

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

LE THÉORÈME DE BERTINI EN FAMILLE

Olivier Benoist

Tome 139
Fascicule 4

2011

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 555-569

LE THÉORÈME DE BERTINI EN FAMILLE

PAR OLIVIER BENOIST

RÉSUMÉ. — On majore la dimension de l'ensemble des hypersurfaces de $\mathbb{P}^N$ dont l'intersection avec une variété projective intègre fixée n'est pas intègre. Les majorations obtenues sont optimales. Comme application, on construit, quand c'est possible, des hypersurfaces dont les intersections avec toutes les variétés d'une famille de variétés projectives intègres sont intègres. Le degré des hypersurfaces construites est explicite.

ABSTRACT (*Bertini's theorem in family*). — We give upper bounds for the dimension of the set of hypersurfaces of $\mathbb{P}^N$ whose intersection with a fixed integral projective variety is not integral. Our upper bounds are optimal. As an application, we construct, when possible, hypersurfaces whose intersections with all the varieties of a family of integral projective varieties are integral. The degree of the hypersurfaces we construct is explicit.

1.

On fixe K un corps de caractéristique quelconque, qui sera systématiquement sous-entendu. Par exemple, $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}_K^N$. Par sous-variété de $\mathbb{P}^N$, on entendra sous-schéma fermé géométriquement intègre de $\mathbb{P}^N$. On note $\mathcal{H}_e = \mathcal{H}_{e,N} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(e)))$ l'espace des hypersurfaces de degré e de $\mathbb{P}^N$.

Texte reçu le 5 novembre 2009, accepté le 19 mai 2010.

OLIVIER BENOIST, DMA - École Normale Supérieure, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France • *E-mail* : Olivier.Benoist@ens.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 14N05, 14J70.

Mots clefs. — Géométrie projective, hypersurfaces, théorèmes de Bertini.

Si $X \subset \mathbb{P}^N$ est une sous-variété, on notera $\mathcal{F}_e^{\text{int}}(X)$ (resp. $\mathcal{F}_e^{\text{igr}}(X)$) le sous-ensemble de $\mathcal{H}_e$ constitué des hypersurfaces dont l'intersection avec X n'est pas géométriquement intègre de codimension 1 dans X (resp. n'est pas géométriquement irréductible et génériquement réduite de codimension 1 dans X). Le théorème de Bertini (voir par exemple [9] I 6.10) montre que si $\dim(X) \geq 2$, $\mathcal{F}_e^{\text{int}}(X)$ est strictement inclus dans $\mathcal{H}_e$.

Pour les questions que nous allons étudier, la propriété « irréductible et génériquement réduit » se comporte mieux que l'intégrité. D'autre part, pour faire fonctionner des arguments de déformation, nous aurons besoin de savoir que ces mauvais lieux sont fermés. C'est pourquoi nous allons utiliser la variante suivante du théorème de Bertini, qui fait l'objet de la première partie de cet article.

THÉORÈME 1.1. — *Soit X une sous-variété de $\mathbb{P}^N$ de dimension ≥ 2 . Alors $\mathcal{F}_e^{\text{int}}(X)$ et $\mathcal{F}_e^{\text{igr}}(X)$ sont des fermés stricts de $\mathcal{H}_e$.*

Quand K est infini, une conséquence de ce théorème est qu'il existe des hypersurfaces dans le complémentaire de $\mathcal{F}_e^{\text{int}}(X)$ (resp. $\mathcal{F}_e^{\text{igr}}(X)$). On cherche dans cet article à obtenir une version « en famille » de ce théorème. On se pose plus précisément la question suivante :

QUESTION 1.2. — *Étant donnée une famille de sous-variétés de dimension ≥ 2 de $\mathbb{P}^N$, peut-on trouver une hypersurface dont les intersections avec toutes les variétés de cette famille soient géométriquement intègres (resp. géométriquement irréductibles et génériquement réduites) ? Si la réponse est positive, peut-on trouver une telle hypersurface de petit degré ?*

En fait, cela revient à contrôler, pour chaque variété X de la famille, la codimension de $\mathcal{F}_e^{\text{int}}(X)$ (resp. $\mathcal{F}_e^{\text{igr}}(X)$) dans $\mathcal{H}_e$. Plus précisément, il faut répondre à la question suivante :

QUESTION 1.3. — *La codimension de $\mathcal{F}_e^{\text{int}}(X)$ (resp. $\mathcal{F}_e^{\text{igr}}(X)$) dans $\mathcal{H}_e$ tend-elle vers l'infini avec e ?*

Dans la deuxième partie de cet article, on obtient des minoration optimales de $\text{codim}_{\mathcal{H}_e}(\mathcal{F}_e^{\text{igr}}(X))$ en fonction de e et de $\dim(X)$. En particulier, la réponse à la question 1.3 pour $\mathcal{F}_e^{\text{igr}}(X)$ est positive. L'énoncé est le suivant :

THÉORÈME 1.4. — *Soit X une sous-variété de $\mathbb{P}^N$ de dimension $n \geq 2$. Alors :*

$$\text{codim}_{\mathcal{H}_e}(\mathcal{F}_e^{\text{igr}}(X)) \geq \begin{cases} n-1 & \text{si } e=1 \\ \binom{e+n-1}{e} - n & \text{si } e \geq 2. \end{cases}$$

De plus, ces bornes sont optimales. Elles sont atteintes pour un cône sur une courbe quand $e=1$ et pour un espace linéaire quand $e \geq 2$.

On en déduit dans la troisième partie des minoration analogues pour $\mathcal{F}_e^{\text{int}}(X)$. L'énoncé qui suit montre que la réponse à la question 1.3 pour $\mathcal{F}_e^{\text{int}}(X)$ est positive si et seulement si X n'a pas de point fermé de profondeur 1.

THÉORÈME 1.5. — *Soit X une sous-variété de $\mathbb{P}^N$ de dimension $n \geq 2$. Alors :*

(i) *Si X n'a pas de point de profondeur 1 et de codimension > 1 ,*

$$\text{codim}_{\mathcal{H}_e}(\mathcal{F}_e^{\text{int}}(X)) \geq \begin{cases} n-1 & \text{si } e=1 \\ \binom{e+n-1}{e} - n & \text{si } e \geq 2. \end{cases}$$

(ii) *Si X n'a pas de point fermé de profondeur 1,*

$$\text{codim}_{\mathcal{H}_e}(\mathcal{F}_e^{\text{int}}(X)) \geq \begin{cases} e+1 & \text{si } n \geq 3 \\ e-1 & \text{si } n=2 \text{ et } e \geq 2 \\ 1 & \text{si } n=2 \text{ et } e=1. \end{cases}$$

(iii) *Si X possède un point fermé de profondeur 1,*

$$\text{codim}_{\mathcal{H}_e}(\mathcal{F}_e^{\text{int}}(X)) = 1 \text{ pour tout } e.$$

De plus, ces bornes sont optimales.

Remarquons que la condition « ne pas posséder de point fermé de profondeur 1 et de codimension > 1 » est la condition S2 de Serre. Elle est en particulier vérifiée pour les variétés normales et les variétés de Cohen-Macaulay.

Enfin, dans une quatrième partie, on obtient le théorème suivant répondant à la question 1.2. La restriction sur les fibres de la famille, dans le cas intègre, est nécessaire au vu du théorème précédent.

THÉORÈME 1.6. — *Soit une famille plate de sous-variétés de dimension $n \geq 2$ de $\mathbb{P}^N$, c'est-à-dire un diagramme commutatif de K -schémas de type fini :*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}^N \times V \\ \pi \downarrow & \nearrow \text{pr}_2 & \\ V & & \end{array}$$

où π est plat à fibres géométriquement intègres de dimension $n \geq 2$ et i est une immersion fermée. Alors :

(i) *Soit e tel que $\binom{e+n-1}{e} - n - 1 \geq \dim(V)$. L'ensemble des hypersurface H de $\mathbb{P}^N$ de degré $\dim(V) + 2$ telles que pour tout $v \in V$, $\mathfrak{X}_v \cap H$ est géométriquement irréductible et génériquement réduit de codimension 1 dans $\mathfrak{X}_v$ contient un ouvert non vide.*

- (ii) Soit $e \geq \dim(V) + 2$. Supposons que les $\mathfrak{X}_v$ n'ont pas de points fermés de profondeur 1. Alors l'ensemble des hypersurfaces H de $\mathbb{P}^N$ de degré e telles que pour tout $v \in V$, $\mathfrak{X}_v \cap H$ est géométriquement intègre de codimension 1 dans $\mathfrak{X}_v$ contient un ouvert non vide.

Si V est propre, ces ensembles sont des ouverts non vides. Enfin, quand le corps K est infini, on peut trouver une telle hypersurface H définie sur K .

Ces questions ont été motivées par les constructions de [1] de variétés dont le fibré cotangent est ample. En particulier, le théorème 1.5 corrige et précise Lemma 12 de *loc. cit.*, erroné.

Quand K est fini, les méthodes utilisées ici pour prouver le théorème 1.6 ne permettent pas de construire une hypersurface définie sur K . L'analogue de cette question pour la version lisse du théorème de Bertini a été étudiée et résolue par Poonen dans [10].

Je tiens à remercier chaleureusement Olivier Debarre pour ses nombreux conseils et Olivier Wittenberg pour sa relecture attentive de versions préliminaires de ce texte.

2. Théorème de Bertini

On va démontrer dans cette partie le théorème 1.1.

2.1. Ouverture de la propriété « irréductible et génériquement réduit » . — Pour cela, on va commencer par déterminer des conditions sur une famille de schémas sous lesquelles l'ensemble des fibres qui sont irréductibles et génériquement réduites est ouvert : c'est le rôle de la proposition 2.1. C'est une proposition très proche d'énoncés de [6], et les démonstrations sont calquées sur celles s'y trouvant. Par conséquent, on multipliera les références à cet ouvrage.

PROPOSITION 2.1. — *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas propre, plat et de présentation finie. On suppose que les composantes irréductibles des fibres de f sont toutes de la même dimension n . Alors l'ensemble E des $s \in S$ tels que X_s est géométriquement irréductible et génériquement réduit est ouvert dans S .*

Preuve. — On scinde la preuve en plusieurs étapes.

ÉTAPE 1. Sous les hypothèses de l'énoncé, si S est le spectre d'un anneau de valuation discrète de point générique s' et de point fermé s , si de plus les composantes irréductibles de $X_{s'}$ sont géométriquement irréductibles, alors si $s \in E$, on a également $s' \in E$.

Montrons d'abord que $X_{s'}$ est géométriquement génériquement réduit. Par [6] 12.1.1 (vii), l'ensemble U des $x \in X$ tels que $X_{f(x)}$ est géométriquement

réduit en x est ouvert dans X . Son complémentaire F est donc fermé. Par hypothèse, F_s est de dimension $< n$. Or, par propriété de f , la dimension des fibres de $f : F \rightarrow S$ est semi-continue supérieurement, donc $\dim(F_{s'}) < n$, et $X_{s'}$ est bien géométriquement génériquement réduit.

Supposons ensuite par l'absurde que $X_{s'}$ ne soit pas irréductible, et soient η_1 et η_2 deux points maximaux distincts de $X_{s'}$. Par propriété, la dimension des fibres de $f : \{\eta_i\} \rightarrow S$ est semi-continue supérieurement. On peut donc choisir un point maximal z_i de $\{\eta_i\}_s$ dont l'adhérence est de dimension $\geq n$. Comme les composantes irréductibles de X_s sont de dimension n par hypothèse, z_i est nécessairement un point maximal de X_s .

Par [5] 2.3.4, qui s'applique par platitude, on voit que les points maximaux de X sont exactement ceux de $X_{s'}$. Cela permet de vérifier les hypothèses de [5] 3.4.1.1 et de montrer que si z_1 et z_2 coïncidaient, on aurait

$$\text{long}((\mathcal{O}_{X_s})_{z_1}) \geq \text{long}((\mathcal{O}_X)_{\eta_1}) + \text{long}((\mathcal{O}_X)_{\eta_2}) \geq 2,$$

ce qui est impossible car X_s est génériquement réduit. Ainsi, $z_1 \neq z_2$, donc X_s n'est pas irréductible, ce qui est absurde.

ÉTAPE 2. Sous les hypothèses de l'énoncé, si S est affine noethérien intègre de point générique s' , si de plus les composantes irréductibles de $X_{s'}$ sont géométriquement irréductibles, et si E est non vide, alors $s' \in E$.

Supposons que $s \in E$ est différent de s' . Par [2] 7.1.7, qui s'applique par noethérianité, on peut trouver un schéma T , spectre d'un anneau de valuation discrète de point fermé t et de point générique t' , et un morphisme $g : T \rightarrow S$ tel que $g(t) = s$ et $g(t') = s'$. On peut alors appliquer l'étape 1 après changement de base par g , ce qui montre $s' \in E$.

ÉTAPE 3. Sous les hypothèses de l'énoncé, si $S = \text{Spec}(A)$ est affine noethérien, E est stable par générisation.

On se donne $s \in E$ et s' une générisation de s : on veut montrer que $s' \in E$. Quitte à remplacer S par $\overline{\{s'\}}$, on peut supposer S intègre de point générique s' .

Par [5] 4.6.8, il existe une extension finie $\tilde{K}$ de $K = \text{Frac}(A)$ telle que les composantes irréductibles de $(X_{s'})_{\tilde{K}}$ soient géométriquement irréductibles. Comme il existe une base de $\tilde{K}$ sur K formée d'éléments entiers sur A , l'anneau $\tilde{A}$ engendré par ces éléments est fini sur A et est de corps de fractions $\tilde{K}$. On pose $\tilde{S} = \text{Spec}(\tilde{A})$, de sorte que le morphisme $g : \tilde{S} \rightarrow S$ est surjectif car fini et dominant.

On peut alors appliquer l'étape 2 après avoir changé de base par g . Notons $\tilde{E}$ l'ensemble évident. On a $\tilde{E} = g^{-1}(E)$, donc $E = g(\tilde{E})$ par surjectivité de g . Comme $\tilde{E}$ contient le point générique de $\tilde{S}$, E contient bien le point générique de S , ce qui conclut.

ÉTAPE 4. Sous les hypothèses de l'énoncé, E est ouvert.

Comme la proposition est locale sur S , on peut supposer que $S = \operatorname{Spec}(A)$ est affine.

Quand S est noethérien, on va montrer que E est ouvert en appliquant le critère [3] 0.9.2.5. Vérifions-en les hypothèses. D'une part, E est stable par généralisation par l'étape 3. D'autre part, E est localement constructible par [6] 9.7.7 et 9.8.7.

Si A n'est pas noethérien, on écrit A comme limite inductive de ses sous-anneaux de type fini sur $\mathbb{Z}$. Alors, par [6] 8.9.1, 8.10.5 (xii) et 11.2.6, on peut trouver un sous-anneau noethérien A_0 de A et un morphisme $f_0 : X_0 \rightarrow \operatorname{Spec}(A_0)$ vérifiant les mêmes propriétés que f , et tel que f soit obtenu à partir de f_0 par extension des scalaires. Si $g : \operatorname{Spec}(A) \rightarrow \operatorname{Spec}(A_0)$ est le changement de base et si E_0 est l'ensemble évident, on a $E = g^{-1}(E_0)$. Comme E_0 est ouvert par le cas noethérien, E est ouvert. D'où le résultat. $\square$

2.2. Démonstration du théorème. — Démontrons maintenant la version dont nous aurons besoin du théorème de Bertini, c'est-à-dire le théorème 1.1.

Preuve du théorème 1.1. — Par [9] I 6.10 appliqué à l'inclusion de X dans $\mathbb{P}^N$, $\mathcal{F}_e^{\operatorname{int}}(X)$ est strictement inclus dans $\mathcal{H}_e$. Comme $\mathcal{F}_e^{\operatorname{igr}}(X) \subset \mathcal{F}_e^{\operatorname{int}}(X)$, il suffit de montrer que $\mathcal{F}_e^{\operatorname{int}}(X)$ et $\mathcal{F}_e^{\operatorname{igr}}(X)$ sont fermés dans $\mathcal{H}_e$. On fait la preuve pour $\mathcal{F}_e^{\operatorname{igr}}(X)$; la fermeture de $\mathcal{F}_e^{\operatorname{int}}(X)$ se montre de la même manière en utilisant [6] 12.2.4 (viii) à la place de la proposition 2.1.

On introduit $\mathfrak{Z} \subset \mathbb{P}^N \times \mathcal{H}_e$ la famille paramétrant les $\mathfrak{Z}_H = X \cap H$ et $q : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathcal{H}_e$ la projection canonique. On note $\mathcal{U}$ l'ouvert de $\mathcal{H}_e$ où $X \not\subseteq H$. Comme le polynôme de Hilbert de ses fibres est constant, en appliquant le critère III 9.9 de [8], on voit que $q_{\mathcal{U}} : q^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ est plat. Soit alors $\mathcal{U}'$ le sous-ensemble de $\mathcal{U}$ constitué des H tels que $X \cap H$ est géométriquement irréductible et génériquement réduit. Il est ouvert par la proposition 2.1. Par conséquent, $\mathcal{F}_e^{\operatorname{igr}}(X)$, qui est le complémentaire de $\mathcal{U}'$ dans $\mathcal{H}_e$, est fermé. $\square$

3. Minoration de la codimension de $\mathcal{F}_e^{\operatorname{igr}}(X)$

Cette partie contient la démonstration du théorème 1.4. Comme celui-ci est insensible à l'extension des scalaires, on supposera que K est algébriquement clos.

L'idée d'utiliser une dégénérescence de X vers une réunion d'espaces linéaires pour montrer ce théorème est due à Zak.

3.1. Optimalité des minorants. — On montre dans ce paragraphe que les minoration du théorème 1.4 sont optimales.

PROPOSITION 3.1. — *Soit $n \geq 2$ et $e \geq 1$. Alors on peut trouver une sous-variété X d'un espace projectif $\mathbb{P}^N$ pour laquelle l'inégalité du théorème 1.4 est une égalité.*

Preuve. — Si $e \geq 2$, le lemme 3.2 ci-dessous montre qu'on peut prendre pour X un sous-espace linéaire de dimension n de $\mathbb{P}^N$.

Si $e = 1$, on choisit pour X un cône de base une courbe intègre de degré ≥ 2 et de sommet un sous-espace linéaire L de dimension $n - 2$ de $\mathbb{P}^N$. Notons $\mathcal{G}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_1$ contenant L . Si $H \in \mathcal{G}$, $X \cap H$ est réunion de sous-espaces linéaires de $\mathbb{P}^N$ et ne peut donc être irréductible et génériquement réduit pour raison de degré. Par conséquent, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_1^{\text{igr}}(X)$. D'autre part, par le lemme 3.3 ci-dessous, $\text{codim}_{\mathcal{H}_1}(\mathcal{G}) = n - 1$. On en déduit $\text{codim}_{\mathcal{H}_1}(\mathcal{F}_1^{\text{igr}}(X)) \leq n - 1$ et donc que l'inégalité de 1.4 est une égalité. $\square$

LEMME 3.2. — *Soit X un sous-espace linéaire de dimension n de $\mathbb{P}^N$, et $e \geq 2$. Alors :*

$$\text{codim}_{\mathcal{H}_e}(\mathcal{F}_e^{\text{igr}}(X)) = \binom{e+n-1}{e} - n$$

Démonstration. — On est immédiatement ramenés au cas où $N = n$ et $X = \mathbb{P}^n$. Les points fermés de $\mathcal{F}_e^{\text{igr}}(\mathbb{P}^n)$ correspondent aux hypersurfaces dont une équation n'est pas irréductible, donc est réunion de sous-ensembles correspondant aux degrés k et $e - k$ des deux facteurs d'une décomposition. Ceci permet de calculer :

$$\begin{aligned} \text{codim}_{\mathcal{H}_e}(\mathcal{F}_e^{\text{igr}}(\mathbb{P}^n)) &= \min_{1 \leq k \leq e-1} \left(\binom{e+n}{n} - \binom{k+n}{n} - \binom{e-k+n}{n} + 1 \right) \\ &= \min_{k \in \{1, e-1\}} \left(\binom{e+n}{n} - \binom{k+n}{n} - \binom{e-k+n}{n} + 1 \right) \\ &= \binom{e+n}{n} - n - 1 - \binom{e-1+n}{n} + 1 \\ &= \binom{e+n-1}{e} - n. \end{aligned}$$

$\square$

LEMME 3.3. — *Soit X une sous-variété de $\mathbb{P}^N$ de dimension n . Notons $\mathcal{G}$ l'ensemble des hypersurfaces de degré e contenant X . On a*

$$\text{codim}_{\mathcal{H}_e}(\mathcal{G}) \geq \binom{e+n}{e}.$$

De plus, quand X est un sous-espace linéaire de $\mathbb{P}^N$, on a égalité.

Preuve. — Soit L un sous-espace linéaire de dimension $N - n - 1$ de $\mathbb{P}^N$ ne rencontrant pas X . Les fibres de la projection $\pi_L : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ depuis L sont toutes finies non vides. Ceci montre que $\mathcal{G}$ et l'ensemble $\mathcal{C}$ des cônes de sommet L ne s'intersectent pas dans $\mathcal{H}_e$. On peut alors appliquer le théorème de l'intersection projective :

$$\mathrm{codim}_{\mathcal{H}_e}(\mathcal{G}) \geq \dim(\mathcal{C}) + 1 = \binom{e+n}{e}.$$

Finalement, quand X est un sous-espace linéaire de $\mathbb{P}^N$, X et L sont supplémentaires dans $\mathbb{P}^N$, et on voit facilement que $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}$ sont des sous-espaces linéaires supplémentaires dans $\mathcal{H}_e$. On a alors

$$\mathrm{codim}_{\mathcal{H}_e}(\mathcal{G}) = \dim(\mathcal{C}) + 1 = \binom{e+n}{e}. \quad \square$$

3.2. Réduction au cas d'une hypersurface qui est un cône sur une courbe plane. —

Dans ce paragraphe, on prépare la preuve du théorème 1.4 en effectuant un certain nombre de réductions. On commence par se ramener par projection au cas où X est une hypersurface.

PROPOSITION 3.4. — *Le théorème 1.4 se déduit du cas particulier où X est une hypersurface.*

Preuve. — Si $X = \mathbb{P}^N$, c'est le lemme 3.2 quand $e \geq 2$ ou le lemme 3.3 quand $e = 1$. Si X est une hypersurface, il n'y a rien à démontrer.

Si X est de codimension ≥ 2 dans $\mathbb{P}^N$, on choisit, par le théorème de Bertini lisse, un sous-espace linéaire L_1 de dimension $N - n$ de $\mathbb{P}^N$ dont l'intersection avec X est constituée de points réduits P_i . Soit L_2 un hyperplan de L_1 contenant P_1 et aucun des P_i , $i > 1$, et L un hyperplan de L_2 ne contenant pas P_1 . On note $\pi : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ la projection depuis L et $Q = \pi(P_1)$. La variété $Y = \pi(X)$ munie de sa structure réduite est une hypersurface de $\mathbb{P}^{n+1}$; on considère $\pi|_X : X \rightarrow Y$. Par construction, $\pi|_X^{-1}(Q)$ est le point réduit P_1 . Par conséquent, comme $\pi|_X$ est propre, $\pi|_X$ est génériquement fini de degré 1, c'est-à-dire birationnel. On notera E le fermé strict de Y au-dessus duquel $\pi|_X$ n'est pas un isomorphisme.

Soit $\mathcal{C}$ le fermé de $\mathcal{H}_{e,N}$ constitué des cônes de sommet L . Par théorème de l'intersection projective,

$$\mathrm{codim}_{\mathcal{H}_{e,N}}(\mathcal{F}_e^{\mathrm{igr}}(X)) \geq \mathrm{codim}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_e^{\mathrm{igr}}(X) \cap \mathcal{C}).$$

On vérifie en comparant les diviseurs de Cartier que $\pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(e) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \setminus \{L\}}(e)$, et que tirer en arrière les sections globales induit une bijection π^* entre $\mathcal{H}_{e,n+1}$ et $\mathcal{C}$. Moyennant cette identification entre $\mathcal{H}_{e,n+1}$ et $\mathcal{C}$, on va montrer que

$$(\mathcal{F}_e^{\mathrm{igr}}(X) \cap \mathcal{C}) \subset \mathcal{F}_e^{\mathrm{igr}}(Y) \cup \mathcal{G},$$

où $\mathcal{G}$ désigne l'ensemble des hypersurfaces contenant une composante irréductible de E de codimension 1 dans Y . On pourra alors conclure en appliquant l'hypothèse à Y d'une part, et le lemme 3.3 d'autre part.

Pour cela, soit $H \notin \mathcal{F}_e^{\text{igr}}(Y) \cup \mathcal{G}$. Comme $H \notin \mathcal{G}$, $(Y \cap H) \setminus E$ est dense dans $(Y \cap H)$, et $\pi|_X$ étant surjectif, $(X \cap \pi^*H) \setminus \pi|_X^{-1}(E)$ est dense dans $(X \cap \pi^*H)$. Comme $S \notin \mathcal{F}_e^{\text{igr}}(Y)$, $(Y \cap H) \setminus E$ est irréductible et génériquement réduit. C'est donc aussi le cas de $(X \cap \pi^*H) \setminus \pi|_X^{-1}(E)$ qui lui est isomorphe, et de $(X \cap \pi^*H)$ par densité. On a donc bien $H \notin (\mathcal{F}_e^{\text{igr}}(X) \cap \mathcal{C})$. $\square$

Un argument de déformation permet ensuite d'effectuer la réduction suivante :

PROPOSITION 3.5. — *Le théorème 1.4 se déduit du cas particulier où X est une hypersurface qui est un cône sur une courbe plane.*

Preuve. — Par la proposition 3.4, on peut supposer que X est une hypersurface. Par Bertini, on choisit des coordonnées dans lesquelles elle est d'équation $G(x_0, \dots, x_N) = 0$ de sorte que la courbe $G(x_0, x_1, x_2, 0, \dots, 0) = 0$ soit intègre. Soit $\mathfrak{X}$ la sous-variété de $\mathbb{P}^N \times \mathbb{A}^1$ d'équation $G(x_0, x_1, x_2, tx_3, \dots, tx_N) = 0$. C'est une famille plate d'hypersurfaces de $\mathbb{P}^N$, triviale de fibre X au-dessus de $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, et telle que $\mathfrak{X}_0$ est un cône sur une courbe plane intègre.

Soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathbb{A}^1 \times \mathcal{H}_e$ constitué des (t, H) tels que $\mathfrak{X}_t \cap H$ n'est pas irréductible et génériquement réduit de codimension 1 dans $\mathfrak{X}_t$. Comme dans la preuve en 2.2 du théorème 1.1, on montre que $\mathcal{F}$ est fermé dans $\mathbb{A}^1 \times \mathcal{H}_e$.

Les fibres de $p_1 : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{A}^1$ sont les $p_1^{-1}(t) = \mathcal{F}_e^{\text{igr}}(\mathfrak{X}_t)$. Par fermeture de $\mathcal{F}$, p_1 est propre, donc la dimension de ses fibres est semi-continue supérieurement. Ainsi, il existe $t \neq 0$ tel que $\dim(\mathcal{F}_e^{\text{igr}}(\mathfrak{X}_t)) \leq \dim(\mathcal{F}_e^{\text{igr}}(\mathfrak{X}_0))$.

Comme $\mathfrak{X}_t$ est projectivement équivalente à X et que l'on sait majorer la dimension de $\mathcal{F}_e^{\text{igr}}(\mathfrak{X}_0)$ par hypothèse, on peut conclure. $\square$

3.3. Fin de la démonstration. — Achevons de démontrer le théorème 1.4. On va adopter la même stratégie que pour la preuve de la proposition 3.5, en utilisant maintenant une déformation de X en une réunion d'hyperplans.

Preuve du théorème 1.4. — ÉTAPE 1. Construction d'une déformation.

Par la proposition 3.5, on suppose que X est une hypersurface d'équation $G(x_0, x_1, x_2) = 0$, qui est un cône de sommet l'espace linéaire S d'équations $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ sur une courbe plane intègre C de degré d . Par Bertini, on choisit nos coordonnées de sorte que $G(x_0, x_1, 0) = 0$ soit constitué de d points réduits. Soit $\mathfrak{X}$ la sous-variété de $\mathbb{P}^N \times \mathbb{A}^1$ d'équation $G(x_0, x_1, tx_2) = 0$. C'est une famille plate d'hypersurfaces de $\mathbb{P}^N$, triviale de fibre X au-dessus de

$\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, et telle que $\mathfrak{X}_0$ est réunion réduite de d hyperplans distincts $L_1, \dots, L_d$ s'intersectant le long d'un espace linéaire commun $L : x_0 = x_1 = 0$.

On note $\mathfrak{Z} \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{A}^1 \times \mathcal{H}_e$ la famille paramétrant les $\mathfrak{Z}_{t,H} = \mathfrak{X}_t \cap H$ et $q : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathbb{A}^1 \times \mathcal{H}_e$ la projection canonique. Soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathbb{A}^1 \times \mathcal{H}_e$ constitué des (t, H) tels que $\mathfrak{Z}_{t,H}$ n'est pas irréductible et génériquement réduit de codimension 1 dans $\mathfrak{X}_t$. On note $\mathcal{U}$ l'ouvert de $\mathbb{A}^1 \times \mathcal{H}_e$ où $\mathfrak{X}_t \cap H$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{X}_t$. Comme le polynôme de Hilbert de ses fibres est constant, en appliquant le critère III 9.9 de [8], on voit que $q_{\mathcal{U}} : q^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ est plat. Soit alors $\mathcal{U}'$ le sous-ensemble de $\mathcal{U}$ constitué des (t, H) tels que $\mathfrak{X}_t \cap H$ est irréductible et génériquement réduit. Il est ouvert par la proposition 2.1. Par conséquent, $\mathcal{F}$, qui est le complémentaire de $\mathcal{U}'$ dans $\mathcal{H}_e$, est fermé. Soit $\mathcal{F}'$ la réunion des composantes irréductibles de $\mathcal{F}$ dominant $\mathbb{A}^1$. Comme $\mathfrak{X}$ est triviale au-dessus de $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, c'est aussi le cas de $\mathcal{F}$; ainsi, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ coïncident au-dessus de $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.

On va montrer que $\mathcal{F}'_0 \subset \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \cup \bigcup_i \mathcal{F}'_e{}^{\text{igr}}(L_i)$, où $\mathcal{G}_1$ est l'ensemble des hypersurfaces contenant L et $\mathcal{G}_2$ l'ensemble des hypersurfaces dont l'intersection avec L est eS . Admettons dans un premier temps cette inclusion. Quand $e \geq 2$, $\text{codim}_{\mathcal{H}_e}(\mathcal{F}'_e{}^{\text{igr}}(L_i)) = \binom{e+n-1}{e} - n$ par le lemme 3.2, et $\text{codim}_{\mathcal{H}_e}(\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2) = \binom{e+n-1}{e} - 1$. Ainsi, $\text{codim}_{\mathcal{H}_e}(\mathcal{F}'_0) \geq \binom{e+n-1}{e} - n$. Par propriété de $p_1 : \mathcal{F}' \rightarrow \mathbb{A}^1$, la dimension de ses fibres est semi-continue supérieurement, et il existe $t \neq 0$ tel que $\text{codim}_{\mathcal{H}_e}(\mathcal{F}'_t) \geq \binom{e+n-1}{e} - n$. Mais, $\mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_t = \mathcal{F}'_e{}^{\text{igr}}(\mathfrak{X}_t)$, ce qui permet de conclure car $\mathfrak{X}_t$ est projectivement équivalente à X .

Quand $e = 1$, $\text{codim}_{\mathcal{H}_1}(\mathcal{F}'_1{}^{\text{igr}}(L_i)) = n + 1$ et $\text{codim}_{\mathcal{H}_1}(\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2) = n - 1$. On conclut en raisonnant identiquement.

ÉTAPE 2. Changement de base.

Il reste à prouver l'inclusion admise ci-dessus. On raisonne par l'absurde en choisissant $H \in \mathcal{F}'_0$ telle que $H \notin \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \cup \bigcup_i \mathcal{F}'_e{}^{\text{igr}}(L_i)$. Ceci implique que $\mathfrak{X}_0 \cap H$ est réduit et a exactement d composantes irréductibles distinctes $H_i = L_i \cap H$ (il n'y a pas de points immergés car $\mathfrak{X}_0 \cap H$ est intersection complète).

D'une part, H appartient à une composante irréductible de $\mathcal{F}$ qui domine $\mathbb{A}^1$, et d'autre part, comme $H \notin \mathcal{G}_1$, $(0, H) \in \mathcal{U}$. On peut donc trouver une courbe intègre B , un morphisme $f : B \rightarrow \mathcal{F} \cap \mathcal{U}$ tel que $p_1 \circ f : B \rightarrow \mathbb{A}^1$ soit dominant, et un point $b \in B$ tel que $f(b) = (0, H)$. On note $\mathfrak{Z}_B \subset \mathfrak{X}_B$ le tiré en arrière de $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{X} \times \mathcal{H}_e$ par $f : B \rightarrow \mathbb{A}^1 \times \mathcal{H}_e$. Comme f est à valeurs dans $\mathcal{U}$, par changement de base, $q_B : \mathfrak{Z}_B \rightarrow B$ est propre et plat. Comme $\mathfrak{Z}_b = \mathfrak{X}_0 \cap H$ est réduit, en appliquant [6] 12.2.4 (v), et quitte à restreindre B , on peut supposer les fibres de q_B géométriquement réduites. Or, q étant à valeurs dans $\mathcal{F}$, les fibres de q_B ne sont pas géométriquement intègres. Elles sont donc nécessairement géométriquement réductibles. Quitte à remplacer B

par un revêtement, on peut alors supposer que la fibre générique de q_B est réductible, c'est-à-dire que $\mathfrak{Z}_B$ est réductible. Finalement, en normalisant, on voit qu'on peut choisir B lisse.

Dans la suite de la démonstration, on va obtenir une contradiction en montrant l'irréductibilité de $\mathfrak{Z}_B$.

ÉTAPE 3. Irréductibilité de $\mathfrak{Z}_B$.

Comme $H \notin \mathcal{G}_2$, H contient un point fermé $P \in L \setminus S$. Ainsi, $P \in \mathfrak{Z}_b = \mathfrak{X}_0 \cap H$. Soit Z une composante irréductible de $\mathfrak{Z}_B$ contenant P . Par dimension, $q_B : Z \rightarrow B$ est dominante, donc plate. Admettons un instant que Z contienne les d composantes irréductibles $H_1, \dots, H_d$ de $\mathfrak{Z}_b$. Alors, si $b' \in B$,

$$\begin{aligned} \deg(Z_{b'}) &= \deg(Z_b) \text{ par platitude} \\ &= \deg(\mathfrak{Z}_b) \text{ car } \mathfrak{Z}_b = Z_b \\ &= \deg(\mathfrak{Z}_{b'}) \text{ par platitude.} \end{aligned}$$

Comme $\mathfrak{Z}_{b'}$ et $Z_{b'}$ sont de même dimension, et qu'on a une inclusion, cela implique $Z_{b'} = \mathfrak{Z}_{b'}$, soit $Z = \mathfrak{Z}$. Ce qui contredit la réductibilité de $\mathfrak{Z}$.

Il reste à prouver l'assertion admise ci-dessus : on doit montrer que $H_k \subset Z_b$ pour $1 \leq k \leq d$. C'est ce qu'on va obtenir dans la suite, comme conséquence du théorème de Ramanujam-Samuel. Dans l'étape suivante, on introduit les variétés auxquelles on pourra appliquer ce théorème.

ÉTAPE 4. Normalisation.

Considérons la sous-variété Γ de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1$ d'équation $G(x_0, x_1, tx_2) = 0$. La projection depuis S induit $\pi : \mathfrak{X} \setminus S \rightarrow \Gamma$, lisse car de fibres des espaces affines $\mathbb{A}^{N-2}$. La projection $\text{pr}_2 : \Gamma \rightarrow \mathbb{A}^1$ est triviale de fibre C au-dessus de $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. Au-dessus de 0, elle est lisse sauf en le point $\Omega = [0 : 0 : 1]$: en effet, $\text{pr}_2^{-1}(0)$ est constitué de d droites $D_1, \dots, D_d$ s'intersectant en Ω . Remarquons que $\pi^{-1}(D_k) = L_k \setminus S$.

En tirant en arrière $\mathfrak{X} \setminus S \xrightarrow{\pi} \Gamma \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbb{A}^1$ par $p_1 \circ f : B \rightarrow \mathbb{A}^1$, on obtient $\mathfrak{X}_B \setminus S_B \xrightarrow{\pi_B} \Gamma_B \xrightarrow{\text{pr}_{2,B}} B$. On identifie Ω et D_k aux sous-variétés correspondantes de $(\Gamma_B)_b = \Gamma_0$, et P et $L_k \setminus S$ aux sous-variétés correspondantes de $(\mathfrak{X}_B \setminus S_B)_b = (\mathfrak{X} \setminus S)_0$.

Notons $\nu : \widetilde{\Gamma}_B \rightarrow \Gamma_B$ la normalisation de Γ_B . Comme $D_k \setminus \Omega$ est dans le lieu lisse de Γ_B , au-dessus duquel ν est un isomorphisme, on peut considérer la transformée stricte de D_k dans $\widetilde{\Gamma}_B$: on la note encore D_k et on notera $i_k : D_k \rightarrow \widetilde{\Gamma}_B$ l'inclusion. Montrons que Ω a un unique antécédent $\tilde{\Omega}$ dans $\widetilde{\Gamma}_B$. D'une part, les composantes irréductibles de $(\widetilde{\Gamma}_B)_b$ sont exactement les $i_k(D_k)_{1 \leq k \leq d}$, de sorte que $\nu^{-1}(\Omega)$ est constitué des $i_k(\Omega)_{1 \leq k \leq d}$. D'autre part, comme la fibre générique de $\text{pr}_{2,B} \circ \nu$ est la normalisation de C qui est connexe,

[6] 15.5.9 (ii) montre que $(\widetilde{\Gamma_B})_b$ est connexe. Ceci n'est possible que si $i_k(\Omega)$ ne dépend pas de k : on note ce point $\tilde{\Omega}$.

On tire en arrière ν par π_B pour obtenir $\mathfrak{W}$ muni de deux projections $\tilde{\pi}$ et ν' respectivement sur Γ_B et $\mathfrak{X}_B \setminus S_B$. Tirant en arrière i_k par $\tilde{\pi}$, on obtient $i'_k : L_k \setminus S \rightarrow \mathfrak{W}$, qui est la transformée stricte de $L_k \setminus S$. Comme Ω a un unique antécédent par ν , P a un unique antécédent par ν' , égal à $i'_k(P)$ pour tout k , qu'on note $\tilde{P}$.

Le diagramme cartésien de variétés pointées ci-dessous récapitule les constructions effectuées :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (L_k \setminus S, P) & \xrightarrow{i'_k} & (\mathfrak{W}, \tilde{P}) & \xrightarrow{\nu'} & (\mathfrak{X}_B \setminus S_B, P) & \xrightarrow{p'} & (\mathfrak{X} \setminus S, P) \\
 \pi \downarrow & & \tilde{\pi} \downarrow & & \pi_B \downarrow & & \pi \downarrow \\
 (D_k, \Omega) & \xrightarrow{i_k} & (\widetilde{\Gamma_B}, \tilde{\Omega}) & \xrightarrow{\nu} & (\Gamma_B, \Omega) & \xrightarrow{p} & (\Gamma, \Omega) \\
 & & & & \text{pr}_{2,B} \downarrow & & \text{pr}_2 \downarrow \\
 & & & & (B, b) & \xrightarrow{p_1 \circ f} & (\mathbb{A}^1, 0)
 \end{array}$$

ÉTAPE 5. Application du théorème de Ramanujam-Samuel.

Comme $H \notin \mathcal{G}_1$, Z_b ne contient pas L . Ainsi, Z n'est pas inclus dans le lieu où ν' n'est pas un isomorphisme, et on peut considérer sa transformée stricte W dans $\mathfrak{W}$. Par propriété de ν' , $\nu'(W) = Z$, et on a donc $\tilde{P} \in W$.

Remarquons que comme Z_b ne contient pas L , W ne contient pas $\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\Omega})$. On peut donc appliquer le théorème de Ramanujam-Samuel sous sa forme [7] 21.14.3 (i) au morphisme lisse de base normale $\tilde{\pi} : \mathfrak{W} \rightarrow \widetilde{\Gamma_B}$ et au diviseur W de $\mathfrak{W}$ en le point $\tilde{P}$. Ainsi, W est de Cartier dans $\mathfrak{W}$ en $\tilde{P}$. En particulier, comme W rencontre $L_k \setminus S$ en le point $\tilde{P}$, W rencontre $L_k \setminus S$ en un diviseur de $L_k \setminus S$. Cela signifie que Z rencontrait L_k en un diviseur de L_k , nécessairement égal à H_k . C'est ce qu'on voulait montrer. $\square$

4. Minoration de la codimension de $\mathcal{G}_e^{\text{int}}(X)$

L'objet de cette partie est de déduire le théorème 1.5 du théorème 1.4. Comme ces énoncés sont insensibles à l'extension des scalaires, on fera l'hypothèse que K est algébriquement clos.

Il faut contrôler les points immergés qui apparaissent lorsqu'on intersecte X avec une hypersurface.

LEMME 4.1. — *Soit X un K -schéma de type fini réduit. Alors X ne contient qu'un nombre fini de points de profondeur 1 et de codimension ≥ 2 dans X .*

Preuve. — La fonction $\text{coprof}(x) = \dim(\mathcal{O}_{X,x}) - \text{prof}(\mathcal{O}_{X,x})$ est semi-continue supérieurement sur X par [6] 12.1.1 (v).

Notons F_n le fermé $\{x \in X \mid \text{coprof}(x) \geq n\}$. Par positivité de la profondeur, les points de F_n sont de codimension $\geq n$. Si $n \geq 1$, F_n ne contient pas de points de codimension n . En effet, un tel point vérifierait $\text{prof}(x) = 0$, et [4] chap. 0, 16.4.6 (i) montre que ce serait un point immergé de X .

Ainsi, pour $n \geq 1$, les points de F_n de hauteur $n+1$ sont des points génériques de composantes irréductibles de F_n , et ils sont donc en nombre fini. Les points de X de profondeur 1 et de codimension ≥ 2 sont exactement la réunion de tous ces points pour $n \geq 1$, et sont donc en nombre fini. $\square$

LEMME 4.2. — Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une sous-variété de dimension ≥ 2 . Notons $x_1, \dots, x_r$, ses points de codimension ≥ 2 et de profondeur 1, qui sont en nombre fini par le lemme 4.1.

Alors si $H \in \mathcal{H}_e$ ne contient pas X , les points immergés de $X \cap H$ sont exactement les x_i appartenant à H .

Preuve. — En effet, par [4] chap. 0, 16.4.6 (i), les points immergés sont exactement ceux de profondeur 0 et de codimension ≥ 1 . Il suffit alors de remarquer que lors d'une section non triviale par une hypersurface, codimension et profondeur chutent tous deux de 1. $\square$

Montrons à présent le théorème 1.5 :

Preuve du théorème 1.5. — On considère les points de X de profondeur 1 et de codimension ≥ 2 . Notons $y_1, \dots, y_s$ ceux qui sont fermés, et $z_1, \dots, z_t$ les autres. Soit $\mathcal{F}_i$ l'ensemble des hypersurfaces contenant y_i et $\mathcal{G}_i$ l'ensemble des hypersurfaces contenant z_i .

Par le lemme 4.2, $\mathcal{F}_e^{\text{int}}(X) = \mathcal{F}_e^{\text{igr}}(X) \cup \bigcup_i \mathcal{G}_i \cup \bigcup_i \mathcal{F}_i$. Or, dans $\mathcal{H}_e$, $\mathcal{F}_i$ est un sous-espace linéaire de codimension 1, $\mathcal{G}_i$ est de codimension $\geq e+1$ par le lemme 3.3, et on minore la codimension de $\mathcal{F}_e^{\text{igr}}(X)$ à l'aide du théorème 1.4. On en déduit les minoration voulues.

Enfin, ces minoration sont optimales comme conséquence de la preuve et du fait que les minoration du théorème 1.4 sont optimales. Plus précisément, voici des variétés réalisant les cas d'égalité :

- (i) Cas où X n'a pas de point de profondeur 1 et de codimension > 1 :
 - (a) quand $e = 1$, un cône sur une courbe plane intègre.
 - (b) quand $e \geq 2$, un espace linéaire.
- (ii) Cas où X n'a pas de point fermé de profondeur 1 :
 - (a) quand $n \geq 3$, une variété contenant un point de profondeur 1 dont l'adhérence est une droite, mais pas de point fermé de profondeur 1.

- (b) quand $n = 2$ et $e \geq 2$, un plan.
- (c) quand $n = 2$ et $e = 1$, un cône sur une courbe plane intègre.
- (iii) Cas où X possède un point fermé de profondeur 1 :
 - (a) une variété quelconque contenant un point fermé de profondeur 1.

□

5. Le théorème de Bertini en famille

Comme application des résultats précédents, montrons le théorème 1.6.

Preuve du théorème 1.6. — Montrons (ii) : on procède de même pour (i) en utilisant le théorème 1.4 à la place du théorème 1.5 (ii).

Soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $V \times \mathcal{H}_e$ constitué des (v, H) tels que $\mathfrak{X}_v \cap H$ n'est pas géométriquement intègre de codimension 1 dans $\mathfrak{X}_v$. Comme dans la preuve en 2.2 du théorème 1.1, et en utilisant [6] 12.2.4 (viii) à la place de la proposition 2.1, on montre que $\mathcal{F}$ est fermé dans $V \times \mathcal{H}_e$.

Les fibres de $p_1 : \mathcal{F} \rightarrow V$ sont les $p_1^{-1}(v) = \mathcal{F}_e^{\text{int}}(\mathfrak{X}_v)$ et sont donc de codimension $\geq e - 1$ dans $\mathcal{H}_e$ par le théorème 1.5 (ii). La codimension de $\mathcal{F}$ dans $V \times \mathcal{H}_e$ est donc $\geq e - 1 = \dim(V) + 1$. Ainsi, $p_2 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}_e$ n'est pas dominante.

L'ensemble qui nous intéresse est le complémentaire de l'image de p_2 ; comme il est constructible par le théorème de Chevalley, il contient alors un ouvert non vide. Quand V est propre, $\mathcal{F}$ est également propre, et son image par p_2 est fermée, donc de complémentaire un ouvert. Enfin, si le corps K est infini, toute variété non vide a un K -point, d'où l'existence de l'hypersurface définie sur K recherchée. □

BIBLIOGRAPHIE

- [1] O. DEBARRE – « Varieties with ample cotangent bundle », *Compos. Math.* **141** (2005), p. 1445–1459.
- [2] A. GROTHENDIECK – « Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **8** (1961), p. 222.
- [3] ———, « Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **11** (1961), p. 167.
- [4] ———, « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **20** (1964), p. 259.

- [5] ———, « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **24** (1965), p. 231.
- [6] ———, « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **28** (1966), p. 255.
- [7] ———, « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **32** (1967), p. 361.
- [8] R. HARTSHORNE – *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer, 1977.
- [9] J.-P. JOUANOLLOU – *Théorèmes de Bertini et applications*, Progress in Math., vol. 42, Birkhäuser Boston Inc., 1983.
- [10] B. POONEN – « Bertini theorems over finite fields », *Ann. of Math.* **160** (2004), p. 1099–1127.

