Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

NOMBRES SELF NORMAUX

Anne Bertrand-Mathis

Tome 141
Fascicule 1

2013

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 25-33

Bull. Soc. math. France
141 (1), 2013, p. 25–33

NOMBRES SELF NORMAUX

PAR ANNE BERTRAND-MATHIS

RÉSUMÉ. — Nous inspirant de la construction de Champernowne d'un nombre normal en base 10 nous construisons un ensemble de nombres "self-normaux" au sens de Schmeling ; cet ensemble est non dénombrable et dense dans $[1, \infty[$.

ABSTRACT (*Self-normal numbers*). — Using a method of Champernowne we propose a construction of self-normal numbers in the sense of Schmeling ; these numbers are dense in $[1, \infty[$ and form a non enumerable set.

1. Introduction

Étant donné un nombre $\beta > 1$ on peut écrire tout réel x de $[0, 1[$ en base β sous la forme $x = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{\beta^n}$ avec les conditions de Rényi : $x_n \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \geq 0$, $\sum_{i>n} \frac{x_i}{\beta^i} < \frac{1}{\beta^n}$; cette écriture est unique ; la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est appelée β-développement de x et notée $d_\beta(x)$ [7].

Désignons par $[x]$ et $\{x\}$ les parties entières et fractionnaires d'un réel x ; on a $x_i \in \{0, 1, \ldots, [\beta]\}$. Soit T_β la transformation de $[0, 1[$ dans lui-même : $x \mapsto \{\beta x\}$; x_i est alors égal à $[\beta(T^i_\beta(x))]$ et $T^i_\beta = \sum_{k\geq 1} \frac{x_{i+k}}{\beta^k}$ a pour β-développement $(x_{i+1}x_{i+2}x_{i+3}\cdots)$; la transformation T_β conserve une unique mesure

Texte reçu le 16 décembre 2009, révisé le 26 novembre 2010, accepté le 20 mai 2011.

ANNE BERTRAND-MATHIS

Classification mathématique par sujets (2010). — 11K, 37D..

Mots clefs. — Nombres normaux, points génériques, numération, systèmes dynamiques symboliques, codes préfixes.

© Société Mathématique de France

μ_β absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue que nous appellerons mesure de Parry [8] ; cette mesure est l'unique mesure T_β-invariante d'entropie maximale $\log\beta$ sur $[0,1]$.

Définition 1.1. — On appelle (improprement) β-développement de 1 l'unique suite d'entiers $(a_n)_{n\geq 1}$ notée $d_\beta(1)$ qui vérifie $1=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{\beta^n}$ ainsi que les conditions de Rényi sauf au rang $n=1$: a_1 est égal à $[\beta]$ et $(a_2a_3\dots)$ est le β-développement de $\{\beta\}$; la suite $d_\beta(1)$ est aussi appelée β-développement de β car $\beta=a_1+\sum_{n\geq 1}\frac{a_{n+1}}{\beta^n}$.

C'est au β-développements des nombres β que nous nous intéresserons.

Un sous ensemble de $[1,\infty[$ est dit résiduel s'il contient une intersection dénombrable d' ouverts denses ; le complémentaire d'un ensemble résiduel est dit maigre.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ d'un espace métrique E est répartie selon une mesure borélienne μ sur E si pour toute fonction continue de E dans $\mathbb{R}$ on a $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leq N}(f(u_n))=\mu(f)$.

Définition 1.2. — Nous dirons qu'un nombre β est autonormal si la suite $\left\{T_\beta^n(1)\right\}$est répartie selon la mesure μ_β.

Schmeling [8] a montré que pour presque tout β au sens de Lebesgue la suite $(T_\beta^n(1))_{n\geq 1}$ est dense dans $[0,1[$ (l'ensemble des nombres possédant cette propriété est résiduel) et que l'ensemble des nombres autonormaux (ou encore self-normaux), est un ensemble maigre dont la mesure de Lebesgue est aussi égale à 1.

Dans [1] les auteurs remarquent que si presque tout nombre supérieur à 1 est autonormal on n'en connait aucun exemple.

Nous allons contruire pas à pas des nombres self-normaux selon une méthode Champernownesque (le nombre de Champernowne en base 10 est $x=0,123\dots9101112\dots9899100101\dots$; il est normal en base 10 [5] (et il est transcendant)) et montrer le résultat suivant :

Théorème 1.3. — *Le procédé décrit dans la partie* 4 *permet de construire un ensemble non dénombrable et dense de nombres self-normaux.*

Pour ce faire il nous faut plus d'explications sur les β-développements.

2. Le β-shift

Parry [6] donne la description que voici des β-développements, du β-shift et de la mesure μ_β (voir aussi [2]).

Étant donné deux suites infinies $x = (x_n)_{n\geq 1}$et y=$(y_n)_{n\geq 1}$ on dira que $x < y$ s'il existe un entier k tel que $x_1 \dots x_k < y_1 \dots y_k$ pour l'ordre lexicographique habituel ; ainsi $(32313131\dots) < (323131320000\dots)$.

Proposition 2.1 ([6]). — *Une suite $a = (a_n)_{n\geq 1}$ est le β-développement d'un nombre β si et seulement si la suite a vérifie, pour tout $n > 1$ $(a_n a_{n+1} \dots) < (a_1 a_2 \dots)$ On a alors $a_1 = [\beta]$ et si deux suites a et b avec $a < b$ sont les β-développements de deux nombres β, disons β_a et β_b, alors $\beta_a < \beta_b$.*

En particulier une suite a qui se termine par des zéros : $a = (a_1 \dots a_n 0000\dots)$ où a_n est non nul est le β-développement d'un nombre β si et seulement si pour l'ordre lexicographique usuel $a_2 a_3 \dots a_n \leq a_1 a_2 \dots a_{n-1}$; $a_3 a_4 \dots a_n \leq a_1 a_2 \dots a_{n-2}$;... ; $a_{n-1} a_n \leq a_1 a_2$; $a_n \leq a_1$; on dit alors que le β-développement de β est $(a_1 \dots a_k)$; l'ensemble des nombres β ainsi obtenus, dits Nombres de Parry simples, est dense dans $[1, \infty[$.

Corollaire 2.2. — *Une suite $(a_1 a_2 \dots)$ qui ne se termine pas par des zéros est le β-développement d'un nombre β si et seulement si, pour tout k, la suite $(a_1 \dots a_k)$ est le β_k-développement d'un nombre β_k ; β est alors la limite croissante des β_k (c'est encore vrai s'il existe une sous suite infinie croissante m_k de $\mathbb{N}$ telle que la suite $(a_1 \dots a_{m_k})$ soit le β_k-développement d'un nombre β_k).*

Exemple : la suite $21111\dots$ est le β-développement d'un nombre β ; les suites qui sont des développements sont celles qui contiennent des 0,1 et 2 et où un 2 est suivi d'un nombre fini de 1 suivi d'un zéro. Pour tout k la suite $a_k = (2(1)^k(0)^\omega)$ définit un β-nombre simple β_k et β est la limite croissante des β_k.

Définition 2.3. — Étant donné un nombre β de β-développement $(a_n)_{n\geq 1}$, les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ qui sont le β-développement d'un nombre $x \in [0, 1[$ sont les suites qui vérifient pour tout $k \geq 1$ $(x_k x_{k+1} \dots) < (a_1 a_2 \dots)$; soit Y leur ensemble.

Étant donné un nombre β de β-développement $(a_n)_{n\geq 1}$ nous dirons qu'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$est admissible en base β si pour tout $k \geq 1$ $a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots \leq a_1 a_2 a_3 \dots$; soit X_β leur ensemble.

Y est inclus dans $A = \{0, 1, \dots, [\beta]\}^{\mathbb{N}} = \{0, 1, \dots, a_1\}^{\mathbb{N}}$; la fermeture de Y pour la topologie produit de la topologie discrète sur A est égale à X_β ; on l'appelle le β-shift. X_β est muni de la transformation $T : (x_1 x_2 \dots) \longmapsto (x_2 x_3 \dots)$; lorsque $(x_1 x_2 \dots)$ est le β-développement de $x \in [0, 1[$, $(x_2 x_3 \dots)$

est celui de $\{\beta x\}$. Notons que le β-développement de β n'est pas dans Y (il est égal à lui meme et non strictement inférieur).

Toute suite finie (appelée mot) $t_1 \dots t_n$ apparaissant dans au moins un β-développement est dite *mot admissible en base* β et on note L_β l'ensemble de ces mots ; pour $(21111(0)^\omega)$ par exemple le mot 111 est admissible, 210211 aussi mais 0022 ne l'est pas.Une suite infinie est admissible si et seulement tous les mots finis qu'elle contient sont admissibles.

Soit f l'application de X_β dans $[0,1]$ qui à une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ associe $\sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{\beta^n}$; $f \circ T = T_\beta \circ f$ et l'image inverse de la mesure μ_β sur $[0,1]$ est une mesure borélienne T-invariante sur X_β que nous noterons $\bar{\mu}_\beta$.

Proposition 2.4. — *Étant donné un nombre β de β-développement $(a_n)_{n\geq 1}$, dire que la suite $\left(T_\beta^n(1)\right)$ est répartie selon la mesure μ_β (et donc que β est autonormal) équivaut à dire que chaque mot $t_1 \dots t_k$ admissible en base β apparait dans la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ avec la fréquence $\bar{\mu}_\beta(E(t_1 \dots t_k))$ où $E(t_1 \dots t_k) = \{(x_n)_{n\geq 1} \in X_\beta\,;\, x_1 \dots x_k = t_1 \dots t_k\}$ ([4, 2]).*

3. Codes préfixes

Étant donné un alphabet A nous appellerons mot sur A une suite finie $x_1 \dots x_k$ sur A ; la *longueur d'un mot* est le nombre de lettres qu'il contient (le mot vide est celui qui ne contient aucune lettre) et le concaténé de deux mots $x_1 \dots x_h$ et $y_1 \dots y_k$ est le mot $x_1 \dots x_h y_1 \dots y_k$; un mot u est dit *préfixe* du mot w s'il existe un mot v tel que $uv = w$ et il est dit *suffixe* de w s'il existe v tel que $vu = w$.

Un ensemble C de mots non vides sur A est dit *code préfixe* si aucun mot de C n'est préfixe d'un autre mot de C ; si $u_1 \dots u_l = v_1 \dots v_m$ ou les u_i et v_j sont tous dans le code alors $l = m$ et $u_1 = v_1, \dots, u_l = v_l$. L'ensemble des suites $(t_1 t_2 \dots)$ qui s'écrivent comme produit d'un suffixe éventuellement vide v d'un mot du code suivi d'une suite infinie de mots du code est un sous ensemble T-invariant de $A^{\mathbb{N}}$ dont la fermeture est un système dynamique. On appelé *message* du code C un produit fini de mots de C ; la longueur d'un message est le nombre de lettres qu'il contient, c'est la somme des longueur des mots du code qui le composent(et non pas le nombre de ces mots). Soit a_n le nombre de mots de longueur n du code ; s'il est borné il existe un nombre réel, disons β, tel que $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\beta^n} = 1$ et le système dynamique associé au code est muni d'une mesure ν ergodique d'entropie $\log \beta$ [4] qui possède la propriété suivante :

Proposition 3.1 ([3]). — *Soit un code C, a_n le nombre de mots de longueur n du code ; supposons a_n bornée ; soit β le nombre réel tel que $1 = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\beta^n}$; si nous alignons les messages de longueur 1 du code,, puis ceux de longueur*

2, puis ceux de longueur 3 et ainsi de suite pour former une suite de lettres $e = (e_n)_{n\geq 1}$*, alors la suite* $(T^n(e))_{n\geq 1}$ *obtenue est répartie selon la mesure* ν *d'entropie* $\log\beta$ *dans le système dynamique associé au code* C*.*

PROPOSITION 3.2 ([2]). — *Soit* β *un nombre réel supérieur à* 1*, et soit* $(a_1a_2\dots a_n\dots)$ *le* β*-développement de* β *; soit* C_β *l'ensemble des mots*

$$\{0,1,\dots,(a_1-1)\,;\,a_10,a_11,\dots a_1(a_2-1)\,;\,a_1a_20,\dots,a_1a_2(a_3-1)\dots\}$$

$= \{a_1a_2\dots a_{k-1}h\ ;\ 0\leq h<a_k\ ;\ k=1,2,\dots\}$ *avec la convention que si* $a_h = 0$ *il n'y a pas de mot de longueur* h *dans* C_β*.*

L'ensemble C_β *forme un code préfixe sur l'alphabet* $\{0,1,\dots,[\beta]\}$ *; pour tout* n *il possède* a_n *mots de longueur* n *et* $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{\beta^n}=1$

Le langage associé au code C_β *est égal à l'ensemble des mots admissibles en base* β *et le* β*-shift* X_β *est égal au système dynamique associé au code* C_β*.*

De plus toute suite de X_β s'écrit comme un produit de concaténation $c_1c_2c_3\dots$ de mots du code [2] (c'est une particularité du β shift). Comme les a_n sont bornés par β la mesure ν définie à la proposition 2 est bien définie ; nous savons par ailleurs que le β-shift n'admet qu'une seule mesure d'entropie $\log\beta$, à savoir $\bar\mu_\beta$, les mesures ν et $\bar\mu_\beta$ sont donc les memes et la Proposition 4 devient :

PROPOSITION 3.3 ([3]). — *Soit* β *un nombre réel supérieur à 1, soit* C_β *le code associé ; si nous alignons les messages de longueur 1, puis 2, puis 3 ... du code* C_β*, nous obtenons une suite* $e=(e_n)_{n\geq 1}$ *telle que* $(T^n(e))_{n\geq 1}$ *soit répartie selon la mesure* $\bar\mu_\beta$ *; donc le nombre* $\sum_{n\geq 1}\frac{e_n}{\beta^n}$ *appartient à* $D(\beta)$*.*

Notons W_n le nombre de messages de longueur n du code C_β et soit l une constante positive ; la conclusion de la proposition 3.3 reste vraie si l'on aligne non pas tous les messages de longueur n mais pour chaque n un nombre $V_n \geq lW_n$ de messages distincts choisis comme on le voudra.

4. Résultats et preuves

THÉORÈME 4.1. — *Choisissons un nombre* $h=h_0$ *; l'étape* 0 *consiste à choisir une suite* $(a_1\dots a_{h_0})$ *qui est le* β_0*-développement d'un nombre de Parry simple* β_0 *; l'étape* 1 *consite à écrire après* $a_1a_2\dots a_{h_0}$ *les messages de longueur* $h=h_0$ *du code* C_{β_0}*, dans l'ordre qu'on voudra mais en commençant par le message* $0\dots0=(0^h)$ *pour obtenir une suite* $a_1\dots a_{h_1}$ *; alors la suite* $a_1\dots a_{h_1}$ *est le* β_{1-}*développement d'un nombre de Parry simple* β_1 *; écrivons à sa suite les messages de longueur* $(h+1)$ *du code* C_{β_1} *en commençant par* 0^{h+1} *puis dans l'ordre qu'on voudra ; on obtient une suite* $a_1\dots a_{h_2}$ *; cette suite est le* β_2*-développement d'une nombre de Parry* β_2 *et nous en sommes à l'étape* 2*. Itérant* *ce procédé nous obtenons une suite infinie $a = (a_n)_{n\geq 1}$ qui est le β-développement d'un nombre β limite des β_k obtenus à la k-ème étape ; de plus la suite $(T^n a)_{n\geq 1}$ est répartie ans le β-shift selon la mesure de Parry $\bar{\mu}_\beta$.*

Ainsi β est self-normal

COROLLAIRE 4.2. — *L'ensemble des nombres autonormaux obtenus par ce procédé est non dénombrable et dense dans* $[1, \infty[$.

Exemple : partons de 21 ; le code est $\{0, 1, 20\}$ et les messages de longueur 2 sont $\{00, 01, 10, 11, 20\}$; $a_1 \dots a_{k_2} = 210001101120$ (mais on peut aussi prendre 210020100111) ; les messages de longueur 3 pour β_2 dont le β_{2-} développement est 210001101120 sont $000, 001, 010, 011, 020, 100, 101, 110, 111, 120, 200, 201, 210$ car les mots du code de longueur inférieure ou égale à 3 qui interviennent dans les messages de longueur 3 sont $0, 1, 20$ et la suite $a_1 \dots a_{k_3}$ est, en mettant les messages dans l'ordre croissant en séparant les messages par des points :

21.00.01.10.11.20.000.001.010.011.020.100.101.110.111.120.200.201

Si nous avions commencé avec 21021 pour qui les messages de longueur 1 sont 0 et 1 en mettant 1 avant 0 nous obtiendrions 2102110 qui n'est pas le β-développement d'un nombre β (211 ne va pas) ; c'est pour éviter ce problème de recollement que le premier message de longueur k est toujours 0^k.

Preuve du Théorème. — Il nous faut montrer que la suite $a = (a_n)_{n\geq 1}$ vérifie les conditions de Parry : pour tout $h \geq 1$ et tout $r \geq 0$, $a_h a_{h+1} \cdots < a_1 a_2 \dots$, et que la suite $(T^n(a))_{n\geq 1}$ est répartie selon la mesure $\bar{\mu}_\beta$ où β est le nombre réel dont le β-développement est a.

Pour montrer la première assertion nous utiliserons les remarques suivantes dont les preuves sont immédiates :

REMARQUE 4.3. — Si une suite $(x_1 x \dots)$ est admissible en base β alors pour tout k $(x_1 \dots x_k (0)^\omega)$ l'est aussi ; si une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définit le β-développement d'un nombre β alors pour tout k il en va de meme de la suite $(a_1 \dots a_k (0)^\omega)$ (cf. Déf.3 et Prop.1).

REMARQUE 4.4. — Si un mot $x_1 \dots x_k$ ou une suite infinie $(x_1 x_2 \dots)$ est admissible en base β de β-développement $(a_1 \dots a_n)$ elle est admissible dans toute base $\beta' > \beta$,c'est à dire dans toute base β' qui admet un β'-développement de la forme $(a_1 \dots a_n b_1 \dots b_r (0)^\omega)$ ou bien $(a_1 \dots a_n b_1 \dots b_r b_{r+1} \dots)$. (cf.Déf.1)

REMARQUE 4.5. — Tous les nombres β dont le β-développement commence par le meme mot $(a_1 \dots a_n)$ admettent les memes messages de longueur n ; ce sont les message du code du nombre β de β-développement $(a_1 \dots a_n (0)^\infty)$.(cf. Prop 4).

REMARQUE 4.6. — Lorsque β admet un β-développement fini $(a_1 \dots a_k)$ une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est admissible si et seulement si pour tout $i \geq 0$ tous les mots de longueur k $(x_{i+1} \dots x_{i+k})$ sont dans L_β (ce qui équivaut à dire que pour tout i$\geq$ 0 $x_i \dots x_{i+k} < a_1 \dots a_k$ pour l'ordre lexicographique habituel (cf.fin de la Prop.1).

REMARQUE 4.7. — Lorsque β admet un β-développement infini $(a_1 \dots a_n \dots)$, si pour tout $n \geq 1$ le mot $x_1 \dots x_n$ est admissible en base $(a_1 \dots a_n)$ alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est admissible en base β(cf. Déf.3) ; ou encore s'il existe une sous suite m_n de $\mathbb{N}$ telle que pour tout et tout $n\geq$ 1 $x_1 \dots x_{m_n}$ est admissible en base $(a_1 \dots a_{m_n})$, alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est admissible en base β (mais pour cela il suffit que les $x_1 \dots x_{m_n}$ soient admissibles en base $(a_1 \dots a_n)$ d'après la remarque 2).

REMARQUE 4.8. — Si un mot $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_h$ est admissible en base β de β-développement $(a_1 \dots a_n)$ alors ce mot définit le β_1 développement d'un Nombre de Parry simple $\beta_1 > \beta$ (voir Prop.1).

Preuve de la première assertion. — Supposons qu'à l'étape k nous ayons construit une suite finie $a_1 \dots a_{h_k}$ qui est le β_k-développement d'un nombre β_k : c'est l'hypothèse H_k ; la suite $a_1 \dots a_{h_k} a_{h_k+1} \dots a_{h_{k+1}}$ est obtenue en concaténant les messages de longueur $h + k$ du langage L_{β_k} en commençant par $(0)^{h+k}$.

Vérifions que les mots de longueur $h + k$ sont admissibles dans la base $(a_1 \dots a_{h_k})$; d'après la remarque 2, il suffit de vérifier qu'ils le sont dans la base $(a_1 \dots a_{k+h})$; or le morceau de suite $a_{h_k} \dots a_{h_{k+1}}$ formé en concaténant les messages de longueur $h+k$ de $(a_1 \dots a_{h_k})$ est formé en concaténant les messages de $(a_1 \dots a_{h+k})$ d'après la remarque 3 ; les mots de longueur $(h + k)$ tout entiers contenus dans ce morceau sont donc admissible en base$(a_1 \dots a_{h+k})$; les mots tout entiers contenus dans le morceau $a_1 \dots a_{h_k}$ sont aussi admissibles dans la base $(a_1 \dots a_{h+k})$ (remarque 2) ; il faut vérifier que les mots de longueur $(h + k)$ à cheval sur les deux morceaux précédents sont admissibles en base $(a_1 \dots a_{h+k})$; ce sont des suffixes de $a_1 \dots a_{h_k}$ suivis de zéros, ils sont donc bien admissibles ; c'est pour cela que l'on a placé le message 0^{h+k} en tete des messages de longueur $h + k$ concaténée à $a_1 \dots a_{h_k}$; tous les mots de longueur $h + k$ de $a_1 \dots a_{h_{k+1}}$ sont donc admissibles en base $a_1 \dots a_{h+k}$; donc d'après la remarque 4 la suite finie $(a_1 \dots a_{h_{k+1}})$ est admissible en base $(a_1 \dots a_{h+k})$ car tous ses sous mote de longueur $h + k$ sont admissible dans la base qui comprends $h + k$ lettres ; enfin d'après la remarque 2 elle est admissible dans la base $(a_1 \dots a_{h_{k+1}}) = \beta_{k+1}$.

Comme l'hypothèse H_0 est vraie, l'hypothèse est vraie pour tous les rangs et la suite infinie $(a_n)_{n\geq 1}$ est le β-développement d'un nombre β qui est la limite croissante des β_k d'après la remarque 5.

Montrons que la suite $(T^n(a))_{n\geq 1}$ est répartie selon la mesure $\bar{\mu}_\beta$: en raison de la remarque 3 nous avons aligné les messages de longueur h, puis $h+1$, puis $h+2\dots$ du code C_β ; la proposition 3.3 énoncée à la fin du paragraphe 3 montre que a est normal en base β (le fait que l'on aligne les messages à partie de la longueur h n'a pas d'effet sur la répartition).

Remarque : on aurait pu aligner, non pas chacun des W_n messages du code, mais un nombre $V_n \geq lW_n$ de messages distincts où $l \in]0,1[$ désigne une constante positive et on aurait encore obtenu un élément de $D(\beta)$. □

Preuve du corollaire. — L'ensemble des Nombres de Parry simples est dense dans $[1,\infty[$ et le nombre self-normal construit à partie de $\beta = a_1 \dots a_k$ est supérieur à β et inférieur à $\beta + \frac{1}{\beta^k}$ d'où la densité ; l'ensemble est non dénombrable car à chaque étape on peut choisir l'ordre des messages.

Précisons que si nous construisons des nombres β dont le β-développement est normal en base β, il s'agit là de normalité au sens des chiffres : on dit que x est normal (au sens des chiffres) en base β si la suite des chiffres du β-développement de x est répartie selon la mesure $\overline{\mu_\beta}$, ce qui équivaut à dire que la suite $\left\{T_\beta^n(x)_{n\geq 1}\right\}$ est répartie selon la mesure μ_β ; on appelle $D(\beta)$ l'ensemble de ces nombres. Comme T_β est ergodique presque tout x est dans $D(\beta)$ au sens des mesures équivalentes μ_β etLebesgue.

Il existe une autre notion de normalité : on dit qu'un nombre x est normal en base β (au sens de l'équirépartition modulo un) si la suite $(x\beta^n)_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo un ; on appelle $B(\beta)$ l'ensemble de ces nombres ; il est aussi de mesure de Lebesgue 1.

Lorsque $x = \frac{x_1}{\beta} + \frac{x_2}{\beta^2} + \dots$ les nombres $x\beta^n = x_1\beta^{n-1} + \cdots + x_n + \frac{x_{n+1}}{\beta} + \frac{x_{n+2}}{\beta^2} + \dots$ et $T_\beta^n(x) = \frac{x_{n+1}}{\beta} + \frac{x_{n+2}}{\beta^2} + \dots$ diffèrent de $x_1\beta^{n-1} + \cdots + x_n$; si β est entier ceci est aussi entier et $B(\beta)$ et $D(\beta)$ sont égaux ; on sait que si β est un nombre de Pisot alors $D(\beta) \subset B(\beta)$ et que l'inclusion inverse est fausse ; on sait aussi que lorsque la suite $(\beta^n)_{n\geq 1}$ est elle meme équirépartie modulo un, ce qui est presque toujours vrai, alors $B(\beta)$ n'est pas inclus dans $D(\beta)$ (dans ce cas si par exemple les chiffres du β-développement de x sont indépendants alors x est dans $B(\beta)$ mais pas dans $D(\beta)$) ; il est probable qu'alors $D(\beta)\diagdown B(\beta)$ est non vide aussi mais cela n'et pas démontré. Bien que l' ensemble $B(\beta)$ soit de mesure pleine et résiduel, la recherche de nombres appartenant à $B(\beta)$ n'a guère abouti sauf dans le cas des nombres de Pisot. Nous ignorons si l' assertion $\beta \in D(\beta)$ implique $\beta \in B(\beta)$. Les nombres normaux au sens des chiffres que l'on sait construire le sont généralement par des méthodes analogues à la construction de Champernowne mais il existe une intéressante construction due à Ville, selon un procédé qui n'est pas automatique comme celui de Champernowne mais qui est très efficace.

Kurt Mahler a montré que le nombre de Champernowne en base 2 est transcendant, en calculant certaine sommes partielles de la série qui le définit et en appliquant un théorème de Schneider ; lorsqu'on généralise la construction de Champernowne, le calcul de sommes partielles, qui permettrait peut etre d'appliquer Roth ou plutot les théorèmes de W. Schmidt, apparait très difficile ; on ignore toujours si le Champernombre en base $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est transcendant. Nous ne savons pas reconnaitre si certains des nombres autonormaux trouvés sont transcendants et les résultats concernant les suites automatiques ne sont d'aucun secours. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Adamczewski & Y. Bugeaud – « Dynamics for β-shifts and Diophantine approximation », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **27** (2007), p. 1695–1711.

[2] A. Bertrand-Mathis – « Développement en base θ ; répartition modulo un de la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$; langages codés et θ-shift », *Bull. Soc. Math. France* **114** (1986), p. 271–323.

[3] ______, « Points génériques de Champernowne sur certains systèmes codes ; application aux θ-shifts », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **8** (1988), p. 35–51.

[4] F. Blanchard & G. Hansel – « Systèmes codés », *Theoret. Comput. Sci.* **44** (1986), p. 17–49.

[5] D. G. Champernowne – « The Construction of Decimals Normal in the Scale of Ten », *J. London Math. Soc.* **8** (1933), p. 254–260.

[6] W. Parry – « On the β-expansions of real numbers », *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **11** (1960), p. 401–416.

[7] A. Rényi – « Representations for real numbers and their ergodic properties », *Acta Math. Acad. Sci. Hungar* **8** (1957), p. 477–493.

[8] J. Schmeling – « Symbolic dynamics for β-shifts and self-normal numbers », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **17** (1997), p. 675–694.