

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ESTIMATIONS DE LA FONCTION MAXIMALE DE HARDY-LITTLEWOOD

Noël Lohoué

Tome 135
Fascicule 3

2007

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 1-

ESTIMATIONS DE LA FONCTION MAXIMALE DE HARDY-LITTLEWOOD

PAR NOËL LOHOUÉ

RÉSUMÉ. — On montre que la fonction maximale de Hardy-Littlewood est de type (p, p) sur certains groupes de Lie et variétés de Cartan-Hadamard.

ABSTRACT (*Estimations of the maximal Hardy-Littlewood function*)

We prove L^p boundness of Hardy-Littlewood maximal functions on a class of Lie groups and Cartan-Hadamard manifolds.

1. Introduction

On se donne un espace métrique M muni d'une distance δ et d'une mesure $d\sigma$ qui charge les boules de M de centre arbitraire et de rayon quelconque d'une masse finie. Si $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction $d\sigma$ mesurable, on s'intéresse à la fonction f^* définie par

$$f^*(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_x(r)|} \int_{B_x(r)} |f(y)| d\sigma(y)$$

où $B_x(r)$ désigne la boule, au sens de δ , de centre x et de rayon r , $|B_x(r)|$ sa mesure.

Texte reçu le 25 octobre 2005, révisé le 19 décembre 2006

NOËL LOHOUÉ, Université de Paris-Sud, Mathématique, bât. 425, UMR 8628 du CNRS, 91405 Orsay Cedex (France) • E-mail : noel.lohoue@math.u-psud.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 22E80 ; 43A90, 60B90.

Mots clefs. — Fonction maximale.

On voudrait prouver des estimations du style, pour $1 < p < \infty$, il existe une constante $C(p)$ telle que

$$\|f^*\|_p \leq C(p)\|f\|_p.$$

Ceci est un vieux thème et l'on sait bien que cette inégalité ne peut pas être prouvée en toute généralité pour tout triplet $(M, \delta, d\sigma)$.

On s'intéresse dans cet article à deux situations particulières où l'on veut utiliser la géométrie de $(M, \delta, d\sigma)$ pour donner une réponse positive à la question ci-dessous.

- a) M est un groupe de Lie non moyennable, la distance δ est la distance de contrôle associée à un système de champs de Hörmander invariants à gauche et $d\sigma$ est la mesure de Haar sur G , bi-invariante.
- b) M est une variété de Cartan Hadamard avec quelques contraintes sur la courbure ; la distance associée sur M est la distance riemannienne et la mesure est induite par cette structure.

Ces deux exemples ont un point commun ; le volume des boules de grand rayon croît exponentiellement, ce qui rend toutes les techniques usuelles inutilisables : on ne peut faire appel au lemme de recouvrement que pour les boules de rayon plus petit qu'un nombre donné. Par contre, si M est à courbure de Ricci positive ou nulle, on sait qu'alors M est un espace de nature homogène et on a droit à tout.

L'énoncé général suivant indique la direction que l'on veut suivre.

PROPOSITION 1. — *Soit $(M; \delta)$ un espace métrique muni d'une mesure $d\sigma$ comme décrit ci-dessus. On suppose qu'il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que pour tout couple de point (x, y) ,*

$$C^{-1} < \frac{|B_x(r)|}{|B_y(r)|} < C \quad \text{et} \quad |B_x(2r)| < C|B_x(r)|,$$

pour $0 < r < 1$. Soit 0 un point distingué de M . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe pour tout $1 < p < \infty$, une constante $C_\varepsilon(p)$ telle que

$$\left\| \left(1 + |B_0(\tilde{\delta})|\right)^{-\varepsilon} f^* \right\|_p \leq C_\varepsilon(p) \|f\|_p.$$

où $\tilde{\delta}$ est la fonction $\tilde{\delta}(x) = \delta(x, 0)$.

Les deux résultats sur lesquels on veut s'attarder sont indiqués ci-dessous.

REMARQUE. — La proposition 1 s'applique si G est un groupe unimodulaire, δ une métrique invariante à gauche sur G et $d\sigma$ la mesure de Haar. Dans le premier résultat on va essayer d'enlever ε pour un cas particulier. Pour énoncer ce premier résultat que l'on veut démontrer on aura besoin de quelques notations.

Notations. — Soit G un groupe de Lie connexe, unimodulaire, non compact, non moyennable. On note

$$G = H \circledast G_0$$

sa décomposition de Levi. On suppose que la partie résoluble distinguée H de G est unimodulaire, à croissance polynomiale, de dimension D à l'infini (voir [9] pour la notion de dimension à l'infini). On suppose aussi que la partie semi-simple G_0 est de centre fini, connexe, de dimension topologique m_0 .

On note \mathcal{G} l'algèbre de Lie de G , \mathcal{H} celle de H , \mathcal{G}_0 celle de G_0 et σ la représentation de \mathcal{G}_0 sur \mathcal{H} . Alors $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{H}_i$ où $\sigma|_{\mathcal{H}_i} = \sigma_i$ est une sous-représentation irréductible de \mathcal{G}_0 et de poids $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{m_i}, m_i$. On pose

$$\Theta = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{m, m_i} m_{ij} \alpha_{ij}$$

Par la suite on va considérer une distance de contrôle associée à un système de Hörmander particulier pour des simples raisons d'exposition. La considération d'un système général alourdirait considérablement le texte sans simplifier la compréhension des idées développées.

Notons $\mathcal{G}_0 = k_0 \oplus p_0$ une décomposition de Cartan de \mathcal{G}_0 , K_0 le sous-groupe compact maximal associé à k_0 . On considère sur p_0 une base orthonormée pour le produit scalaire $\langle X, Y \rangle_0 = -B(X, \Theta_0 Y)$ où B est la forme de Killing, Θ_0 l'involution de Cartan.

Soit $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k$ un système de Hörmander de champs invariants à gauche sur G tels que :

- X_1, \dots, X_ℓ sont dans \mathcal{H} et $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_\ell$ est un système de Hörmander sur H ;
- $X_{\ell+1}, \dots, X_s$ sont dans k_0 et X_{s+1}, \dots, X_k dans p_0 et les X_1, \dots, X_k sont linéairement indépendants.

On considère sur p_0 le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ tel que $\langle X_i, X_j \rangle_1 = \delta_{ij}$ pour $s+1 \leq i, j \leq k$. On prolonge ce produit scalaire à \mathcal{G} de telle sorte que p_0 et k_0 soient orthogonaux.

On pose

$$\gamma_0 = \sup_{k' \in K_0} \|\text{Ad}(k')\|,$$

où $\|\text{Ad}(k')\|$ est la norme de $\text{Ad}(k')$ agissant sur p_0 muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$.

Soient

$$\|\alpha\| = \sup_{i,j} \|\alpha_{ij}\|, \quad \beta = \gamma_0^2 \|\alpha\|.$$

On note δ_0 la distance sur G_0 , invariante à gauche dont la restriction au plan tangent à l'origine correspond au produit scalaire $\langle X, Y \rangle_0$.

Soient \mathcal{A}^+ une chambre de Weyl positive associée à la décomposition de $\mathcal{G}_0 = k_0 \oplus p_0$ et 2ρ la somme des racines positives comptées avec leurs multiplicités relatives à \mathcal{A}^+ .

Soit \mathcal{H}_{ij}^1 l'espace radiciel de poids $\alpha_{ij} \geq 0$ sur \mathcal{A} , si \mathcal{H}_{ij}^2 est l'espace radiciel de poids $-\alpha_{ij}$; on suppose que K est transitif sur les sphères de $\mathcal{H}_{ij}^1 \oplus \mathcal{H}_{ij}^2$.

Sous ces conditions on a l'énoncé suivant :

THÉORÈME 2. — *On suppose qu'il existe $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ tel que*

$$0 < \frac{D\beta}{\|2\rho + \Theta\|_0 - 2\|\rho\|_0(1 - \varepsilon)} < 1.$$

Alors pour tout $p > 1/(1 - \varepsilon)$ il existe $C(p)$ telle

$$\|f^*\|_p \leq C(p)\|f\|_p$$

où $\|2\rho + \Theta\|_0$, $2\|\rho\|_0$ est la norme de $2\rho + \Theta$, 2ρ donnée par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$.

REMARQUE. — L'exemple type où l'hypothèse du théorème s'applique est $\mathbb{R}^2 \otimes \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Les groupes concernés sont non moyennables et non semi-simples. Ils échappent à un contrôle brutal par Kunze-Stein. On va utiliser de la géométrie pour s'y ramener.

Au cours de la preuve du théorème on montrera aussi l'énoncé suivant :

PROPOSITION 3. — *Soit δ une métrique comme ci-dessus. Soit χ_r la fonction caractéristique de la boule de rayon r , notée B_r ; on considère $\beta_r = \chi_r/|B_r|$ où $|B_r|$ est le volume de B_r . Si $1/(1 - \varepsilon) < p < 1/\varepsilon$, il existe $\alpha(p) > 0$ telle que*

$$\|\beta_r\|_{p \rightarrow p} \leq C_1 e^{-\alpha(p)r} \quad \text{où } C_1 \text{ est une constante}$$

La proposition 3 est un cas particulier d'une conjecture de [8].

THÉORÈME 4. — *M est une variété de Cartan-Hadamard et les L^p que l'on considère sont relatifs à la mesure riemannienne. On fait sur M les hypothèses suivantes :*

- La courbure de Ricci de M est minorée par $-b^2$ où $b \in \mathbb{R}^*$.*
- Pour tout x fixé, on note $\Theta_x(s, \omega)$ la densité de volume en coordonnées polaires exponentielles au point x de M et $H_x(r, \omega)$ la courbure moyenne de la sphère de centre x et de rayon r évaluée au point $\exp_x r\omega$, et l'on suppose que*

$$\sigma_0 = \inf_{x, r, \omega} H_x(r, \omega) > 0$$

c) Soit $\psi_x(y) = e^{-\phi_x(\delta(x,y))} = [\int_{\Sigma^{n-1}} \Theta_x(r, \omega) d\omega]^{-1}$ avec $y = \exp_x r\omega$, l'inverse de l'aire de la sphère de centre x et de rayon r pour la mesure induite. On suppose qu'il existe $0 < \sigma < \sigma_0$ telle que

$$-\frac{d^2\varphi_x(r)}{dr^2} + \left(\frac{d\varphi_x(r)}{dr}\right)^2 - \tau \frac{d\varphi_x}{dr} + \sigma^2 \geq 0$$

où $\tau = \sup_{\|\omega\|=1} H_x(r, \omega)$ et que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x; y)}{G_{\sigma}(x, y)} < C_1$$

où $G_{\sigma}(x, y)$ est la fonction de Green de $\Delta + \sigma^2$ et C_1 une constante qui ne dépend pas de y .

Sous les hypothèses a), b), c), il existe une constante $1 < p_0 < \infty$ telle que pour tout $p_0 < p$ il existe $C(p)$ telle que

$$\|f^*\|_p \leq C(p) \|f\|_p.$$

COROLLAIRE 5. — On suppose que la courbure C de M vérifie l'inégalité

$$-b^2 \leq C \leq -a^2, \quad \text{avec} \quad 0 < a < b < \frac{5a}{4}.$$

Si $p > p_0 = a/(3a - 2b)$ alors il existe $C(p)$ tel que $\|f^*\|_p \leq C(p) \|f\|_p$.

Ce corollaire est établi dans [4].

2. Démonstration des résultats

L'idée générale de la preuve consiste à utiliser la troncature de [2] :

$$\begin{aligned} f^*(x) &\leq \sup_{r \leq 1} \frac{1}{|B_x(r)|} \int_{B_x(r)} |f(y)| d\sigma(y) \\ &\quad + \sup_{r \geq 1} \frac{1}{|B_x(r)|} \int_{B_x(r)} |f(y)| d\sigma(y) = f_1^*(x) + f_2^*(x). \end{aligned}$$

Sous les hypothèses de la proposition 1 d'après les résultats classiques pour tout $1 < p < \infty$, il existe une constante $C(p)$ telle que

$$\|f_1^*\|_p \leq C(p) \|f\|_p.$$

Cette inégalité vaut pour les boules du théorème 2 d'après [7] ainsi que pour celles du théorème 4 car M est à géométrie bornée et l'on utilise un lemme de recouvrement pour les boules de rayon plus petit que 1.

Dans les trois cas, il faut s'occuper de $f_2^*(x)$. On remarque dans les trois cas que

$$f_2^*(x) \leq \int_M \inf \left\{ |B_x(1)|^{-1}, \frac{1}{|B_x(\delta(x, y))|} \right\} |f(y)| d\sigma(y).$$

Mais par hypothèse $|B_x(1)| \geq C^{-1}|B_0(1)|$ où 0 est un point distingué sur M , comme $|B_x(r)|$ est croissante $|B_x(\delta(x, y))| \geq C^{-1}|B_0(1)|$ pour $\delta(x, y) \geq 2$ et

$$\begin{aligned} f_2^*(x) &\leq C_1 \int_{1 < \delta(x, y) \leq 2} |f(y)| d\sigma(y) \\ &\quad + C_2 \int_{\delta(x, y) \geq 2} \frac{1}{|B_x(\delta(x, y))|} |f(y)| d\sigma(y) = f_3^*(x) + f_4^*(x). \end{aligned}$$

Comme $\|f_3^*\|_p \leq C_p \|f\|_p$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$, il faut étudier f_4^* , que l'on note $S(f)$ pour simplifier.

2.1. Preuve de la la proposition 1. — On considère le noyau

$$K(x, y) = \frac{1}{|B_x(\delta(x, y))|} \mathbf{1}_{\delta(x, y) \geq 2}$$

où $\mathbf{1}_{\delta(x, y) \geq 2}$ est la fonction caractéristique de $\{x, y \in M ; \delta(x, y) \geq 2\}$.

Alors pour x fixé (resp. y fixé), $K(x, y)$ comme fonction de y (resp. fonction de x) est dans $L^{1, \infty}(M)$ uniformément en x (resp. en y). On a en effet

$$|\{y ; K(x, y) > \alpha\}| \leq \left| B_x \left(\gamma_x \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right) \right| = \frac{1}{\alpha}$$

où γ_x est l'inverse de la fonction $r \mapsto |B_x(r)|$. On a de même

$$|\{x ; K(x, y) > \alpha\}| = \left| B_x \left[\gamma_y \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right] \right|$$

et par hypothèse

$$|B_x(r)| \leq C |B_y(r)| \quad \text{et} \quad \left| B_x \left[\gamma_y \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right] \right| \leq C \left| B_y \left[\gamma_y \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right] \right| = \frac{C}{\alpha}.$$

d'où le résultat annoncé.

Comme $|K(x, y)| \leq C$, pour tout x (resp. tout y fixé), $K(x, y)$ comme fonction de y (resp. fonction de x) est dans $L^p(M)$ pour tout $1 < p \leq \infty$, il s'ensuit d'après [3] que

$$\|S(f)\|_q \leq C \|f\|_p$$

si $1/q = 1/p + 1/r - 1 = 1/p - 1/r'$. Choisissons r' tel que $\varepsilon > 1/r'$ et $r \gg 1$. Alors d'après ce qui a été dit précédemment la fonction de x , $(1 + |B_0(\delta(0, x))|)^{-\varepsilon}$, est dans $L^{r'}(M)$ et

$$\| (1 + |B_0(\delta(0, x))|)^{-\varepsilon} S(f) \| \leq C \|f\|_p$$

d'où le résultat de la proposition.

2.2. Preuve du théorème 2. — La proposition suivante sera déterminante par la suite.

PROPOSITION 6. — *Soit $G = H \circledcirc G_0$ comme ci-dessus. On considère $z_0 = (x_1, y_1)$ avec x_1 dans H et y_1 dans G_0 . Alors si δ_H désigne la distance de contrôle associée au système de Hörmander dans H ,*

$$\log [\delta_H(x_1, e)] \leq \beta \delta_G(z_0, e) + C$$

où C est une constante, pourvu que $\delta_H(x_1, e) \geq C_2$ et $\delta_{G_0}(e, y_1) \geq C_2$ où C_2 est une constante suffisamment grande.

Preuve de la proposition. — Soient X_1, \dots, X_k comme précédemment. Si X_j est dans \mathcal{H} , on a $\widetilde{X}_j f(x, y) = df(x \cdot y \exp tX_j, y)/dt|_{t=0}$ pour toute fonction C^∞ $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Alors

$$\widetilde{X}_j f(x, y) = \frac{d}{dt} f(x \cdot \exp \tau_y t X_j, y)|_{t=0}$$

où τ_y désigne la différentielle de l'automorphisme $y \mapsto \tau_y : t_y(x) = x \cdot y$.

En particulier, si $y = \exp H_0$ avec $H_0 \in \mathcal{A}_0$ où \mathcal{A}_0 désigne le sous-espace abélien maximal de p_0 correspondant à \mathcal{A}_0^+ et si X est dans un espace radiciel \mathcal{H}_{ij} , on a

$$\widetilde{X} f(x, \exp H_0) = \alpha_{ij}(H_0) \widetilde{X}_{j|x}^{(1)} f(x, \exp H_0)$$

où $\widetilde{X}_j^{(1)}$ désigne le champ des vecteurs invariant à gauche sur H induit par X_j .

Soit $\psi : [0, T] \rightarrow G$ une courbe minimisante pour la distance dans G . On a

$$\psi(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t)) \quad \text{avec} \quad \omega_1 \in H \text{ et } \omega_2 \in G_0,$$

$$\psi(0) = e, \quad \psi(T) = (x_1, y_1), \quad y_1 = k_1 \exp a k_2,$$

$$\psi'(t) = (\omega'_1(t) \omega'_2(t)) = \sum_{j=1}^n \psi_j(t) \widetilde{X}_j |\psi'(t)| \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^n |\psi_j(t)|^2 = 1.$$

Soient $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction C^∞ et $1 \leq j \leq \ell$. On a

$$\widetilde{X}_{j|\psi(t)} f = \frac{d}{ds} f(\psi(t) \exp sX_j)|_{s=0} = \frac{d}{ds} f(\omega_1(t), \omega_2(t)) (\exp sX_j, e)|_{s=0}$$

où on a posé $\omega_2(t) = k_1(t) \exp a(t) k_2(t)$,

$$\begin{aligned} f[\omega_1(t), \omega_2(t)] (\exp sX_j, e) &= f[(\omega_1(t) \cdot \omega_2(t) \cdot \exp sX_j, \omega_2(t))] \\ &= f[(\omega_1(t) \cdot \exp s\tau_{\omega_2(t)} X_j, \omega_2(t))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} [\psi(t) (\exp sX_j, e)]|_{s=0} &= \frac{d}{ds} f[(\omega_1(t) \exp s\tau_{\omega_2(t)} X_j, \omega_2(t))] \\ &= \widetilde{X}_j |\psi(t)| f[\omega_1(t), \omega_2(t)]. \end{aligned}$$

□

On considère enfin une base Y_1, \dots, Y_{m_0} de \mathcal{H} de vecteurs radiciels et H_0 dans $\mathcal{A} \exp H_0 \cdot Y_j = e^{\alpha_{\ell,j}(H_0)} Y_j$. Si $1 \leq j \leq \ell$, on a

$$\begin{aligned}\tau_{\omega_2(t)} X_j &= \tau_{k_1(t)} \tau_{a(t)} \tau_{k_2(t)} X_j \\ &= a_{j,\ell_1} \tau_{k_1(t)} \tau_{a(t)} Y_{\ell_1} \\ &= a_{j,\ell_1} \varphi_{\ell_1, \ell_2}(k_2(t)) \tau_{a(t)} Y_{\ell_2} \\ &= a_{j,\ell_1} \varphi_{\ell_1, \ell_2}(k_2(t)) e^{\alpha_{\ell_2, \ell_3}(a(t))} \varphi_{\ell_1, \ell'_2}(k_2(t)) Y_{\ell'_2} \\ &= a_{j,\ell_1} \varphi_{\ell_1, \ell_2}(k_2(t)) a^{\ell'_2, \ell'_3} e^{\alpha_{\ell_2, \ell_3}(a(t))} \varphi_{\ell_1, \ell'_2}(k_2(t)) X_{\ell'_3}^0\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la sommation muette. Par ailleurs si $\ell + 1 \leq j \leq k$, on a

$$(*) \quad \widetilde{X}_j|_{\psi(t)} f = \frac{d}{ds} f(\omega_1(t), \omega_2(t) \exp s X_j)_{s=0} = \widetilde{X}_j^0 f$$

Mais $\psi'(t) = (\omega'_1(t), \omega'_2(t))$; l'expression de $\widetilde{X}_j|_{\psi(t)}$ pour $1 \leq j \leq \ell$ prend la forme

$$a^{\ell'_2, \ell'_3} a_{j,\ell_1} \varphi_{\ell_1, \ell_2}(k_1(t)) \varphi_{\ell_2, \ell'_2}(k_2(t)) e^{\alpha_{\ell_2, \ell_3}(a(t))} \widetilde{X}_{\ell'_3}^{0(1)}.$$

D'après (*),

$$\omega'_1(t) = \psi_j(t) a^{\ell'_2, \ell'_3} a_{j,\ell_1} e^{\alpha_{\ell_2, \ell_3}(a(t))} \varphi_{\ell_1, \ell_2}(k_1(t)) \varphi_{\ell_2, \ell'_2}(k_2(t)) \widetilde{X}_{\ell'_3}^{0(1)}.$$

Si \mathcal{X} désigne la projection sur le plan engendré par $(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_{\ell_1})$

$$\begin{aligned}\omega'_1(t) &= \psi_j(t) a^{\ell'_2, \ell'_3} a_{j,\ell_1} e^{\alpha_{\ell_2, \ell_3}(a(t))} \varphi_{\ell_1, \ell_2}(k_1(t)) \varphi_{\ell_2, \ell'_2}(k_2(t)) \mathcal{X}(\widetilde{X}_{\ell'_3}^{0(1)}) \\ &= \psi_j(t) a^{\ell'_2, \ell'_3} a_{j,\ell_1} e^{\alpha_{\ell_2, \ell_3}(a(t))} \varphi_{\ell_1, \ell_2}(k_1(t)) \varphi_{\ell_2, \ell'_2}(k_2(t)) U_{\ell'_3, \ell_4} \widetilde{X}_{\ell_4}^{(1)}\end{aligned}$$

soit

$$\omega'_{\ell_4} = \psi_j(t) a^{\ell'_2, \ell'_3} a_{j,\ell_1} e^{\alpha_{\ell_2, \ell_3}(a(t))} \varphi_{\ell_1, \ell_2}(k_1(t)) \varphi_{\ell_2, \ell'_2}(k_2(t)) U_{\ell_3, \ell_4}.$$

Comme K_0 est compact, $\sup_{k \in k_0} |\varphi_{\ell_1, \ell_2}(k_1(t))| = a_1$ est fini. Mais

$$|\psi_j(t) a_{j,\ell_1}| \leq \left(\sum |a_{j,\ell_1}|^2 \right)^{1/2} = a_2, \quad \sup |U_{\ell_3, \ell_4}| = a_3$$

et

$$(**) \quad |\omega'_{\ell_4}|(t) \leq a_1^2 a_2^2 a_3 e^{\alpha_{\ell_2, \ell_3}(a(t))}.$$

Puisque $\psi'(t) = \sum_{j=1}^m \theta_j(t) \widetilde{X}_j|_{\psi(t)} = \omega'_1(t) + \omega'_2(t)$, on a

$$\omega'_1(t) = \sum_{j=1}^{\ell} \omega'_{j,1}(t) \widetilde{X}_j^{(1)}|_{\omega(t)}.$$

La majoration (**) montre que

$$|\omega'_j(t)| \leq c e^{\|\alpha\| \cdot \|a(t)\|}$$

où $\|a(t)\|$ est la norme donnée par la forme de Killing.

On voudrait montrer que

$$\|a(t)\| \leq \gamma^2 t.$$

Les X_i , $\ell + 1 \leq i \leq k$ engendrent un système de Hörmander sur G_0 d'où une distance associée notée δ_1 . Alors $\delta_1(e_2, \omega_2(t)) \leq \delta(e, \psi(t)) \leq \int_0^t ds = t$.

On désigne l'élément neutre de G par $e = (e_1, e_2)$. Soit $\eta(s)$ une courbe dans G_0 qui joint e_2 à $\omega_2(t)$ telle que

$$\begin{aligned} \eta'(s) &= \sum_{i=\ell+1}^k \eta'_i(s) \widetilde{X}_i|_{\eta(s)} \quad \text{avec} \quad \sum |\eta'_i(s)|^2 = 1, \\ \eta(\tau) &= \omega_2(t), \quad \delta_1(e_2, \omega_2(t)) = \tau, \\ \eta(s) &= \exp X(s)k(s). \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \omega_2(t) &= k_1(t) \exp a(t) k_2(t) = k_1(t) \exp a(t) k_1^{-1}(t) k_1(t) k_2(t), \\ &= \exp \text{Ad}(k_1(t)) a(t) k_1(t) k_2(t), \\ X(\tau) &= \text{Ad}(k_1(t)) a(t), \quad k(\tau) = k_1(t) k_2(t) \\ \eta'(s) &= \widehat{\text{Ad}(k^{-1}(s)) X'}(s)|_{\exp X(s)k(s)} + \widetilde{Z}(s) \end{aligned}$$

où \widetilde{Z} provient des champs sur K_0 , on a

$$\begin{aligned} \|\eta'(s)\|_1^2 &= \sum_{i=\ell+1}^k |\eta_i(s)|^2 \cdot \|\widetilde{X}_i|_{\eta(s)}\|^2 \\ &= \|\widehat{\text{Ad}(k^{-1}(s)) X'}(s)|_{\exp X(s)k(s)} + \widetilde{Z}(s)\|_1^2 \\ &= \|\text{Ad}(k^{-1}(s)) X'(s)\|_1^2 + \|\widetilde{Z}(s)\|_1^2 \end{aligned}$$

et $\|X'(s)\|_1 \leq \|\text{Ad}(k(s))\eta'_0(s)\|_1$ avec $\eta'_0(s) = \sum_{i=\ell+1}^k \eta_i(s) X_i$, d'où

$$\|X'(s)\|_1 \leq \sup_{k \in K_0} \|\text{Ad}(k)\| \cdot \|\eta'_0\|_1 = \gamma_0.$$

Alors

$$\|X(\tau)\|_1 \leq \int_0^\tau \|X'(s)\|_1 ds \leq \gamma_0 \tau = \gamma_0 \delta_1(e, \omega_2(t))$$

$$a(t) = \text{Ad}(k^{-1}(t)) X(\tau)$$

$$\|a(t)\|_1 \leq \gamma_0 \|X(t)\|_1 \leq \gamma_0^2 \delta_1(e, \omega_2(t)) \leq \gamma_0^2 t.$$

2.3. Preuve de la proposition 3. — Écrivons

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B(r)|} \int \chi_r(hg) dh &= \frac{1}{|B(r)|} \int_{\delta(hg, e) \leq 1} \chi_r(hg) dh + \frac{1}{|B(r)|} \int_{\delta(hg, e) \geq 1} \chi_r(hg) dh \\ &= F_1(g) + F_2(g). \end{aligned}$$

La norme de F_1 comme opérateur de convolution de $L^p(G_0)$ est dominée par $c/|B(r)|$; par conséquent, il suffit d'estimer celle de F_2 . Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\begin{aligned} F_2(g) &= \frac{1}{|B(r)|^\varepsilon} \int_{\delta(hg, e) \geq 1} \frac{\chi_r(hg) dh}{|B(r)|^{1-\varepsilon}} \\ &\leq \frac{C}{|B(r)|^\varepsilon} \int_{\delta(hg, e) \geq 1} \frac{\chi_r(hg) dh}{c_1 + |B^{1-\varepsilon}(\delta(hg, e))|} \\ &= \frac{C}{|B(r)|^\varepsilon} F_{2,\varepsilon}(g) \leq c e^{-\beta_\varepsilon r} F_{2,\varepsilon}(g) \end{aligned}$$

où C_1 est une constante qu'on choisira comme il convient.

Les calculs pour $F_{2,\varepsilon}$ sont les mêmes que pour la fonction E_1 que nous allons définir ci-dessous. On va d'ailleurs voir que

$$\sup_{k_1, k_2} F_{2,\varepsilon}(k_1 \exp a k_2) \leq F_{2,\varepsilon}(\exp a) \quad \text{avec de bonnes propriétés.}$$

3. Suite de la preuve du théorème 2

Soit

$$E(x) = \frac{1}{|B[\delta(0, x)]|} \mathbf{1}_{B_1^c}(x) \simeq \frac{1}{|B(\delta(x, 0))| + C}$$

où $\mathbf{1}_{B_1^c}(x)$ est la fonction caractéristique du complémentaire de la boule de rayon 1 centrée à l'origine de G . D'après [6] et le théorème de Kunze-Stein [6], il suffit de voir que la fonction

$$E_1(x) = \int_H E(hx) dh$$

est dans $L^p(G_0)$ pour une valeur de p inférieure à celle de l'énoncé. En effet comme H est moyennable, E donne lieu à un opérateur borné sur $L^{p_1}(G)$ si et seulement si E_1 donne lieu à un opérateur borné de $L^{p_1}(G_0)$ (ceci résulte de [6]) et il en est ainsi si E_1 est dans $L^p(G_0)$.

On veut d'abord estimer $E_1(x)$ pour $\delta_1(e, \dot{x})$ très grand. On pose

$$x = k \exp a k_1$$

et l'on voit que

$$(\ast\ast\ast) \quad \delta(hk \exp a k_1, e) \geq \delta(hk \exp a, e) - C$$

car par hypothèse $\delta_1(e, \dot{x})$ est très grand comme c'est une distance quotient $\delta(hk \exp ak_1, e) \geq \delta_1(e, \dot{x})$ qui est très grand. Alors

$$\frac{1}{|B[\delta(hk \exp ak_1, e)]|} \leq \frac{C_1}{|B[\delta(hk \exp a, e)]|}.$$

En effet, soient $r, s > 0$; alors $B(r+s) = \bigcup_{y \in B(r)} B_y(s)$. Si Y est un sous-ensemble fini de $B(r)$ dont deux points y_1, y_2 avec $y_1 \neq y_2$ satisfont l'inégalité $\delta(y_1, y_2) > b$ où b est une constante positive

$$\bigcup_{y \in Y} B_y\left(\frac{1}{2}b\right) \subset B\left(r + \frac{1}{2}b\right)$$

et $\text{Card}(Y)|B_y(\frac{1}{2}b)| = \text{Card } Y \cdot C_b \leq |B(r + \frac{1}{2}b)|$. Soit $Y \subset B(r)$ fini, maximal pour la propriété : tous les points y_1, y_2 de Y avec $y_1 \neq y_2$ satisfont $\delta(y_1, y_2) > b$. D'après la maximalité de Y , on a l'inclusion $B(r+s) \subset \bigcup_{y \in Y} B(y, s+b)$ et

$$|B(r+s)| \leq \text{Card}(Y) |B(s+b)| \leq C_b^{-1} |B\left(r - \frac{1}{2}b\right)| \cdot |B(s+b)|.$$

Si l'on pose $r + \frac{1}{2}b = r_1$ et $s - \frac{1}{2}b = s_1$, on a

$$|B(r_1 - s_1)| \leq C_b^{-1} B(r_1) B\left(s_1 + \frac{3}{2}b\right)$$

pour $r_1 > \frac{1}{2}b$ et $s \geq -\frac{1}{2}b$; en particulier pour $s_1 \geq 0$, on trouve avec l'inégalité $\delta(hk \exp a, e) \leq c + \delta(hk \exp ak_1, e)$

$$\begin{aligned} |B[\delta(hk \exp a, e)]| &\leq |B[\delta(hk \exp ak_1, e)]| + c \\ &\leq C_b^{-1} |B[\delta(hk \exp a, e)]| \cdot |B(c + \frac{3}{2}b)| \end{aligned}$$

d'où l'inégalité ci-dessus.

Soit r très grand ; on veut estimer $|B_e(r)| = |B(r)|$. Soit $\gamma_1 = \sup_{k \in K_0} \delta(k, e)$; si $\delta(g, e)$ est très grand et que $g = k_1 \exp X k_2$, $k_i \in K$, X dans a , $g \in G_0$

$$\delta(\exp X, e) - 2\gamma_1 < \delta(g, e) \leq \delta(\exp X, e) + 2\gamma_1$$

Par ailleurs $\delta(\exp X, e) \leq \delta_{G_0}(\exp X, e_1)$ où δ_{G_0} est la distance induite sur G_0 .

Comme

$$\delta_{G_0}(\exp X, e) \leq \|X\| \delta(g, e) \leq \|X\| + \gamma_1,$$

on a

$$B' = \{g = k_1 \exp X k_2, \|X\| \leq r - 1 - 2\gamma\},$$

$$\begin{aligned} B' \cdot B(1) &\subset B(r), \quad B' \cdot B(1) = \{(g \cdot x, g \cdot y), g \in B', \delta(x, y, e) \leq 1\}, \\ \int_{B_r} dx &\geq \int_{B' \cdot B(1)} dx. \end{aligned}$$

La trace de la boule $B(1)$ sur H sera notée $B''(1)$. Alors

$$B' \circ B''(1) \subset B(r) \quad \text{et} \quad B' \circ B''(1) = \{(g, x), g \in B', x \in B''(1)\},$$

$$\int_{B_r} dx \geq \int_{B'} dg \int_{gB''(1)} du.$$

Quitte à diminuer l'intégrale ci-dessus, on peut trouver des boules $D_{j,n}^0$ dans H^i de petit rayon, pour une bonne m étrique K invariante, telle que pour tout $x_j \subset D_{j,n}^0$, $\exp x_i \in B'(1)$ et $x = \prod_{j=1}^m \exp x_j \in B''(1)$. Si $a \in \mathfrak{A}^+$, alors $\exp a \cdot x = \prod_{j=1}^m \exp \text{Ad } ax_j$.

Si x_j est dans l'espace radiciel d'indice n , x_j , on l'indexe $x_{n,j}$ et on a

$$\prod_{j=1}^m \exp[\exp^{\alpha_{n,j}(a)} x_{n,j}].$$

Si $k \in K$, on a

$$k \cdot \prod_{j=1}^m \exp[\exp^{\alpha_{n,j}(a)} x_{n,j}] = \prod_{j=1}^m \exp[\exp^{\alpha_{n,j}(a)} \text{Ad } k \cdot x_{n,j}].$$

Comme on a supposé qu'il existe des sous-ensembles $D_{j,n}$ dans l'espace radiciel $H_{j,n}$ tels que pour tout $x_{j,n} \in D_{j,n}$

$$\|x_{j,n}\| \leq 1, \quad [x_{j,n}, a] = \alpha_{j,n}(a)x_{j,n} \quad \text{avec } \alpha_{j,n}(a) \geq 0,$$

on a

$$\begin{aligned} & \int_{\prod_{j=1}^n K \cdot \prod_{n=1}^{m_j} \exp D_{j,n}^+} dx > C_1 > 0, \\ & \int_{B'} dg \int_{gB''(1)} dx \geq \int_{\substack{a \in a^+ \\ \|a\| \leq r-1-2\gamma}} \prod_{\alpha \in \Sigma^+} Sh^{m_\alpha}(a) \\ & \quad \times \int_K dk \int_{\substack{a \in a^+ \\ \|a\| \leq r-1-2\gamma}} \prod_{\alpha \in \Sigma^+} dx da \\ & = \int_{\substack{a \in a^+ \\ \|a\| \leq r-1-2\gamma}} \prod_{\alpha \in \Sigma^+} Sh^{m_\alpha}(a) da \int_{\prod_{j=1}^n K \cdot \prod_{n=1}^{m_j} \exp D_{j,n}^+} dx \\ & = \int_{\substack{a \in a^+ \\ \|a\| \leq r-1-2\gamma}} \prod_{\alpha \in \Sigma^+} Sh^{m_\alpha}(a) da e^{\sum \alpha_{j,n}(a)} \int_{\prod_{j=1}^n K \cdot \prod_{n=1}^{m_j} \exp D_{j,n}^+} dx \\ & \geq C_0 \int_{\substack{a \in a^+ \\ \|a\| \leq r-1-2\gamma}} \prod_{\alpha \in \Sigma^+} Sh^{m_\alpha}(a) e^{\sum m_{ij} \alpha_{ij}(a)} da \\ & \geq C_0 \int_{\substack{a \in a^+ \\ \alpha(a) \geq \sqrt{2} \\ \|a\| \leq r-1-2\gamma}} e^{2\rho(a) + \theta(a)} da \geq C^{\text{te}} e^{r^{\|2\rho + \theta\|} r^\ell}. \end{aligned}$$

Nous sommes donc amenés à estimer

$$\begin{aligned} \int_H \frac{\mathbf{1}_{B^c}(hk \exp a) dh}{|B\{\delta(hk \exp a), e\}| + C_1} &= \int_H \frac{dh}{|B[\delta\{(hk^{-1}hk \exp a), e\}]| + C_1} \\ &\leq \int_H \frac{dh'}{|B(\delta(kh' \exp a), e))| + C_1} \\ &\leq C_2 \int_H \frac{dh}{|B(\delta(h \exp a, e))| + C_1} \quad (\text{d'après } (***)). \end{aligned}$$

Si $\delta_H(h, e_2) \leq 1 \cdot \delta(h, e) \leq 1$, d'après [9] et

$$\begin{aligned} \int_{\delta_H(h, e_2) \leq 1} \frac{dh}{|B(\delta(h \exp a), e))| + C_1} \\ \leq C \frac{1}{|B[\delta(\exp a), e]| + C_1} = F'_0(\exp a). \end{aligned}$$

La restriction de δ à G_0 est une distance invariante à gauche ; par conséquent, F'_0 est dans $L^p(G_0)$ pour tout $1 < p \leq \infty$ et

$$\int_H \frac{\mathbf{1}_{B^c}(hgk) dh}{|B(\delta(hgk, e))| + C} \leq C \int_H \frac{dh}{|B[\delta(hg, e)]| + C_1}.$$

Pour estimer E_1 , il suffit donc d'estimer

$$\int_{\delta_H(h, e) \geq 1} \frac{dh}{|B\{\delta(h \exp a, e)\}| + C} = F'_0(a).$$

Mais si $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} \tau(a) &= \int_{\delta_H(h, e_2) \geq 1} \frac{\delta^\ell(h \exp a, e) \delta^{-\ell}(h \exp a, e) e^{2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta(h \exp a, e_2)}}{e^{2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta(h \exp a, e_2)} |B(\delta(h \exp a, e_2))| + C} \\ &\leq \delta_{G_0}^{-\ell}(\exp a, e) e^{-2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta_{G_0}(\exp a, e)} \\ &\quad \times \int_{\delta_H(e, h) \geq 1} \frac{e^{2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta(h \exp a, e_2)}}{|B(\delta(h \exp a, e))| + C} dh. \end{aligned}$$

Pour évaluer la dernière intégrale, on va utiliser l'estimation

$$\begin{aligned} e^{2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta(h \exp a, e)} e^{-\|2\rho+\theta\|\delta(h \exp a, e)} \delta^\ell(h \exp a, e) \\ \leq e^{-\{\|2\rho+\theta\|-2\|\rho\|(1-\varepsilon')\}\delta(h \exp a, e)}, \quad \varepsilon \approx \varepsilon' \end{aligned}$$

puisque $\|2\rho + \theta\| > 2\|\rho\|(1 - \varepsilon)$.

Mais d'après la proposition 1, on a

$$\begin{aligned} e^{2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta(h \exp a, e)} e^{-\|2\rho+\theta\|\delta(h \exp a, e)} \delta^\ell(h \exp a, e) \\ \leq C (\delta_H(h, e_2))^{-\{\|2\rho+\theta\|-2\|\rho\|(1-\varepsilon')\}/\beta}. \end{aligned}$$

Mais par hypothèse

$$|\{h; \delta_H^{-\gamma}(h, e_2) > \alpha\}| = \|B(\alpha^{-1/\gamma})\| \leq C \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{D/\gamma}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\delta_H(e, h) \geq 1} \frac{dh}{\{\delta_H(h, e_2)\}^{\|2\rho+\theta\|-2\|\rho\|(1-\varepsilon')/\beta}} \\ \leq C \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{D\beta/(\|2\rho+\theta\|-2\|\rho\|(1-\varepsilon'))}} < \infty \end{aligned}$$

d'où la finitude de l'intégrale si $p_1(\varepsilon) = 1/(1-\varepsilon)$. Il s'ensuit que

$$F_{2,0}(k \exp ak') \leq c \delta_{G_0}^{-\ell}(\exp a, e) e^{-2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta_{G_0}(\exp a, e)}.$$

Comme on ne s'intéresse qu'aux a grands, $F_{2,0}$ est dans $L^{p_1-\varepsilon_0}(G_0)$ et d'après [6], l'opérateur de convolution associé est borné sur $L^p(G_0)$ et d'après [5], E donne lieu à un opérateur borné sur $L^p(G)$.

3.1. Démonstration du théorème 4

1) Comme la courbure de Ricci est $\geq -b^2$, si l'on note Δ le laplacien de M , on a d'après le théorème de comparaison (voir [1])

$$\frac{1}{n-1} \Delta r \leq \Delta_b r_b$$

où r désigne la fonction distance sur M d'un point distingué et r_b la fonction distance sur la variété simplement connexe hyperbolique de courbure de Ricci $-b^2$ et de dimension n . Si $\theta(s, w)$ désigne la densité de volume en coordonnées polaires exponentielles au point x de M , on en déduit que

$$\frac{1}{n-1} \theta'(s, w) \leq c \theta(s, w)$$

pour $s \geq 1$, et tout point w de la sphère-unité de $T_x M$. Alors

$$\begin{aligned} \int_1^r \theta'(s, w) ds &\leq c \int_0^r \theta(s, w) ds, \\ \int_{\Sigma_{n-1}} [\theta(r, w) - \theta(1, w)] dw &\leq c \int_0^r \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(s, w) ds dw \end{aligned}$$

si r est assez grand, $\frac{1}{10} \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(r, w) dw > \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(1, w) dw$ alors

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \theta(r, w) dw \leq c \int_0^r \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(s, w) ds dw.$$

Il s'ensuit que pour r assez grand,

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \theta(r, w) dw \leq c |B_r(x)|$$

où $B_r(x)$ désigne la boule riemannienne de centre x et de rayon r et $|B_r(x)|$ son volume.

On commence la preuve du théorème comme pour celle de [1]. En effet

$$\begin{aligned} f^*(x) &\leq \text{Sup}_{r \leq r_0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| d\sigma(y) \\ &\quad + \text{Sup}_{r \geq r_0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| d\sigma(y). \end{aligned}$$

On choisit r_0 très grand pour que l'inégalité

$$\frac{1}{10} \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(r, w) dw > \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(1, w) dw$$

soit vérifiée pour tout $r > r_0$.

On continue comme précédemment et l'on s'intéresse à

$$\begin{aligned} f_2^0(x) &= \text{Sup}_{r \geq r_0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| d\sigma(y) \\ &\leq \int_M \text{Inf} \left(1, \frac{1}{|B_{\delta(x,y)}(x)|} \right) |f(y)| d\sigma(y) \\ &\leq \int_{\delta(x,y) \leq r_0} |f(y)| d\sigma(y) + \int_{\delta(x,y) \geq r_0} \frac{1}{|B_{\delta(x,y)}(x)|} |f(y)| d\sigma(y) \\ &\text{???} \int_M \left| \int_{\delta(x,y) \leq C} |f(y)| d\sigma(y) \right|^p d\sigma(x) \leq C \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Car M est à géométrie bornée. Il ne nous reste plus que la fonction

$$f_2(x) = \int_{\delta(x,y) \geq r_0} \frac{1}{|B_{\delta(x,y)}(x)|} |f(y)| d\sigma(y).$$

D'après la première partie le noyau intéressant à étudier est

$$K^{-1}(\delta(x, y)) = \int_{\Sigma_{n-1}} \theta[\delta(x, y), w] dw \mathbf{1}_{\delta(x,y) \geq r_0}$$

puisque

$$f_2(x) \leq \int_M K(x, y) |f(y)| d\sigma(y).$$

On se propose d'estimer $K(x, y)$. On considère un système de coordonnées polaires au point x dans $T_x M$. On note (r, w) un système de coordonnées polaires en x_0 , $r = \delta(x, y)$ le volume de la boule de centre x de rayon r vaut

$|B_r(x)| = \int_0^r \int_{\Sigma_{n-1}^{\theta(r,w)dw}} e^{\varphi(r)} d\omega$ et l'aire de la sphère $e^{\varphi(r)} = \int_{\Sigma_{n-1}^{\theta(r,w)dw}} d\omega$ pour $\delta(x, y)$ suffisamment grand, le laplacien de la fonction $\psi_x(y) = e^{-\varphi_x(\delta(x, y))}$ vaut

$$\Delta_y \psi_x(y) = \left[-\frac{d^2 \phi_x(r)}{dr^2} + \left(\frac{d\phi_x(r)}{dr} \right)^2 - \frac{\theta'_x(r, w)}{\theta_x(r, w)} \frac{d\phi_x(r)}{dr} \right] e^{-\varphi_x(\delta(x, y))}.$$

Mais $\theta'_x(r, w)/\theta(r, w) = H(r, w)$ où $H(r, w)$ est la courbure moyenne de la sphère centrée en x et de rayon r évaluée au point de coordonnées polaires (r, w) .

Il existe par hypothèse σ telle que $0 < \sigma < \sigma_0$ et

$$(*) \quad \left[-\frac{d^2 \phi_x(r)}{dr^2} + \left[\frac{d\phi_x(r)}{dr} \right]^2 - \tau \frac{d\phi_x(r)}{dr} + \sigma^2 \right] e^{-\varphi_x(r)} \geq 0.$$

Alors

$$\left[-\frac{d^2 \varphi_x(r)}{dr^2} + \left[\frac{d\varphi_x(r)}{dr} \right]^2 - H(r, w) \frac{d\varphi_x(r)}{dr} + \sigma^2 \right] e^{-\varphi_x(r)} \geq 0$$

et la fonction $\psi_x(y) = e^{-\varphi_x(\delta(x, y))}$ est $\Delta + \sigma$ sous harmonique.

Mais si f est une fonction $M \rightarrow \mathbb{C}$, C^∞ à support compact, $f(x_0) = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(r, w)|^2 \theta(r, w) dr &\leq \frac{1}{\sigma} \int_0^\infty |f(r, w)|^2 \theta'(r, w) dr, \\ \frac{1}{\sigma} \int_0^\infty \left| \frac{\partial f}{\partial r}(r, w) \right| \cdot |f(r, w)| \theta(r, w) dr \\ &\leq \frac{1}{\sigma} \left(\int_0^\infty \left| \frac{\partial f}{\partial r}(r, w) \right|^2 \theta(r, w) dr \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^\infty |f(r, w)|^2 \theta(r, w) dr \right)^{1/2}, \\ \int_0^\infty \int_{\Sigma_{n-1}} |f(r, w)|^2 \theta(r, w) dr dw &\leq \frac{1}{\sigma_0^2} \int_0^\infty \int_{\Sigma_{n-1}} \left| \frac{\partial f}{\partial r}(r, w) \right|^2 dr dw \end{aligned}$$

et $\|f\|_2^2 \leq -\frac{1}{\sigma_0^2} \langle \Delta f, f \rangle$

$$\langle (-\Delta - \sigma_0^2) f, f \rangle \geq 0$$

et si $\varepsilon > 0$, $\langle -\Delta - (\sigma^2) f, f \rangle \gg (\sigma^2 - \sigma_0^2) \|f\|_2^2$.

Par conséquent

$$\Delta + \sigma^2 \text{ est inversible sur } L^2(M)$$

d'où l'existence d'une fonction de Green pour $\Delta + \sigma^2 : G_\sigma$.

On peut appliquer le principe du maximum à ψ et G_σ avec l'opérateur elliptique $\Delta + \sigma^2$. Malheureusement la constante σ est positive et on ne peut l'appliquer brutalement.

a) Comme M est à géométrie bornée pour $\delta(x, y) = r_0 > 0$, $C_\sigma^{-1} < G_\sigma(x, y) \leq C_\sigma$ où C_σ est une constante finie qui ne dépend ni de x , ni de y .

b) On considère l'opérateur

$$(G_\sigma^x)^{-1}(\Delta + \sigma)G_\sigma^x = \Delta + \nabla \log G_\sigma^x = \Delta_\sigma^x$$

où $G_\sigma^x(y) = G_\sigma(x, y)$.

c) Pour $\delta(x, y) > r_0$, $\Delta_\sigma^x G_\sigma^x = 0$. Si $\psi^x(y) = e^{-\varphi_x(y)}$, $\Delta_\sigma^x(\frac{\psi^x}{G_\sigma^x}) \geq 0$ d'après ce qui a été dit précédemment.

d) De plus Δ_σ^x est sans terme constant et par hypothèse

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\psi^x(y)}{G_\sigma^x(y)} \leq C$$

le principe du maximum appliqué à 1 et ψ^x/G_σ^x pour Δ_σ^x dit que

$$\psi^x(y) \leq C_\sigma G_\sigma^x(y) = C_\sigma G_\sigma(x, y)$$

pour tout y avec $\delta(x, y) \geq r_0$. Il existe p_0 , $1 < p_0 \leq 2$ tel que

$$\left\| \int_M G_\sigma(x, y) \mathbf{1}_{\delta(x, y) \geq r_0}(y) f(y) d\sigma(y) \right\|_{p_0} \leq C(p, \sigma) \|f\|_{p_0}.$$

Soit $\mu^2 = -\text{Inf} \langle \Delta f, f \rangle / (\|f\|_2)$ soit

$$G_\sigma(x, y) = \int_0^\infty e^{\sigma^2 t} P_t(x, y) dt$$

où P_t est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. On a déjà vu que G_σ est fini partout, elle est même C^∞ en dehors de la diagonale.

On considère l'ensemble $\Gamma = \{z, 0 \leq \text{Re } z \leq 1\}$. On définit

$$G_z(x, y) = \int_0^\infty e^{(\mu^2 - \varepsilon)zt} P_t(x, y) dt$$

Alors pour $\text{Re } z = 1$, $\|\int_M G_z(x, y) f(y) d\sigma(y)\|_2 \leq c \|f\|_2$.

Pour $\text{Re } z = 0$, $\|\int_M G_z(x, y) f(y) d\sigma(y)\|_p \leq c \|f\|_p$ pour tout $1 < p \leq 2$. En effet

$$\left| \int_M \int_0^\infty e^{(u^2 - \varepsilon)it} P_t(x, y) dt f(y) d\sigma(y) \right| \leq \int_M \int_0^\infty P_t(x, y) |f(y)| d\sigma(y) dt.$$

Comme $\mu^2 > 0$, on a $\|P_t\|_{2 \rightarrow 2} \leq e^{-\mu^2 t}$ pour $t > 1$ et par interpolation

$$\|P_t\|_{p \rightarrow p} \leq e^{-2\mu^2/p't} \quad \text{pour } t > 1.$$

Il s'ensuit que

$$\|G_s f\|_{p_s} \leq C(s) \|f\|_{p_s} \quad \text{où} \quad G_s = \int_0^\infty e^{+(\mu^2 - \varepsilon)s} P_t(x, y) dt,$$

$1/p_s = \frac{1}{2}(1 - s) + 1/p$; on peut choisir

$$s = \frac{\sigma^2}{\mu^2 - \varepsilon}, \quad \frac{1}{p_s} = \frac{1 - \sigma^2}{\frac{1}{2}(\mu^2 - 2)} + \frac{\sigma^2}{(\mu^2 - \varepsilon)p}.$$

Comme p est voisin de 1 et ε arbitraire, on voit que pour tout p tel que $p_0 > \frac{1}{2}[1 + \sigma^2/\mu^2]$, on a

$$\left\| \int_M G_\sigma(x, y) f(y) d\sigma(y) \right\|_{p_0} \leq C_\sigma \|f\|_{p_0}.$$

Alors

$$\left\| \int_M G_\sigma(x, y) \mathbf{1}_{\delta(x, y) \geq r_0}(y) f(y) d\sigma(y) \right\|_{p_0} \leq C_\sigma(p_0) \|f\|_{p_0},$$

$$\left\| \int_M \psi_\sigma(x, y) \mathbf{1}_{\delta(x, y) \geq r_0}(y) f(y) d\sigma(y) \right\|_{p_0} \leq C(\sigma, p_0) \|f\|_{p_0}.$$

Par conséquent

$$\|f_2\|_{p_0} \leq C(p, p_0) \|f\|_{p_0} \quad \text{et} \quad \|f^*\|_{p_0} \leq C(p_0) \|f\|_{p_0}.$$

Comme l'inégalité est vraie pour $p = +\infty$, il s'ensuit que $\|f^*\|_p \leq C(p) \|f\|_p$ pour tout $p \geq p_0$.

Ce qui termine la preuve du théorème.

3.2. Démonstration du corollaire. — Nous n'insisterons pas sur la preuve de ce corollaire qui est une conséquence facile des théorèmes de comparaison — voir [1].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. CHAVEL – *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, vol. 115, Academic Press Inc., 1984, Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk.
- [2] J. L. CLERC & E. M. STEIN – « L^p -multipliers for noncompact symmetric spaces », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **71** (1974), p. 3911–3912.
- [3] G. B. FOLLAND & E. M. STEIN – « Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group », *Comm. Pure Appl. Math.* **27** (1974), p. 429–522.
- [4] N. LOHOUÉ – « Fonction maximale de Hardy-Littlewood sur les variétés de Cartan-Hadamard », *C. R. Acad. Sci. Paris* **300** (1885).
- [5] _____, « Estimations L^p des coefficients de représentation et opérateurs de convolution », *Adv. in Math.* **38** (1980), p. 178–221.
- [6] _____, « Sur les représentations uniformément bornées et le théorème de convolution de Kunze-Stein », *Osaka J. Math.* **18** (1981), p. 465–480.

- [7] A. NAGEL, E. M. STEIN & S. WAINGER – « Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties », *Acta Math.* **155** (1985), p. 103–147.
- [8] A. NEVO – « Radial geometric analysis on groups », in *Proceedings of first SAM Symposium on Discrete Geometric Analysis, Sendai 12-20 (Japan)*, 2002.
- [9] N. T. VAROPOULOS, L. SALOFF-COSTE & T. COULHON – « Analysis and geometry on groups », *Cambridge Tracts in Math.* **100** (1992), p. 156.

