. Le cas de la dimension 1 est traité dans [1].

Les théorèmes vont découler des lemmes suivants.

LEMME 1. — Soit M une variété compacte de dimension supérieure ou égale à 2.

Il existe des suites $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telles que toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_\infty(h_n, Id_M) < \epsilon_n,$$

vérifie la propriété suivante : il existe un ensemble fini $S \subset \text{Diff}_0^\infty(M)$ tel que, pour tout entier n ,

- le difféomorphisme h_n appartient au sous-groupe engendré par S .
- on a l'inégalité : $l_S(h_n) \leq k_n$.

LEMME 2. — Soit N un entier naturel.

Il existe une suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telle que, pour toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^N)$, il existe un ensemble fini $S \subset \text{Homeo}_0(\mathbb{S}^N)$ tel que, pour tout entier n :

- l'homéomorphisme h_n appartient au groupe engendré par S .
- on a l'inégalité : $l_S(h_n) \leq k_n$.

Admettons pour l'instant ces lemmes, qui seront démontrés dans la section suivante, et démontrons les théorèmes.

Démonstration des théorèmes. — Soit f un élément récurrent de $\text{Diff}_0^\infty(M)$. Considérons une application strictement croissante $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n}{p(n)} = 0 \\ d_\infty(f^{p(n)}, Id_M) \leq \epsilon_n \end{cases},$$

où les suites $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont données par le lemme 1. Ce même lemme appliqué à la suite $(f^{p(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ nous donne l'existence d'un ensemble fini S qui montre que f est distordu. Le théorème 2 se montre de la même manière, en utilisant le lemme 2. \square

4. Démonstration des lemmes 1 et 2

Pour mener à bien la démonstration de ces lemmes, nous aurons besoin des lemmes suivants, qui seront démontrés dans la section suivante et portent sur les difféomorphismes de \mathbb{R}^n . Les lemmes 3 et 4 sont des analogues des lemmes 1 et 2 dans le cas des commutateurs de difféomorphismes de \mathbb{R}^N . Notons $B(0, 2)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon 2. Si f et g sont des difféomorphismes de \mathbb{R}^n , on note $[f, g]$ le difféomorphisme $fgf^{-1}g^{-1}$.

LEMME 3. — Soient N un entier naturel et r un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Il existe des suites $(\epsilon'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(k'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs vérifiant la propriété suivante. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\text{Diff}_0^r(\mathbb{R}^N)$ à support inclus dans la boule $B(0, 2)$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_r([f_n, g_n], Id_{\mathbb{R}^N}) < \epsilon'_n.$$

Alors il existe un ensemble fini S' inclus dans $\text{Diff}_0^r(\mathbb{R}^N)$ tel que pour tout entier n , le difféomorphisme $[f_n, g_n]$ appartient au groupe engendré par S' et $l_S([f_n, g_n]) \leq k'_n$.

Dans le cas particulier où $r = 0$, on a un lemme un peu plus fort.

LEMME 4. — Il existe une suite $(k'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que, pour toute suite $(\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}^N)$ à support dans $B(0, 2)$, il existe un ensemble fini S' inclus dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}^N)$ tel que, pour tout entier n , l'homéomorphisme \tilde{h}_n appartient au groupe engendré par S' et $l_S(\tilde{h}_n) \leq k'_n$.

Démonstration du lemme 1. — On note N la dimension de M ($N \geq 2$). On considère un recouvrement ouvert $(U_i)_{0 \leq i \leq p}$ de M constitué d'ouverts difféomorphes à \mathbb{R}^N dont l'adhérence est incluse dans un ouvert de carte de M . Pour tout entier i entre 0 et p , on choisit φ_i une carte de M définie sur un voisinage de l'adhérence de U_i qui vérifie :

$$\varphi_i(U_i) \subset B(0, 2).$$

Notons ψ une bijection de $\mathbb{N} \times \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, 4N\}$ sur \mathbb{N} .

On va maintenant construire la suite $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ recherchée à l'aide de la suite $(\epsilon'_l)_{l \in \mathbb{N}}$ donnée par le lemme 3 dans le cas $r = +\infty$.

D'après le lemme de perfection lisse (voir appendice), pour tout entier naturel n , on peut choisir ϵ_n suffisamment petit de sorte que, si un difféomorphisme h de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ vérifie $d(h, Id_M) < \epsilon_n$, alors il existe deux familles $(f_{k,l})_{0 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq 3N}$ et $(g_{k,l})_{0 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq 3N}$ d'éléments de $\text{Diff}_0^\infty(M)$, où $g_{k,l}$ et $f_{k,l}$ sont supportés dans l'ouvert U_k telles que :

$$\begin{cases} h = \prod_{k=0}^p \prod_{l=1}^{3N} [f_{k,l}, g_{k,l}] \\ \forall k, l \in [0, p] \times [1, 3N], d_\infty(\varphi_k \circ f_{k,l} \circ \varphi_k^{-1}, Id_{\mathbb{R}^N}) < \epsilon'_{\psi(n,k,l)} \cdot \\ \forall k, l \in [0, p] \times [1, 3N], d_\infty(\varphi_k \circ g_{k,l} \circ \varphi_k^{-1}, Id_{\mathbb{R}^N}) < \epsilon'_{\psi(n,k,l)} \end{cases}$$

Donnons-nous une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_\infty(h_n, Id_M) < \epsilon_n.$$

La définition des ϵ_n nous donne deux familles $(\tilde{f}_{n,k,l})$ et $(\tilde{g}_{n,k,l})$ associées à h_n . On pose alors :

$$f_{\psi(n,k,l)} = \varphi_k \circ \tilde{f}_{n,k,l} \circ \varphi_k^{-1}$$

$$g_{\psi(n,k,l)} = \varphi_k \circ \tilde{g}_{n,k,l} \circ \varphi_k^{-1}$$

et on applique le lemme 3 aux suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenues, ce qui achève la démonstration du lemme 1 en posant :

$$k_n = \sum_{k,l} k'_{\psi(n,k,l)}. \quad \square$$

Démonstration du lemme 2. — On utilise le lemme suivant qui découle d'un résultat très profond dû à Kirby et Quinn pour le cas de la dimension supérieure ou égale à 4 (voir [4] lemme 6.10, [9] et [10]) :

LEMME 5. — *On considère deux disques fermés inclus dans S^n dont les intérieurs recouvrent S^n . Alors tout homéomorphisme h isotope à l'identité s'écrit comme produit de six éléments de $\text{Homeo}_0(S^n)$ qui sont chacun à support inclus dans l'un de ces disques.*

En utilisant ce résultat, la même méthode que précédemment, conjuguée au lemme 4, donne le lemme 2. □

5. Démonstration des lemmes 3 et 4

Là encore, elle suit la même méthode que celle présentée dans [1].

Démonstration du lemme 3. — On note F_1 un élément de $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ qui vérifie :

$$\forall x \in B(0, 2), F_1(x) = \lambda x,$$

avec $0 < \lambda < 1$.

Soit F_2 un élément de $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support inclus dans $B(0, 2)$ qui vérifie :

$$\forall x \in B(0, 1), F_2(x) = x + a,$$

où a appartient à $\mathbb{R}^N - \{0\}$ et est de norme strictement inférieure à 1.

Soit F_3 un élément de $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support inclus dans $B(0, 2)$ qui vérifie :

- la suite $(F_3^n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.
- la suite $(F_3^n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$.

Considérons une suite d'entiers $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissant suffisamment vite pour que :

- $n \neq n' \Rightarrow F_3^n F_1^{l_n}(B(0, 2)) \cap F_3^{n'} F_1^{l_{n'}}(B(0, 2)) = \emptyset$.
- le diamètre de $F_3^n F_1^{l_n}(B(0, 2))$ converge vers 0.

On note $F_n = F_3^n F_1^{l_n}$, $U_n = F_3^n F_1^{l_n}(B(0, 2))$ et $\hat{F}_n = F_n F_2 F_n^{-1}$.

On considère pour chaque entier n un ouvert V_n qui vérifie :

- $F_3^n(0) \in V_n \subset U_n$.
- $\hat{F}_n(V_n) \cap V_n = \emptyset$.

On considère aussi une suite d'entiers $(\tilde{l}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sorte que :

$$F_3^n F_1^{\tilde{l}_n}(B(0, 2)) \subset V_n$$

et on note $\tilde{F}_n = F_3^n F_1^{\tilde{l}_n}$.

Donnons-nous des suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\text{Diff}_0^r(\mathbb{R}^N)$ à support dans $B(0, 2)$ et choisissons la suite $(\epsilon'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant suffisamment vite vers 0 de sorte que, si $d_r(f_n, Id) < \epsilon'_n$ et $d_r(g_n, Id) < \epsilon'_n$ pour tout entier n , alors les applications $F_4, F_5 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ définies par :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, F_4|_{V_n} &= \tilde{F}_n f_n \tilde{F}_n^{-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}, F_5|_{V_n} &= \tilde{F}_n g_n \tilde{F}_n^{-1} \\ F_4|_{\mathbb{R}^N - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n} &= F_5|_{\mathbb{R}^N - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n} = Id_{\mathbb{R}^N - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n} \end{aligned}$$

sont de classe C^r en x_0 (et ce sont alors des C^r -difféomorphismes de M à support inclus dans $B(0, 2)$ isotopes à l'identité).

Remarquons que

$$A_n = F_4 \hat{F}_n F_4^{-1} \hat{F}_n^{-1}$$

est à support dans $V_n \cup \hat{F}_n(V_n)$, vaut $\tilde{F}_n f_n \tilde{F}_n^{-1}$ sur V_n et $\hat{F}_n \tilde{F}_n f_n^{-1} \tilde{F}_n^{-1} \hat{F}_n^{-1}$ sur $\hat{F}_n(V_n)$. On peut faire une remarque analogue pour les applications $B_n = F_5 \hat{F}_n F_5^{-1} \hat{F}_n^{-1}$ et $C_n = F_4^{-1} F_5^{-1} \hat{F}_n F_5 F_4 \hat{F}_n^{-1}$. On a alors :

$$A_n B_n C_n = \tilde{F}_n [f_n, g_n] \tilde{F}_n^{-1}.$$

Ainsi :

$$[f_n, g_n] = \tilde{F}_n^{-1} A_n B_n C_n \tilde{F}_n.$$

En prenant $S = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\}$, on obtient le résultat escompté. □

Démonstration du lemme 4. — Remarquons que, dans la démonstration précédente, l'apparition de la suite $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est liée à un défaut de régularité de F_4 et de F_5 . En régularité C^0 , ce problème n'apparaît pas, ce qui démontre le lemme 4 dans le cas où la suite $(\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constituée de commutateurs. Il suffit ensuite de démontrer le lemme suivant. □

LEMME 6. — *Tout homéomorphisme de \mathbb{R}^N à support compact isotope à l'identité s'écrit comme un commutateur dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration (tirée de [3], démonstration du théorème 1.1.3)

On note φ un homéomorphisme de $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}^n)$ de restriction à $B(0, 2)$ définie par :

$$\begin{aligned} B(0, 2) &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ x &\mapsto \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n , on note :

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^N, \frac{1}{2^{n+1}} \leq \|x\| \leq \frac{1}{2^n} \right\}.$$

Soit h , un élément de $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}^N)$. Comme tout élément de $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}^N)$ est conjugué à un élément à support inclus dans l'intérieur de A_0 , on peut supposer h à support inclus dans l'intérieur de A_0 . On définit alors $g \in \text{Homeo}_0(\mathbb{R}^N)$ par :

- $g = Id$ en dehors de $B(0, 1)$.
- pour tout entier naturel i , $g|_{A_i} = \varphi^i h \varphi^{-i}$.
- $g(0) = 0$.

Alors :

$$h = [g, \varphi]. \quad \square$$

Appendice A

Perfection locale de $\text{Diff}_0^\infty(M)$

L'objet de cet appendice est de démontrer le résultat suivant qui a été utilisé au cours de la démonstration du lemme 1 :

THÉORÈME 3. — *Soit M , une variété compacte connexe de dimension n . Fixons un recouvrement ouvert $(U_k)_{0 \leq k \leq p}$ de M constitué d'ouverts d'adhérences difféomorphes à la boule unité de \mathbb{R}^n . Alors, pour tout voisinage Ω de l'identité dans $\text{Diff}_0^\infty(M)$, il existe un voisinage Ω' de l'identité dans $\text{Diff}_0^\infty(M)$ tel que, pour tout difféomorphisme f de Ω' , il existe des familles de difféomorphismes $(f_{k,l})_{0 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq 3n}$ et $(g_{k,l})_{0 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq 3n}$ dans Ω tels que :*

$$f = \prod_{k=0}^p \prod_{l=1}^{3n} [f_{k,l}, g_{k,l}]$$

et les difféomorphismes $f_{k,l}$ et $g_{k,l}$ sont à support dans U_k .

Cette démonstration est une réalisation élémentaire de l'idée de Stefan Haller et Josef Teichmann de décomposer un difféomorphisme en produit de difféomorphismes préservant certains feuilletages (voir [8]). Elle repose de manière essentielle sur le théorème KAM d'Herman sur les difféomorphismes du cercle. On remarque que cette propriété démontre la perfection de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ et donc la simplicité de ce groupe. C'est donc une alternative à la preuve de Thurston et Mather (voir [3] ou [2]). La démonstration donne aussi la perfection locale (et donc la perfection) de $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour n supérieur ou égal à 2 mais ne permet pas de conclure dans le cas $n = 1$.

D'après le lemme de fragmentation (voir [8] proposition 1 ou [3] théorème 2.2.1 pour une démonstration), pour tout réel $\eta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout élément h de $\text{Diff}_0^\infty(M)$, si $d(h, Id_M) < \alpha$, alors il existe une famille $(h_i)_{0 \leq i \leq p}$ d'éléments de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ telle que :

$$\begin{cases} \text{supp}(h_i) \subset U_i \\ h = \prod_{i=0}^p h_i \\ \forall i \in [0, p] \cap \mathbb{N}, d(h_i, Id_M) < \eta \end{cases} .$$

Il reste à effectuer la construction suivante. On se donne U, V , deux ouverts de \mathbb{R}^n , où U est un cube d'adhérence incluse dans V , et un voisinage Ω de l'identité dans $\text{Diff}_0^\infty(V)$. Nous allons montrer l'existence d'un voisinage Ω' de l'identité dans $\text{Diff}_0^\infty(U)$ tel que, pour tout difféomorphisme f de Ω' , il existe des difféomorphismes f_1, f_2, \dots, f_{3n} dans Ω tels que :

$$f = [f_1, f_2] \circ [f_3, f_4] \circ \dots \circ [f_{3n-1}, f_{3n}].$$

Pour montrer cette dernière propriété, la stratégie sera la suivante : on va commencer par décomposer un difféomorphisme f proche de l'identité en tant que produit de n difféomorphismes qui préservent chacun les feuilles d'un feuilletage en droites. Chacun de ces feuilletages en droites de U va être considéré comme une partie d'un feuilletage en cercles d'un anneau inclus dans V . Il suffira ensuite d'appliquer (soigneusement) le théorème d'Herman sur les difféomorphismes du cercle pour conclure que chacun des difféomorphismes apparaissant dans la décomposition de f s'écrit comme produit de deux commutateurs constitués d'éléments qui peuvent être choisis aussi proche que l'on veut de l'identité tant que f est suffisamment proche de l'identité.

Détaillons maintenant les arguments ci-dessus. Pour un entier k entre 1 et n , on note F_k le feuilletage constitué de l'ensemble des droites parallèles au k -ième axe de coordonnées. On note $\text{Diff}_0^\infty(U, F_k)$ l'ensemble des difféomorphismes de U à support compact et compactement isotopes à l'identité qui préservent les feuilles du feuilletage F_k . Construisons par récurrence sur k une application définie et continue sur un voisinage de l'identité $\phi_k : \text{Diff}_0^\infty(U) \rightarrow \text{Diff}_0^\infty(U, F_k)$

telle que $\phi_k(Id_U) = Id_U$ et telle que, pour un difféomorphisme f suffisamment proche de l'identité :

$$p_k \circ f \circ \phi_1(f)^{-1} \circ \phi_2(f)^{-1} \circ \dots \circ \phi_k(f)^{-1} = p_k,$$

où p_k désigne la projection sur les k premières coordonnées. Supposons $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ construites. Posons, pour un difféomorphisme f de $\text{Diff}_0^\infty(U)$ proche de l'identité et pour x dans U :

$$f \circ \phi_1(f)^{-1} \circ \phi_2(f)^{-1} \circ \dots \circ \phi_k(f)^{-1}(x) = (x_1, \dots, x_k, f_{k+1}(x), f_{k+2}(x), \dots, f_n(x)).$$

On définit alors ϕ_{k+1} par :

$$\forall x \in U, \phi_{k+1}(f)(x) = (x_1, \dots, x_k, f_{k+1}(x), x_{k+2}, \dots, x_n)$$

pour f suffisamment proche de l'identité, ce qui conclut la récurrence. Les applications ϕ_k ainsi construites sont C^∞ , valent l'identité en l'identité et vérifient :

$$f = \phi_n(f) \circ \phi_{n-1}(f) \circ \dots \circ \phi_1(f).$$

Fixons un entier k . On considère comme prévu un plongement :

$$\psi_k : \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow V$$

qui envoie $(-1, 1)^{k-1} \times (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \times (-1, 1)^{n-k}$ sur U et le feuilletage constitué des droites parallèles au k -ième axe de coordonnées de $(-1, 1)^{k-1} \times (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \times (-1, 1)^{n-k}$ sur le feuilletage constitué des droites parallèles au k -ième axe de coordonnées de U . Le difféomorphisme $\psi_k^{-1} \circ \phi_k(f) \circ \psi_k$ est alors identifiable à une famille (à $n - 1$ paramètres) de difféomorphismes du cercle. On écrit pour des éléments (x, t, y) de $\mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$\psi_k^{-1} \circ \phi_k(f) \circ \psi_k(x, t, y) = (x, g(x, y)(t), y),$$

où $g : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est une application continue qui vérifie :

$$g(x, y) = Id$$

lorsque $(x, y) \notin [-1, 1]^{n-1}$.

Il reste à écrire $g(x, y)$ en tant que produit de commutateurs d'éléments de $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ proches de l'identité qui dépendent de manière C^∞ de x et de y , dont les dérivées par rapport à x et à y sont petites et qui valent l'identité lorsque $(x, y) \notin (-2, 2)^{n-1}$.

Le lemme suivant est dû à Haller et Teichmann (voir [7], exemple 3) :

LEMME 7. — *Pour tout voisinage W' l'identité dans $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, il existe un voisinage W de l'identité dans $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, des difféomorphismes A, B et C de W' et des applications*

$$a, b, c : W \rightarrow \text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

de classe C^∞ , qui valent l'identité en l'identité, et vérifient, pour tout h de W :

$$h = [a(h), A][b(h), B][c(h), C].$$

A.0.0.1. *Remarque.* — La démonstration de ce résultat repose sur le théorème d'Hermann pour les difféomorphismes du cercle. De plus, on peut supposer que A, B, C sont des éléments de $PSL_2(\mathbb{R}) \subset \text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

A.0.0.2. *Fin de la démonstration du théorème.* — Notons $\lambda : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ une application C^∞ à support dans $(-2, 2)^{n-1}$ qui vaut 1 sur un voisinage de $[-1, 1]^{n-1}$. On choisit alors un voisinage W' de l'identité dans $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ de sorte que, pour tout difféomorphisme D de W' , si l'on note \tilde{D} l'application définie par :

$$\forall (x, t, y) \in \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-k}, \quad \tilde{D}(x, t, y) = (x, \lambda(x, y)D(t) + (1 - \lambda(x, y))t, y),$$

alors \tilde{D} est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-k}$ à support compact et $\psi_k \circ \tilde{D} \circ \psi_k^{-1}$ appartient au voisinage Ω de l'identité dans $\text{Diff}_0^\infty(V)$.

Lorsque f est suffisamment proche de l'identité, $g(x, y)$ appartient, pour tous x et y , au voisinage W de l'identité donné par le lemme précédent. On obtient alors que, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$g(x, y) = [a(g(x, y)), A][b(g(x, y)), B] \circ [c(g(x, y)), C]$$

puis que

$$g(x, y) = [a(g(x, y)), \tilde{A}(x, y)][b(g(x, y)), \tilde{B}(x, y)] \circ [c(g(x, y)), \tilde{C}(x, y)]$$

En effet, sur $[-1, 1]^{n-1}$, on a $\tilde{A}(x, y) = A$, $\tilde{B}(x, y) = B$ et $\tilde{C}(x, y) = C$, et, hors de $[-1, 1]^{n-1}$, les deux membres de l'égalité valent l'identité. Ainsi, le difféomorphisme $\psi_k^{-1} \circ \phi_k(f) \circ \psi_k$ s'écrit comme produit de 3 commutateurs d'éléments de Ω , lorsque f est suffisamment proche de l'identité. Un difféomorphisme f proche de l'identité s'écrit alors comme produit de $3n$ commutateurs d'éléments de Ω , ce qui démontre le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. AVILA — « Distortion elements in $\text{Diff}^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ », prépublication [arXiv:0808.2334](https://arxiv.org/abs/0808.2334).
- [2] A. BANYAGA — *The structure of classical diffeomorphism groups*, Mathematics and its Applications, vol. 400, Kluwer Academic Publishers Group, 1997.
- [3] A. BOUNEMOURA — *Simplicité des groupes de transformations de surfaces*, Ensaios Matemáticos, vol. 14, Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.
- [4] D. CALEGARI & M. H. FREEDMAN — « Distortion in transformation groups », *Geom. Topol.* **10** (2006), p. 267–293.

- [5] J. FRANKS – « Distortion in groups of circle and surface diffeomorphisms », in *Dynamique des difféomorphismes conservatifs des surfaces : un point de vue topologique*, Panor. Synthèses, vol. 21, Soc. Math. France, 2006, p. 35–52.
- [6] J. FRANKS & M. HANDEL – « Distortion elements in group actions on surfaces », *Duke Math. J.* **131** (2006), p. 441–468.
- [7] S. HALLER & J. TEICHMANN – « Smooth perfectness through decomposition of diffeomorphisms into fiber preserving ones », *Ann. Global Anal. Geom.* **23** (2003), p. 53–63.
- [8] ———, « Smooth perfectness for the group of diffeomorphisms », prépublication [arXiv:math/0409605](https://arxiv.org/abs/math/0409605).
- [9] R. C. KIRBY – « Stable homeomorphisms and the annulus conjecture », *Ann. of Math.* **89** (1969), p. 575–582.
- [10] F. QUINN – « Ends of maps. III. Dimensions 4 and 5 », *J. Differential Geom.* **17** (1982), p. 503–521.