

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

FAISCEAUX l -ADIQUES ENTIERS SUR LES CORPS LOCAUX

Weizhe Zheng

Tome 136

Fascicule 3

2008

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 465-503

SUR LA COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX l -ADIQUES ENTIERS SUR LES CORPS LOCAUX

PAR WEIZHE ZHENG

RÉSUMÉ. — On étudie le comportement des faisceaux l -adiques entiers sur les schémas de type fini sur un corps local par les six opérations et le foncteur des cycles proches.

ABSTRACT (*On the cohomology of integral l -adic sheaves over local fields*)

We study the behavior of integral l -adic sheaves on schemes of finite type over a local field under the six operations and the nearby cycle functor.

1. Introduction

Soient R un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel fini de caractéristique p , K son corps des fractions. Un tel corps sera appelé *corps local*. Soit $\eta = \text{Spec } K$.

Soit X un schéma de type fini sur η . On désigne par $|X|$ l'ensemble de ses points fermés. Pour $x \in |X|$, le corps résiduel $\kappa(x)$ de X en x est une extension finie de K . On note R_x son anneau des entiers, x_0 le point fermé de $\text{Spec } R_x$. Soient \bar{x} un point géométrique de X au-dessus de x de corps résiduel $\kappa(\bar{x})$ une clôture séparable de $\kappa(x)$, $R_{\bar{x}}$ la normalisation de R_x dans $\kappa(\bar{x})$, \bar{x}_0 le point

Texte reçu le 12 mars 2007, révisé le 4 septembre 2007

WEIZHE ZHENG, Université Paris-Sud 11, Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France. • *E-mail* : weizhe.zheng@math.u-psud.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 14F20, 14G20, 11G25, 14D05.

Mots clefs. — Intégralité, cohomologie l -adique, cycles proches.

fermé de $\text{Spec } R_{\bar{x}}$. Soit $F_x \in \text{Gal}(\kappa(\bar{x}_0)/\kappa(x_0))$ le Frobenius géométrique qui envoie a sur $a^{1/q}$, où $q = \#\kappa(x_0)$.

Fixons un nombre premier $l \neq p$. On désigne par $\overline{\mathbb{Q}}_l$ une clôture algébrique de \mathbb{Q}_l . Soit \mathcal{F} un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau sur X . D'après le théorème de monodromie locale, les valeurs propres d'un relèvement $\Phi_x \in \text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x))$ de F_x agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ sont bien définies à multiplication près par des racines de l'unité [5, 1.7.4].

Rappelons qu'on dit que \mathcal{F} est *entier* [7, 0.1] si les valeurs propres de Φ_x sont des entiers algébriques pour tout $x \in |X|$. Cette intégralité est stable par image directe à support propre [*ibid.*, 0.2]. La démonstration utilise l'analogie de ce résultat sur un corps fini [22, XXI 5.2.2].

L'objet de cet article est d'étudier, plus généralement, le comportement de l'intégralité par les foncteurs usuels : les six opérations et le foncteur des cycles proches. De façon plus précise, on examine le comportement par ces foncteurs de la divisibilité des valeurs propres des Φ_x par des puissances de q . On introduit pour cela une mesure de la q -divisibilité inspirée des « jauges » de Mazur-Ogus. On prouve notamment les résultats espérés dans [13, 5.5].

Dans un travail ultérieur [19], on examine le comportement de la rationalité et de l'indépendance de l par les mêmes opérations.

Les résultats concernant les six opérations sont exposés au § 2. Au § 3 on traite le cas crucial de $Rj_*\mathcal{F}$, pour l'inclusion $j : U \rightarrow X$ du complémentaire d'un diviseur à croisements normaux D dans un schéma X lisse sur η et d'un faisceau \mathcal{F} lisse sur U et modérément ramifié le long de D . Les démonstrations des résultats du § 2 sont données au § 4. L'ingrédient essentiel est un théorème de de Jong, grâce auquel on se réduit au cas traité au § 3 par les techniques usuelles de descente cohomologique. Le résultat principal du § 5 est la stabilité de l'intégralité par le foncteur des cycles proches $R\Psi$. À nouveau, l'ingrédient clé est un théorème de de Jong, qui permet de se ramener au cas d'un couple strictement semi-stable et d'un faisceau lisse sur le complémentaire du diviseur D réunion de la fibre spéciale et des composantes horizontales et modérément ramifié le long de D . L'étude de ce cas, plus délicate qu'on ne pouvait s'y attendre, repose sur une compatibilité technique (5.6 (ii)) généralisant [11, 1.5 (a)]. Au § 6 on généralise la notion d'intégralité aux champs algébriques.

Je remercie chaleureusement L. Illusie pour m'avoir suggéré ce sujet, pour son aide à la composition de cet article, et pour sa lecture minutieuse des diverses versions du manuscrit. Je suis reconnaissant à G. Laumon pour une simplification de la démonstration de 5.6 (ii). Je remercie également O. Gabber, F. Orgogozo et le rapporteur pour leurs remarques et suggestions.

2. Intégralité et six opérations

On conserve les notations du § 1. On désigne par $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de \mathbb{Q} dans \mathbb{C} . Pour $r \in \mathbb{Q}$, on note q^r l'unique élément de $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}_{>0}$ vérifiant $(q^r)^b = q^a$, où $a, b \in \mathbb{Z}$ sont tel que $r = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$. Soit X un schéma de type fini sur η .

DÉFINITION 2.1. — Fixons un plongement $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_l}$. On dit qu'un $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceau \mathcal{F} sur X est r -entier (resp. r -entier inverse) si pour tout point fermé x de X , et toute valeur propre α de Φ_x agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$, $\alpha/\iota(q^r)$ (resp. $\iota(q^r)/\alpha$) est entier sur \mathbb{Z} , où $q = \#\kappa(x_0)$. Cette définition ne dépend pas des choix de Φ_x et de ι . On dit que \mathcal{F} est entier (resp. entier inverse) s'il est 0-entier (resp. 0-entier inverse).

Les $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceaux entiers (resp. r -entiers, resp. entiers inverses, resp. r -entiers inverses) sur X forment une sous-catégorie épaisse [9, 1.11] de $\text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$, notée $\text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})_{\text{ent}}$

(resp. $\text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})_{r\text{-ent}}$, resp. $\text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})_{\text{ent}^{-1}}$, resp. $\text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})_{r\text{-ent}^{-1}}$).

Soient K' une extension finie de K , Z un schéma de type fini sur K' , $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(Z, \overline{\mathbb{Q}_l})$. Alors \mathcal{G} est r -entier (resp. r -entier inverse) relativement à K' si et seulement s'il est r -entier (resp. r -entier inverse) relativement à K .

Rappelons que pour les schémas X séparés de type fini sur un schéma S régulier de dimension ≤ 1 , et en particulier sur η , on dispose, par [6, §6], d'une catégorie triangulée $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ et d'un formalisme de six opérations : Rf_* , $Rf_!$, f^* , $Rf^!$, \otimes , $R\text{Hom}$. La catégorie $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ est la 2-limite inductive des catégories $D_c^b(X, E_\lambda)$, où E_λ parcourt les extensions finies de \mathbb{Q}_l contenues dans $\overline{\mathbb{Q}_l}$. Si \mathcal{O}_λ est l'anneau des entiers de E_λ , $D_c^b(X, E_\lambda)$ est déduite de la catégorie $D_c^b(X, \mathcal{O}_\lambda)$ définie dans [ibid.] par extension des scalaires de \mathcal{O}_λ à E_λ . Le formalisme construit dans [ibid.] pour $D_c^b(-, \mathcal{O}_\lambda)$ se transpose trivialement.

Ce formalisme a un sens pour les schémas de type fini sur S (pas nécessairement séparés), et ce n'est que pour certaines opérations ($Rf_!$ et $Rf^!$) qu'on a besoin d'une hypothèse de séparation sur les morphismes. Pour un formalisme sans hypothèse de séparation, voir l'appendice (§ 6).

La définition qui suit est inspirée de la notion des « jauges » de Mazur-Ogus [2, 8.7].

DÉFINITION 2.2. — Soit $\epsilon : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ une fonction. On dit qu'un objet $K \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ est entier (resp. ϵ -entier, resp. entier inverse, resp. ϵ -entier inverse) si pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^i(K)$ est entier (resp. $\epsilon(i)$ -entier, resp. entier inverse, resp. $\epsilon(i)$ -entier inverse).

On désigne la sous-catégorie pleine de $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ formée des objets entiers (resp. ϵ -entiers, resp. entiers inverses, resp. ϵ -entiers inverses) par

$$D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}} \text{ (resp. } D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\epsilon\text{-ent}}, \text{ resp. } D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}^{-1}}, \text{ resp. } D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\epsilon\text{-ent}^{-1}}).$$

Lorsque ϵ est constant, $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\epsilon\text{-ent}}$ et $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\epsilon\text{-ent}^{-1}}$ sont des sous-catégories triangulées. On abrège parfois $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ en $D_c^b(X)$.

On note I la fonction d'inclusion de \mathbb{Z} dans \mathbb{Q} .

2.3. — Soient $r, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$.

Pour $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_1\text{-ent}}$, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_2\text{-ent}}$, on a

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(r_1+r_2)\text{-ent}}.$$

Pour $K \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(rI+r_1)\text{-ent}}$, $L \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(rI+r_2)\text{-ent}}$, on a

$$K \otimes L \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(rI+r_1+r_2)\text{-ent}}.$$

De même pour « entier inverse ».

Pour $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_1\text{-ent}^{-1}}$ lisse, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_2\text{-ent}}$, on a

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(r_2-r_1)\text{-ent}}.$$

Pour $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_1\text{-ent}}$ lisse, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_2\text{-ent}^{-1}}$, on a

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(r_2-r_1)\text{-ent}^{-1}}.$$

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas de type fini sur η . Alors f^* préserve les complexes ϵ -entiers (resp. ϵ -entiers inverses).

THÉORÈME 2.4. — *Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé de schémas de type fini sur η , \mathcal{F} un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau entier (resp. entier inverse) sur X . Alors pour tout point fermé y de Y , $(Rf_!\mathcal{F})_y$ est entier et $(I - n)$ -entier (resp. I -entier inverse et n -entier inverse), où $n = \dim(f^{-1}(y))$. En particulier, $Rf_!$ induit*

$$(2.4.1) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}} \rightarrow D_c^b(Y)_{\text{ent}},$$

$$(2.4.2) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}} \rightarrow D_c^b(Y)_{(I-d_r)\text{-ent}},$$

$$(2.4.3) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(Y)_{I\text{-ent}^{-1}},$$

$$(2.4.4) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(Y)_{d_r\text{-ent}^{-1}},$$

où $d_r = \max_{y \in |Y|} \dim f^{-1}(y)$ est la dimension relative.

Le cas « entier » ((2.4.1) et (2.4.2)) de 2.4 est un théorème de Deligne-Esnault [7, 0.2].

THÉORÈME 2.5. — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé de schémas de type fini sur η , $d_X = \dim X$. Alors Rf_* induit

$$(2.5.1) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}} \rightarrow D_c^b(Y)_{\text{ent}},$$

$$(2.5.2) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}} \rightarrow D_c^b(Y)_{(I-d_X)\text{-ent}},$$

$$(2.5.3) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(Y)_{I\text{-ent}^{-1}},$$

$$(2.5.4) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(Y)_{d_X\text{-ent}^{-1}}.$$

Sans hypothèse de séparation de f , (2.5.1), (2.5.3) et (2.5.4) sont encore vrais.

L'hypothèse de séparation est également superflue pour (2.5.2). On peut l'éliminer ou bien en étudiant la q -divisibilité en dehors d'un sous-schéma de dimension fixée, ou bien en utilisant une théorie de $Rf_!$ sans hypothèse de séparation (voir 6.5).

THÉORÈME 2.6. — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé de schémas de type fini sur η , $d_Y = \dim Y$, $d_r = \max_{y \in |Y|} \dim f^{-1}(y)$. Alors $Rf^!$ induit

$$(2.6.1) \quad D_c^b(Y)_{\text{ent}} \rightarrow D_c^b(X)_{-d_r\text{-ent}},$$

$$(2.6.2) \quad D_c^b(Y)_{I\text{-ent}} \rightarrow D_c^b(X)_{(I-d_Y)\text{-ent}},$$

$$(2.6.3) \quad D_c^b(Y)_{I\text{-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(X)_{(I+d_r)\text{-ent}^{-1}},$$

$$(2.6.4) \quad D_c^b(Y)_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(X)_{d_Y\text{-ent}^{-1}}.$$

Soient X un schéma de type fini sur η , $a_X : X \rightarrow \eta$. Rappelons que $Ra_X^! \overline{\mathbb{Q}}_l$ est globalement défini (pas de problème dans le cas séparé, dans le cas général par [1, 3.2.4]). On pose $D_X = R\mathcal{H}om(-, Ra_X^! \overline{\mathbb{Q}}_l)$.

THÉORÈME 2.7. — Soient X un schéma de type fini sur η , $d_X = \dim X$. Alors D_X induit

$$(2.7.1) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}}^\circ \rightarrow D_c^b(X)_{-d_X\text{-ent}},$$

$$(2.7.2) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}}^\circ \rightarrow D_c^b(X)_{I\text{-ent}},$$

$$(2.7.3) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}}^\circ \rightarrow D_c^b(X)_{(I+d_X)\text{-ent}^{-1}},$$

$$(2.7.4) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}}^\circ \rightarrow D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}}.$$

De plus, pour $K \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}^{-1}}$, $\mathcal{H}^a(DK)$ est $(a+1)$ -entier, $-d_X \leq a \leq -1$.

THÉORÈME 2.8. — Soient X un schéma de type fini sur η , $d_X = \dim X$. Alors $R\mathcal{H}om_X(-, -)$ induit

$$\begin{aligned}
 (2.8.1) \quad & D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}}^\circ \times D_c^b(X)_{\text{ent}} \rightarrow D_c^b(X)_{\text{ent}}, \\
 (2.8.2) \quad & D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}}^\circ \times D_c^b(X)_{I\text{-ent}} \rightarrow D_c^b(X)_{(I-d_X)\text{-ent}}, \\
 (2.8.3) \quad & D_c^b(X)_{I\text{-ent}}^\circ \times D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}}, \\
 (2.8.4) \quad & D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}}^\circ \times D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(X)_{d_X\text{-ent}^{-1}}.
 \end{aligned}$$

3. Diviseurs à croisements normaux

PROPOSITION 3.1. — Soient $g : X \rightarrow Y$ un morphisme fini de schémas de type fini sur η , $L \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Alors g_*L est ϵ -entier (resp. ϵ -entier inverse) si et seulement si L l'est.

Démonstration. — On peut supposer que Y est réduit à un seul point y , X est réduit à un seul point x et $L = \mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Soient $G_y = \text{Gal}(\kappa(\overline{y})/\kappa(y))$, $G_x = \text{Gal}(\kappa(\overline{x})/\kappa(x))$. Le faisceau \mathcal{F} correspond à une représentation $\rho : G_x \rightarrow \text{GL}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\mathcal{F}_{\overline{x}})$. Soient K' une extension finie quasi-galoisienne (i. e., normale) de $\kappa(y)$ contenant $\kappa(x)$, $x' = \text{Spec } K'$. Pour $s \in G_y$, soit \mathcal{F}_s le faisceau sur x' correspondant à la représentation

$$\begin{aligned}
 \text{Gal}(\kappa(\overline{x'})/K') &\rightarrow \text{GL}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\mathcal{F}_{\overline{x}}) \\
 h &\mapsto \rho(s^{-1}hs).
 \end{aligned}$$

Ce faisceau ne dépend, à isomorphisme près, que de l'image de s dans G_y/G_x . D'après la formule de Mackey ([18, 7.3]), on a $(g_*\mathcal{F})_{x'} \simeq \bigoplus_s \mathcal{F}_s$, où s parcourt un système de représentants de G_y/G_x . Donc

$$\begin{aligned}
 g_*\mathcal{F} \text{ est } \epsilon(0)\text{-entier} &\Leftrightarrow (g_*\mathcal{F})_{x'} \text{ est } \epsilon(0)\text{-entier} \\
 &\Leftrightarrow \text{les } \mathcal{F}_s \text{ sont } \epsilon(0)\text{-entiers} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est } \epsilon(0)\text{-entier.}
 \end{aligned}$$

De même pour le cas entier inverse. □

Soient, en 3.2 et 3.3, K un corps quelconque, $\eta = \text{Spec } K$.

On va utiliser le cas spécial suivant du théorème de pureté de Gabber [8].

PROPOSITION 3.2. — Soient n un entier inversible sur η , $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $i : Y \rightarrow X$ une immersion fermée de schémas réguliers de type fini sur η purement de codimension c . Alors $Ri^!\Lambda \simeq \Lambda(-c)[-2c]$.

Gabber a remarqué que ce résultat découle facilement du théorème de pureté relative [21, XVI 3.7]. En effet, i provient par changement de base d'une immersion fermée $i_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ de schémas de type fini sur K_1 , où K_1 est un sous-corps de K , extension de type fini d'un corps premier K_0 . Alors $\text{Spec } K_1$ est le point générique d'un schéma S_1 intègre de type fini sur K_0 . Quitte à remplacer S_1 par un ouvert, on peut supposer que i_1 est la fibre générique d'une immersion fermée $i_2 : Y_2 \rightarrow X_2$ de schémas de type fini sur S_1 . Comme X_1 (resp. Y_1) est un schéma régulier ([10, 6.5.2 (i)]) et que X_2 (resp. Y_2) est de type fini sur K_0 , donc en particulier, excellent, quitte à remplacer X_2 et Y_2 par des voisinages ouverts de leurs fibres génériques, on peut supposer que X_2 et Y_2 sont réguliers (donc lisses sur K_0) et i_2 est purement de codimension c . D'après le théorème de pureté relative, $Ri_2^! \Lambda \simeq \Lambda(-c)[-2c]$. On conclut par passage à la limite. \square

Le lemme suivant est décalqué de [22, XXI 5.2.1].

LEMME 3.3. — Soient X un schéma de type fini sur η , $a_X : X \rightarrow \eta$, l un nombre premier inversible sur η , $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$.

(i) Il existe une partie fermée Y de dimension 0 de X telle que $a_{X*} \mathcal{G} \rightarrow a_{Y*}(\mathcal{G}|Y)$ soit injectif, où $a_Y : Y \rightarrow \eta$.

(ii) Si X est séparé de dimension n , et si U est un ouvert de X dont le complémentaire Z est de dimension $< n$, alors il existe une partie fermée Y de U de dimension 0 et une flèche surjective $a_{Y*}(\mathcal{G}|Y)(-n) \rightarrow R^{2n} a_{X!} \mathcal{G}$, où $a_Y : Y \rightarrow \eta$.

Démonstration. — (i) est évident.

(ii) Quitte à remplacer X par X_{red} et à rétrécir U , on peut supposer U régulier purement de dimension n et $\mathcal{G}|U$ lisse. Puisque $\dim Z < n$, on a

$$0 = R^{2n-1} a_{Z!}(\mathcal{G}|Z) \rightarrow R^{2n} a_{U!}(\mathcal{G}|U) \xrightarrow{\sim} R^{2n} a_{X!} \mathcal{G} \rightarrow R^{2n} a_{Z!}(\mathcal{G}|Z) = 0,$$

où $a_Z : Z \rightarrow \eta$. Donc on peut supposer $X = U$. Appliquant (i) à $\check{\mathcal{G}} = \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, on trouve une partie fermée Y de U de dimension 0 telle que $a_{U*} \check{\mathcal{G}} \rightarrow a_{Y*}(\check{\mathcal{G}}|Y)$ soit injectif, donc $D_\eta(a_{Y*}(\check{\mathcal{G}}|Y)) \rightarrow D_\eta(a_{U*} \check{\mathcal{G}})$ surjectif. Par le théorème de pureté 3.2, on a

$$D_\eta(a_{Y*}(\check{\mathcal{G}}|Y)) \simeq a_{Y*}(D_Y(\check{\mathcal{G}}|Y)) \simeq a_{Y*}(\mathcal{G}|Y),$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} D_\eta(a_{U*} \check{\mathcal{G}}) &= \mathcal{H}^0(D_\eta Ra_{U*} \check{\mathcal{G}}) \simeq \mathcal{H}^0(Ra_{U!} D_U \check{\mathcal{G}}) \\ &\simeq \mathcal{H}^0(Ra_{U!} \mathcal{G}(n)[2n]) = R^{2n} a_{U!} \mathcal{G}(n). \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

On reprend les notations du § 1.

COROLLAIRE 3.4. — Soient X un schéma de type fini sur η , $a_X : X \rightarrow \eta$, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. entier inverse).

(i) $a_{X*}\mathcal{G}$ est entier (resp. entier inverse).

(ii) Si X est séparé de dimension n , alors $a_{X!}\mathcal{G}$ est entier (resp. entier inverse), $R^{2n}a_{X!}\mathcal{G}$ est n -entier (resp. n -entier inverse).

La proposition suivante est décalqué de [22, XXI 5.3 (a)].

PROPOSITION 3.5. — Soient $j : X \hookrightarrow Y$ une immersion ouverte de schémas de type fini sur η de dimension 1, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier. Alors $j_*\mathcal{G}$ est entier.

Démonstration. — On se ramène au cas Y affine, puis Y projectif.

Définissons \mathcal{H} par la suite exacte courte

$$0 \rightarrow j_!\mathcal{G} \rightarrow j_*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0,$$

d'où la suite exacte

$$a_{X*}\mathcal{G} \rightarrow a_{Y*}\mathcal{H} \rightarrow R^1a_{X!}\mathcal{G},$$

où $a_X : X \rightarrow \eta$, $a_Y : Y \rightarrow \eta$. D'après 3.4 (i), $a_{X*}\mathcal{G}$ est entier. D'après le théorème de Deligne-Esnault (2.4.1), $R^1a_{X!}\mathcal{G}$ est entier. Donc $a_{Y*}\mathcal{H}$ l'est aussi. Mais \mathcal{H} est à supports dans une partie fermée de dimension 0 de Y , donc \mathcal{H} est entier. □

PROPOSITION 3.6. — Soient X un schéma régulier de type fini sur η de dimension 1, D un diviseur positif régulier. Posons $U = X - D$, $j : U \hookrightarrow X$. Soit \mathcal{G} un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau lisse sur U , entier, modérément ramifié sur X . Alors $Rj_*\mathcal{G}$ est I -entier.

Démonstration. — La question est locale sur X . Soit $x \in |D|$. Montrons que $(Rj_*\mathcal{G})_x$ est I -entier.

On a $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_E \overline{\mathbb{Q}}_l$, où E est un corps extension finie de $\overline{\mathbb{Q}}_l$, \mathcal{O} son anneau des entiers, $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ un \mathcal{O} -faisceau lisse (constructible) sur U . En vertu du lemme d'Abhyankar [20, XIII 5.2], il existe, au voisinage de x , un revêtement fini $g : \widetilde{X} \rightarrow X$ de la forme $\widetilde{X} = X[T]/(T^n - t)$ où t est une équation locale de x , n est un entier premier à l'exposant caractéristique de K , tel que $(g|U)^*(\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/l^2\mathcal{O}))$ se prolonge en un faisceau localement constant sur \widetilde{X} . Comme \mathcal{G} est facteur direct de $(g|U)_*(g|U)^*\mathcal{G}$, on est ramené à montrer le lemme pour le faisceau $(g|U)_*(g|U)^*\mathcal{G}$. Comme $g^{-1}(D)_{\text{red}}$ est un diviseur régulier, on peut alors se ramener à montrer le lemme pour un faisceau \mathcal{G} tel que $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/l^2\mathcal{O})$ se prolonge en un faisceau localement constant sur X , puis au cas $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/l^2\mathcal{O})$ constant par la formule de projection.

Soient $X_{(x)}$ le hensélisé de X en x , $U_{(x)} = X_{(x)} \times_X U$, $j_{(x)} : U_{(x)} \hookrightarrow X_{(x)}$, $\mathcal{H} = \mathcal{G}|_{U_{(x)}}$. Alors $\mathcal{H} \simeq (\mathcal{H}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_E \overline{\mathbb{Q}}_l$, avec $\mathcal{H}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/l^2\mathcal{O})$ constant. On a

$(Rj_{(x)*}\mathcal{H})_x = (Rj_*\mathcal{G})_x \in D_c^b(x, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. D'après 3.5, $(j_{(x)*}\mathcal{H})_x = (j_*\mathcal{G})_x$ est entier. Il reste à montrer que $(R^1j_{(x)*}\mathcal{H})_x$ est 1-entier.

On a une suite exacte de groupes

$$1 \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}'(1) \rightarrow G \rightarrow \text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)) \rightarrow 1,$$

où $\hat{\mathbb{Z}}'(1) = \prod_{p' \neq \text{car}(K)} \mathbb{Z}_{p'}(1)$, $G = \pi_1^{\text{mod}}(U_{(x)})$. Le faisceau \mathcal{H} correspond à une représentation l -adique de G . D'après le théorème de monodromie locale, la restriction de cette représentation à $\hat{\mathbb{Z}}'(1)$ est quasi-unipotente, donc unipotente. On obtient une filtration M finie, croissante de \mathcal{H} , telle que chaque $\text{gr}_a^M \mathcal{H}$ se prolonge en un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau lisse \mathcal{G}_a sur $X_{(x)}$.

Montrons que $(R^1j_{(x)*}M_a)_x$ est 1-entier par récurrence sur a , ce qui achèvera la démonstration de la proposition. L'assertion est claire pour $a \ll 0$. Supposons l'assertion établie pour $a - 1$. La suite exacte courte

$$0 \rightarrow M_{a-1} \rightarrow M_a \rightarrow \mathcal{G}_a|_{U_{(x)}} \rightarrow 0$$

donne le triangle distingué

$$Rj_{(x)*}M_{a-1} \rightarrow Rj_{(x)*}M_a \rightarrow Rj_{(x)*}(\mathcal{G}_a|_{U_{(x)}}) \rightarrow .$$

D'après une formule de projection, $Rj_{(x)*}(\mathcal{G}_a|_{U_{(x)}}) \simeq Rj_{(x)*}\overline{\mathbb{Q}}_l \otimes \mathcal{G}_a$. On a

$$(R^qj_{(x)*}\overline{\mathbb{Q}}_l)_x = \begin{cases} \overline{\mathbb{Q}}_l(-q) & \text{si } q = 0, 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc on a la suite exacte

$$(j_{(x)*}M_a)_x \rightarrow (\mathcal{G}_a)_x \rightarrow (R^1j_{(x)*}M_{a-1})_x \rightarrow (R^1j_{(x)*}M_a)_x \rightarrow (\mathcal{G}_a)_x(-1).$$

Ici $(j_{(x)*}M_a)_x$ est un sous-faisceau de $(j_{(x)*}\mathcal{H})_x$, donc entier. Par hypothèse de récurrence, $(R^1j_{(x)*}M_{a-1})_x$ est 1-entier. Donc $(\mathcal{G}_a)_x$ est entier, $(\mathcal{G}_a)_x(-1)$ est 1-entier. On en déduit que $(R^1j_{(x)*}M_a)_x$ est 1-entier. \square

Le lemme suivant est une variante de [22, XXI 5.6.2].

LEMME 3.7. — Soient X un schéma noethérien régulier, $D = \sum_{i \in I} D_i$ un diviseur strictement à croisements normaux de X avec $(D_i)_{i \in I}$ une famille finie de diviseurs réguliers, $U = X - D$, n un entier inversible sur X , $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(U, \Lambda)$ localement constant, modérément ramifié sur X .

(i) Soient $i \in I$, $U_{(i)} = X - \bigcup_{h \in I - \{i\}} D_h$, $D_{i,U_{(i)}} = D_i \times_X U_{(i)}$, d'où un diagramme à carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} D_{i,U_{(i)}} & \xrightarrow{j'^{(i)}} & D_i \\ \downarrow \iota'_i & & \downarrow \iota_i \\ U & \xrightarrow{j^{(i)}} & U_{(i)} \xrightarrow{j^{(i)}} X \end{array}$$

Alors le morphisme de changement de base

$$(3.7.1) \quad \iota_i^* Rj_{(i)*} (Rj_*^{(i)} \mathcal{G}) \rightarrow Rj'_{(i)*} \iota_i'^* (Rj_*^{(i)} \mathcal{G})$$

est un isomorphisme et les faisceaux

$$\iota_i'^* R^q j_*^{(i)} \mathcal{G}, \quad q \in \mathbb{Z},$$

sont localement constants, modérément ramifiés sur D_i .

(ii) Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas réguliers noethériens. Supposons que $f^{-1}(D)$ soit un diviseur à croisements normaux et que $(f^{-1}(D_i))_{i \in I}$ soit une famille de diviseurs réguliers. Considérons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y_U \subset & \xrightarrow{j_Y} & Y \\ \downarrow f_U & & \downarrow f \\ U \subset & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

Alors le morphisme de changement de base $f^* Rj_* \mathcal{G} \rightarrow Rj_{Y*} f_U^* \mathcal{G}$ est un isomorphisme.

Démonstration. — La question est locale sur X . Soit x un point de X . En vertu du lemme d'Abhyankar, il existe, au voisinage de x , un revêtement fini $g : \tilde{X} \rightarrow X$ de la forme $\tilde{X} = X[T_1, \dots, T_r] / (T_1^{n_1} - t_1, \dots, T_r^{n_r} - t_r)$ où les t_i sont des équations locales des composantes de D passant par x , et n_i des entiers premiers à l'exposant caractéristique de $\kappa(x)$, tel que $(g|U)^* \mathcal{G}$ se prolonge en un faisceau localement constant sur \tilde{X} . Comme \mathcal{G} s'injecte dans $(g|U)_*(g|U)^* \mathcal{G}$ et le quotient \mathcal{G}_1 est modérément ramifié sur X , on peut itérer cette construction. Pour tout $N \geq 1$, on obtient, quitte à rétrécir X , une résolution

$$\mathcal{G} \rightarrow (g|U)_*(g|U)^* \mathcal{G} \rightarrow (g_1|U)_*(g_1|U)^* \mathcal{G}_1 \rightarrow \dots \rightarrow (g_N|U)_*(g_N|U)^* \mathcal{G}_N.$$

Donc on est ramené à montrer le lemme pour le faisceau $(g|U)_*(g|U)^* \mathcal{G}$. Comme $g^{-1}(D)_{\text{red}} = \sum_{i \in I} g^{-1}(D_i)_{\text{red}}$ est un diviseur à croisements normaux avec $(g^{-1}(D_i)_{\text{red}})_{i \in I}$ une famille de diviseurs réguliers, on peut alors se ramener à montrer le lemme pour un faisceau \mathcal{G} qui se prolonge en un faisceau localement constant sur X , puis au cas $\mathcal{G} = \Lambda_U$ par la formule de projection.

Le point (ii) résulte alors de [8, § 8] et de la functorialité des classes des diviseurs [4, Th. finitude, 2.1.1].

Pour (i), notons que $D_{i,U_{(i)}}$ est un diviseur régulier de $U_{(i)}$, de complémentaire U . Pour tout q ,

$$\iota_i'^* R^q j_*^{(i)} \Lambda_U \simeq \begin{cases} \Lambda_{D_i, U_{(i)}} & \text{si } q = 0, \\ \Lambda_{D_i, U_{(i)}}(-1) & \text{si } q = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est localement constant, modérément ramifié sur D_i . On a donc un triangle distingué

$$\iota'_{i*} \Lambda_{D_i, U_{(i)}}(-1)[-2] \rightarrow \Lambda_{U_{(i)}} \rightarrow Rj_*^{(i)} \Lambda_U \rightarrow .$$

Le morphisme (3.7.1) est un isomorphisme car le morphisme de changement de base $\iota'_i Rj_{(i)*} \rightarrow Rj'_{(i)*} \iota'^{*}_i$ induit des isomorphismes sur $\Lambda_{U_{(i)}}$ en vertu de (ii) et trivialement sur $\iota'_{i*} \Lambda_{D_i, U_{(i)}}$. \square

La proposition suivante est décalquée de [22, XXI 5.6.1].

PROPOSITION 3.8. — Soient X un schéma de type fini sur η , D un diviseur à croisements normaux. Posons $U = X - D$, $j : U \hookrightarrow X$. Soit \mathcal{G} un \mathbb{Q}_l -faisceau lisse sur U , entier, modérément ramifié sur X . Alors $Rj_* \mathcal{G}$ est I -entier.

Démonstration. — Le problème étant local pour la topologie étale au voisinage d'un point fermé de D , on peut supposer D strictement à croisements normaux. Comme $\text{Reg}(X)$ est un ouvert de X contenant D , on peut supposer X régulier.

On pose $D = \sum_{i \in I} D_i$ avec $(D_i)_{i \in I}$ une famille finie de diviseurs réguliers. On fait une récurrence sur $n = \#I$. Le cas $n = 0$ est trivial. Pour $n > 0$, on choisit $i \in I$ et applique 3.7 (i), dont on conserve les notations. Pour tout $x \in |D_{i, U_{(i)}}|$, il existe un sous-schéma régulier de $U_{(i)}$ de dimension 1 tel que son intersection avec $D_{i, U_{(i)}}$ soit le schéma x . Donc $Rj_*^{(i)} \mathcal{G}$ est I -entier, d'après 3.7 (ii) et 3.6. Notons que $\sum_{h \in I - \{i\}} D_h \cap D_i$ est un diviseur à croisements normaux de D_i de complémentaire $D_{i, U_{(i)}}$, et pour tout q , $\iota'^{*}_i R^q j_*^{(i)} \mathcal{G}$ est un $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceaux lisse sur $D_{i, U_{(i)}}$, modérément ramifié sur D_i en vertu de 3.7 (i). Donc $\iota'_i Rj_* \mathcal{G} \simeq Rj'_{(i)*} \iota'^{*}_i Rj_*^{(i)} \mathcal{G}$ est I -entier, d'après l'hypothèse de récurrence. Comme i est arbitraire, on en conclut que $Rj_* \mathcal{G}$ est I -entier. \square

4. Démonstration de 2.4 à 2.8

La proposition suivante est une variante de [17, 2.6].

PROPOSITION 4.1. — Soient F un corps, X un schéma séparé de type fini sur $\text{Spec } F$, U une partie ouverte de X .

(i) Il existe un morphisme $r_0 : X'_0 \rightarrow X$ propre surjectif avec X'_0 régulier et un sous-schéma ouvert fermé W_0 de X'_0 contenant $r_0^{-1}(U)$ tels que $r_0^{-1}(U)$ soit le complémentaire d'un diviseur strictement à croisements normaux dans W_0 .

(ii) Pour tout $n \geq 0$, il existe une extension finie radicielle F' de F et un hyperrecouvrement propre n -tronqué s -scindé $r_\bullet : X'_\bullet \rightarrow X_{F'}$ tels que X'_m soit lisse sur $\text{Spec } F'$ et que $r_m^{-1}(U_{F'})$ soit le complémentaire d'un diviseur strictement à croisements normaux relativement à $\text{Spec } F'$ dans un sous-schéma ouvert fermé de X'_m , $0 \leq m \leq n$.

Démonstration. — (i) Au cas où X est intègre et $U \neq \emptyset$, il existe un morphisme $r_0 : X'_0 \rightarrow X$ propre surjectif avec X'_0 intègre et régulier tel que $r_0^{-1}(U)$ soit le complémentaire d'un diviseur strictement à croisements normaux, en vertu de [14, 4.1]. On prend $W_0 = X'_0$.

Le cas où X est intègre et $U = \emptyset$ en résulte : appliquer le cas précédent à X et la partie ouverte X pour obtenir r_0 , et puis prendre $W_0 = \emptyset$.

Dans le cas général, soient X_α les schémas réduits associés aux composantes irréductibles de X , $a : \coprod X_\alpha \rightarrow X$ le morphisme canonique. Alors a est fini et surjectif. Pour chaque α , appliquons (i) à X_α et $U \times_X X_\alpha$, on obtient $\phi_\alpha : (X_\alpha)'_0 \rightarrow X_\alpha$ propre surjectif avec $(X_\alpha)'_0$ régulier et un sous-schéma ouvert fermé W_α de $(X_\alpha)'_0$ contenant l'image inverse U_α de U tels que U_α soit le complémentaire dans W_α d'un diviseur strictement à croisements normaux. Posons $X'_0 = \coprod (X_\alpha)'_0$, $r_0 = a \circ \coprod \phi_\alpha$, $W_0 = \coprod W_\alpha$. Alors r_0 et W_0 satisfont aux conditions de (i).

(ii) Cas F parfait. On fait une récurrence sur n . Lorsque $n = 0$, (ii) dégénère en (i). Supposons donné un hyperrecouvrement n -tronqué $r_\bullet : X'_\bullet \rightarrow X$ vérifiant les conditions de (ii). On applique (i) au X -schéma $(\text{cosq}_n X'_\bullet)_{n+1}$ et l'image inverse de U . On obtient $\beta : N \rightarrow (\text{cosq}_n X'_\bullet)_{n+1}$ propre surjectif avec N lisse sur $\text{Spec } F$ et un sous-schéma ouvert fermé W de N tels que l'image inverse de U dans N soit le complémentaire d'un diviseur strictement à croisements normaux relativement à $\text{Spec } F$ dans W . L'hyperrecouvrement propre $(n + 1)$ -tronqué s -scindé associé au triplet (X'_\bullet, N, β) [21, V^{bis} 5.1.3] vérifie les conditions de (ii) pour $n + 1$.

Cas général. On prend une clôture parfaite \overline{F} de F et applique (ii) à \overline{F} , $X_{\overline{F}}$ et $U_{\overline{F}}$. L'hyperrecouvrement tronqué et les diviseurs strictement à croisements normaux obtenus se descendent à une sous-extension finie F' de F . □

4.2. — *Démonstration de (2.5.1).* — Il faut montrer que pour un $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceau constructible \mathcal{G} sur X , entier, $Rf_*\mathcal{G}$ est entier.

On fait une récurrence sur $d = \dim X$. Le cas $d \leq 0$ est trivial.

Soit $d \geq 1$. Choisissons un ouvert affine $U \xrightarrow{j} X$ tel que $\mathcal{G}|_U$ soit lisse et que son complémentaire $Z \xrightarrow{i} X$ soit de dimension $< d$. Le triangle distingué

$$i_* Ri^! \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow Rj_* j^* \mathcal{G} \rightarrow$$

induit le triangle distingué

$$R(fi)_* Ri^! \mathcal{G} \rightarrow Rf_* \mathcal{G} \rightarrow R(fj)_* j^* \mathcal{G} \rightarrow .$$

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, il suffit de voir que $Rj_* j^* \mathcal{G}$ et $R(fj)_* j^* \mathcal{G}$ sont entiers. Il suffit donc de vérifier le théorème sous l'hypothèse additionnelle que X est séparé et \mathcal{G} lisse.

On a $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_E \overline{\mathbb{Q}_l}$ avec $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ lisse. Soit $p : X' \rightarrow X$ un revêtement étale surjectif qui trivialisait $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{m})$, où \mathfrak{m} est l'idéal maximal de \mathcal{O} . Le faisceau \mathcal{G} est facteur direct de $p_* p^* \mathcal{G}$, de sorte qu'il suffit de voir l'intégralité de $R(fp)_* p^* \mathcal{G}$. Donc il suffit de vérifier le théorème sous l'hypothèse additionnelle que X est séparé et

4.2.1 $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_E \overline{\mathbb{Q}_l}$ avec $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{m})$ constant.

On factorise f en $X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{g} Y$, où j est une immersion ouverte, g est un morphisme propre. Comme Rg_* préserve l'intégralité en vertu du théorème de Deligne-Esnault (2.4.1), il suffit de prouver l'intégralité de $Rj_* \mathcal{G}$. On est donc ramené à démontrer (2.5.1) pour j et \mathcal{G} . Pour cela, on peut supposer Z affine, donc séparé.

Soit $i \geq 0$. On applique 4.1 (ii) à j et $n = i + 1$. Quitte à changer les notations, on peut supposer que l'extension radicielle de *loc. cit.* est triviale. On obtient un carré cartésien (de schémas simpliciaux $(i + 1)$ -tronqués)

$$\begin{array}{ccc} X'_{\bullet} & \xrightarrow{j'_{\bullet}} & Z'_{\bullet} \\ \downarrow s_{\bullet} & & \downarrow r_{\bullet} \\ X & \xrightarrow{j} & Z \end{array}$$

où r_{\bullet} est un hyperrecouvrement propre $(i + 1)$ -tronqué s -scindé, Z'_m lisse sur η , j'_m une immersion ouverte faisant de X'_m le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux relativement à η dans une partie ouverte fermée de Z'_m , $0 \leq m \leq i + 1$. D'après la descente cohomologique,

$$\tau_{\leq i} Rj_* \mathcal{G} \simeq \tau_{\leq i} Rj_* R s_{\bullet*} s_{\bullet}^* \mathcal{G} = \tau_{\leq i} R r_{\bullet*} R j'_{\bullet*} s_{\bullet}^* \mathcal{G}.$$

Comme $R r_{\bullet*}$ préserve l'intégralité (2.4.1), il suffit de voir l'intégralité des $R j'_{m*} s_m^* \mathcal{G}$, $0 \leq m \leq i$. Or $s_m^* \mathcal{G}$ satisfait encore à 4.2.1, donc est modérément ramifié sur Z'_m . Il suffit alors d'appliquer 3.8. □

PROPOSITION 4.3. — Soient X un schéma régulier séparé de type fini sur η , purement de dimension 1, $a_X : X \rightarrow \eta$, \mathcal{G} un $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceau lisse sur X , entier inverse. Alors $R^1 a_{X!} \mathcal{G}$ est 1-entier inverse.

Démonstration. — On peut supposer que $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_E \overline{\mathbb{Q}_l}$, avec $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ lisse. Pour $p : X' \rightarrow X$ un revêtement étale surjectif qui trivialisait $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{m})$, \mathcal{G} est un facteur direct de $p_* p^* \mathcal{G}$. Ceci permet de supposer $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ constant. On a

$$D_{\eta}(R^1 a_{X!} \mathcal{G}) \simeq \mathcal{H}^{-1}(D_{\eta} R a_{X!} \mathcal{G}) \simeq \mathcal{H}^{-1}(R a_{X*} \check{\mathcal{G}}(1)[2]) = R^1 a_{X*} \check{\mathcal{G}}(1).$$

Soit $j : X \hookrightarrow P$ une compactification régulière de X . De $a_X = a_P \circ j$ on déduit une suite spectrale

$$E_2^{pq} = R^p a_{P*} R^q j_* \check{\mathcal{G}} \Rightarrow R^{p+q} a_{X*}(\check{\mathcal{G}}).$$

D'après 3.8 et 3.4, $R^0 a_{P*} R^1 j_* \check{\mathcal{G}}$ est entier. D'autre part, $R^1 a_{P*} R^0 j_* \check{\mathcal{G}}$ est un quotient de $R^1 a_{P*} j_! \check{\mathcal{G}}$, donc entier en vertu de 2.4. Donc $R^1 a_{X*} \check{\mathcal{G}}$ est entier, $R^1 a_{X!} \mathcal{G}$ est 1-entier inverse. □

Démonstration de 2.4. — Comme on a déjà remarqué, le cas « entier » ((2.4.1) et (2.4.2)) de 2.4 est démontré dans [7, 0.2]. Supposons maintenant \mathcal{F} entier inverse. On peut supposer $Y = \eta$, $f = a_X$.

Traisons d'abord le cas $X = \mathbb{A}_\eta^1$. Soient $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert dense tel que $\mathcal{F}|U$ soit lisse, $i : Z \hookrightarrow X$ le fermé complémentaire. La suite exacte

$$0 \rightarrow j_! j^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_* i^* \mathcal{F} \rightarrow 0$$

donne le triangle distingué

$$Ra_{U!}(\mathcal{F}|U) \rightarrow Ra_{X!} \mathcal{F} \rightarrow Ra_{Z!}(\mathcal{F}|Z) \rightarrow .$$

D'après 3.4, $Ra_{Z!}(\mathcal{F}|Z)$ est entier inverse, $R^0 a_{U!}(\mathcal{F}|U)$ est entier inverse, $R^2 a_{U!}(\mathcal{F}|U)$ est 1-entier inverse. D'après 4.3, $R^1 a_{U!}(\mathcal{F}|U)$ est 1-entier inverse. Donc $Ra_{X!} \mathcal{F}$ est I -entier inverse et 1-entier inverse.

Pour le cas général, procédons par récurrence sur n . Le cas $n \leq 0$ est trivial. Soit $n \geq 1$. D'après le lemme de normalisation, il existe $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert dense de X et un morphisme $f : U \rightarrow Y = \mathbb{A}_\eta^1$ à fibres de dimension $\leq n - 1$. Soit $i : Z \hookrightarrow X$ le complémentaire de U . Alors Z est de dimension $\leq n - 1$. La suite exacte

$$0 \rightarrow j_! j^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_* i^* \mathcal{F} \rightarrow 0$$

donne le triangle distingué

$$Ra_{U!}(\mathcal{F}|U) \rightarrow Ra_{X!} \mathcal{F} \rightarrow Ra_{Z!}(\mathcal{F}|Z) \rightarrow .$$

Par l'hypothèse de récurrence, $Ra_{Z!}(\mathcal{F}|Z)$ est I -entier inverse et $(n - 1)$ -entier inverse. Il suffit donc de vérifier la proposition pour $\mathcal{F}|U$. Ceci résulte de la suite spectrale

$$E_2^{pq} = R^p a_{Y*} R^q f_!(\mathcal{F}|U) \Rightarrow R^{p+q} a_{U!}(\mathcal{F}|U),$$

de l'hypothèse de récurrence appliquée aux fibres de f et du cas d'une droite affine déjà traité. □

La proposition suivante est un analogue de 3.6.

PROPOSITION 4.4. — *Soient X un schéma régulier de type fini sur η de dimension 1, D un diviseur positif régulier. Posons $U = X - D$, $j : U \hookrightarrow X$. Soit \mathcal{G} un $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceau lisse sur U , entier inverse, modérément ramifié sur X . Alors $Rj_* \mathcal{G}$ est I -entier inverse.*

Démonstration. — Comme $\check{\mathcal{G}}$ est lisse, modérément ramifié sur X , entier, $Rj_*\check{\mathcal{G}}$ est I -entier en vertu de 3.8. Soit $i : D \hookrightarrow X$. D'après la dualité locale en dimension 1, $i^*R^1j_*\mathcal{G} \simeq (i^*j_*\check{\mathcal{G}})^\vee(-1)$ est 1-entier inverse, $i^*j_*\mathcal{G} \simeq (i^*R^1j_*\check{\mathcal{G}})^\vee(-1)$ est entier inverse. \square

La proposition suivante est un analogue de 3.8.

PROPOSITION 4.5. — Soient X un schéma de type fini sur η , D un diviseur à croisements normaux. Posons $U = X - D$, $j : U \hookrightarrow X$. Soit \mathcal{G} un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau lisse sur U , entier inverse, modérément ramifié sur X . Alors $Rj_*\mathcal{G}$ est I -entier inverse.

On déduit 4.5 de 4.4 de la même manière qu'on a déduit 3.8 de 3.6.

On déduit (2.5.3) de 4.5 de la même manière qu'on a déduit (2.5.1) de 3.8 en 4.2.

REMARQUE 4.6. — L'assertion (2.6.1) (resp. (2.6.3)) pour f une immersion fermée découle de ce qui précède. En effet, soient $j : Y - X \hookrightarrow Y$ l'ouvert complémentaire, $K \in D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. I -entier inverse). On a le triangle distingué

$$Rf^!K \rightarrow f^*K \rightarrow f^*Rj_*j^*K \rightarrow .$$

En appliquant (2.5.1) (resp. (2.5.3)) à j , on obtient que $f^*Rj_*j^*K$ est entier (resp. I -entier inverse), donc $f^*Rj_*j^*K[-1]$ l'est aussi (resp. $(I - 1)$ -entier inverse). Or f^*K est entier (resp. I -entier inverse). On en conclut que $Rf^!K$ l'est aussi. Cette démonstration donne un peu plus dans le cas entier inverse : pour $K \in \text{Mod}_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}-1}$, $R^a f^!K$ est $(a - 1)$ -entier inverse, $a \geq 1$.

4.7. — *Démonstration de 2.7.* — On peut supposer X réduit. On fait une récurrence sur d_X . Le cas $d_X \leq 0$ est trivial. Pour $d_X \geq 1$, il suffit de montrer que pour $K \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. entier inverse), DK est entier inverse et $(I + d_X)$ -entier inverse (resp. I -entier et $-d_X$ -entier et $\mathcal{H}^a(DK)$ est $(a + 1)$ -entier, $-d_X \leq a \leq -1$). Prenons un ouvert $j : U \hookrightarrow X$ régulier purement de dimension d_X tel que le complémentaire $i : V \hookrightarrow X$ soit de dimension $< d_X$ et que $K|U$ soit lisse. Alors $D(j^*K) \simeq (j^*K)^\vee(d_X)[2d_X]$.

On a le triangle distingué

$$(4.7.1) \quad i_*D(i^*K) \rightarrow DK \rightarrow Rj_*D(j^*K) \rightarrow .$$

D'après (2.5.3) (resp. (2.5.1)), $Rj_*D(j^*K)$ est $(I + d_X)$ -entier inverse (resp. $-d_X$ -entier). D'après l'hypothèse de récurrence, $i_*D(i^*K)$ l'est aussi. Donc DK est $(I + d_X)$ -entier inverse (resp. $-d_X$ -entier).

On a le triangle distingué

$$j_!D(j^*K) \rightarrow DK \rightarrow i_*D(Ri^!K) \rightarrow .$$

Le terme $j_!D(j^*K) \in D^{[-2d_X, -2d_X]}$ est entier inverse (resp. I -entier). D'après 4.6, $Ri^!K$ est entier (resp. $R^0i^!K$ est entier inverse et $R^ai^!K$ est $(a - 1)$ -entier inverse, $a \geq 1$). D'après l'hypothèse de récurrence, $D(Ri^!K)$ est entier inverse (resp. $\mathcal{H}^0(D(Ri^!K))$ est entier et $\mathcal{H}^a(D(Ri^!K))$ est $(a + 1)$ -entier, $a \leq -1$, en vertu de la suite spectrale

$$E_2^{pq} = \mathcal{H}^p(D(R^{-q}i^!K)) \Rightarrow \mathcal{H}^{p+q}(DRi^!K).$$

Donc DK est entier inverse (resp. I -entier et $\mathcal{H}^a(DK)$ est $(a + 1)$ -entier, $-d_X \leq a \leq -1$). □

Démonstration de 2.5. — Les assertions (2.5.1) et (2.5.3) sont déjà démontrées en 4.2 et 4.5. Si f est séparé, alors (2.5.2) et (2.5.4) découlent de 2.4 et 2.7 : $Rf_* \simeq D_Y Rf_! D_X$ induit

$$D_c^b(X)_{I\text{-ent}} \xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{(I+d_X)\text{-ent}^{-1}} \xrightarrow{Rf_!} D_c^b(Y)_{(I+d_X)\text{-ent}^{-1}} \xrightarrow{D_Y} D_c^b(Y)_{(I-d_X)\text{-ent}},$$

$$D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}} \xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{-d_X\text{-ent}} \xrightarrow{Rf_!} D_c^b(Y)_{-d_X\text{-ent}} \xrightarrow{D_Y} D_c^b(Y)_{d_X\text{-ent}^{-1}}.$$

Il reste à montrer (2.5.4) sans supposer f séparé. Pour cela, prenons un recouvrement ouvert affine $W \rightarrow X$. Soit $g_\bullet : \text{cosq}_0(W/X)_\bullet \rightarrow X$. Alors $Rf_* \simeq Rf_* Rg_{*\bullet} g_{\bullet}^*$, et il suffit d'appliquer le résultat du cas séparé. □

REMARQUE. — Les assertions (2.6.2) et (2.6.4) découlent de 2.7 : $Rf^! \simeq D_X f^* D_Y$ induit

$$D_c^b(Y)_{I\text{-ent}} \xrightarrow{D_Y} D_c^b(Y)_{(I+d_Y)\text{-ent}^{-1}} \xrightarrow{f^*} D_c^b(X)_{(I+d_Y)\text{-ent}^{-1}} \xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{(I-d_Y)\text{-ent}},$$

$$D_c^b(Y)_{\text{ent}^{-1}} \xrightarrow{D_Y} D_c^b(Y)_{-d_Y\text{-ent}} \xrightarrow{f^*} D_c^b(X)_{-d_Y\text{-ent}} \xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{d_Y\text{-ent}^{-1}}.$$

Dans le cas f quasi-fini, on peut améliorer (2.5.2) comme suit.

PROPOSITION 4.8. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme quasi-fini séparé de schémas de type fini sur η avec $d_X = \dim X \geq 1$. Alors Rf_* envoie $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{I\text{-ent}}$ dans $D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(I+1-d_X)\text{-ent}}$.

Démonstration. — Par le théorème principal de Zariski, on peut supposer que f est une immersion ouverte dominante. Soit $K \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier. On a le triangle distingué

$$i_* Ri^! f_! K \rightarrow f_! K \rightarrow Rf_* K \rightarrow,$$

où $i : Y - X \hookrightarrow Y$ est le fermé complémentaire. Il suffit donc d'appliquer (2.6.2). □

La proposition suivante généralise [7, 0.4].

PROPOSITION 4.9. — Soient $i : X \hookrightarrow Y$ une immersion de schémas de type fini sur η avec Y régulier, $d_Y = \dim Y$, $d_c = \text{codim}(X, Y)$, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. entier inverse) lisse. Soit $\epsilon : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ une fonction vérifiant

$$\epsilon(a) = \begin{cases} d_c & \text{si } 2d_c \leq a < d_c + d_Y, \\ a + 1 - d_Y & \text{si } d_c + d_Y \leq a < 2d_Y, \\ d_Y & \text{si } a = 2d_Y. \end{cases}$$

Alors $Ri^1\mathcal{G}$ est ϵ -entier (resp. $(I - d_c)$ -entier inverse).

Démonstration. — On va montrer que pour toute partie fermée W de X , $Ri^1_W\mathcal{G}$ est ϵ -entier (resp. $(I - d_c)$ -entier inverse), où $i_W : W \hookrightarrow Y$. Ici on a muni W de la structure de schéma réduit induite. On fait une récurrence noethérienne. Le cas $W = \emptyset$ est trivial. Pour $W \neq \emptyset$, on prend un ouvert régulier irréductible $j : U \hookrightarrow W$. Soit $i_Z : Z \hookrightarrow W$ son complémentaire. On a le triangle distingué

$$i_{Z*}Ri^1_Z Ri^1_W\mathcal{G} \rightarrow Ri^1_W\mathcal{G} \rightarrow Rj_*j^* Ri^1_W\mathcal{G} \rightarrow .$$

D'après 3.2, $j^* Ri^1_W\mathcal{G} = R(i_W j)^1\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}(-d)[-2d]$, où $d = \text{codim}(U, Y) \geq d_c$. Si $d_U = \dim U = 0$, alors $Rj_*j^* Ri^1_W\mathcal{G}$ est ϵ -entier car $\epsilon(2d) \leq d$; si $d_U \geq 1$, alors d'après (2.5.1) et 4.8, $Rj_*j^* Ri^1_W\mathcal{G}$ est d -entier et $(I + 1 - d - d_U)$ -entier, donc ϵ -entier, compte tenu du fait que $d + d_U \leq d_Y$. (Resp. d'après (2.5.3), $Rj_*j^* Ri^1_W\mathcal{G}$ est $(I - d)$ -entier inverse, donc $(I - d_c)$ -entier inverse.) D'après l'hypothèse de récurrence, $Ri^1_Z Ri^1_W\mathcal{G} = R(i_W i_Z)^1\mathcal{G}$ est ϵ -entier (resp. $(I - d_c)$ -entier inverse). Donc $Ri^1_W\mathcal{G}$ l'est aussi. \square

4.10. — Démonstration de 2.6. — Les assertions (2.6.2) et (2.6.4) sont traitées plus haut. Pour le reste, on fait une récurrence sur d_Y . Le cas $d_Y < 0$ est clair. Pour $d_Y \geq 0$, on peut supposer Y réduit. Soit $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. entier inverse). Il existe un ouvert régulier U de Y de complémentaire W de dimension $\leq d_Y - 1$ tel que $\mathcal{G}|_U$ soit lisse. On considère le diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} X_U & \xhookrightarrow{j'} & X & \xleftarrow{i'} & X_W \\ \downarrow f_U & & \downarrow f & & \downarrow f_W \\ U & \xhookrightarrow{j} & Y & \xleftarrow{i} & W \end{array}$$

On a le triangle distingué

$$(4.10.1) \quad i'_* Rf^1_W Ri^1\mathcal{G} \rightarrow Rf^1\mathcal{G} \rightarrow Rj'_* Rf^1_U j'^*\mathcal{G} \rightarrow .$$

D'après 4.6, $Ri^1\mathcal{G}$ est entier (resp. I -entier inverse), donc $Rf^1_W Ri^1\mathcal{G}$ est $-d_r$ -entier (resp. $(I + d_r)$ -entier inverse) en vertu de l'hypothèse de récurrence. Il reste à considérer $Rf^1_U(\mathcal{G}|_U)$.

Il suffit de montrer que pour Y régulier et $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. entier inverse) lisse, $Rf^! \mathcal{G}$ est $-d_r$ -entier (resp. $(I + d_r)$ -entier inverse). Le problème étant local sur Y , on peut supposer Y irréductible et que f se factorise en $X \xrightarrow{i_X} \mathbb{A}_Y^n \xrightarrow{p} Y$, où i_X est une immersion fermée. \mathbb{A}_Y^n est irréductible [10, 4.5.8], donc biéquidimensionnel [10, 5.2.1], donc $\text{codim}(X, \mathbb{A}_Y^n) = n + d_Y - d_X \geq n - d_r$, car $d_X \leq d_Y + d_r$. Il suffit donc d'appliquer 4.9 à i_X et $Rp^! \mathcal{G}[-2n] = p^* \mathcal{G}(n)$. \square

4.11. — *Démonstration de 2.8.* — Les assertions (2.8.2) et (2.8.4) découlent de 2.7 :

$$R\mathcal{H}om_X(-, -) \simeq D_X(- \otimes D_X -)$$

induit

$$\begin{aligned} D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}}^\circ \times D_c^b(X)_{I\text{-ent}} &\xrightarrow{(\text{id}, D_X)} D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}}^\circ \times D_c^b(X)_{(I+d_X)\text{-ent}^{-1}}^\circ \\ &\xrightarrow{\otimes} D_c^b(X)_{(I+d_X)\text{-ent}^{-1}}^\circ \xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{(I-d_X)\text{-ent}}, \\ D_c^b(X)_{\text{ent}}^\circ \times D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}} &\xrightarrow{(\text{id}, D_X)} D_c^b(X)_{\text{ent}}^\circ \times D_c^b(X)_{-d_X\text{-ent}}^\circ \\ &\xrightarrow{\otimes} D_c^b(X)_{-d_X\text{-ent}}^\circ \xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{d_X\text{-ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

Pour le reste, il suffit de montrer que pour $K, L \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, K entier inverse, L entier (resp. K entier, L entier inverse), $R\mathcal{H}om(K, L)$ est entier (resp. I -entier inverse). Par dévissage de K , on se ramène à supposer K de la forme $j_! \mathcal{G}$, où $j : Y \hookrightarrow X$ une immersion, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier inverse (resp. entier) lisse. Alors

$$R\mathcal{H}om_X(j_! \mathcal{G}, L) \simeq Rj_* R\mathcal{H}om_Y(\mathcal{G}, Rj^! L).$$

Il suffit d'appliquer (2.6.1) et (2.5.1) (resp. (2.6.3) et (2.5.3)). \square

5. Variantes et cycles proches

VARIANTE 5.1. — Soient k un corps fini, l un nombre premier $\neq \text{car}(k)$. Soit X un schéma de type fini sur k . Soit $r \in \mathbb{Q}$. On fixe un plongement $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$. On dit qu'un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau \mathcal{F} est r -entier (resp. r -entier inverse) si pour tout point géométrique \bar{x} au-dessus d'un point fermé x de X , et toute valeur propre α du Frobenius géométrique $F_{\bar{x}} \in \text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x))$ agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$, $\alpha/\iota(q^r)$ (resp. $\iota(q^r)/\alpha$) est entier sur \mathbb{Z} , où $q = \#\kappa(x)$. Cette définition ne dépend pas du choix de ι . On définit l'intégralité pour $K \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ de manière analogue à 2.2.

On a des résultats similaires pour les diverses opérations : 2.4 à 2.8, 3.8, 4.8, 4.9. Le cas entier de l'analogie de 2.4 est un théorème de Deligne [22, XXI

5.2.2]. Les démonstrations des autres résultats sont similaires à celles données aux §§ 3 et 4.

VARIANTE 5.2. — Soient R un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel fini $k = \mathbb{F}_{p^\nu}$, K son corps des fractions, $S = \text{Spec } R$, $\eta = \text{Spec } K$, $s = \text{Spec } k$. Soit X un schéma de type fini sur s . On a un topos $X \times_s \eta$ [22, XIII 1.2.4]. Rappelons qu'un faisceau d'ensembles sur $X \times_s \eta$ est un faisceau sur $X_{\bar{s}}$ muni d'une action continue [*ibid.*, 1.1.2] de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$, compatible à l'action de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ sur $X_{\bar{s}}$ (via $\text{Gal}(\overline{K}/K) \rightarrow \text{Gal}(\overline{k}/k)$). Fixons un nombre premier $l \neq p$. Soit $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X \times_s \eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Pour $x \in X$, soit $\Phi_x \in \text{Gal}(\overline{k}/\kappa(x)) \times_{\text{Gal}(\overline{k}/k)} \text{Gal}(\overline{K}/K)$ un relèvement du Frobenius géométrique $F_x \in \text{Gal}(\overline{k}/\kappa(x))$. D'après le théorème de monodromie locale, les valeurs propres de Φ_x agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ sont bien définies à multiplication près par des racines de l'unité. Soit $r \in \mathbb{Q}$. On fixe $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$. On dit que \mathcal{F} est r -entier (resp. r -entier inverse) si pour tout $x \in |X|$ et toute valeur propre α de Φ_x agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$, $\alpha/\iota(q^r)$ (resp. $\iota(q^r)/\alpha$) est entier sur \mathbb{Z} , où $q = \#\kappa(x)$. Cette définition ne dépend pas des choix de Φ_x et de ι . On définit l'intégralité pour $K \in D_c^b(X \times_s \eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ de manière analogue à 2.2.

Toute section continue σ de $\text{Gal}(\overline{K}/K) \rightarrow \text{Gal}(\overline{k}/k)$ induit un foncteur exact

$$\sigma^* : D_c^b(X \times_s \eta, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l).$$

Un complexe $K \in D_c^b(X \times_s \eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est ϵ -entier (resp. ϵ -entier inverse) si et seulement si σ^*K l'est. Comme σ^* commute aux six opérations et à la dualité, on déduit de 5.1 des résultats similaires pour ces opérations : 2.4 à 2.8, 3.8, 4.8, 4.9.

Soient S, η, s, l comme dans 5.2. Le résultat principal de ce § est le suivant.

THÉORÈME 5.3. — *Soit X un schéma de type fini sur S . Le foncteur des cycles proches*

$$R\Psi_X : D_c^b(X_\eta, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(X_s \times_s \eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)$$

induit

$$\begin{aligned} D_c^b(X_\eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}} &\rightarrow D_c^b(X_s \times_s \eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}}, \\ D_c^b(X_\eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{I\text{-ent}^{-1}} &\rightarrow D_c^b(X_s \times_s \eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{I\text{-ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

5.4. — Soient $S = \text{Spec } R$ un trait hensélien quelconque, η son point générique, s son point fermé. On va garder ces notations jusqu'en 5.7.

DÉFINITION 5.5. — (a) Soient X un S -schéma de type fini, Z une partie fermée contenant X_s . On dit que le couple (X, Z) est *semi-stable* si, localement pour la topologie étale, il est de la forme

$$(\text{Spec } R[t_1, \dots, t_n]/(t_1 \dots t_r - \pi), Z),$$

où π est une uniformisante de R , Z est défini par l'idéal $(t_1 \dots t_s)$, $1 \leq r \leq s \leq n$. Le couple est dit *strictement semi-stable* s'il est semi-stable et si Z est la somme d'une famille finie de diviseurs réguliers de X .

(b) Soit X un S -schéma de type fini. On dit que X est *strictement semi-stable* si (X, X_s) est un couple strictement semi-stable.

Soit (X, Z) un couple strictement semi-stable avec $Z = \sum_{i \in I} D_i$, $(D_i)_{i \in I}$ une famille finie de diviseurs réguliers. Alors $X_s = \bigcup_{i \in I - J} D_i$, où $J = \{i \in I \mid D_i \not\subset X_s\}$. Soit $H = \bigcup_{j \in J} D_j$ la réunion des composantes horizontales. Alors $Z = X_s \cup H$.

Nous établirons d'abord 5.3 dans le cas semi-stable. Nous aurons besoin pour cela des points (ii) et (iii) du lemme suivant (la partie (i) est utilisée dans la preuve de (ii)) :

LEMME 5.6. — Soient (X, Z) un couple strictement semi-stable sur S , $Z = \sum_{i \in I} D_i$ avec $(D_i)_{i \in I}$ une famille finie de diviseurs réguliers, J comme plus haut, $U = X - Z$, u l'inclusion $U \hookrightarrow X_\eta$, $\Lambda = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ avec l inversible sur S , $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(U, \Lambda)$ localement constant, modérément ramifié sur X .

(i) Soient $i \in J$, $U_{(i)} = X - \bigcup_{h \in I - \{i\}} D_h$, $D_{i, U_{(i)}} = D_i \times_X U_{(i)}$, d'où un diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & D_{i, U_{(i)}} & \xrightarrow{j^{(i)}} & (D_i)_\eta & \hookrightarrow & D_i \longleftarrow (D_i)_s \\
 & & \downarrow \iota'_i & & \downarrow (\iota_i)_\eta & & \downarrow \iota_i & & \downarrow (\iota_i)_s \\
 U & \xrightarrow{j^{(i)}} & U_{(i)} & \xrightarrow{j^{(i)}} & X_\eta & \hookrightarrow & X \longleftarrow & X_s \\
 & \searrow u & & & & & & &
 \end{array}$$

Alors la flèche

$$(5.6.1) \quad \alpha : (\iota_i)_s^* R\Psi_X Rj_{(i)*} (Rj_*^{(i)} \mathcal{G}) \rightarrow R\Psi_{D_i} Rj'_{(i)*} \iota_i'^* (Rj_*^{(i)} \mathcal{G})$$

composée de $(\iota_i)_s^* R\Psi_X (Ru_* \mathcal{G}) \rightarrow R\Psi_{D_i} (\iota_i)_\eta^* (Ru_* \mathcal{G})$ [22, XIII (2.1.7.2)] et du changement de base $R\Psi_{D_i} (\iota_i)_\eta^* Rj_{(i)*} (Rj_*^{(i)} \mathcal{G}) \rightarrow R\Psi_{D_i} Rj'_{(i)*} \iota_i'^* (Rj_*^{(i)} \mathcal{G})$ est un isomorphisme.

(ii) Soient $i \in I - J$, $U_{(i)}$, $D_{i,U_{(i)}}$ comme plus haut, d'où un diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc}
 U \subset & \longrightarrow & U_{(i)} & \longleftarrow & D_{i,U_{(i)}} \\
 \downarrow u & & \downarrow & & \downarrow j'_{(i)} \\
 & & & & D_i \\
 & & & & \downarrow (\iota_i)_s \\
 X_\eta \subset & \longrightarrow & X & \longleftarrow & X_s
 \end{array}$$

Alors $R\Psi_{U_{(i)}} \mathcal{G} \simeq \Psi_{U_{(i)}} \mathcal{G} \in \text{Mod}_c(D_{i,U_{(i)}} \times_s \eta, \Lambda)$ est lisse, modérément ramifié sur D_i , et le morphisme

$$(5.6.2) \quad \beta : (\iota_i)_s^* R\Psi_X Ru_* \mathcal{G} \rightarrow Rj'_{(i)*} R\Psi_{U_{(i)}} \mathcal{G}$$

déduit de $R\Psi_X Ru_* \mathcal{G} \rightarrow (\iota_i)_{s*} Rj'_{(i)*} R\Psi_{U_{(i)}} \mathcal{G}$ [22, XIII (2.1.7.1)] est un isomorphisme.

(iii) Supposons que $J = \emptyset$. Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas tel que Y soit un S -schéma strictement semi-stable avec $(f^{-1}(D_i))_{i \in I}$ une famille de diviseurs réguliers de Y . Alors le morphisme

$$(5.6.3) \quad \gamma : f_s^* R\Psi_X \mathcal{G} \rightarrow R\Psi_Y f_{\eta*} \mathcal{G}$$

[22, XIII (2.1.7.2)] est un isomorphisme.

Le point (ii) est une généralisation partielle de [11, 1.5 (a)].

Démonstration. — On remplace tout d'abord le premier énoncé de (ii) par l'assertion que les faisceaux $R^q \Psi_{U_{(i)}} \mathcal{G}$, $q \in \mathbb{Z}$ sont lisses, modérément ramifiés sur D_i . L'annulation des cycles proches supérieures résultera de (iii).

La question est locale sur X . Soit y un point de X_s . On peut supposer que $y \in D_j$ pour tout $j \in I$. Soit π une uniformisante de R . Il existe un ouvert de X contenant y , lisse sur

$$\text{Spec } R[t_j]_{j \in I} / \left(\prod_{j \in I - J} t_j - \pi \right)$$

avec t_j définissant D_j . En vertu du lemme d'Abhyankar, il existe, au voisinage de y , un revêtement fini $g : \widetilde{X} = X[T_j]_{j \in I} / (T_j^n - t_j)_{j \in I} \rightarrow X$ où n est un entier premier à l'exposant caractéristique de s , tel que $(g|U)^* \mathcal{G}$ se prolonge en un Λ -module localement constant constructible sur \widetilde{X} . Comme \mathcal{G} s'injecte dans $(g|U)_*(g|U)^* \mathcal{G}$ et le quotient \mathcal{G}_1 est modérément ramifié sur X , on peut itérer cette construction. Pour tout $N \geq 1$, on obtient, quitte à rétrécir X , une résolution

$$\mathcal{G} \rightarrow (g|U)_*(g|U)^* \mathcal{G} \rightarrow (g_1|U)_*(g_1|U)^* \mathcal{G}_1 \rightarrow \cdots \rightarrow (g_N|U)_*(g_N|U)^* \mathcal{G}_N.$$

Donc on est ramené à montrer le lemme pour le faisceau $(g|U)_*(g|U)^*\mathcal{G}$.

Soient R_1 l'anneau obtenu en adjoignant à R les n -ièmes racines de l'unité, $R' = R_1[\Pi]/(\Pi^n - \pi)$, $S' = \text{Spec } R'$. Comme $R\Psi$ commute au changement de traits $S' \rightarrow S$ [4, Th. finitude, 3.7], il suffit de montrer le lemme pour $((g|U)_*(g|U)^*\mathcal{G})_{S'} \simeq (g_{S'}|U_{S'})_*(g_{S'}|U_{S'})^*\mathcal{G}_{S'}$. Or $X_{S'} = \coprod_{\zeta} X_{\zeta}$, où X_{ζ} est lisse sur

$$\text{Spec } R[T_j]_{j \in J} / \left(\prod_{j \in I-J} T_j - \zeta \cdot \Pi \right),$$

ζ parcourt les n -ièmes racines de l'unité. Donc $(X_{S'}, g_{S'}^{-1}(Z_{S'})_{\text{red}})$ est un couple strictement semi-stable avec $(g_{S'}^{-1}(D_{i,S'})_{\text{red}})_{i \in I}$ une famille de diviseurs réguliers.

On peut alors se ramener à montrer le lemme pour un faisceau \mathcal{G} qui se prolonge en un Λ -module localement constant constructible sur X , puis au cas $\mathcal{G} = \Lambda_U$ par la formule de projection.

L'assertion (iii) découle alors de la fonctorialité de [12, 3.3]. Plus précisément, on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{CD} \wedge^q f_s^* R^1 \Psi_X \Lambda_{X_\eta} @>\simeq>> f_s^* R^q \Psi_X \Lambda_{X_\eta} \\ @VV \wedge^q \mathcal{H}^1 \gamma V @VV \mathcal{H}^q \gamma V \\ \wedge^q R^1 \Psi_Y f_\eta^* \Lambda_{X_\eta} @>\simeq>> R^q \Psi_Y f_\eta^* \Lambda_{X_\eta} \end{CD}$$

et

$$\begin{CD} 0 @>>> f_s^* \Lambda_{X_s}(-1) @>>> f_s^* \iota_X^* R^1 j_{X*} \Lambda_{X_\eta} @>>> f_s^* R^1 \Psi_X \Lambda_{X_\eta} @>>> 0 \\ @. @VV \simeq V @VV \simeq V @VV \mathcal{H}^1 \gamma V \\ 0 @>>> \Lambda_{Y_s}(-1) @>>> \iota_Y^* R^1 j_{Y*} f_\eta^* \Lambda_{X_\eta} @>>> R^1 \Psi_Y f_\eta^* \Lambda_{X_\eta} @>>> 0 \end{CD}$$

où $j_X : X_\eta \hookrightarrow X$, $j_Y : Y_\eta \hookrightarrow Y$, $\iota_X : X_s \rightarrow X$, $\iota_Y : Y_s \rightarrow Y$. Les lignes du deuxième diagramme sont des suites exactes courtes et le carré à gauche est donné par le diagramme commutatif

$$\begin{CD} f_s^* \Lambda_{X_s}(-1) @>d>> f_s^* \bigoplus_{i \in I} \Lambda_{X_i}(-1) @>\simeq_c>> f_s^* i_X^* R^1 j_{X*} \Lambda_{X_\eta} \\ @VV \simeq V @VV \simeq V @VV \downarrow V \\ \Lambda_{Y_s}(-1) @>d>> \bigoplus_{i \in I} \Lambda_{Y_i}(-1) @>\simeq_c>> i_Y^* R^1 j_{Y*} f_\eta^* \Lambda_{X_\eta} \end{CD}$$

où les flèches marquées d sont des diagonales et celles marquées c sont induites par les classes des diviseurs réguliers.

(i) Il s'agit de montrer l'assertion suivante :

(A) Le morphisme de foncteurs

$$(5.6.4) \quad (\iota_i)_s^* R\Psi_X Rj_{(i)*} \rightarrow R\Psi_{D_i} Rj'_{(i)*} \iota_i'^*$$

induit un isomorphisme sur $Rj_*^{(i)} \Lambda_U$.

On a un triangle distingué

$$(\iota_i)_s^* \Lambda_{D_i, U_{(i)}}(-1)[-2] \rightarrow \Lambda_{U_{(i)}} \rightarrow Rj_*^{(i)} \Lambda_U \rightarrow .$$

Comme (5.6.4) induit trivialement un isomorphisme sur le premier terme, (A) équivaut à

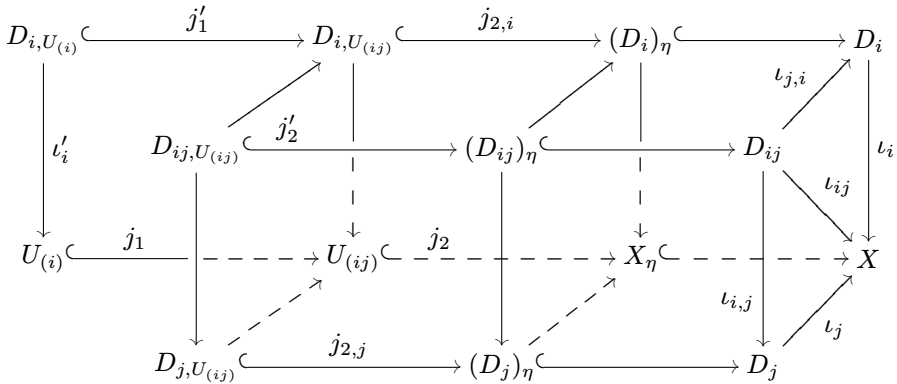
(B) Le morphisme (5.6.4) $\Lambda_{U_{(i)}}$

$$(5.6.5) \quad (\iota_i)_s^* R\Psi_X Rj_{(i)*} \Lambda_{U_{(i)}} \rightarrow R\Psi_{D_i} Rj'_{(i)*} \Lambda_{D_i, U_{(i)}}$$

est un isomorphisme.

On montre ces énoncés par récurrence sur $\#J \geq 1$. Le cas $\#J = 0$ est vide.

Dans le cas général, on montre d'abord que pour tout $j \in J - \{i\}$, (5.6.5) $| (D_{ij})_s$ est un isomorphisme, où $D_{ij} = D_i \cap D_j$. Soit $U_{(ij)} = X - \bigcup_{h \in I - \{i, j\}} D_h$. On considère le diagramme commutatif



D'après [21, XII 4.4 (i)], le composé

$$\begin{aligned} & (\iota_{ij})_s^* R\Psi_X R(j_2 j_1)_* \Lambda_{U_{(i)}} \\ & \rightarrow (\iota_{j,i})_s^* R\Psi_{D_i} R(j_{2,i} j_1')_* \Lambda_{D_i, U_{(i)}} \quad (5.6.5) | (D_{ij})_s \\ & \xrightarrow{\sim} R\Psi_{D_{ij}} Rj_{2*}' ((Rj_{1*}' \Lambda_{D_i, U_{(i)}}) | D_{ij, U_{(ij)}}) \quad \text{hypothèse de récurrence (A)} \end{aligned}$$

est égal au composé

$$\begin{aligned}
 & (\iota_{ij})_s^* R\Psi_X R(j_2 j_1)_* \Lambda_{U_{(i)}} \\
 & \xrightarrow{\sim} (\iota_{i,j})_s^* R\Psi_{D_j} R(j_2, j)_* ((Rj_{1*} \Lambda_{U_{(i)}})|_{D_{j,U_{(ij)}}}) \quad \text{hypothèse de récurrence (A)} \\
 & \rightarrow R\Psi_{D_{ij}} Rj'_{2*} ((Rj'_{1*} \Lambda_{U_{(i)}})|_{D_{ij,U_{(ij)}}}) \quad (*) \\
 & \xrightarrow{\sim} R\Psi_{D_{ij}} Rj'_{2*} ((Rj'_{1*} \Lambda_{D_{i,U_{(i)}}})|_{D_{ij,U_{(ij)}}}) \quad \text{3.7 (ii)}
 \end{aligned}$$

où (*) est un morphisme de type (5.6.4) appliqué à $(Rj_{1*} \Lambda_{U_{(i)}})|_{D_{j,U_{(ij)}}}$. On a le triangle distingué

$$\Lambda_{D_{j,U_{(ij)}}}(-1)[-2] \rightarrow \Lambda_{D_{j,U_{(ij)}}} \rightarrow (Rj_{1*} \Lambda_{U_{(i)}})|_{D_{j,U_{(ij)}}} \rightarrow .$$

Donc l'hypothèse de récurrence (B) implique que (*) est un isomorphisme. Il en résulte que $(5.6.5)|(D_{ij})_s$ est un isomorphisme.

Il reste à montrer que $(5.6.5)|(V_i)_s$ est un isomorphisme, où

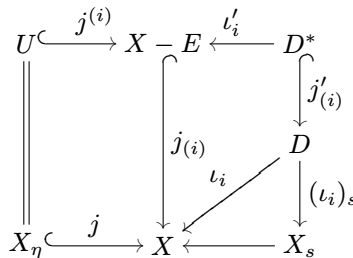
$$V_i = X - \bigcup_{h \in J - \{i\}} D_h.$$

Comme $(V_i)_\eta = U_{(i)}$, $j_{(i),V_i} = \text{id}_{U_{(i)}}$, ceci découle de (iii).

(ii) Comme $U_{(i)}$ est lisse sur S , $R\Psi_{U_{(i)}} \Lambda_U \simeq \Lambda_{D_{i,U_{(i)}}$, donc est modérément ramifié sur D_i .

Pour montrer que β est un isomorphisme, traitons d'abord deux cas spéciaux : (a) $\#J = 0$; (b) $\#(I - J) = \#J = 1$.

Dans le cas (a), on a $U = X_\eta$, $j_\eta = \text{id}_{X_\eta}$. On pose $D = D_i$, $E = \bigcup_{j \in I - \{i\}} D_j$, $D^* = D - D \cap E = D_{i,U_{(i)}}$, d'où un diagramme commutatif



On a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \wedge^q (\iota_i)_s^* R^1 \Psi_X \Lambda_U & \xrightarrow{\sim} & (\iota_i)_s^* R^q \Psi_X \Lambda_U \\
 \downarrow \wedge^q \mathcal{H}^1 \beta & & \downarrow \mathcal{H}^q \beta \\
 \wedge^q R^1 j'_{(i)*} R \Psi_{U(i)} \Lambda_U & \longrightarrow & R^q j'_{(i)*} R \Psi_{U(i)} \Lambda_U \\
 \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\
 \wedge^q R^1 j'_{(i)*} \Lambda_{D^*} & \xrightarrow{\sim} & R^q j'_{(i)*} \Lambda_{D^*}
 \end{array}$$

Donc il suffit de montrer que $\mathcal{H}^1 \beta$ est un isomorphisme.

On a le diagramme commutatif

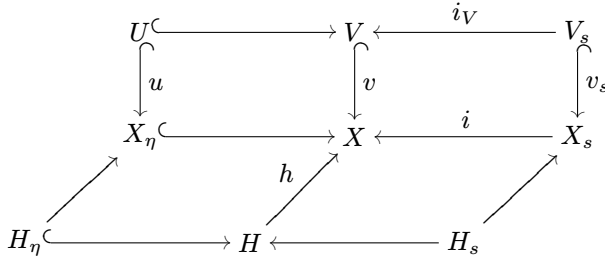
$$\begin{array}{ccccc}
 & & \iota_i^* R j_* \Lambda_U & \xrightarrow{p_1} & (\iota_i)_s^* R \Psi_X \Lambda_U \\
 & & \parallel & & \downarrow \beta \\
 \iota_i^* R j_{(i)*} \Lambda_{X-E} & \xrightarrow{r_1} & \iota_i^* R j_{(i)*} R j_*^{(i)} \Lambda_U & & \\
 b_1 \downarrow \simeq & & b_2 \downarrow & & \\
 R j'_{(i)*} \iota_i'^* \Lambda_{X-E} & \xrightarrow{r_2} & R j'_{(i)*} \iota_i'^* R j_*^{(i)} \Lambda_U & \xrightarrow{p_2} & R j'_{(i)*} R \Psi_{X-E} \Lambda_U \\
 & \searrow \sim & & \nearrow &
 \end{array}$$

où b_1, b_2 sont des changements de base, r_1, r_2 sont induits par l'adjonction $\Lambda_{X-E} \rightarrow R j_*^{(i)} \Lambda_U$. La flèche b_1 est un isomorphisme en vertu de 3.7 (ii). Le composé $p_2 r_2$ est induit de l'isomorphisme $\Lambda_{D^*} \xrightarrow{\sim} R \Psi_{X-E} \Lambda_U$, donc est un isomorphisme. On a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^1 \iota_i^* R j_{(i)*} \Lambda_{X-E} &= \bigoplus_{j \in I - \{i\}} (\iota_{j,i})_* \Lambda_{D_{ij}}, \\
 \mathcal{H}^1 \iota_i^* R j_* \Lambda_U &= \Lambda_D \oplus \bigoplus_{j \in I - \{i\}} (\iota_{j,i})_* \Lambda_{D_{ij}},
 \end{aligned}$$

$\mathcal{H}^1 (\iota_i)_s^* R \Psi_X \Lambda_U$ est le quotient de $\Lambda_D \oplus \bigoplus_{j \in I - \{i\}} (\iota_{j,i})_* \Lambda_{D_{ij}}$ par Λ_{D_i} inclus diagonalement, $\mathcal{H}^1 r_1$ est l'inclusion dans le second membre, $\mathcal{H}^1 p_1$ est la projection. Donc $\mathcal{H}^1 (p_1 r_1)$ est un isomorphisme. Il s'en suit que $\mathcal{H}^1 \beta$ est un isomorphisme. D'où (a).

Dans le cas (b), on a $D_i = X_s$, $(\iota_i)_s = \text{id}_{X_s}$, $H = D_j$ où j est l'élément de J . On pose $V = U_{(i)} = X - H$, d'où un diagramme à carrés cartésiens



On a le triangle distingué

$$i^* Rv_* \Lambda_V \xrightarrow{\beta'} R\Psi_X Ru_* \Lambda_U \rightarrow R\Phi_X Rv_* \Lambda_V \rightarrow .$$

On a

$$R^q v_* \Lambda_V = \begin{cases} \Lambda_X & \text{si } q = 0, \\ h_* \Lambda_H(-1) & \text{si } q = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

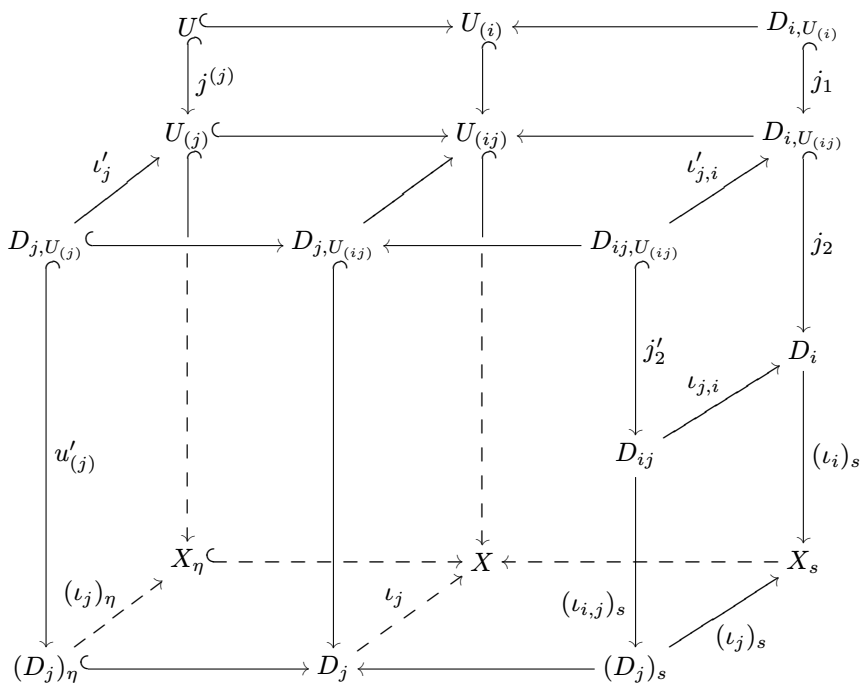
Donc $R\Phi_X R^q v_* \Lambda_V = 0$, pour tout q . Donc $R\Phi_X Rv_* \Lambda_V = 0$, β' est un isomorphisme. Par ailleurs, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 i^* Rv_* \Lambda_V & \xrightarrow{\beta'} & R\Psi_X Ru_* \Lambda_U \\
 \text{3.7 (ii)} \downarrow \simeq & & \downarrow \beta \\
 Rv_{s*} i_V^* \Lambda_V & \xrightarrow{\sim} & Rv_{s*} R\Psi_V \Lambda_U
 \end{array}$$

Donc β est un isomorphisme. D'où (b).

Pour le cas général, procédons par récurrence sur $\sharp J$. Le cas $\sharp J = 0$ est le cas (a) traité plus haut. Supposons $\sharp J \geq 1$. Prenons $j \in J$, d'où un diagramme

commutatif



On a un diagramme commutatif dans $D_c^b(D_{ij} \times_s \eta, \Lambda)$

(†)

$$\begin{array}{ccc}
 \iota_{j,i}^* (\iota_i)_s^* R\Psi_X Ru_* \Lambda_U & \xrightarrow{\beta_1} & \iota_{j,i}^* Rj_{2*} R\Psi_{U^{(ij)}} Rj_*^{(j)} \Lambda_U \xrightarrow{(b)} \iota_{j,i}^* Rj_{2j_1*} R\Psi_{U^{(i)}} \Lambda_U \\
 \parallel & & \downarrow \text{chg}^t \text{ de base} \quad \simeq \downarrow 3.7 (i) \\
 (\iota_{i,j})_s^* (\iota_j)_s^* R\Psi_X Ru_* \Lambda_U & & Rj_{2*} \iota'_{j,i}{}^* R\Psi_{U^{(ij)}} Rj_*^{(j)} \Lambda_U \xrightarrow{(b)} Rj_{2*} \iota'_{j,i}{}^* Rj_{1*} R\Psi_{U^{(i)}} \Lambda_U \\
 \simeq \downarrow (i) & & \simeq \downarrow (i) \\
 (\iota_{i,j})_s^* R\Psi_{D_j} Ru'_{(j)*} \iota'_j{}^* Rj_*^{(j)} \Lambda_U & \xrightarrow{\beta_2} & Rj_{2*} R\Psi_{D_{j,U^{(ij)}}} \iota'_j{}^* Rj_* \Lambda_U
 \end{array}$$

où $\beta|_{D_{ij}}$ est le composé des deux flèches de la première ligne de (†), β_1 est induit par une flèche de type (5.6.2) et β_2 est une flèche de type (5.6.2). La commutativité du carré à droite est claire et celle du carré à gauche se voit en

appliquant 5.7 au carré

$$\begin{array}{ccc}
 D_{j,U(ij)} & \longrightarrow & U(ij) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 D_j & \longrightarrow & X
 \end{array}$$

La flèche β_2 est un isomorphisme en vertu de l'hypothèse de récurrence et du triangle distingué

$$\Lambda_{D_j,U(ij)}(-1)[-2] \rightarrow \Lambda_{D_j,U(j)} \rightarrow \iota_j^* Rj_* \Lambda_U \rightarrow .$$

Donc $\beta|_{D_{ij}}$ est un isomorphisme. Il reste à montrer que $\beta|(D_i - D_{ij})$ est un isomorphisme, ce qui résulte de l'hypothèse de récurrence. \square

LEMME 5.7. — Soient

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{h} & X \\
 \downarrow f' & & \downarrow f \\
 Y' & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}$$

un carré commutatif de S -schémas, Λ un anneau. Alors on a un diagramme commutatif de foncteurs $D^+(X_\eta, \Lambda) \rightarrow D^+(Y'_s \times_s \eta, \Lambda)$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & g_s^* Rf_{s*} R\Psi_X & \longrightarrow & Rf'_{s*} h_s^* R\Psi_X \\
 & \nearrow & & & \searrow \\
 g_s^* R\Psi_Y Rf_{\eta*} & & & & Rf'_{s*} R\Psi_{X'} h_\eta^* \\
 & \searrow & & & \nearrow \\
 & & R\Psi_{Y'} g_\eta^* Rf_{\eta*} & \longrightarrow & R\Psi_{Y'} Rf'_{\eta*} h_\eta^*
 \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des changements de base, les flèches montantes sont [22, XIII (2.1.7.1)], les flèches descendantes sont [ibid., XIII (2.1.7.2)].

Démonstration. — Soient $K = \kappa(\eta)$, \bar{K} une clôture séparable de K , $\bar{\eta} = \text{Spec } \bar{K}$, \bar{S} le normalisé de S dans $\bar{\eta}$. On ajoute une barre au-dessus pour le changement de base $\bar{S} \rightarrow S$. On note $i : \bar{s} \rightarrow \bar{S}$, $j : \bar{\eta} \rightarrow \bar{S}$. Il suffit de montrer

la commutativité du diagramme de foncteurs $D^+(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \rightarrow D^+(Y'_{\bar{s}}, \Lambda)$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & g_{\bar{s}}^* Rf_{\bar{s}*} i_X^* Rj_{X*} & \longrightarrow & Rf'_{\bar{s}*} h_{\bar{s}}^* i_X^* Rj_{X*} \\
 & \nearrow & & & \searrow \\
 & g_{\bar{s}}^* i_Y^* Rf_{\bar{s}*} Rj_{X*} & & & Rf'_{\bar{s}*} i_{X'}^* \bar{h}^* Rj_{X*} \\
 & \sim & & & \sim \\
 g_{\bar{s}}^* i_Y^* Rj_{Y*} Rf_{\bar{\eta}*} & & i_Y^* \bar{g}^* Rf_{\bar{s}*} Rj_{X*} & \longrightarrow & i_Y^* Rf'_{\bar{s}*} \bar{h}^* Rj_{X*} & & Rf'_{\bar{s}*} i_{X'}^* Rj_{X'*} h_{\bar{\eta}}^* \\
 & \searrow & \sim & & \searrow & & \nearrow \\
 & i_Y^* \bar{g}^* Rj_{Y*} Rf_{\bar{\eta}*} & & & i_{Y'}^* Rf'_{\bar{s}*} Rj_{X'*} h_{\bar{\eta}}^* & & \\
 & & \searrow & & \sim & & \\
 & & i_{Y'}^* Rj_{Y'*} g_{\bar{\eta}}^* Rf_{\bar{\eta}*} & \longrightarrow & i_{Y'}^* Rj_{Y'*} Rf'_{\bar{\eta}*} h_{\bar{\eta}}^* & &
 \end{array}$$

où toutes les flèches sont des changements de base. La commutativité de la cellule en haut (resp. en bas) résulte de [21, XII 4.4 (i)] (resp. [21, XII 4.4 (ii)]). Les commutativités des deux autres cellules sont triviales. \square

PROPOSITION 5.8. — Soient S comme dans 5.2, (X, Z) un couple semi-stable sur S , $U = X - Z$, $u : U \rightarrow X_{\eta}$, $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(U, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. entier inverse) lisse, modérément ramifié sur X . Alors $R\Psi_X Ru_* \mathcal{G}$ est I -entier (resp. I -entier inverse).

Démonstration. — On peut supposer que (X, Z) est un couple strictement semi-stable sur S .

Traisons d’abord le cas particulier où Z est un diviseur régulier. Alors $Z = X_s$, $U = X_{\eta}$, $u = \text{id}$, X est lisse sur S . Soit $x \in |X_s|$. Quitte à faire un changement de traits étale, on peut supposer que $X \rightarrow S$ admet une section σ tel que $\sigma(s) = x$. D’après 5.6 (iii), $(R\Psi_X \mathcal{G})_x = \sigma_s^* R\Psi_X \mathcal{G} \simeq R\Psi_S \sigma_{\eta}^* \mathcal{G}$ est I -entier (resp. I -entier inverse), car $R\Psi_S$ s’identifie à l’identité.

Le cas général découle de 5.6 (ii), du cas spécial ci-dessus, et de la variante 5.2 de 3.8 (resp. 4.5) au-dessus de $s \times_s \eta$. \square

5.9. — Pour la démonstration de 5.3, nous aurons besoin du lemme 5.10 ci-après, analogue de 4.1.

Soient S un trait hensélien excellent, X un S -schéma séparé de type fini, $U \subset X_{\eta}$ une partie ouverte. Pour $f : S' \rightarrow S$ un morphisme fini de traits et $g : Y \rightarrow X_{S'}$ un morphisme propre de schémas, on considère la condition suivante :

5.9.1 On a $Y = Y_1 \amalg Y_2$, où Y_1 est strictement semi-stable sur S' , $g^{-1}(U) \subset Y_2$ et $(Y_2, Y_2 - g^{-1}(U))$ est un couple strictement semi-stable sur S' .

LEMME 5.10. — (i) *Il existe un morphisme fini de traits $S' \rightarrow S$ et un morphisme propre $r_0 : X'_0 \rightarrow X_{S'}$ de schémas vérifiant 5.9.1 (où $Y = X'_0$) et tels que $(r_0)_\eta$ surjectif.*

(ii) *Pour $n \geq 0$, il existe un morphisme fini de traits $f : S' \rightarrow S$ et une augmentation de schéma simplicial n -tronqué s -scindé $r_\bullet : X'_\bullet \rightarrow X_{S'}$ tels que pour $0 \leq m \leq n$, f et r_m vérifient 5.9.1 (où $Y = X'_m$) et que $r_{\bullet,\eta}$ soit un hyperrecouvrement propre n -tronqué.*

Démonstration. — (i) Cas X intègre et X_η géométriquement irréductible. Résulte de [14, 6.5]. Notons que l’hypothèse dans [ibid.] que S soit complet peut être remplacée par l’excellence de S , voir [19].

Cas général. On peut supposer que les composantes irréductibles de X_η sont géométriquement irréductibles. On fait une récurrence sur le nombre n de composantes irréductibles de X_η .

Si $n = 0$, alors X_η est vide. On prend $S' = S$, $X'_0 = \emptyset$. (i) est évident.

Pour $n \geq 1$, on prend une composante irréductible U_1 de X_η . Soit X_1 l’adhérence de U_1 dans X . C’est une composante irréductible de X . Soit X_2 la réunion des autres composantes irréductibles de X . On munit X_1 et X_2 des structures de schéma réduit induites. $(X_2)_\eta$ a $n-1$ composantes irréductibles, qui sont géométriquement irréductibles. On a un morphisme fini surjectif $X_1 \amalg X_2 \rightarrow X$. On applique (i) à X_1 et obtient $S_1 \rightarrow S$ et $(X_1)'_0 \rightarrow (X_1)_{S_1}$. Il suffit alors d’appliquer l’hypothèse de récurrence à $(X_2)_{S_1}$.

(ii) On fait une récurrence sur n . Quand $n = 0$, (ii) dégénère en (i). Supposons donnés $S_n \rightarrow S$ et $r_\bullet^{(n)} : X_\bullet^{(n)} \rightarrow X_{S_n}$ vérifiant (ii). On applique (i) au schéma $(\text{cosq}_n(X_\bullet^{(n)}/X_{S_n}))_{n+1}$ sur S_n (avec U remplacé par son image inverse) et obtient un morphisme fini de traits $S' \rightarrow S_n$ et un morphisme $\beta : N \rightarrow (\text{cosq}_n((X_\bullet^{(n)})_{S'}/X_{S'}))_{n+1}$ propre avec β_η surjectif vérifiant 5.9.1. Alors le $X_{S'}$ -schéma simplicial $(n+1)$ -tronqué s -scindé $r_\bullet : X'_\bullet \rightarrow X_{S'}$ associé au triplet $((X_\bullet^{(n)})_{S'}, N, \beta)$ vérifie les conditions de (ii) pour $n+1$. □

Démonstration de 5.3. — La démonstration est parallèle à celle de (2.5.1).

On fait une récurrence sur $d = \dim X_\eta$. Le cas $d < 0$ est trivial.

Soit $d \geq 0$. Il faut montrer que pour $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X_\eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. entier inverse), $R\Psi_X \mathcal{G}$ est entier (resp. I -entier inverse).

On peut supposer X_η réduit. On peut supposer X affine, donc séparé. Choisissons $j : U \hookrightarrow X_\eta$ ouvert régulier tel que $\mathcal{G}|_U$ soit lisse et que son complémentaire $Z = X_\eta - U$ soit de dimension $< d$. Soient \overline{Z} l’adhérence de Z , $i : \overline{Z} \hookrightarrow X$. On a le triangle distingué

$$R\Psi_X i_{\eta*} Ri_\eta^! \mathcal{G} \rightarrow R\Psi_X \mathcal{G} \rightarrow R\Psi_X Rj_* j^* \mathcal{G} \rightarrow .$$

Comme $R\Psi_X i_{\eta^*} R i_{\eta}^! \simeq i_{s^*} R\Psi_{\overline{Z}} R i_{\eta}^! \mathcal{G}$ est entier (resp. I -entier inverse) en vertu de l'hypothèse de récurrence, il suffit de voir que $R\Psi_X R j_* j^* \mathcal{G}$ est entier (resp. I -entier inverse).

Soit $\mathcal{H} = j^* \mathcal{G}$. $\mathcal{H} \simeq (\mathcal{H}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_E \overline{\mathbb{Q}}_l$ avec $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}$ lisse. Soit $p : U' \rightarrow U$ un revêtement étale surjectif qui trivialise $\mathcal{H}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{m})$, où \mathfrak{m} est l'idéal maximal de \mathcal{O} . \mathcal{H} est facteur direct de $p_* p^* \mathcal{H}$, de sorte qu'il suffit de voir l'intégralité (resp. la I -intégralité inverse) de $R\Psi_X R(jp)_* p^* \mathcal{H}$. On factorise le composé $U' \xrightarrow{jp} X_{\eta} \hookrightarrow X$ en $U' \xrightarrow{j'} X' \xrightarrow{g} X$ où j' est une immersion ouverte et g propre.

$$R\Psi_X R(jp)_* p^* \mathcal{H} \simeq Rg_{s^*} R\Psi_{X'} R j'_{\eta^*} p^* \mathcal{H}.$$

Donc il suffit de vérifier que pour X un schéma séparé de type fini sur S , $j : U \hookrightarrow X_{\eta}$ un ouvert et $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(U, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. entier inverse), $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_E \overline{\mathbb{Q}}_l$ avec $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{m})$ constant, on a $R\Psi_X R j_* \mathcal{G}$ entier (resp. I -entier inverse).

Soit $i \geq 0$. On applique 5.10 (ii) à j et $n = i + 1$. On obtient un morphisme fini de traits $f : S' \rightarrow S$ et un carré cartésien de schémas simpliciaux $(i + 1)$ -tronqués s -scindés

$$\begin{array}{ccc} U'_{\bullet} & \hookrightarrow & X'_{\bullet} \\ \downarrow s_{\bullet} & & \downarrow r_{\bullet} \\ U_{S'} & \hookrightarrow & X_{S'} \end{array}$$

où s_{\bullet} est un hyperrecouvrement propre $(i + 1)$ -tronqué et r_m vérifie 5.9.1, $0 \leq m \leq i + 1$. On note des changements de base de f encore par f .

$$f^* R\Psi_{X/S} R j_* \mathcal{G} \simeq R\Psi_{X_{S'}/S'} f^* R j_* \mathcal{G} \simeq R\Psi_{X_{S'}/S'} R j_{S'}^* \mathcal{G}_{S'},$$

donc

$$\begin{aligned} \tau_{\leq i} f^* R\Psi_{X/S} R j_* \mathcal{G} &\simeq \tau_{\leq i} R\Psi_{X_{S'}/S'} R j_{S'}^* R s_{\bullet} s_{\bullet}^* \mathcal{G}_{S'} \\ &= \tau_{\leq i} R\Psi_{X_{S'}/S'} R r_{\bullet} R j'_{\bullet} s_{\bullet}^* \mathcal{G}_{S'} \simeq \tau_{\leq i} R r_{\bullet} R\Psi_{X'} R j'_{\bullet} s_{\bullet}^* \mathcal{G}_{S'}. \end{aligned}$$

Il suffit de voir que $R\Psi_{X'_m/S'} R j'_{m^*} s_m^* \mathcal{G}_{S'}$ est entier (resp. I -entier inverse), $0 \leq m \leq i$. Il suffit alors d'appliquer 5.8 (ce qui est licite, car les $s_m^* \mathcal{G}_{S'}$ sont modérés). □

VARIANTE 5.11. — Soient S, η, s, l comme dans 5.2. Soient X un schéma de type fini sur S , $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Pour $r \in \mathbb{Q}$, \mathcal{F} est dit r -entier (resp. r -entier inverse) si \mathcal{F}_{η} et \mathcal{F}_s le sont. De même pour les complexes. On prend

$$\delta(X) = \max\{\dim X_{\eta} + 1, \dim X_s\},$$

$D_X = R\text{Hom}(-, Ra_X^! \overline{\mathbb{Q}}_l(1)[2])$, où $a_X : X \rightarrow S$. On a les analogues de 2.4 à 2.8, 4.8, 4.9, en remplaçant \dim par δ , d_r par

$$\max_{y \in |Y_\eta| \cup |Y_s|} \dim f^{-1}(y).$$

On a aussi un analogue de 3.8 en ajoutant l'hypothèse que (X, D) est un couple semi-stable sur S .

En effet, 2.4 pour S découle trivialement de 2.4 pour s et pour η . Pour l'analogue de 3.8, soit $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(U, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ lisse, entier, modérément ramifié sur X . D'après 3.8 pour η et 5.8, $Ru_* \mathcal{F}$ et $R\Psi_X Ru_* \mathcal{F}$ sont I -entiers, où $u : U \hookrightarrow X_\eta$. Soit $I = \text{Ker}(\text{Gal}(\overline{\eta}/\eta) \rightarrow \text{Gal}(\overline{s}/s))$ le groupe d'inertie. C'est une extension de $\hat{\mathbb{Z}}_{p'}(1)$ par un pro- p -groupe P . La suite spectrale de Hochschild-Serre donne

$$E_2^{p,q} = \mathcal{H}^p(I, R^q \Psi_X Ru_* \mathcal{F}) \Rightarrow i^* R^{p+q} j_* \mathcal{F},$$

où $i : X_s \rightarrow X$. Soit $R_t^q = (R^q \Psi_X Ru_* \mathcal{F})^P$. Si σ est un générateur de $\hat{\mathbb{Z}}_{p'}(1)$, on a

$$E_2^{0,q} = \text{Ker}(\sigma - 1, R_t^q), \quad E_2^{1,q} = \text{Coker}(\sigma - 1, R_t^q)(-1),$$

et $E_2^{p,q} = 0$ pour $p \neq 0, 1$. Donc $Rj_* \mathcal{F}$ est I -entier.

Les résultats (2.5.1) et (2.5.3) pour S découlent de ces résultats pour s et pour η et de 5.3, en imitant les arguments dans [4, Th. finitude, 3.11, 3.12] comme suit. Le cas spécial $f = j_Y : Y_\eta \hookrightarrow Y$ résulte de 5.3 et de la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{p,q} = \mathcal{H}^p(I, R^q \Psi_Y -) \Rightarrow i_Y^* R^{p+q} j_{Y*} -,$$

où $i_Y : Y_s \rightarrow Y$. Traitons le cas général. Soit $L \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ entier (resp. I -entier inverse). Soient $i_X : X_s \rightarrow X$, $j_X : X_\eta \hookrightarrow X$. On a les triangles distingués

$$\begin{aligned} i_{X*} Ri_X^! L \rightarrow L \rightarrow Rj_{X*} j_X^* L \rightarrow, \\ R(f i_X)_* Ri_X^! L \rightarrow Rf_* L \rightarrow R(f j_X)_* j_X^* L \rightarrow. \end{aligned}$$

D'après le cas spécial, $Rj_{X*} j_X^* L$ est entier (resp. I -entier inverse), donc $Ri_X^! L$ l'est aussi. Comme $f i_X = i_Y f_s$, $f j_X = j_Y f_\eta$, on conclut en appliquant (2.5.1) (resp. (2.5.3)) pour s et pour η et le cas spécial.

Une fois (2.5.1) et (2.5.3) établis pour S , on peut refaire 4.6 à 4.9 et 4.11, donnant la démonstration de 2.5 à 2.8, sauf (2.6.1) et (2.6.3). Les résultats (2.6.1) et (2.6.3) pour S découlent de leurs analogues pour s et pour η , en appliquant 4.6 pour S et (4.10.1) à $U = Y_\eta$, $W = Y_s$. Notons que (2.7.3) et (2.7.1) pour S peuvent aussi se déduire de leurs analogues pour s et pour η , en appliquant (4.7.1) à $U = X_\eta$, $V = X_s$.

VARIANTE 5.12. — On peut remplacer les faisceaux usuels partout par des faisceaux de Weil [5, 1.1.10]. Tous les résultats et les variantes qui précèdent restent valables.

VARIANTE 5.13. — Soit A un sous-anneau intégralement fermé de $\overline{\mathbb{Q}_l}$. On pose

$$A^{-1} = \left\{ \alpha \in \overline{\mathbb{Q}_l}^\times \mid \alpha^{-1} \in A \right\}.$$

On fixe un plongement $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_l}$. Avec les notations du § 1, pour $r \in \mathbb{Q}$, un $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceau \mathcal{F} sur un schéma X de type fini sur η est dit r - A -entier (resp. r - A -entier inverse) si pour tout $x \in |X|$, les valeurs propres de Φ_x sont dans $\iota(q^r)A$ (resp. $\iota(q^r)A^{-1}$), où $q = \#\kappa(x)$. Cette définition ne dépend pas des choix de Φ_x et de ι . On dit que \mathcal{F} est A -entier (resp. A -entier inverse) s'il est 0 - A -entier (resp. 0 - A -entier inverse). On définit aussi la A -intégralité des complexes. Tous les résultats et les variantes restent valables pour ces notions.

Si A est de plus complètement intégralement clos [3, V, § 1, n° 4, déf. 5] (en particulier si A est la fermeture intégrale d'un sous-anneau noethérien intégralement clos de $\overline{\mathbb{Q}_l}$ [*ibid.*, exerc. 14]), alors d'après un lemme de Fatou [13, 8.3], \mathcal{F} est r - A -entier si et seulement si pour tout $x \in |X|$ et tout entier $n \geq 1$, $\text{Tr}(\Phi_x^n, \mathcal{F}_{\bar{x}})$ appartient à $\iota(q^{nr})A$. Ce critère n'a pas d'analogue pour les faisceaux entiers inverses.

Si on prend pour A la fermeture intégrale de \mathbb{Z} dans $\overline{\mathbb{Q}_l}$, on retrouve la notion d'intégralité dans ce qui précède.

Soit T un ensemble de nombres premiers. Si on prend pour A la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}[1/t]_{t \in T}$ dans $\overline{\mathbb{Q}_l}$, on retrouve la notion de T -intégralité dans [22, XXI 5] et [7].

6. Appendice : Intégralité sur les champs algébriques

Soient K un corps fini de caractéristique p ou un corps local de caractéristique résiduelle p , $\eta = \text{Spec } K$, l un nombre premier $\neq p$. Pour \mathcal{X} un η -champ algébrique [16, 4.1] de type fini, on note $\text{Mod}_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceaux constructibles sur le site lisse-étale de \mathcal{X} [*ibid.*, 12.1 (i)]. On dispose, par [15], d'une catégorie triangulée $D_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ munie d'une t -structure de cœur $\text{Mod}_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$. On écrira $\text{Mod}_c(\mathcal{X})$ pour $\text{Mod}_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ et $D_c(\mathcal{X})$ pour $D_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$. On dispose d'un formalisme de six opérations : pour $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme

de η -champs algébriques de type fini,

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{X}} &: D_c(\mathcal{X})^\circ \rightarrow D_c(\mathcal{X}), \\ - \otimes - &: D_c^-(\mathcal{X}) \times D_c^-(\mathcal{X}) \rightarrow D_c^-(\mathcal{X}), \\ R\mathcal{H}om_{\mathcal{X}}(-, -) &: D_c^-(\mathcal{X})^\circ \times D_c^+(\mathcal{X}) \rightarrow D_c^+(\mathcal{X}), \\ Rf_* &: D_c^+(\mathcal{X}) \rightarrow D_c^+(\mathcal{Y}), \\ Rf_! &: D_c^-(\mathcal{X}) \rightarrow D_c^-(\mathcal{Y}), \\ f^*, Rf^! &: D_c(\mathcal{Y}) \rightarrow D_c(\mathcal{X}). \end{aligned}$$

Si \mathcal{X} est un η -champ de Deligne-Mumford de type fini, $\text{Mod}_c(\mathcal{X})$ s'identifie à la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux constructibles sur le site *étale* de \mathcal{X} [16, 12.1 (ii)].

DÉFINITION 6.1. — Soit $\epsilon : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ une fonction. On dit que $L \in D_c(\mathcal{X})$ est ϵ -entier (resp. ϵ -entier inverse) si pour tout point $i : x \rightarrow \mathcal{X}$ avec $\kappa(x)$ une extension finie de K et tout $a \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^a(i^*L) \in \text{Mod}_c(x, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est $\epsilon(a)$ -entier (resp. $\epsilon(a)$ -entier inverse) (au sens de 2.1).

Si \mathcal{X} est un schéma de type fini sur η et $L \in D_c^b$, alors cette définition coïncide avec 2.2.

Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de η -champs algébriques de type fini. Si $M \in D_c(\mathcal{Y})$ est ϵ -entier (resp. ϵ -entier inverse), il en est de même de $f^*M \in D_c(\mathcal{X})$. La réciproque est vraie lorsque f est surjectif. Cela donne le critère suivant : $L \in D_c^b(\mathcal{X})$ est ϵ -entier (resp. ϵ -entier inverse) si et seulement si pour tout (ou pour un) morphisme surjectif $g : X \rightarrow \mathcal{X}$ avec X un schéma de type fini sur η , g^*L est ϵ -entier (resp. ϵ -entier inverse) (au sens de 2.2). Pour $r \in \mathbb{Q}$, $- \otimes -$ induit

$$\begin{aligned} D_c^-(\mathcal{X})_{rI\text{-ent}} \times D_c^-(\mathcal{X})_{rI\text{-ent}} &\rightarrow D_c^-(\mathcal{X})_{rI\text{-ent}}, \\ D_c^-(\mathcal{X})_{rI\text{-ent}^{-1}} \times D_c^-(\mathcal{X})_{rI\text{-ent}^{-1}} &\rightarrow D_c^-(\mathcal{X})_{rI\text{-ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

Pour $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Mod}_c(\mathcal{X})$ avec \mathcal{F} lisse, si \mathcal{F} est entier inverse (resp. entier) et \mathcal{G} est entier (resp. entier inverse), on a

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \text{Mod}_c(\mathcal{X})_{\text{ent}} \text{ (resp. } \in \text{Mod}_c(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}}).$$

On suppose dorénavant que \mathcal{X} est non vide. Rappelons qu'une présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ est un morphisme surjectif lisse avec X un espace algébrique. On pose $c_{\mathcal{X}} = \min_P \dim P \in \mathbb{N}$, où P parcourt les présentations $P : X \rightarrow \mathcal{X}$, $\dim P = \sup_{x \in X} \dim_x P$ [16, p. 98], $d_{\mathcal{X}} = \dim \mathcal{X} \in \mathbb{Z}$ [*ibid.*, (11.15)]. Par définition, $d_{\mathcal{X}} \geq -c_{\mathcal{X}}$. On a $c_{\mathcal{X}} = 0$ si et seulement si \mathcal{X} est un η -champs de

Deligne-Mumford. On pose $c_r = \min \dim P \in \mathbb{N}$, où le minimum est pris sur tous les systèmes

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{P} & \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} Y & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & & \downarrow & & \downarrow f \\ & & Y & \xrightarrow{Q} & \mathcal{Y} \end{array}$$

où P et Q sont des présentations et le carré est 2-cartésien, $d_r = \dim f = \max_{\xi} \dim \mathcal{X}_{\xi} \in \mathbb{Z}$, où ξ parcourt les points de \mathcal{Y} . On a $d_r \geq -c_r$. Rappelons que f est dit *relativement de Deligne-Mumford* [ibid., 7.3.3] si pour tout schéma affine Y et tout morphisme $Y \rightarrow \mathcal{Y}$, le produit fibré $Y \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ est un η -champ de Deligne-Mumford. On a $c_r = 0$ si et seulement si f est un morphisme relativement de Deligne-Mumford. On a $c_r \leq c_{\mathcal{X}} \leq c_{\mathcal{Y}} + c_r$, $d_r - c_{\mathcal{Y}} \leq d_{\mathcal{X}} \leq d_{\mathcal{Y}} + d_r$.

PROPOSITION 6.2. — *Le foncteur $D_{\mathcal{X}}$ induit*

$$\begin{aligned} D_c(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}}^{\circ} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{-d_{\mathcal{X}}\text{-ent}}, \\ D_c(\mathcal{X})_{I\text{-ent}^{-1}}^{\circ} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{(I-c_{\mathcal{X}})\text{-ent}}, \\ D_c(\mathcal{X})_{I\text{-ent}}^{\circ} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{(I+d_{\mathcal{X}})\text{-ent}^{-1}}, \\ D_c(\mathcal{X})_{\text{ent}}^{\circ} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{c_{\mathcal{X}}\text{-ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

De plus, pour $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X)_{\text{ent}^{-1}}$, $\mathcal{H}^a(D_{\mathcal{X}}\mathcal{F})$ est $(a - c_{\mathcal{X}} + 1)$ -entier, $a \leq c_{\mathcal{X}} - 1$.

Démonstration. — On prend une présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ purement de dimension $c_{\mathcal{X}}$ avec X un schéma de type fini sur η . On a $\dim X \leq d_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{X}}$. Pour $L \in D_c(\mathcal{X})$, $P^*D_{\mathcal{X}}L \simeq D_X R P^*L \simeq (D_X P^*L)(-c_{\mathcal{X}})[-2c_{\mathcal{X}}]$. Comme l'amplitude cohomologique de D_X est bornée, il suffit donc d'appliquer 2.7. \square

PROPOSITION 6.3. — *Le foncteur $Rf^!$ induit*

$$\begin{aligned} D_c(\mathcal{Y})_{\text{ent}} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{-d_r\text{-ent}}, \\ D_c(\mathcal{Y})_{I\text{-ent}} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{(I-d_{\mathcal{Y}}-c_{\mathcal{Y}}-c_r)\text{-ent}}, \\ D_c(\mathcal{Y})_{I\text{-ent}^{-1}} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{(I+d_r)\text{-ent}^{-1}}, \\ D_c(\mathcal{Y})_{\text{ent}^{-1}} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{(d_{\mathcal{Y}}+c_{\mathcal{Y}}+c_r)\text{-ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Formons le diagramme à carré 2-cartésien

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{P} & \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} Y & \xrightarrow{Q'} & \mathcal{X} \\ & & \downarrow f_Y & & \downarrow f \\ & & Y & \xrightarrow{Q} & \mathcal{Y} \end{array}$$

où Q est une présentation purement de dimension c_Y , P est une présentation purement de dimension c_r , Y est un schéma quasi-compact, X est un schéma affine (donc séparé sur Y). On a $\dim Y \leq d_Y + c_Y$, $\dim(f_Y \circ P) \leq d_r + c_r$. Pour $L \in D_c(\mathcal{Y})$,

$$(Q' \circ P)^* Rf^! L \simeq P^* Rf_Y^! Q^* L \simeq R(f_Y \circ P)^! Q^* L(-c_r)[-2c_r].$$

Il suffit alors d'appliquer 2.6. □

PROPOSITION 6.4. — *Le foncteur Rf_* induit*

$$(6.4.1) \quad D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}} \rightarrow D_c^+(\mathcal{Y})_{\text{ent}},$$

$$(6.4.2) \quad D_c^+(\mathcal{X})_{I\text{-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^+(\mathcal{Y})_{I\text{-ent}^{-1}},$$

et $Rf_!$ induit

$$(6.4.3) \quad D_c^-(\mathcal{X})_{I\text{-ent}} \rightarrow D_c^-(\mathcal{Y})_{(I-d_r)\text{-ent}},$$

$$(6.4.4) \quad D_c^-(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^-(\mathcal{Y})_{d_r\text{-ent}^{-1}}.$$

Si f est relativement de Deligne-Mumford, Rf_ induit*

$$(6.4.5) \quad D_c^+(\mathcal{X})_{I\text{-ent}} \rightarrow D_c^+(\mathcal{Y})_{(I-d_{\mathcal{X}}-c_Y)\text{-ent}},$$

$$(6.4.6) \quad D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^+(\mathcal{Y})_{(d_{\mathcal{X}}+c_Y)\text{-ent}^{-1}},$$

et $Rf_!$ induit

$$(6.4.7) \quad D_c^-(\mathcal{X})_{\text{ent}} \rightarrow D_c^-(\mathcal{Y})_{\text{ent}},$$

$$(6.4.8) \quad D_c^-(\mathcal{X})_{I\text{-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^-(\mathcal{Y})_{I\text{-ent}^{-1}}.$$

Démonstration. — Soit $Y \rightarrow \mathcal{Y}$ une présentation avec Y est un schéma de type fini sur η . Pour (6.4.1) et (6.4.2), quitte à remplacer \mathcal{Y} par Y , on peut supposer que \mathcal{Y} est un schéma. On prend un hyperrecouvrement lisse $P_\bullet : X_\bullet \rightarrow \mathcal{X}$ où les X_n sont des schémas affines (donc séparés sur \mathcal{Y}). Pour $L \in D_c^+(\mathcal{X})$, $Rf_* \xrightarrow{\sim} Rf_* RP_{\bullet*} P_\bullet^* L$. Il suffit alors d'appliquer (2.5.1) et (2.5.3).

Pour les résultats concernant $Rf_!$, on peut supposer que \mathcal{Y} est le spectre d'un corps. On a $d_{\mathcal{X}} = d_r$. Alors (6.4.3) et (6.4.4) découlent du dernier alinéa et de 6.2 : $Rf_! = D_{\mathcal{Y}} Rf_* D_{\mathcal{X}}$ induit

$$\begin{aligned} D_c^-(\mathcal{X})_{I\text{-ent}} &\xrightarrow{D_{\mathcal{X}}} D_c^+(\mathcal{X})_{(I+d_{\mathcal{X}})\text{-ent}^{-1}}^{\circ} \xrightarrow{Rf_*} \\ &\xrightarrow{Rf_*} D_c^+(\mathcal{Y})_{(I+d_{\mathcal{X}})\text{-ent}^{-1}}^{\circ} \xrightarrow{D_{\mathcal{Y}}} D_c^-(\mathcal{Y})_{(I-d_{\mathcal{X}})\text{-ent}}, \\ D_c^-(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}} &\xrightarrow{D_{\mathcal{X}}} D_c^+(\mathcal{X})_{-d_{\mathcal{X}}\text{-ent}}^{\circ} \xrightarrow{Rf_*} D_c^+(\mathcal{Y})_{-d_{\mathcal{X}}\text{-ent}}^{\circ} \xrightarrow{D_{\mathcal{Y}}} D_c^-(\mathcal{Y})_{d_{\mathcal{X}}\text{-ent}}. \end{aligned}$$

Pour (6.4.7) et (6.4.8), on est donc ramené au cas où \mathcal{X} est un η -champ de Deligne-Mumford. On fait une récurrence sur $d_{\mathcal{X}}$. Il existe une immersion ouverte dominante $j : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{X}$ et un morphisme fini étale $\pi : U \rightarrow \mathcal{U}$, où U est

un schéma affine [16, 6.1.1]. Soient \mathcal{Z} le fermé complémentaire de \mathcal{U} dans \mathcal{X} , $i : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$. Pour $L \in D_c^-(\mathcal{X})$, le triangle distingué

$$j_!j^*L \rightarrow L \rightarrow i_*i^*L \rightarrow$$

induit le triangle distingué

$$R(fj)_!j^*L \rightarrow Rf_!L \rightarrow R(fi)_!i^*L \rightarrow .$$

Comme j^*L est facteur direct de $\pi_*\pi^*j^*L$, il suffit d'appliquer (2.4.1) et (2.4.3) à $R(fj\pi)_!(j\pi)^*L$ et l'hypothèse de récurrence à $R(fi)_!j^*L$.

Enfin, (6.4.5) et (6.4.6) résultent du dernier alinéa et de 6.2 : $Rf_* \simeq D_{\mathcal{Y}}Rf_!D_{\mathcal{X}}$ induit

$$\begin{aligned} D_c^+(\mathcal{X})_{I\text{-ent}} &\xrightarrow{D_{\mathcal{X}}} D_c^-(\mathcal{X})_{(I+d_{\mathcal{X}})\text{-ent}^{-1}}^{\circ} \xrightarrow{Rf_!} \\ &\xrightarrow{Rf_!} D_c^-(\mathcal{Y})_{(I+d_{\mathcal{X}})\text{-ent}^{-1}}^{\circ} \xrightarrow{D_{\mathcal{Y}}} D_c^+(\mathcal{Y})_{(I-d_{\mathcal{X}}-c_{\mathcal{Y}})\text{-ent}}, \\ D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}} &\xrightarrow{D_{\mathcal{X}}} D_c^-(\mathcal{X})_{-d_{\mathcal{X}}\text{-ent}}^{\circ} \xrightarrow{Rf_!} D_c^-(\mathcal{Y})_{-d_{\mathcal{X}}\text{-ent}}^{\circ} \xrightarrow{D_{\mathcal{Y}}} D_c^+(\mathcal{Y})_{(d_{\mathcal{X}}+c_{\mathcal{Y}})\text{-ent}}. \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 6.5. — L'assertion (2.5.2) est vraie sans hypothèse de séparation.

Démonstration. — C'est un cas particulier de (6.4.5). □

REMARQUE. — (i) Le premier alinéa de la démonstration de 6.4 montre que Rf_* envoie $\text{Mod}_c(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}}$ dans $D_c^+(\mathcal{Y})_{\epsilon\text{-ent}^{-1}}$, où

$$\epsilon(a) = \begin{cases} a & \text{si } 0 \leq a \leq d_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{Y}}, \\ a - E\left(\frac{a-d_{\mathcal{X}}-c_{\mathcal{Y}}}{c_{\mathcal{X}}+1}\right) & \text{si } a \geq d_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{Y}}. \end{cases}$$

Ici E est la fonction partie entière. Lorsque f n'est pas relativement de Deligne-Mumford, ceci légèrement améliore (6.4.2). On peut en déduire une légère amélioration de (6.4.3).

(ii) Si f est un morphisme séparé, représentable et quasi-fini [16, 3.10.1] avec $d_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{Y}} \geq 1$, on a un analogue de 4.8 qui améliore (6.4.5) : Rf_* envoie $D_c^+(\mathcal{X})_{I\text{-ent}}$ dans $D_c^+(\mathcal{Y})_{(I+1-d_{\mathcal{X}}-c_{\mathcal{Y}})\text{-ent}}$.

PROPOSITION 6.6. — Le foncteur $R\mathcal{H}om(-, -)$ induit

$$\begin{aligned} D_c^-(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}}^{\circ} \times D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}} &\rightarrow D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}}, \\ D_c^-(\mathcal{X})_{I\text{-ent}^{-1}}^{\circ} \times D_c^+(\mathcal{X})_{I\text{-ent}} &\rightarrow D_c^+(\mathcal{X})_{(I-d_{\mathcal{X}}-c_{\mathcal{X}})\text{-ent}}, \\ D_c^-(\mathcal{X})_{I\text{-ent}}^{\circ} \times D_c^+(\mathcal{X})_{I\text{-ent}^{-1}} &\rightarrow D_c^+(\mathcal{X})_{I\text{-ent}^{-1}}, \\ D_c^-(\mathcal{X})_{\text{ent}}^{\circ} \times D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}} &\rightarrow D_c^+(\mathcal{X})_{(d_{\mathcal{X}}+c_{\mathcal{X}})\text{-ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

Démonstration. — On procède comme en 4.11. □

On peut aussi considérer l'intégralité sur les champs algébriques sur un trait excellent de corps résiduel fini, ce qui généralise 5.11. Les résultats sont similaires à ceux exposés dans ce §, avec des modifications appropriées des estimations de dimension.

Les variantes 5.12 et 5.13 restent toujours valables.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. A. BEĬLINSON, J. BERNSTEIN & P. DELIGNE – « Faisceaux pervers », in *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, 1982, p. 5–171.
- [2] P. BERTHELOT & A. OGUS – *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, 1978.
- [3] N. BOURBAKI – *Algèbre commutative, chapitres V à VII*, Éléments de mathématique, Masson, 1985.
- [4] P. DELIGNE – *Cohomologie étale (SGA 4d)*, LNM, vol. 569, Springer, 1977.
- [5] ———, « La conjecture de Weil. II », *Publ. Math. I.H.É.S.* **52** (1980), p. 137–252.
- [6] T. EKEDAHL – « On the adic formalism », in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 197–218.
- [7] H. ESNAULT – « Deligne's integrality theorem in unequal characteristic and rational points over finite fields », avec un appendice par P. Deligne et H. Esnault, *Ann. of Math. (2)* **164** (2006), p. 715–730.
- [8] K. FUJIWARA – « A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber) », in *Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 36, Math. Soc. Japan, 2002, p. 153–183.
- [9] A. GROTHENDIECK – « Sur quelques points d'algèbre homologique », *Tōhoku Math. J. (2)* **9** (1957), p. 119–221.
- [10] ———, « Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas », *Publ. Math. I.H.É.S.* **20, 24, 28, 32** (1964–1967).
- [11] L. ILLUSIE – « Sur la formule de Picard-Lefschetz », in *Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 36, Math. Soc. Japan, 2002, p. 249–268.
- [12] ———, « On semistable reduction and the calculation of nearby cycles », in *Geometric aspects of Dwork theory*, vol. II, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, p. 785–803.

- [13] ———, « Miscellany on traces in l -adic cohomology : a survey », *Jpn. J. Math. (3)* **1** (2006), p. 107–136.
- [14] A. J. DE JONG – « Smoothness, semi-stability and alterations », *Publ. Math. I.H.É.S.* **83** (1996), p. 51–93.
- [15] Y. LASZLO & M. OLSSON – « The six operations for sheaves on Artin stacks II: adic coefficients », preprint [arXiv:math/0603680](https://arxiv.org/abs/math/0603680), 2006.
- [16] G. LAUMON & L. MORET-BAILLY – *Champs algébriques*, Springer, 2000.
- [17] F. ORGOGOZO – « Altérations et groupe fondamental premier à p », *Bull. Soc. Math. France* **131** (2003), p. 123–147.
- [18] J-P. SERRE – *Représentations linéaires des groupes finis*, 5^e éd., Hermann, 1998.
- [19] W. ZHENG – « Sur l'indépendance de l en cohomologie l -adique sur les corps locaux », en préparation.
- [20] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)* – Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960–1961, dirigé par A. Grothendieck, Documents Mathématiques, vol. 3, Société Mathématique de France, 2003.
- [21] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)* – Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–1964, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, LNM, vol. 269, 270, 305, Springer, 1972–1973.
- [22] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7)* – Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1967–1969, I, dirigé par A. Grothendieck : II, par P. Deligne, N. Katz, LNM, vol. 288, 340, Springer, 1972–1973.

