

PERTE DE RÉGULARITÉ POUR LES ÉQUATIONS D'ONDES SUR-CRITIQUES

PAR GILLES LEBEAU

RÉSUMÉ. — On prouve que le problème de Cauchy local pour l'équation d'onde sur-critique dans \mathbb{R}^d , $\square u + u^p = 0$, p impair, avec $d \geq 3$ et $p > (d+2)/(d-2)$, est mal posé dans H^σ pour tout $\sigma \in]1, \sigma_{\text{crit}}[$, où $\sigma_{\text{crit}} = d/2 - 2/(p-1)$ est l'exposant critique.

ABSTRACT (*Loss of regularity for super critical wave equations*). — We prove that the local Cauchy problem for the supercritical wave equation in \mathbb{R}^d , $\square u + u^p = 0$, with $d \geq 3$, $p > 3$ and $p > (d+2)/(d-2)$, is ill-posed in H^σ for every $\sigma \in]1, \sigma_c[$, where $\sigma_c = d/2 - 2/(p-1)$ is the critical exponent.

1. Introduction et résultats

On s'intéresse au problème de Cauchy local pour l'équation des ondes non linéaire dans \mathbb{R}^d , avec $d \geq 3$ et p entier impair,

$$(1.1) \quad (\partial_t^2 - \Delta_x)u + u^p = 0,$$

$$(1.2) \quad u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x).$$

Texte reçu le 4 avril 2003, révisé le 16 juin 2003, accepté le 28 août 2003.

GILLES LEBEAU, Université de Nice Sophia-Antipolis, Laboratoire J.-A. Dieudonné, UMR 6621 du CNRS, Parc Valrose 06108 Nice Cedex 2 (France)

E-mail : lebeau@math.unice.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 35L05, 35L15.

Mots clefs. — Analyse microlocale, équations d'ondes non-linéaires.

Les solutions de l'équation (1.1) vérifient formellement la conservation de l'énergie

$$(1.3) \quad E(u) = \int \frac{1}{2}(|\partial_t u|^2 + |\nabla_x u|^2) + \frac{u^{p+1}}{p+1} dx.$$

Le problème de Cauchy le plus naturel pour (1.1) est donc de supposer les données à l'instant $t = 0$ dans l'espace d'énergie

$$(1.4) \quad u(0, x) \in \dot{H}^1 \cap L^{p+1}, \quad \partial_t u(0, x) \in L^2.$$

Rappelons que le problème de Cauchy (1.1) avec données dans l'espace d'énergie possède une longue histoire.

Lorsque l'exposant p est sous-critique, c'est-à-dire vérifie $p + 1 < d^*$, où $d^* = 2d/(d - 2)$ est l'exposant de l'jection de Sobolev $\dot{H}^1 \subset L^{d^*}$ dans \mathbb{R}^d , les premiers résultats furent obtenus en dimension 3 par Jörgens [4] en 1961, le cas de la dimension quelconque ayant été résolu par Ginibre et Velo [2] en 1985, où ils prouvent que les inégalités de Strichartz impliquent que le problème de Cauchy pour (1.1) avec données dans l'espace d'énergie est bien posé globalement en temps.

Dans le cas critique $p + 1 = d^*$, le problème de l'existence globale a été résolu par Shatah et Struwe [8] (avec l'unicité dans un espace précisé adapté aux estimations de Strichartz).

Nous supposerons donc que l'exposant p est au contraire sur-critique, c'est-à-dire vérifie

$$(1.5) \quad p + 1 > d^*.$$

Dans ce cas, l'existence de solutions faibles globales en temps a été obtenu par Segal [7], Lions [6], et Strauss [9].

L'éventuelle unicité de ces solutions faibles et leur continuité par rapport aux données de Cauchy demeurent des problèmes ouverts.

Nous avons toutefois prouvé dans [5] qu'il est impossible de construire les solutions faibles de sorte qu'elles dépendent continuement de leurs données de Cauchy, uniformément sur la boule unité de l'espace d'énergie (ce qui est le cas lorsque p est sous-critique).

REMARQUE 1.1. — Dans toute la suite, on appellera *solution faible* de l'équation (1.1) une solution au sens des distributions construites par approximation de l'équation, méthode que nous rappelons en appendice. En particulier, il résulte des constructions rappelées au §6, que si les données de Cauchy coïncident dans un ouvert Ω avec des fonctions ne dépendant au plus que de deux variables, par vitesse finie de propagation, les solutions faibles coïncident dans le domaine d'influence de Ω avec l'unique solution du problème 2D associé, donc indépendamment du choix de la fonction de régularisation f_ε , et de la suite extraite choisie dans le procédé de construction des solutions faibles.

Les inégalités de Strichartz entraînent toutefois que le problème de Cauchy local (1.1), avec données dans l'espace

$$(1.6) \quad u(0, x) \in H^\sigma, \quad \partial_t u(0, x) \in H^{\sigma-1}$$

est localement bien posé pour σ vérifiant

$$(1.7) \quad \sigma > \sigma_{\text{crit}}, \quad \sigma_{\text{crit}} = \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}.$$

L'objet de cet article est de prouver que le problème de Cauchy local (1.1) est mal posé dans H^σ pour tout σ vérifiant $\sigma \in]1, \sigma_{\text{crit}}[$; pour énoncer le résultat, nous introduisons les notations suivantes.

Soit σ_{sob} l'exposant de l'injection de Sobolev $H^{\sigma_{\text{sob}}} \subset L^{p+1}$:

$$(1.8) \quad \sigma_{\text{sob}} = \frac{d}{2} - \frac{d}{p+1}$$

Comme p est sur-critique, on a $1 < \sigma_{\text{sob}} < \sigma_{\text{crit}}$. Soit $I(\sigma)$ la fonction définie sur $[1, \sigma_{\text{crit}}]$ par

$$(1.9) \quad I(\sigma) = 1 \text{ sur } [1, \sigma_{\text{sob}}], \quad I(\sigma) = \frac{2\sigma}{(p-1)(\frac{1}{2}d-\sigma)} \text{ sur } [\sigma_{\text{sob}}, \sigma_{\text{crit}}].$$

On a $I(\sigma) < \sigma$ pour tout $\sigma \in]1, \sigma_{\text{crit}}[$.

Le résultat qui suit exprime la perte de régularité des solutions faibles par rapport à la régularité de leurs données de Cauchy.

THÉORÈME 1. — *Pour tout $\sigma \in]1, \sigma_{\text{crit}}[$ et tout $\sigma' > I(\sigma)$, il existe un couple de données de Cauchy $u_0 \in H_0^\sigma \cap L^{p+1}$, $u_1 \in C_0^\infty$, et une suite t_k de limite nulle, telles que pour toute solution faible $u(t, x)$ de (1.1), (1.2), on ait*

$$(1.10) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|u(t_k, .)\|_{H^{\sigma'}} = +\infty.$$

REMARQUE 1.2. — Il résultera de la construction qu'on peut choisir $u_0 \in C_0^\infty$ en dehors de l'origine.

Soit $J(\sigma)$ la fonction définie sur $[1, \sigma_{\text{crit}}]$ par

$$(1.11) \quad J(\sigma) = \frac{\frac{1}{2}d + 2(\sigma-1)/(p-1)}{\frac{1}{2}d - (\sigma-1)}.$$

THÉORÈME 2. — *Pour tout $\sigma \in]1, \sigma_{\text{crit}}[$ et tout $\sigma' > J(\sigma)$, il existe un couple de données de Cauchy $u_0 \in C_0^\infty$, $u_1 \in H_0^{\sigma-1}$ et une suite t_k de limite nulle, telles que pour toute solution faible $u(t, x)$ de (1.1), (1.2), on ait*

$$(1.12) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\partial_t u(t_k, .)\|_{H^{\sigma'-1}} = +\infty.$$

REMARQUE 1.3. — On peut interpréter le théorème 2 comme une explosion instantanée des solutions faibles dans tout espace d'interpolation entre l'espace d'énergie et l'espace optimal des inégalités de Strichartz associé à l'homogénéité de l'équation.

2. Homogénéité

Soient $d' > 0$ et $d'' > 0$ tels que $d' + d'' = d$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $x = (x', x'')$ avec $x' \in \mathbb{R}^{d'}$ et $x'' \in \mathbb{R}^{d''}$. Soient $\alpha > 0$ et $\gamma \in]0, 1]$. Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $h \in]0, 1]$, on pose

$$(2.1) \quad \varphi_h(x', x'') = h^{-\alpha} \varphi\left(\frac{x'}{h}, \frac{x''}{h^\gamma}\right).$$

En désignant par $\widehat{\varphi}$ la transformation de Fourier et

$$(2.2) \quad \delta = \frac{1}{2}(d' + d''\gamma)$$

on a

$$(2.3) \quad \widehat{\varphi}_h(\xi', \xi'') = h^{2\delta - \alpha} \widehat{\varphi}(h\xi', h^\gamma \xi'')$$

d'où pour tout σ

$$(2.4) \quad \begin{aligned} & \int (1 + |\xi|^2)^\sigma |\widehat{\varphi}_h(\xi)|^2 d\xi \\ &= h^{2(\delta - \alpha - \sigma)} \int (h^2 + |\xi'|^2 + h^{2(1-\gamma)} |\xi''|^2)^\sigma |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$(2.5) \quad \|\varphi_h; H^\sigma\| = h^{\delta - \alpha - \sigma} \left(\int (h^2 + |\xi'|^2 + h^{2(1-\gamma)} |\xi''|^2)^\sigma |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

La norme L^{p+1} de φ_h est quant à elle donnée par

$$(2.6) \quad \|\varphi_h; L^{p+1}\| = h^{2\delta/(p+1) - \alpha} \|\varphi; L^{p+1}\|.$$

Si on effectue le changement d'échelle

$$(2.7) \quad x' = hy', \quad x'' = h^\gamma y'', \quad u(t, x', x'') = h^{-\alpha} v(t, y', y''),$$

u sera solution de (1.1) si, et seulement si, v est solution de l'équation

$$(2.8) \quad h^{(p-1)\alpha} \partial_t^2 v - h^{2\beta} (\Delta_{y'} + h^{2(1-\gamma)} \Delta_{y''}) v + v^p = 0$$

avec

$$(2.9) \quad \beta = \frac{(p-1)\alpha}{2} - 1.$$

La stratégie de construction de solutions singulières u pour (1.1) va consister à construire d'abord des solutions v de (2.8) et à définir ensuite u comme une superposition de solutions définies par (2.7). Comme on veut contrôler les normes H^σ et L^{p+1} de la donnée $u(0, x)$, et qu'il semble judicieux de faire en

sorte que (2.8) ne dégénère pas sur une équation des ondes linéaires lorsque h tend vers 0, on impose les relations déduites de (2.5), (2.6) et (2.8)

$$(2.10) \quad \alpha = \min \left(\delta - \sigma, \frac{2\delta}{p+1} \right), \quad \beta > 0.$$

LEMME 2.1. — Pour tout $\sigma \in [1, \sigma_{\text{crit}}[$, les solutions $\delta \leq \frac{1}{2}d$ aux inéquations (2.10) sont les réels

$$(2.11) \quad \delta \in \left] \sigma + \frac{2}{p-1}, \frac{d}{2} \right].$$

Démonstration. — Les inéquations (2.10) signifient

$$\min \left(\delta - \sigma, \frac{2\delta}{p+1} \right) > \frac{2}{p-1},$$

c'est-à-dire $\delta > \sigma + 2/(p-1)$ pour $\delta \leq \sigma(p+1)/(p-1)$ et $\delta > (p+1)/(p-1)$ pour $\delta \geq \sigma(p+1)/(p-1)$, d'où le résultat. \square

REMARQUE 2.1. — La quantité 2δ joue le rôle d'une dimension virtuelle pour le changement d'échelle (2.7), de sorte que la borne inférieure dans (2.11) est exactement la valeur critique (1.7) associée à la dimension 2δ .

3. Équation en dimension 1

On s'intéresse dans cette partie à l'équation en dimension 1, avec $s, z \in \mathbb{R}$,

$$(3.1) \quad \partial_s^2 v - \partial_z^2 v + v^p = 0, \quad v(0, z) = v_0, \quad \partial_s v(0, z) = v_1.$$

On notera $G(s)$ la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$(3.2) \quad G'' + G^p = 0, \quad G(0) = 1, \quad G'(0) = 0.$$

Soit L le linéarisé de (3.1) sur la solution $G(s)$ indépendante de z ,

$$(3.3) \quad L(w) = \partial_s^2 w - \partial_z^2 w + pG^{p-1}w.$$

Soient Γ la période de la fonction G et $M(\lambda)$ la matrice de transfert associée à l'équation de Hill sur \mathbb{R} , $f'' + pG^{p-1}f$

$$(3.4) \quad \begin{pmatrix} f(\Gamma) \\ f'(\Gamma) \end{pmatrix} = M(\lambda) \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}, \quad f'' + pG^{p-1}f + \lambda f = 0.$$

On a $\det M(\lambda) = 1$ et les valeurs propres de $M(\lambda)$ sont réelles si, et seulement si, $|\text{tr}(M(\lambda))| \geq 2$.

Soit $Z(s)$ l'opérateur reliant les données de Cauchy des solutions de (3.3) entre les instants 0 et s . Par définition de M , on a

$$(3.5) \quad Z(\Gamma) \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int e^{iz\zeta} M(\zeta^2) \begin{pmatrix} \widehat{w}_0(\zeta) \\ \widehat{w}_1(\zeta) \end{pmatrix} d\zeta$$

où $\widehat{f}(\zeta) = \int e^{-iz\zeta} f(z) dz$ est la transformée de Fourier en z .

PROPOSITION 3.1. — (i) *On a $\text{tr}(M(\lambda)) \geq -2$ pour tout λ .*

(ii) *L'ensemble d'instabilité $I = \{\text{tr}(M(\lambda)) \geq 2\}$ est de la forme*

$$I = \cup_{k \geq -1} I_k$$

avec $I_{-1} =]-\infty, \lambda_{-1}]$, $I_0 = [\lambda_0, 0]$, $I_k = [\lambda_k, \lambda'_k]$ pour $k \geq 1$, avec

$$(3.6) \quad \lambda_{-1} < \lambda_0 < 0 < \lambda_1 \leq \lambda'_1 < \lambda_2 \leq \lambda'_2 < \dots$$

(iii) *Il existe $k \geq 1$ tel que $\lambda_k \neq \lambda'_k$.*

(iv) *On a $\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \text{tr}(M(\lambda)) = 2$.*

Démonstration. — Cette proposition est démontrée dans [5, prop. 4.1] pour les exposants $p \geq 7$; le même argument traite le cas $p = 5$. Pour $p = 3$, il reste à vérifier que le potentiel $q(t) = -3a^2 G^2(at)$, où $a = \Gamma/\pi$ ne vérifie pas l'équation (29) de [4]

$$q'' = 3q^2 + aq + b$$

avec a, b constantes, ce qui est immédiat. \square

D'après la proposition 3.1, il existe $\mu_0 > 0$ et $\zeta_0 > 0$ tels que la fonction $\text{tr}(M(\zeta^2))$ atteigne son maximum $2 \cosh(\Gamma \mu_0)$ en ζ_0 . On a en particulier

$$(3.7) \quad e^{\Gamma \mu_0} = \sup_{\lambda \geq 0} \{ \text{valeurs propres réelles de } M(\lambda) \} > 1.$$

On peut alors choisir une matrice hermitienne définie positive $\zeta \mapsto Q(\zeta)$, dépendant régulièrement de ζ , telle que, en notant \mathbb{C}_ζ^2 le plan \mathbb{C}^2 muni de la norme $\|z\|_\zeta^2 = {}^t \bar{z} Q(\zeta) z$, on ait

$$(3.8) \quad \sup_{\zeta \in \mathbb{R}} \|M(\zeta^2); \mathbb{C}_\zeta^2\| = e^{\Gamma \mu_0},$$

$$(3.9) \quad \lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \|M(\zeta^2); \mathbb{C}_\zeta^2\| = 1,$$

$$(3.10) \quad Q(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } \zeta \text{ assez grand.}$$

Soit \mathbb{T} le tore $\mathbb{R}/(2\pi/\zeta_0 \mathbb{Z})$ et \mathcal{H} l'espace $H^1(\mathbb{T}) \oplus L^2(\mathbb{T})$ muni de la norme

$$(3.11) \quad \|f = (f_0, f_1)\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_k {}^t \bar{\hat{f}}_k Q(k\zeta_0) \hat{f}_k$$

où

$$\hat{g}_k = \frac{\zeta_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\zeta_0} e^{-ikz\zeta_0} g(z) dz$$

est le k -ième coefficient de Fourier de la fonction $2\pi/\zeta_0$ périodique g . D'après (3.10), la norme $\|f = (f_0, f_1)\|_{\mathcal{H}}$ est équivalente à la norme usuelle sur $H^1 \oplus L^2$:

$$(3.12) \quad \exists C, \quad C\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_k ((1+k^2)|f_{0,k}|^2 + |f_{1,k}|^2) \leq \frac{1}{C}\|f\|_{\mathcal{H}}^2$$

et on a de plus d'après (3.8), l'identité

$$(3.13) \quad \|Z(\Gamma); \mathcal{H}\| = e^{\Gamma\mu_0}.$$

Il en résulte pour tout $s > 0$

$$(3.14) \quad \|Z(s); \mathcal{H}\| \leq C^{te} e^{s\mu_0}.$$

Soient $e = (e_0, e_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$ vérifiant

$$M(\zeta_0^2)e = e^{\Gamma\mu_0}e$$

et $\Theta(s)$ la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$(\partial_s^2 + pG^{p-1}(s) + \zeta_0^2)\Theta(s) = 0, \quad \Theta(0) = e_0, \quad \Theta'(0) = e_1.$$

La fonction $\Theta(s)$ vérifie

$$(3.15) \quad \Theta(s + k\Gamma) = e^{k\Gamma\mu_0}\Theta(s).$$

PROPOSITION 3.2. — Il existe $c_0 > 0, c_1 > 0$ tels que pour tout $c \in]0, c_0]$ et tout $\varepsilon \in]0, c[$, l'unique solution $v(s, z)$ de l'équation

$$(3.16) \quad \begin{cases} \partial_s^2 v - \partial_z^2 v + v^p = 0, \\ v(0, z) = 1 + \varepsilon \cos(z\zeta_0)e_0, \quad \partial_s v(0, z) = \varepsilon \cos(z\zeta_0)e_1. \end{cases}$$

vérifie

$$(3.17) \quad \begin{cases} v(s, z) = G(s) + \varepsilon (\cos(z\zeta_0)\Theta(s) + w(s, z)), \\ \|w(s, .), H^1(\mathbb{T})\| \leq c_1 c e^{s\mu_0} \end{cases}$$

pour tout $s \geq 0$ tel que $\varepsilon e^{s\mu_0} \leq c$. En particulier, on a $w(s, z) = \sum_k w_k(s) e^{ikz\zeta_0}$,

$$(3.18) \quad |w_{\pm 1}(s)| \leq c_1 c e^{s\mu_0}.$$

Démonstration. — Remarquons d'abord que l'équation d'onde 1D, non linéaire, (3.16) possède une unique solution globale $(v, \partial_s v)$ continue en s à valeurs dans \mathcal{H} . Soient $|\cdot|$ la norme sur $C^0([0, s_0]; \mathcal{H}) = \mathcal{A}$,

$$(3.19) \quad |f| = \sup_{0 \leq s \leq s_0} e^{-\mu_0 s} \|f(s)\|_{\mathcal{H}}$$

$$(3.20) \quad w_0(s, z) = \cos(z\zeta_0) \cdot \Theta(s).$$

D'après (3.14), on a

$$(3.21) \quad |(w_0, w'_0)| \leq C^{te}.$$

Si N désigne l'opérateur non linéaire

$$(3.22) \quad N(g)(s, z) = - \sum_{k=2}^p C_p^k G(s)^{p-k} \varepsilon^{k-1} (g(s, z))^k,$$

la fonction w définie par (3.17) vérifie l'équation

$$(3.23) \quad L(w) = N(w_0 + w), \quad w(0, z) = 0, \quad \partial_s w(0, z) = 0,$$

d'où

$$(3.24) \quad \begin{pmatrix} w(s, z) \\ \partial_s w(s, z) \end{pmatrix} = \int_0^s Z(s-u) \begin{pmatrix} 0 \\ N(w_0 + w)(u, .) \end{pmatrix} du \stackrel{\text{déf}}{=} \Phi(w_0 + w).$$

L'opérateur Φ , vu comme application de \mathcal{A} dans \mathcal{A} vérifie donc, d'après (3.14), (3.22), (3.24), en utilisant l'injection $H^1(\mathbb{T}) \subset L^\infty(\mathbb{T})$, avec $\underline{h} = (h, \partial_s h)$, $c = \sup_{0 \leq s \leq s_0} \varepsilon e^{s\mu_0}$, et pour $|\underline{h}| + |\underline{h}'| \leq M$,

$$(3.25) \quad \begin{cases} |\Phi(\underline{h})| \leq C^{\text{te}} c (1 + (cM)^{p-2}) M^2, \\ |\Phi(\underline{h}) - \Phi(\underline{h}')| \leq C^{\text{te}} c (1 + (cM)^{p-2}) |\underline{h} - \underline{h}'| M. \end{cases}$$

D'après (3.21) et (3.25), le théorème du point fixe entraîne que l'équation (3.24), $\underline{w} = \Phi(w_0 + w)$, possède une unique solution \underline{w} dans \mathcal{A} , qui vérifie $|\underline{w}| \leq C^{\text{te}} c$ dès que $c \in]0, c_0]$ avec c_0 assez petit, d'où (3.17). \square

4. Preuve du théorème 1

On reprend les notations du §2, avec $d' = 1$ et $d'' = d - 1$. Soit $\sigma \in]1, \sigma_{\text{crit}}[$; choisissons $\delta \in]\sigma + 2/(p-1), d/2]$. Soit $\tau > 0$ petit; on pose

$$(4.1) \quad \begin{cases} \alpha_0 = \min \left(\delta - \sigma, \frac{2\delta}{p+1} \right), & \alpha = \alpha_0 - \tau, \\ \beta = \frac{1}{2}(p-1)\alpha - 1 > 0, & \gamma = \frac{2\delta-1}{d-1} \in]0, 1]. \end{cases}$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, vérifiant

$$(4.2) \quad \varphi(y_1, y'') = \begin{cases} 1 & \text{pour } |y_1| \leq 1 \text{ et } |y''| \leq 1, \\ 0 & \text{pour } |y_1| \geq 2 \text{ ou } |y''| \geq 2. \end{cases}$$

Pour $h \in]0, 1]$, choisissons une fonction $s(h)$ vérifiant

$$(4.3) \quad \frac{\ln(h)}{s(h)} \longrightarrow 0, \quad \forall \nu, h^\nu s(h) \longrightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

Soient $c > 0$ fixé, vérifiant $c \ll \max(\Theta(s), s \in [0, \Gamma])$ (voir la proposition 3.2), et $\varepsilon(h) \in O(h^\infty)$ défini par

$$(4.4) \quad \varepsilon(h) e^{\mu_0 s(h)} = c.$$

Pour $h \in]0, 1]$, soit $v(s, y, h)$ une solution faible de l'équation

$$(4.5) \quad \begin{cases} \partial_s^2 v - h^{2\beta}(\Delta_{y_1} + h^{2(1-\gamma)}\Delta_{y''})v + v^p = 0, \\ v(0, y, h) = \varphi(y)(1 + \varepsilon(h)\cos(y_1\zeta_0/h^\beta))e_0 = v_{0,h}(y), \\ \partial_s v(0, y, h) = \varphi(y)\varepsilon(h)\cos(y_1\zeta_0/h^\beta)e_1 = v_{1,h}(y). \end{cases}$$

La vitesse de propagation de l'équation (4.5) étant majorée par h^β , la fonction $v(s, y, h)$ coïncide dans le domaine $|y| < \frac{1}{2}$ et pour $|s| < s(h)$, avec l'unique solution de l'équation (4.5) dans laquelle on a remplacé φ par 1 dans les données de Cauchy de (4.5) (on a $\beta > 0$, donc $s(h)h^\beta \ll 1$ d'après (4.3)).

D'après la proposition 3.2, il en résulte dans le domaine $|y| < \frac{1}{2}$ et $|s| < s(h)$

$$(4.6) \quad \begin{cases} v(s, y, h) = b(s, y_1, h), \\ b(s, y_1, h) = G(s) + \varepsilon(h)(\cos(y_1\zeta_0/h^\beta)\Theta(s) + w(s, y_1/h^\beta)), \\ \|w(s, .), H^1(\mathbb{T})\| \leq c_1 ce^{s\mu_0}. \end{cases}$$

Posons, pour $h > 0$ petit,

$$(4.7) \quad u_{h,\tau}(t, x', x'') = h^{-\alpha}v\left(\frac{t}{h^{1+\beta}}, \frac{x'}{h}, \frac{x''}{h^\gamma}\right).$$

La fonction $u_{h,\tau}$ vérifie l'équation (1.1), et puisque $\varphi \in C_0^\infty$ et $\varepsilon(h) \in O(h^\infty)$, la famille $(u_{h,\tau}(0, x), \partial_t u_{h,\tau}(0, x))$ est $O(h^\tau)$ dans $(H_0^\sigma \cap L^{p+1} \times C_0^\infty)$. D'après (2.5), pour tout σ' , on a

$$(4.8) \quad \|u_{h,\tau}(t, .); H^{\sigma'}\| \geq h^{\delta-\alpha-\sigma'} \left(\int (h^2 + |\eta_1|^2)^{\sigma'} \left| \widehat{v}\left(\frac{t}{h^{1+\beta}}, \eta\right) \right|^2 d\eta \right)^{1/2}.$$

D'après la proposition (3.2) et le choix des fonctions $\varepsilon(h), s(h)$, il en résulte la

PROPOSITION 4.1. — Il existe $h_0 > 0, c_2 > 0$ et, pour $h \in]0, h_0]$, un temps $t(h)$ vérifiant

$$(4.9) \quad \forall M, \forall \nu, \quad Mh^{1+\beta} \log(h) < t(h) < h^{1+\beta-\nu} \quad (h \rightarrow 0)$$

et telle qu'on ait, pour tout $\sigma' \geq 0$, et pour toute solution faible v de (4.5)

$$(4.10) \quad \|u_{h,\tau}(t(h), .); H^{\sigma'}\| \geq c_2 h^{\delta-\alpha-\sigma'(1+\beta)}$$

où $u_{h,\tau}$ est défini par (4.7).

Démonstration. — La proposition résulte de (3.15), (4.4), (4.6), (4.8) et de

$$\int |\eta_1|^{2\sigma'} \left| \widehat{v}\left(\frac{t}{h^{1+\beta}}, \eta\right) \right|^2 d\eta + O(h^\infty) \geq C^{\text{te}} \int_{|\eta_1 - \zeta_0/h^\beta| \leq 1} |\eta_1|^{2\sigma'} \left| \widehat{\psi b}\left(\frac{t}{h^{1+\beta}}, \eta\right) \right|^2 d\eta$$

où $\psi(y) \in C_0^\infty$ localise dans $|y| < \frac{1}{2}$. \square

On achève alors la preuve du théorème 1 en construisant les données de Cauchy u_0, u_1 comme superposition de données de Cauchy de translatées-homogénéisées des $v_{.,h}$ comme suit.

On choisit $\delta = \frac{1}{2}d$ pour $\sigma \geq \sigma_{\text{sob}}$ et $\delta = \sigma(p+1)/(p-1)$ pour $\sigma \leq \sigma_{\text{sob}}$. Dans les deux cas, on a $\alpha_0 = \delta - \sigma$ et la condition $\sigma'(1+\beta) > \sigma$ équivaut à $\sigma' > I(\sigma)$.

Posons $h_n = 2^{-n}$, $\tau_n = 1/\sqrt{n}$, $\alpha_n = \alpha_0 - \tau_n$, $\beta_n = \frac{1}{2}(p-1)\alpha_n - 1$ et $x_n = (1/n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$. On définit les données de Cauchy u_0, u_1 par (avec n_0 fixé assez grand)

$$(4.11) \quad \begin{cases} u_0 = \sum_{n>n_0} u_{0,n}, & u_{0,n} = h_n^{-\alpha_n} v_{0,h_n}\left(\frac{x_1 - n^{-1}}{h_n}, \frac{x''}{h_n^\gamma}\right), \\ u_1 = \sum_{n>n_0} u_{1,n}, & u_{1,n} = h_n^{-(\alpha_n + 1 + \beta_n)} v_{1,h_n}\left(\frac{x_1 - n^{-1}}{h_n}, \frac{x''}{h_n^\gamma}\right). \end{cases}$$

La série $\sum_n h_n^{\tau_n}$ étant convergente, on a $(u_0, u_1) \in H_0^\sigma \cap L^{p+1} \times C_0^\infty$.

Soit $u(t, x)$ une solution faible de (1.1), (1.2), de données de Cauchy (u_0, u_1) et $t_k = t(h_k)$. Comme pour k grand on a

$$\text{dist}(x_k, x_{k\pm 1}) > \frac{1}{2k^2} > 2(3h_k^\gamma + t_k)$$

par vitesse finie de propagation, la fonction $u(t_k, x)$ coïncide dans la boule de centre x_k et de rayon $1/10k^2$ avec une fonction du type $u_{h_k, \tau_k}(t_k, x)$, et il existe une fonction $\psi(x) \in C_0^\infty$ telle que

$$(4.12) \quad \psi\left(\frac{x - x_k}{k^2}\right)u(t_k, x) = u_{h_k, \tau_k}(t_k, x)$$

Il en résulte d'après la proposition 4.1, qu'il existe un polynôme $\text{pol}(k)$ tel qu'on ait

$$(4.13) \quad \|u(t_k, .); H^{\sigma'}\| \text{pol}(k) \geq 2^{-k(\sigma - \sigma'(1+\beta))} 2^{\sqrt{k}}.$$

D'où le théorème 1. \square

5. Preuve du théorème 2

La preuve du théorème 2 étant analogue à celle du théorème 1, nous ne préciserons que les variantes principales.

On choisit G_1 solution de

$$(5.1) \quad G_1'' + G_1^p = 0, \quad G_1(0) = 0, \quad G_1'(0) = 1.$$

On a $G_1(s) = a^{2/(p-1)}G(a(s+s_0))$, $a^2 = (\frac{1}{2}(p+1))^{\frac{p-1}{p+1}}$ et on note Θ_1, μ_1, ζ_1 les fonctions et les réels associés à G_1 comme dans le §3.

On choisit $\delta = \frac{1}{2}d$, $\gamma = 1$ et on note cette fois v la solution de

$$(5.2) \quad \begin{cases} \partial_s^2 v - h^{2\beta} \Delta_y v + v^p = 0, \\ v(0, y, h) = \varphi(y)(\varepsilon(h) \cos(y_1 \zeta_1 / h^\beta) e_0, \\ \partial_s v(0, y, h) = \varphi(y)(1 + \varepsilon(h) \cos(y_1 \zeta_1 / h^\beta) e_1). \end{cases}$$

On a comme précédemment dans le domaine $|y| < \frac{1}{2}$ et $|s| < s(h)$

$$(5.3) \quad \begin{cases} v(s, y, h) = b(s, y_1, h), \\ b(s, y_1, h) = G_1(s) + \varepsilon(h)(\cos(y_1 \zeta_1 / h^\beta) \Theta_1(s) + w(s, y_1 / h^\beta)), \\ \|\partial_s w(s, .), L^2(\mathbb{T})\| \leq c_1 c e^{s\mu_1}. \end{cases}$$

Posons à nouveau

$$(5.4) \quad u_h(t, x) = h^{-\alpha} v\left(\frac{t}{h^{1+\beta}}, \frac{x}{h}\right).$$

Alors d'après (2.5), la famille $(u_h(0, x), \partial_t u_h(0, x))$ est $O(1)$ dans $C_0^\infty \times H_0^{\sigma-1}$ sous la condition $\delta - \alpha - \sigma - \beta = 0$ et on a

$$(5.5) \quad \begin{aligned} & \|\partial_t u_h(t, .); H^{\sigma'-1}\| \\ & \geq h^{\delta-\alpha-\sigma'-\beta} \left(\int (h^2 + |\eta_1|^2)^{\sigma'-1} \left| \widehat{\partial_s v}\left(\frac{t}{h^{1+\beta}}, \eta\right) \right|^2 d\eta \right)^{1/2} \end{aligned}$$

quantité non bornée quand $h \rightarrow 0$ dès que

$$\delta - \alpha - \sigma' - \beta\sigma' < 0$$

donc pour tout $\sigma' > J(\sigma)$ d'après la définition de J et (2.9). D'où le théorème 2.

6. Appendice : solutions faibles

Nous rappelons dans cet appendice la méthode de construction de solution faible au problème de Cauchy (1.1), (1.2).

Soit $F_\epsilon(u)$ une famille de symboles en u de degré 2, C^∞ , positifs, convexes, pairs, qui converge vers $u^{p+1}/(p+1)$ quand ϵ tend vers 0, et dont la dérivée (au plus linéaire à l'infini) $f_\epsilon(u) = F'_\epsilon(u)$ converge en croissant vers u^p et vérifie pour tout u, h

$$(6.1) \quad |f_\epsilon(u+h) - f_\epsilon(u)| \leq C(|f_\epsilon(h)| + |u|^{p-1} \cdot |f_\epsilon(h)|^{1/p}).$$

On peut choisir par exemple pour $F_\epsilon(u)$ la primitive nulle en 0 de la fonction

$$f_\epsilon(u) = \frac{u^p}{1 + (\epsilon u)^{p-1}}.$$

Soit $u_\epsilon(t, x)$ l'unique solution globale du problème de Cauchy

$$(6.2) \quad (\partial_t^2 - \Delta_x) u_\epsilon + f_\epsilon(u_\epsilon) = 0,$$

$$(6.3) \quad u_\epsilon(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u_\epsilon(0, x) = u_1(x),$$

où les données de Cauchy u_0, u_1 sont fixées dans l'espace d'énergie $\dot{H}^1 \cap L^{p+1} \times L^2$. La fonction $u_\epsilon(t, x)$ vérifie l'estimation d'énergie

$$(6.4) \quad \int \frac{1}{2}(|\partial_t u|_\epsilon^2 + |\nabla_x u_\epsilon|^2) + F_\epsilon(u_\epsilon) dx = C^{\text{te}}.$$

Il résulte de (6.2), (6.4) et du lemme de Fatou qu'on peut extraire de la famille $u_\epsilon(t, x)$ une suite convergeant dans l'espace $C_t^1(\mathcal{D}'_x)$ et pour presque tout (t, x) , vers une fonction $u(t, x) \in L^\infty(t, \dot{H}^1 \cap L^{p+1})$.

Pour vérifier que u satisfait le problème de Cauchy (1.1), (1.2), il suffit alors de montrer que pour tout $\phi(t, x) \in C_0^\infty$, on a

$$(6.5) \quad \lim \int f_\epsilon(u_\epsilon) \phi dt dx = \int u^p \phi dt dx.$$

Or on a par convergence dominée

$$(6.6) \quad \int |(u^p(t, x) - f_\epsilon(u(t, x)))\phi(t, x)| dt dx \longrightarrow 0.$$

Soit $h_\epsilon = u_\epsilon - u$. D'après (6.4), on peut supposer que la famille h_ϵ converge fortement vers 0 dans L_{loc}^2 . D'après l'inégalité de Hölder, en remarquant que l'on a $|f_\epsilon(h)| \leq C^{\text{te}}|h|^\alpha F_\epsilon(h)^\beta$ avec $\alpha = 2/(p-1)$ et $\beta = (p-2)/(p-1)$, on obtient

$$(6.7) \quad \int |f_\epsilon(h_\epsilon)\phi| dt dx \longrightarrow 0.$$

D'après (5.1), on a de plus

$$(6.8) \quad \int |(f_\epsilon(u_\epsilon) - f_\epsilon(u))\phi| dt dx \leq C \int (|f_\epsilon(h_\epsilon)| + u^{p-1}|f_\epsilon(h_\epsilon)|^{1/p}) |\phi| dt dx,$$

de sorte que (6.5) résulte de (6.6), (6.7), (6.8) et de l'inégalité de Hölder.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRENNER (P.) & VON WAHL (W.) – *Global classical solutions of non-linear wave equations*, Math. Z., t. **176** (1981), pp. 87–121.
- [2] GINIBRE (J.) & VELO (G.) – *The global Cauchy problem for the non linear Klein-Gordon equation*, Math.Z., t. **189** (1985), pp. 487–505.
- [3] HOCHSTADT (H.) – *On the Determination of a Hill's Equation from its Spectrum*, Arch. Rat. Mech. Anal., t. **19** (1965), pp. 353–362.
- [4] JÖRGENS (K.) – *Das Anfangswertproblem in Grossen fur eine Klasse nicht-linearer Wellengleichungen*, Math. Z., t. **77** (1961), pp. 295–308.
- [5] LEBEAU (G.) – *Non linear optic and supercritical wave equation*, Bull. Soc. Math. Liège, t. **70** (2001), pp. 267–306.
- [6] LIONS (J.-L.) – *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

- [7] SEGAL (I.E) – *The Global Cauchy Problem for a Relativistic Scalar Field with Power Interaction*, Bull. Soc. Math. France, t. **91** (1963), pp. 129–135.
- [8] SHATAH (J.) & STRUWE (M.) – *Well-Posedness in the Energy Space for Semilinear Wave Equation with Critical Growth*, I.M.R.N., t. **7** (1994), pp. 303–309.
- [9] STRAUSS (W.) – *Nonlinear invariant wave equations*, in *Invariant wave equations (Proc. “Ettore Majorana” Internat. School of Math. Phys., Erice, 1977)*, Lecture Notes in Phys., vol. 73, Springer, 1978, pp. 197–249.

