Bull. Soc. math. France
132 (4), 2004, p. 569–589

COHOMOLOGIE ET K-THÉORIE ÉQUIVARIANTES DES VARIÉTÉS DE BOTT-SAMELSON ET DES VARIÉTÉS DE DRAPEAUX

PAR MATTHIEU WILLEMS

RÉSUMÉ. — L'objet de cet article est de calculer la cohomologie et la K-théorie équivariantes des variétés de Bott-Samelson (théorèmes 3.3 et 4.3) et d'en déduire des résultats sur les variétés de drapeaux des groupes de Kac-Moody. Dans la section 3, on retrouve la formule de restriction aux points fixes de la base $\{\widehat{\xi}^w\}_{w\in W}$ de $H^*_T(G/B)$ (théorème 3.9) prouvée par Sara Billey dans [4]. Dans la section 4, on donne l'expression explicite de la restriction aux points fixes de la base $\{\widehat{\psi}^w\}_{w\in W}$ de $K_T(G/B)$ définie par Kostant et Kumar dans [13] (théorème 4.7). Dans le cas fini, cette étude nous permet également de calculer la matrice de changement de bases entre $\{\widehat{\psi}^w\}_{w\in W}$ et $\{*[\mathcal{O}_{\overline{X}_w}]\}_{w\in W}$ (théorème 4.11).

ABSTRACT (*Equivariant cohomology and K-theory of Bott-Samelson varieties and flag varieties*)

The aim of this text is to compute the equivariant cohomology and K-theory of Bott-Samelson varieties (theorem 3.3 and 4.3) and to deduce results about flag varieties of Kac-Moody groups. In section 3, we give a new proof of the formula for the restriction to fixed points of the basis $\{\widehat{\xi}^w\}_{w\in W}$ of $H^*_T(G/B)$ (theorem 3.9) proved by Sara Billey in [4]. In section 4, we give an explicit formula for the restriction to fixed points of the basis $\{\widehat{\psi}^w\}_{w\in W}$ of $K_T(G/B)$ defined by Kostant and Kumar in [13] (theorem 4.7). In the finite case, we describe how the basis $\{*[\mathcal{O}_{\overline{X}_w}]\}_{w\in W}$ transforms with respect to the basis $\{\widehat{\psi}^w\}_{w\in W}$ (theorem 4.11).

Texte reçu le 10 décembre 2002, accepté le 16 octobre 2003

MATTHIEU WILLEMS, U.F.R. de Mathématiques, Université Paris 7 Denis Diderot, 2 place Jussieu, case 7012, 75251 Paris Cedex 05 (France) • *E-mail :* `willems@math.jussieu.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 19L47, 55N91.

Mots clefs. — K-théorie, cohomologie équivariante.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2004/569/$ 5.00

En rédigeant cet article, j'ai eu connaissance de résultats de William Graham qui prouve la formule du théorème 4.7 de deux manières différentes dans la prépublication [9]. Une de ses deux démonstrations est similaire à celle développée dans la section 5, où on donne une démonstration purement combinatoire du théorème 4.7. Dans [9], William Graham donne également des formules explicites pour la restriction aux points fixes des classes $[\mathcal{O}_{\overline{X}_w}]$.

Je remercie Michèle Vergne de m'avoir conseillé de regarder ce problème et Alberto Arabia de m'avoir fait comprendre la structure des variétés de Bott-Samelson et de leur cohomologie.

1. Préliminaires et notations

1.1. Algèbres de Kac-Moody. — Les définitions et les résultats qui suivent sur les algèbres de Kac-Moody sont exposés dans [11] et [15]. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$ une matrice de Cartan généralisée (c'est-à-dire telle que $a_{ii} = 2$, $-a_{ij} \in \mathbb{N}$ si $i \neq j$, et $a_{ij} = 0$ si et seulement si $a_{ji} = 0$). On choisit un triplet $(\mathfrak{h}, \pi, \pi^\vee)$ (unique à isomorphisme près), où $\mathfrak{h}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2r - \mathrm{rg}(A)$, $\pi = \{\alpha_i\}_{1\leq i\leq r} \subset \mathfrak{h}^*$ et $\pi^\vee = \{h_i\}_{1\leq i\leq r} \subset \mathfrak{h}$ sont des ensembles d'éléments linéairement indépendants vérifiant $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$. L'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ est l'algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$ engendrée par $\mathfrak{h}$ et par les symboles e_i et f_i $(1 \leq i \leq r)$ soumis aux relations $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] = 0$, $[h, e_i] = \alpha_i(h)e_i$, $[h, f_i] = -\alpha_i(h)f_i$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$ et tout $1 \leq i \leq r$, $[e_i, f_j] = \delta_{ij}h_j$ pour tout $1 \leq i, j \leq r$, et

$$(\mathrm{ad}\, e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0 = (\mathrm{ad}\, f_i)^{1-a_{ij}}(f_j), \quad \text{pour tous } 1 \leq i \neq j \leq r.$$

L'algèbre $\mathfrak{h}$ s'injecte canoniquement dans $\mathfrak{g}$. On l'appelle la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On a la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\Delta_+} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}),$$

où $\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \text{ tels que } [h, x] = \lambda(h)x,\ \forall h \in \mathfrak{h}\}$ pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, et où on définit Δ_+ par $\Delta_+ = \{\alpha \in \sum_{i=1}^r \mathbb{N}\alpha_i \text{ tels que } \alpha \neq 0 \text{ et } \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$. On pose $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ où $\Delta_- = -\Delta_+$. On appelle Δ_+ (respectivement Δ_-) l'ensemble des racines positives (respectivement négatives). Les racines $\{\alpha_i\}_{1\leq i\leq r}$ sont appelées les racines simples. On définit une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$.

On associe au couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le groupe de Weyl $W \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}^*)$, engendré par les réflexions simples $\{s_i\}_{1\leq i\leq r}$, où $s_i(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Le groupe W étant un groupe de Coxeter, on a une notion d'ordre de Bruhat qu'on note $u \leq v$ et une notion de longueur qu'on note $\ell(w)$. On note 1 l'élément neutre de W et dans le cas fini (*i.e.* W fini $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ de dimension finie), on note w_0 le plus grand élément de W. Le groupe de Weyl préserve Δ. On pose $R = W\pi$

et $R^+ = R \cap \Delta_+$. Pour $\beta = w\alpha_i \in R^+$, on pose $s_\beta = ws_iw^{-1} \in W$ (qui est indépendant du choix du couple (w, α_i) vérifiant $\beta = w\alpha_i$). Pour un élément w de W, on définit l'ensemble $\Delta(w)$ des inversions de w par $\Delta(w) = \Delta_+ \cap w^{-1}\Delta_-$.

On fixe un réseau $\mathfrak{h}_\mathbb{Z} \subset \mathfrak{h}$ tel que :

(i) $\mathfrak{h}_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C} = \mathfrak{h}$,

(ii) $h_i \in \mathfrak{h}_\mathbb{Z}$ pour tout $1 \le i \le r$,

(iii) $\mathfrak{h}_\mathbb{Z}/\sum_{i=1}^r \mathbb{Z}h_i$ est sans torsion,

(iv) $\alpha_i \in \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^* = \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}_\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ $(\subset \mathfrak{h}^*)$ pour tout $1 \le i \le r$.

On choisit des poids fondamentaux $\rho_i \in \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^*$ $(1 \le i \le r)$ vérifiant $\rho_i(h_j) = \delta_{i,j}$, pour tous $1 \le i, j \le r$. On pose $\rho = \sum_{i=1}^r \rho_i$.

1.2. Groupes de Kac-Moody et variétés de drapeaux. — On note $G = G(A)$ le groupe de Kac-Moody associé à $\mathfrak{g}$ par Kac et Peterson dans [12]. On note e l'élément neutre de G. Dans le cas fini, G est un groupe de Lie semi-simple complexe connexe et simplement connexe. On note $H \subset B \subset G$ les sous-groupes de G associés respectivement à $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{b}$. Soit K la forme unitaire standard de G et $T = K \cap H$ le tore maximal de K associé à $\mathfrak{h}$. On note $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de T. Soit $N_G(H)$ le normalisateur de H dans G, le groupe quotient $N_G(H)/H$ s'identifie à W. On pose $X = G/B = K/T$. On fait agir H sur X par multiplication à gauche, ce qui induit une action de T sur X. Pour $w \in W$, on définit $C(w) = B \cup BwB$, et pour toute racine simple α, on note P_α le sous-groupe de G défini par $P_\alpha = C(s_\alpha)$ de G. On a la décomposition de Bruhat $G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$ et si on pose $X_w = BwB/B$, $X = \bigsqcup_{w\in W} X_w$. Pour tout $w \in W$, l'adhérence $\overline{X}_w$ de la cellule X_w est une sous-variété T-invariante de X et $\overline{X}_w = \bigsqcup_{w' \le w} X_{w'}$ (voir [15]). On obtient ainsi une décomposition cellulaire T-invariante de X.

1.3. Le monoïde $\underline{W}$. — On définit le monoïde $\underline{W}$ comme le monoïde engendré par les éléments $\{\underline{s}_i\}_{1\le i\le r}$ soumis aux relations $\underline{s}_i^2 = \underline{s}_i$ et aux mêmes relations de tresses que les éléments s_i de W. D'après l'étude générale des algèbres de Hecke, l'ensemble $\underline{W}$ s'identifie à l'ensemble W. Pour un élément w de W, on note $\underline{w}$ l'élément correspondant dans $\underline{W}$ défini par $\underline{w} = \underline{s}_{i_1} \cdots \underline{s}_{i_\ell}$ si $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ est une décomposition réduite de w, et pour $\underline{v} \in \underline{W}$, on note v l'élément associé dans W. On a dans $\underline{W}$ les relations suivantes :

$$\underline{w}\,\underline{s}_i = \begin{cases} \underline{w}\,\underline{s}_i & \text{si } ws_i > w, \\ \underline{w} & \text{si } ws_i < w\,; \end{cases} \tag{1}$$

$$\underline{s}_i\underline{w} = \begin{cases} \underline{s}_i\underline{w} & \text{si } s_i\,w > w, \\ \underline{w} & \text{si } s_i\,w < w. \end{cases} \tag{2}$$

2. Variétés de Bott-Samelson

Les variétés de Bott-Samelson désingularisent les variétés de Schubert. Elles ont une structure géométrique relativement simple et possèdent en particulier des décompositions cellulaires où chaque adhérence de cellule est elle-même une variété de Bott-Samelson et est donc une sous-variété lisse. Le calcul de la cohomologie et de la K-théorie équivariantes de ces variétés pourra donc être effectué à l'aide de la formule de localisation.

Soit N un entier strictement positif. Considérons une suite de N racines simples μ_1, …, μ_N non nécessairement distinctes. On pose $G_i = P_{\mu_i}$ pour $1 \leq i \leq N$. On définit la variété de Bott-Samelson $\Gamma(\mu_1, \dots, \mu_N)$ par

$$\Gamma(\mu_1, \dots, \mu_N) = G_1 \times_B G_2 \times_B \cdots \times_B G_N/B,$$

comme l'espace des orbites de B^N dans $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_N$, sous l'action à droite de B^N définie par

$$(g_1, g_2, \dots, g_N)(b_1, b_2, \dots, b_N) = (g_1 b_1, b_1^{-1} g_2 b_2, \dots, b_{N-1}^{-1} g_N b_N),$$

où $b_i \in B$ et $g_i \in G_i$. On note $[g_1, g_2, \dots, g_N]$ la classe de $(g_1, g_2, \dots, g_N)$ dans $\Gamma(\mu_1, \dots, \mu_N)$. On note $g_{\mu_i} \in G_i$ un représentant quelconque de la réflexion de $N_{G_i}(H)/H$. Dans la suite, on note $\Gamma(\mu_1, \dots, \mu_N)$ par Γ. C'est une variété projective irréductible et lisse.

On définit une action à gauche de H sur Γ par

$$h[g_1, g_2, \dots, g_N] = [hg_1, g_2, \dots, g_N], \quad h \in H, \ g_i \in G_i.$$

On obtient ainsi une action de T par restriction.

On pose $\mathcal{E} = \{0,1\}^N$. Pour $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on note $\Gamma_\varepsilon \subset \Gamma$ l'ensemble des classes $[g_1, g_2, \dots, g_N]$ qui vérifient pour tout entier i compris entre 1 et N

$$g_i \in B \text{ si } \varepsilon_i = 0, \quad g_i \notin B \text{ si } \varepsilon_i = 1.$$

On vérifie immédiatement que cette définition est bien compatible avec l'action de B^N. On munit $\mathcal{E}$ d'une structure de groupe en identifiant $\{0,1\}$ avec $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on note $\pi_+(\varepsilon)$ l'ensemble des entiers i tels que $\varepsilon_i = 1$ et $\pi_-(\varepsilon)$ l'ensemble des entiers i tels que $\varepsilon_i = 0$. On pose $\ell(\varepsilon) = \mathrm{card}(\pi_+(\varepsilon))$. On note $(i) \in \mathcal{E}$ l'élément de $\mathcal{E}$ défini par $(i)_j = \delta_{i,j}$ et $(\mathbf{1})$ l'élément défini par $(\mathbf{1})_j = 1$ pour tout j. Pour $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on pose

$$v_i(\varepsilon) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq i, \\ k \in \pi_+(\varepsilon)}} s_{\mu_k}$$

($v_i(\varepsilon) = 1$ si $\{1 \leq k \leq i, k \in \pi_+(\varepsilon)\} = \varnothing$), $v(\varepsilon) = v_N(\varepsilon)$ et $\alpha_i(\varepsilon) = v_i(\varepsilon)\mu_i$. Pour $i \leq j$, on définit également

$$v_i^j(\varepsilon) = \prod_{\substack{i \leq k \leq j, \\ k \in \pi_+(\varepsilon)}} s_{\mu_k}.$$

De plus, si $j < i$, on pose $v_i^j(\varepsilon) = 1$. On définit de même

$$\underline{v}(\varepsilon) = \prod_{\substack{1 \le k \le N,\\ k \in \pi_+(\varepsilon)}} \underline{s}_{\mu_k} \in \underline{W}.$$

On définit un ordre sur $\mathcal{E}$ par

$$\varepsilon \le \varepsilon' \iff \pi_+(\varepsilon) \subset \pi_+(\varepsilon').$$

On démontre alors facilement la proposition suivante :

Proposition 2.1. — (i) *Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, Γ_ε est un espace affine de dimension réelle $2\ell(\varepsilon)$.*

(ii) *Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $\overline{\Gamma}_\varepsilon = \coprod_{\varepsilon' \le \varepsilon} \Gamma_{\varepsilon'}$.*

(iii) $\Gamma = \coprod_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \Gamma_\varepsilon$.

(iv) *Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, Γ_ε est stable sous l'action de T.*

(v) *Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ s'identifie à la variété $\Gamma(\mu_i, i \in \pi_+(\varepsilon))$ et est donc une sous-variété irréductible lisse de Γ.*

De plus, nous allons avoir besoin du lemme suivant dont la démonstration est immédiate :

Lemme 2.2. — (i) *L'ensemble Γ^T des points fixes de T dans Γ est constitué des 2^N points $[g_1, g_2, \dots, g_N]$ où $g_i \in \{e, g_{\mu_i}\}$. On identifiera donc Γ^T avec $\mathcal{E}$ en identifiant e avec 0 et g_{μ_i} avec 1.*

(ii) *Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, le point fixe ε est l'unique point fixe de T dans Γ_ε.*

(iii) *Soit $(\varepsilon, \varepsilon') \in \mathcal{E}^2$, alors $\varepsilon \in \overline{\Gamma}_{\varepsilon'}$ équivaut à $\varepsilon \le \varepsilon'$. Pour $\varepsilon \le \varepsilon'$, on note $T_{\varepsilon'}^{\varepsilon}$ l'espace tangent à $\overline{\Gamma}_{\varepsilon'}$ en ε. Les poids de la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $T_{\varepsilon'}^{\varepsilon}$ induite par l'action de H sur Γ sont les $\{-\alpha_i(\varepsilon)\}_{i \in \pi_+(\varepsilon')}$.*

Soit $\mu_1, \dots, \mu_k$ une suite quelconque de k racines simples. On définit une application $g_{\mu_1,\dots,\mu_k}$ de $\Gamma(\mu_1, \dots, \mu_k)$ dans X par multiplication (c'est-à-dire $g_{\mu_1,\dots,\mu_k}([g_1, \dots, g_k]) = g_1 * \dots * g_k\ [B]$). Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3. — *Soit $\mu_1, \dots, \mu_k$ une suite quelconque de k racines simples et soit $\underline{w} = \underline{s}_{\mu_1} \cdots \underline{s}_{\mu_k}$; alors l'image de l'application $g_{\mu_1,\dots,\mu_k}$ est égale à $\overline{X}_w$.*

Démonstration. — On pose $X_{\mu_1,\dots,\mu_k} = g_{\mu_1,\dots,\mu_k}(\Gamma(\mu_1, \dots, \mu_k))$. Les variétés Γ étant compactes, $X_{\mu_1,\dots,\mu_k}$ est fermée.

Pour démontrer ce lemme, on utilisera les relations suivantes, valables pour tout $v \in W$ (voir [15]) :

$$C(s_i)C(v) = \begin{cases} C(s_i v) & \text{si } s_i v > v, \\ C(v) \cup C(s_i v) & \text{si } s_i v < v. \end{cases} \tag{3}$$

On a en particulier

$$C(s_iv) \subset C(s_i)C(v) \text{ si } s_iv > v, \quad C(v) \subset C(s_i)C(v) \text{ si } s_iv < v.$$

En utilisant ces dernières relations et les relations (2), on constate que $BwB \subset C(w) \subset P_{\mu_1}P_{\mu_2}\cdots P_{\mu_k}$, et on a donc $X_w \subset X_{\mu_1,\dots,\mu_k}$, d'où $\overline{X}_w \subset X_{\mu_1,\dots,\mu_k}$.

Pour démontrer l'inclusion réciproque, on procède par récurrence sur k. Le résultat étant trivial pour $k = 1$, on le suppose vérifié pour toute suite de $k-1$ racines simples. On note w' l'élément de W tel que $\underline{w}' = \underline{s}_{\mu_2}\cdots \underline{s}_{\mu_k}$. Par hypothèse de récurrence $P_{\mu_2}P_{\mu_3}\cdots P_{\mu_k} \subset \coprod_{v\le w'} BvB$. Il suffit donc de montrer que $C(s_{\mu_1})C(v) \subset \coprod_{u\le w} BuB$ pour tout $v \le w'$. Distinguons deux cas.

• Tout d'abord si $s_{\mu_1}w' > w'$, alors on a $w = s_{\mu_1}w'$ d'après les relations (2) et le résultat est alors une conséquence immédiate des relations (3), en remarquant que si $v \le w'$ alors $s_{\mu_1}v \le w$.

• Si $s_{\mu_1}w' < w'$, alors on a $w = w'$ d'après les relations (2). Soit v un élément de W tel que $v \le w$:

▷ si $s_{\mu_1}v < v$, alors on a $C(s_{\mu_1})C(v) = C(v) \cup C(s_{\mu_1}v) \subset \coprod_{u\le w} BuB$ d'après les relations (3) ;

▷ si $s_{\mu_1}v > v$, on a $C(s_{\mu_1})C(v) = C(s_{\mu_1}v)$ et il faut donc montrer que $s_{\mu_1}v \le w$. Cela provient du fait que $w = s_{\mu_1}x$ avec $s_{\mu_1}x > x$ et $v \le x$ car aucune décomposition réduite de v ne commence par s_{μ_1} puisque $s_{\mu_1}v > v$. □

De plus, le résultat suivant est prouvé dans [10] dans le cas fini (voir [15] pour la généralisation aux variétés de Schubert des groupes de Kac-Moody) :

Proposition 2.4. — *Si $w = s_{\mu_1}\cdots s_{\mu_k}$ est une décomposition réduite de w, l'application $g_{\mu_1,\dots,\mu_k}$ est une désingularisation de $\overline{X}_w$.*

3. Cohomologie équivariante

Soit M un espace topologique muni d'une action continue de T. Notons $\mathbb{E}T \to \mathbb{B}T$ le fibré universel de T et $\mathbb{E}T \times^T M$ l'espace topologique obtenu en quotientant $\mathbb{E}T \times M$ par l'action de T définie par $t(p,m) = (pt^{-1}, tm)$ pour tous $p \in \mathbb{E}T$, $m \in M$ et $t \in T$. Pour tout anneau commutatif A, on définit la cohomologie T-équivariante de X à coefficients dans A, notée $H_T^*(M,A)$, comme la cohomologie singulière de $\mathbb{E}T \times^T M$ à coefficients dans A. C'est une $H_T^*(pt,A)$-algèbre. Dans toute la suite on prendra pour A le corps des nombres complexes. Dans ce cas, $H_T^*(pt)$ s'identifie à l'algèbre symétrique de $\mathfrak{h}^*$ qu'on note S.

Soit M' un sous-espace T-invariant de M admettant une structure de CW-complexe orienté de dimension paire n, ne possédant pas de cellule de codimension 1. Alors, la fibration T-équivariante triviale : $M' \to \mathrm{pt}$ et l'intégration sur les fibres (voir [1] pour ces définitions) permettent de définir un homomorphisme de S-modules gradués de degré $-n$

$$\int_{M'} : H_T^*(M) \longrightarrow S.$$

Si M est une variété différentiable, la cohomologie T-équivariante de M s'identifie à la cohomologie du complexe des formes différentielles $\mu(Y)$ à coefficients complexes sur M dépendant polynomialement de $Y \in \mathfrak{t}$ et vérifiant une condition de T-équivariance évidente, muni de la différentielle $d - 2i\pi\iota(Y)$ (voir [1]). De plus, si M est compacte, connexe, et orientée, pour toute forme $\mu(Y)$, on peut définir le polynôme $\int_M \mu(Y)$ qui induit un morphisme en cohomologie. Si M' est une sous-variété de M qui admet une structure de variété différentiable compacte connexe et orientée (sans supposer que M admette une telle structure), pour tout élément $\mu \in H_T^*(M)$, on peut définir le polynôme $\int_{M'} \mu(Y)$ obtenu en restreignant μ à M' puis en intégrant sur M'. On obtient ainsi un morphisme de S-modules gradués : $H_T^*(M) \to S$ qui s'identifie à l'intégration topologique définie précédemment.

3.1. Cohomologie équivariante des variétés de Bott-Samelson. — On reprend les notations de la section 2. On note $F(\mathcal{E};S)$ la S-algèbre des fonctions de $\mathcal{E}$ à valeurs dans S munie de l'addition et de la multiplication point par point.

La décomposition $\Gamma = \coprod_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \Gamma_\varepsilon$ munit Γ d'une structure de CW-complexe T-équivariant où toutes les cellules sont de dimension paire ; de plus l'ensemble des points fixes de l'action de T sur Γ est discret. On peut donc appliquer la proposition 2.5.1 de [1] et on a le résultat suivant :

Proposition 3.1. — (i) *La cohomologie T-équivariante de Γ^T s'identifie à $F(\mathcal{E};S)$.*

(ii) *La restriction aux points fixes $i_T^* : H_T^*(\Gamma) \to F(\mathcal{E};S)$ est injective.*

(iii) *La cohomologie T-équivariante de Γ est un S-module libre qui admet comme base la famille $\{\widehat{\sigma}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$ caractérisée par*

$$\int_{\overline{\Gamma}_{\varepsilon'}} \widehat{\sigma}_\varepsilon = \delta_{\varepsilon',\varepsilon}.$$

Définition 3.2. — Pour $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on définit $\sigma_\varepsilon \in F(\mathcal{E};S)$ par

$$\sigma_\varepsilon(\varepsilon') = (-1)^{\ell(\varepsilon)} \prod_{i\in\pi_+(\varepsilon)} \alpha_i(\varepsilon') \text{ si } \varepsilon \leq \varepsilon', \quad \sigma_\varepsilon(\varepsilon') = 0 \text{ sinon.}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.3. — *Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on a $i_T^*(\widehat{\sigma}_\varepsilon) = \sigma_\varepsilon$.*

Démonstration. — En utilisant la formule de localisation [3], la proposition 2.1 et le lemme 2.2, on obtient pour tout $\widehat{\sigma} \in H_T^*(\Gamma)$:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \widehat{\sigma} = (-1)^{\ell(\varepsilon)} \sum_{\varepsilon' \leq \varepsilon} \frac{i_T^*(\widehat{\sigma})(\varepsilon')}{\prod_{i \in \pi_+(\varepsilon)} \alpha_i(\varepsilon')}. \tag{4}$$

Soit $\varepsilon_0 \in \mathcal{E}$, et soit $\sigma'_{\varepsilon_0} = i_T^*(\widehat{\sigma}_{\varepsilon_0})$. Montrons par récurrence sur la longueur de ε que $\sigma'_{\varepsilon_0}(\varepsilon) = \sigma_{\varepsilon_0}(\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$. Grâce à la formule (4) et à la caractérisation de $\widehat{\sigma}_{\varepsilon_0}$, on démontre facilement par récurrence sur $\ell(\varepsilon)$ que si ε n'est pas plus grand que ε_0, on a bien $\sigma'_{\varepsilon_0}(\varepsilon) = 0$. On peut donc se limiter au cas où $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$. Si $\varepsilon = \varepsilon_0$, la formule (4) et le fait que $\int_{\Gamma_{\varepsilon_0}} \widehat{\sigma}_{\varepsilon_0} = 1$ nous donne bien $\sigma'_{\varepsilon_0}(\varepsilon_0) = \sigma_{\varepsilon_0}(\varepsilon_0)$. Soit $\varepsilon > \varepsilon_0$; on suppose le résultat vérifié pour tout ε' de longueur strictement plus petite que ε, on applique la formule (4) et le fait que $\int_{\Gamma_\varepsilon} \widehat{\sigma}_{\varepsilon_0} = 0$ pour obtenir

$$\sum_{\varepsilon_0 \leq \varepsilon' < \varepsilon} \frac{(-1)^{\ell(\varepsilon_0)} \prod_{i \in \pi_+(\varepsilon_0)} \alpha_i(\varepsilon')}{\prod_{i \in \pi_+(\varepsilon)} \alpha_i(\varepsilon')} + \frac{\sigma'_{\varepsilon_0}(\varepsilon)}{\prod_{i \in \pi_+(\varepsilon)} \alpha_i(\varepsilon)} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\sum_{\varepsilon_0 \leq \varepsilon' < \varepsilon} \frac{(-1)^{\ell(\varepsilon_0)}}{\prod_{i \in \pi_+(\varepsilon) \setminus \pi_+(\varepsilon_0)} \alpha_i(\varepsilon')} + \frac{\sigma'_{\varepsilon_0}(\varepsilon)}{\prod_{i \in \pi_+(\varepsilon)} \alpha_i(\varepsilon)} = 0.$$

Si on pose $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - (j)$, où j est le plus grand élément de $\pi_+(\varepsilon) \setminus \pi_+(\varepsilon_0)$, on a alors

$$\sum_{\substack{\varepsilon_0 \leq \varepsilon' < \varepsilon \\ \varepsilon' \neq \tilde{\varepsilon}}} \frac{(-1)^{\ell(\varepsilon_0)}}{\prod_{i \in \pi_+(\varepsilon) \setminus \pi_+(\varepsilon_0)} \alpha_i(\varepsilon')} - \frac{(-1)^{l(\varepsilon_0)}}{\prod_{i \in \pi_+(\varepsilon) \setminus \pi_+(\varepsilon_0)} \alpha_i(\varepsilon)} + \frac{\sigma'_{\varepsilon_0}(\varepsilon)}{\prod_{i \in \pi_+(\varepsilon)} \alpha_i(\varepsilon)} = 0.$$

En effet, comme j est le plus grand élément de $\pi_+(\varepsilon) \setminus \pi_+(\varepsilon_0)$, pour tout i dans $\pi_+(\varepsilon) \setminus \pi_+(\varepsilon_0)$, on a $\alpha_i(\varepsilon) = \alpha_i(\tilde{\varepsilon})$ si $i \neq j$ et $\alpha_j(\varepsilon) = -\alpha_j(\tilde{\varepsilon})$. Pour les mêmes raisons, on s'aperçoit, en distinguant les termes qui ont un 1 en j-ième position et ceux qui ont un 0 en j-ième position, que la première somme est nulle et on obtient alors bien $\sigma'_{\varepsilon_0}(\varepsilon) = (-1)^{\ell(\varepsilon_0)} \prod_{i \in \pi_+(\varepsilon_0)} \alpha_i(\varepsilon)$. □

On pose $\sigma_i = \sigma_{(i)}$ et $\widehat{\sigma}_i = \widehat{\sigma}_{(i)}$. La structure multiplicative de $H_T^*(\Gamma)$ est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4. — *Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on a $\widehat{\sigma}_\varepsilon = \prod_{i \in \pi_+(\varepsilon)} \widehat{\sigma}_i$. De plus, on a la formule de multiplication suivante*

$$\widehat{\sigma}_i \widehat{\sigma}_\varepsilon = \begin{cases} \widehat{\sigma}_{\varepsilon + (i)} & \text{si } i \in \pi_-(\varepsilon), \\ \sigma_i(\varepsilon)\widehat{\sigma}_\varepsilon + \displaystyle\sum_{j < i,\, j \in \pi_-(\varepsilon)} \frac{s_{\mu_j} \alpha_j^i(\varepsilon) - \alpha_j^i(\varepsilon)}{\mu_j} \widehat{\sigma}_\varepsilon \widehat{\sigma}_j & \text{si } i \in \pi_+(\varepsilon), \end{cases}$$

où on a posé $\alpha_j^i(\varepsilon) = v_{j+1}^{i-1}(\varepsilon)(\mu_i)$.

Démonstration. — Par injectivité de la restriction aux points fixes, il suffit de démontrer ces formules pour σ_i et σ_ε. La première formule se voit immédiatement sur la définition des σ_ε.

Pour la deuxième formule, pour des raisons de degré et d'ordre sur $\mathcal{E}$, on sait que le produit $\sigma_i\sigma_\varepsilon$ s'écrit sous la forme

$$\sigma_i\sigma_\varepsilon = C_i\sigma_\varepsilon + \sum_{\substack{j\neq i\\ j\in\pi_-(\varepsilon)}} C_j\sigma_{\varepsilon+(j)}.$$

En évaluant en ε, on trouve C_i puis en évaluant en $\varepsilon+(j)$, on trouve $C_j = 0$ si $j > i$ et si $j < i$:

$$C_j = \Big(\prod_{\substack{1\leq k<j\\ k\in\pi_+(\varepsilon)}} s_{\mu_k}\Big)\Big(\frac{s_{\mu_j}\alpha_j^i(\varepsilon)-\alpha_j^i(\varepsilon)}{\mu_j}\Big) = \frac{s_{\mu_j}\alpha_j^i(\varepsilon)-\alpha_j^i(\varepsilon)}{\mu_j},$$

car $(s_{\mu_j}\alpha_j^i(\varepsilon)-\alpha_j^i(\varepsilon))/\mu_j$ est un nombre, et on a bien la formule énoncée. □

En particulier, si pour $j < i$, on note $b_{j,i}$ le nombre de Cartan associé aux racines μ_j et μ_i (*i.e.* $b_{j,i} = a_{k\ell}$ où les entiers k et ℓ sont définis par $\mu_j = \alpha_k$ et $\mu_i = \alpha_\ell$), on a :

Proposition 3.5. — $\widehat{\sigma}_i^2 = \mu_i\widehat{\sigma}_i - \sum_{j<i} b_{j,i}\widehat{\sigma}_i\widehat{\sigma}_j.$

Grâce à la décomposition cellulaire $\Gamma = \coprod_{\varepsilon\in\mathcal{E}}\Gamma_\varepsilon$, une base de la cohomologie ordinaire de Γ est aussi indexée par $\mathcal{E}$. On la note $(x_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$ et on note $x_i = x_{(i)}$. Soit $v_0 : H_T^*(\Gamma)\to H^*(\Gamma)$ l'évaluation à l'origine associée à la projection canonique $\mathbb{E}T\times\Gamma\to\mathbb{E}T\times^T\Gamma$. Le résultat suivant est prouvé dans [1] :

Lemme 3.6. — *L'évaluation à l'origine est l'homomorphisme d'anneaux défini par* $v_0(f\widehat{\sigma}_\varepsilon) = f(0)x_\varepsilon$.

Grâce à cet homomorphisme, on retrouve alors le résultat suivant prouvé dans [5] :

Proposition 3.7. — *La cohomologie ordinaire de* Γ *est engendrée par des éléments* $(x_i)_{1\leq i\leq N}$ *de degré* 2 *soumis aux relations*

$$x_i^2 + \sum_{j<i} b_{j,i}x_ix_j = 0.$$

3.2. Cohomologie équivariante des variétés de drapeaux. — La décomposition $X = \coprod_{w\in W} X_w$ munit X d'une structure de CW complexe T-équivariant où toutes les cellules sont de dimension paire. De plus, l'ensemble $X^T \approx W$ des points fixes de T dans X étant discret, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 3.8. — (i) *La cohomologie T-équivariante de X^T s'identifie à la S-algèbre des fonctions de W à valeurs dans S de degré borné, qu'on note $F_b(W;S)$.*

(ii) *La restriction aux points fixes $i_T^* : H_T^*(X) \to F_b(W;S)$ est injective.*

(iii) *La cohomologie T-équivariante de X est un S-module libre qui admet comme base la famille $\{\widehat{\xi}^w\}_{w\in W}$ caractérisée par*

$$\int_{\overline{X}_{w'}} \widehat{\xi}^w = \delta_{w',w}.$$

On pose $\xi^w = i_T^*(\widehat{\xi}^w)$. Soit $(w,v) \in W^2$ et soit $v = s_{\mu_1}\cdots s_{\mu_N}$ une décomposition non nécessairement réduite de v. On définit, pour $1 \le j \le N$, un élément β_j de $\mathfrak{h}^*$ par $\beta_j = s_{\mu_1}\cdots s_{\mu_{j-1}}\mu_j$. La formule suivante est prouvée par Sara Billey dans [4] :

THÉORÈME 3.9. — *Soient $(w,v) \in W^2$ et $m = \ell(w)$, on a*

$$\xi^w(v) = \sum \beta_{j_1}\cdots\beta_{j_m},$$

où la somme porte sur l'ensemble des entiers $1 \le j_1 < \cdots < j_m \le N$ tels que $w = s_{\mu_{j_1}}\cdots s_{\mu_{j_m}}$.

Retrouvons cette formule grâce aux résultats précédents.

Soit $v = s_{\mu_1}\cdots s_{\mu_N}$ une décomposition non nécessairement réduite d'un élément v de W. On pose $\Gamma = \Gamma(\mu_1,\ldots,\mu_N)$ et $g = g_{\mu_1,\ldots,\mu_N}$. La proposition suivante va nous permettre de retrouver le théorème 3.9 :

PROPOSITION 3.10. — *Soit $w \in W$; on a*

$$g^*(\widehat{\xi}^w) = \sum_{\substack{\varepsilon\in\mathcal{E},\\ \ell(\varepsilon)=\ell(w),\, v(\varepsilon)=w}} \widehat{\sigma}_\varepsilon.$$

Démonstration. — Pour démontrer la proposition, il faut montrer :

$$\int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} g^*(\widehat{\xi}^w) = \delta_{v(\varepsilon),w}\,\delta_{\ell(\varepsilon),\ell(w)}.$$

Distinguons deux cas :

- Si ε correspond à une décomposition réduite de $v(\varepsilon)$, comme $g_{|\overline{\Gamma}_\varepsilon} : \overline{\Gamma}_\varepsilon \to X$ s'identifie à l'application $g_{\mu_i, i\in\pi_+(\varepsilon)}$, d'après la proposition 2.4, on a $\int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} g^*(\widehat{\xi}^w) = \int_{\overline{X}_{v(\varepsilon)}} \widehat{\xi}^w = \delta_{v(\varepsilon),w}$.
- Si ε ne correspond pas à une décomposition réduite de $v(\varepsilon)$, alors d'après le lemme 2.3, g envoie $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ dans $\overline{X}_{\underline{v}(\varepsilon)}$ qui est de dimension strictement plus petite que $\overline{\Gamma}_\varepsilon$, et donc pour tout $\widehat{\xi} \in H_T^*(X)$, on a $\int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} g^*(\widehat{\xi}) = 0$. En particulier, on a donc bien $\int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} g^*(\widehat{\xi}^w) = 0$. □

On déduit de cette proposition que pour tout élément w de W, on a

$$\xi^w(v) = \sum_{\substack{\varepsilon' \in \mathcal{E} \\ \ell(\varepsilon')=\ell(w) \\ v(\varepsilon')=w}} \sigma_{\varepsilon'}\big((\mathbf{1})\big),$$

ce qui nous redonne bien le théorème 3.9, à l'aide du théorème 3.3, en remarquant que $\alpha_i((\mathbf{1})) = -\beta_{\mathrm{i}}$, pour tout entier i compris entre 1 et N.

4. K-théorie équivariante

Soit $X[T]$ le groupe des caractères de T. On pose $R[T] = \mathbb{Z}[X[T]]$ et on note $Q[T]$ le corps des fractions de $R[T]$. Pour un poids entier λ, on note $e^\lambda \in X[T]$ le caractère correspondant.

Soit Z un espace topologique compact muni d'une action continue de T. On définit la K-théorie T-équivariante de Z comme le groupe construit à partir du semi-groupe des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels complexes de dimension finie T-équivariants au-dessus de Z. On munit ce groupe d'une structure d'anneau définie à l'aide du produit tensoriel. De plus comme la K-théorie T-équivariante du point s'identifie à $R[T]$, on obtient une structure de $R[T]$-algèbre qu'on note $K_T(Z)$.

4.1. K-théorie équivariante des variétés de Bott-Samelson. — On reprend les notations de la section 2. On note $F(\mathcal{E}; R[T])$ la $R[T]$-algèbre des fonctions de $\mathcal{E}$ à valeurs dans $R[T]$ munie de l'addition et de la multiplication point par point.

On démontre, par récurrence sur la dimension de Γ, que $K_T(\Gamma)$ s'identifie à $K^0(H,\Gamma)$ le groupe construit à partir du semi-groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux H-équivariants localement libres sur Γ (voir [13]). On identifiera dans la suite ces deux groupes. Soit $\varepsilon \in \mathcal{E}$ et soit $\mathcal{F}$ un faisceau H-équivariant localement libre sur Γ ; on définit $\chi(\overline{\Gamma}_\varepsilon, \mathcal{F}) \in R[T]$ par

$$\forall t \in T, \quad \chi(\overline{\Gamma}_\varepsilon, \mathcal{F})(t) = \sum_k (-1)^k \operatorname{Tr}\big(t; \mathrm{H}^k\big(\overline{\Gamma}_\varepsilon, \mathcal{F}_{/\overline{\Gamma}_\varepsilon}\big)\big).$$

Tout comme dans le cas de la cohomologie équivariante, la décomposition $\Gamma = \coprod_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \Gamma_\varepsilon$ donne une base de la K-théorie équivariante :

Proposition 4.1. — (i) *La K-théorie T-équivariante de Γ^T s'identifie à $F(\mathcal{E}; R[T])$.*

(ii) *La restriction aux points fixes $i_T^* : K_T(\Gamma) \to F(\mathcal{E}; R[T])$ est injective.*

(iii) *La K-théorie T-équivariante de Γ est un $R[T]$-module libre qui admet comme base la famille $\{\widehat{\mu}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$ caractérisée par $\chi(\overline{\Gamma}_{\varepsilon'}, \widehat{\mu}_\varepsilon) = \delta_{\varepsilon',\varepsilon}$.*

DÉFINITION 4.2. — Pour $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on définit $\mu_\varepsilon \in F(\mathcal{E}; R[T])$ par

$$\mu_\varepsilon(\varepsilon') = \begin{cases} \prod_{i\in\pi_+(\varepsilon')} e^{\alpha_i(\varepsilon')} \prod_{i\in\pi_+(\varepsilon)} (e^{-\alpha_i(\varepsilon')} - 1) & \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 4.3. — *Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on a $i_T^*(\widehat{\mu}_\varepsilon) = \mu_\varepsilon$.*

Démonstration. — En utilisant la formule de localisation d'Atiyah-Bott [2] (voir aussi la formule 5.11.9 de [7]), la proposition 2.1 et le lemme 2.2, on obtient pour tout $\widehat{\mu} \in K_T(\Gamma)$ et tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$:

$$\chi(\overline{\Gamma}_\varepsilon, \widehat{\mu}) = \sum_{\varepsilon' \leq \varepsilon} \frac{i_T^*(\widehat{\mu})(\varepsilon')}{\prod_{i\in\pi_+(\varepsilon)}(1 - e^{\alpha_i(\varepsilon')})}. \tag{5}$$

Soit $\varepsilon_0 \in \mathcal{E}$, on pose $\mu'_{\varepsilon_0} = i_T^*(\widehat{\mu}_{\varepsilon_0})$. Montrons par récurrence sur la longueur de ε que $\mu'_{\varepsilon_0}(\varepsilon) = \mu_{\varepsilon_0}(\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$. Grâce à la formule (5) et à la caractérisation de $\widehat{\mu}_{\varepsilon_0}$, on démontre facilement par récurrence sur $\ell(\varepsilon)$ que si ε n'est pas plus grand que ε_0, on a bien $\mu'_{\varepsilon_0}(\varepsilon) = 0$. On peut donc se limiter au cas où $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$. Si $\varepsilon = \varepsilon_0$, la formule (5) et le fait que $\chi(\overline{\Gamma}_{\varepsilon_0}, \widehat{\mu}_{\varepsilon_0}) = 1$ nous donne bien $\mu'_{\varepsilon_0}(\varepsilon_0) = \mu_{\varepsilon_0}(\varepsilon_0)$. Soit $\varepsilon > \varepsilon_0$. On suppose le résultat vérifié pour tout ε' de longueur strictement plus petite que ε, on applique la formule (5) et le fait que $\chi(\overline{\Gamma}_\varepsilon, \widehat{\mu}_{\varepsilon_0}) = 0$ pour obtenir

$$\sum_{\varepsilon_0 \leq \varepsilon' < \varepsilon} \frac{\prod_{i\in\pi_+(\varepsilon')} e^{\alpha_i(\varepsilon')} \prod_{i\in\pi_+(\varepsilon_0)} (e^{-\alpha_i(\varepsilon')} - 1)}{\prod_{i\in\pi_+(\varepsilon)} (1 - e^{\alpha_i(\varepsilon')})} + \frac{\mu'_{\varepsilon_0}(\varepsilon)}{\prod_{i\in\pi_+(\varepsilon)} (1 - e^{\alpha_i(\varepsilon)})} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\mu'_{\varepsilon_0}(\varepsilon)}{\prod_{i\in\pi_+(\varepsilon)} (1 - e^{\alpha_i(\varepsilon)})} = -\sum_{\varepsilon_0 \leq \varepsilon' < \varepsilon} \frac{\prod_{i\in\pi_+(\varepsilon')\setminus\pi_+(\varepsilon_0)} e^{\alpha_i(\varepsilon')}}{\prod_{i\in\pi_+(\varepsilon)\setminus\pi_+(\varepsilon_0)} (1 - e^{\alpha_i(\varepsilon')})}.$$

Si on pose $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - (j)$, où j est le plus grand élément de $\pi_+(\varepsilon) \setminus \pi_+(\varepsilon_0)$, on a alors

$$\frac{\mu'_{\varepsilon_0}(\varepsilon)}{\prod_{i\in\pi_+(\varepsilon)} (1 - e^{\alpha_i(\varepsilon)})} = \frac{\prod_{i\in\pi_+(\varepsilon)\setminus\pi_+(\varepsilon_0)} e^{\alpha_i(\varepsilon)}}{\prod_{i\in\pi_+(\varepsilon)\setminus\pi_+(\varepsilon_0)} (1 - e^{\alpha_i(\varepsilon)})} - \sum_{\substack{\varepsilon_0 \leq \varepsilon' < \varepsilon \\ \varepsilon' \neq \tilde{\varepsilon}}} \frac{\prod_{i\in\pi_+(\varepsilon')\setminus\pi_+(\varepsilon_0)} e^{\alpha_i(\varepsilon')}}{\prod_{i\in\pi_+(\varepsilon)\setminus\pi_+(\varepsilon_0)} (1 - e^{\alpha_i(\varepsilon')})}.$$

En effet, comme j est le plus grand élément de $\pi_+(\varepsilon) \setminus \pi_+(\varepsilon_0)$, pour tout $i \in \pi_+(\varepsilon) \setminus \pi_+(\varepsilon_0)$, $\alpha_i(\varepsilon) = \alpha_i(\tilde{\varepsilon})$ si $i \neq j$ et $\alpha_j(\varepsilon) = -\alpha_j(\tilde{\varepsilon})$, et on utilise alors la relation $1/(1-e^{-x}) = -e^{x}/(1-e^{x})$. Cette même relation montre, en distinguant les termes qui ont un 1 en j-ième position et ceux qui ont un 0 en j-ième position, que la deuxième somme est nulle et on obtient alors bien

$$\mu'_{\varepsilon_0}(\varepsilon) = \prod_{i\in\pi_+(\varepsilon)} e^{\alpha_i(\varepsilon)} \prod_{i\in\pi_+(\varepsilon_0)} (e^{-\alpha_i(\varepsilon)}-1) = \mu_{\varepsilon_0}(\varepsilon). \qquad \square$$

4.2. K-théorie équivariante des variétés de drapeaux. — On définit, pour tout entier $n \geq 0$,

$$X_n = \bigcup_{w\in W,\, \ell(w)\leq n} X_w.$$

Soit $\mathcal{F}$ la filtration

$$\mathcal{F} : \varnothing = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots .$$

Alors :

1) chaque X_n est un sous espace compact T-stable de X et,

2) la topologie de X est la topologie limite induite par la filtration $\mathcal{F}$.

Grâce à cette filtration, on définit alors la K-théorie T-équivariante de X, notée $K_T(X)$ par

$$K_T(X) = \varprojlim_{n\to+\infty} K_T(X_n).$$

Cette définition est indépendante de la filtration $\mathcal{F}$ vérifiant 1) et 2).

On note $F(W;R[T])$ (resp. $F(W;Q[T])$) la $R[T]$-algèbre des fonctions de W à valeurs dans $R[T]$ (resp. $Q[T]$) munie de l'addition et de la multiplication point par point. Pour tout $1\leq i\leq r$, on définit un opérateur de Demazure D_i sur $F(W;Q[T])$ par

$$(D_i f)(v) = \frac{f(v) - f(vs_i)e^{-v\alpha_i}}{1-e^{-v\alpha_i}}\cdot$$

Les opérateurs de Demazure vérifiant les relations de tresses de W, on peut définir un opérateur D_w pour tout $w\in W$. On note Ψ la sous-algèbre de $F(W;R[T])$ définie par

$$\Psi = \bigl\{f\in F(W;R[T]),\ \text{telles que}\ \forall w\in W,\, D_w f\in F(W;R[T])\bigr\}.$$

L'injection de X^T dans X définit une application $i_T^* : K_T(X)\to K_T(X^T)$. De plus, l'ensemble des points fixes $X^T \approx W$ étant discret, on peut identifier $K_T(X^T)$ avec $F(W;R[T])$ et on obtient ainsi une application $i_T^* : K_T(X)\to F(W;R[T])$. On note $*$ l'involution de $K_T(X)$ induite par la dualité des espaces vectoriels, et on note de la même façon l'involution de $R[T]$ définie sur les caractères par $*(e^{\lambda}) = e^{-\lambda}$, ce qui induit une involution de $F(W;R[T])$. On a $*i_T^*(\tau) = i_T^*(*\tau)$ pour tout élément $\tau\in K_T(X)$. Le résultat suivant est prouvé dans [13] :

PROPOSITION 4.4. — *L'application i_T^* est injective et l'image de $K_T(X)$ par cette application est égale à Ψ. De plus, $\Psi = \prod_{w\in W} R[T]\psi^w$, où les fonctions ψ^w sont uniquement déterminées par les relations*

$$\forall (v,w)\in W^2,\quad D_v(\psi^w)(1)=\delta_{v,w}.$$

De plus, les fonctions ψ^w vérifient les propriétés suivantes :

(i) $\psi^w(v)=0$ *sauf si* $w\le v$,

(ii) $\psi^w(w)=\prod_{\beta\in\Delta(w^{-1})}(1-e^\beta)$,

(iii) $D_i\psi^w=\psi^w+\psi^{ws_i}$ *si* $ws_i<w$ *et* $D_i\psi^w=0$ *si* $ws_i>w$,

(iv) $\forall v\in W$, $\psi^1(v)=e^{\rho-v\rho}$.

On pose $\widehat{\psi}^w=(i_T^*)^{-1}(\psi^w)$.

REMARQUE 4.5. — Un élément $f=(a_w)_{w\in W}$ de $\prod_{w\in W}R[T]\psi^w$ est bien une fonction de W à valeurs dans $R[T]$. En effet soit $v\in W$, d'après la propriété (i), $\sum_{w\in W}a_w\psi^w(v)$ est une somme finie où les termes éventuellement non nuls correspondent aux éléments u de W qui vérifient $u\le v$.

REMARQUE 4.6. — Les fonctions ψ^w sont uniquement déterminées par les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv) de la proposition précédente.

Dans [13], B. Kostant et S. Kumar composent i_T^* avec

$$\phi : F\bigl(W;Q[T]\bigr)\longrightarrow F\bigl(W;Q[T]\bigr)$$

définie par $\phi(f)(w)=f(w^{-1})$ pour tout élement f de $F(W;Q[T])$ et tout $w\in W$. Ils trouvent alors la sous-algèbre Ψ' (notée Ψ dans [13]) de $F(W;R[T])$:

$$\Psi'=\bigl\{f\in F(W;R[T]),\ \text{telles que } \forall w\in W,\ D'_wf\in F(W;R[T])\bigr\},$$

où les opérateurs D'_w sont définis à partir des opérateurs D'_i donnés par

$$(D'_if)(v)=\frac{f(v)-f(s_iv)e^{-v^{-1}\alpha_i}}{1-e^{-v^{-1}\alpha_i}}\cdot$$

Ils considèrent la base ψ'_w (notée ψ^w dans [13]) de Ψ' reliée à la base ψ^w de la proposition 4.4 par la relation $\psi'_w=\phi(\psi^{w^{-1}})$. On a $\psi'_w(v)=\psi^{w^{-1}}(v^{-1})$, pour tout couple $(w,v)\in W^2$.

Soit $v\in W$ et soit $v=s_{\mu_1}\cdots s_{\mu_N}$ une décomposition non nécessairement réduite de v. Comme dans le paragraphe 3.2, pour $1\le j\le N$, on note β_j l'élément de $\mathfrak{h}^*$ défini par $\beta_j=s_{\mu_1}\cdots s_{\mu_{j-1}}\mu_j$.

THÉORÈME 4.7. — *Si $w\in W$ est tel que $w\le v$, on a la formule suivante :*

$$\psi^w(v)=e^{\rho-v\rho}\sum_{\ell(w)\le m\le N}\sum(e^{-\beta_{j_1}}-1)\cdots(e^{-\beta_{j_m}}-1),$$

où la deuxième somme porte sur l'ensemble des entiers $1\le j_1<\cdots<j_m\le N$ tels que $\underline{s}_{\mu_{j_1}}\cdots\underline{s}_{\mu_{j_m}}=\underline{w}$.

Donnons quelques exemples de calculs pour expliciter cette formule.

Tout d'abord pour tout $v \in W$, on retrouve bien $\psi^1(v) = e^{\rho - v\rho}$, puisque la seule façon de trouver 1 en dessous de v est de prendre la suite vide.

Plaçons-nous dans le cas où $G = \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$. Calculons $\psi^w(v)$ avec $w = s_3 s_2$ et $v = s_2 s_3 s_2 s_1 s_2$. Il y a trois façons de « trouver $\underline{w}$ en dessous de v » : $\underline{w} = \underline{s}_{i_2}\underline{s}_{i_3}$, $\underline{w} = \underline{s}_{i_2}\underline{s}_{i_5}$ et $\underline{w} = \underline{s}_{i_2}\underline{s}_{i_3}\underline{s}_{i_5}$. On trouve donc

$$\begin{aligned}\psi^w(v) &= e^{\alpha_2 + (\alpha_2+\alpha_3) + \alpha_3 + (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + (\alpha_1+\alpha_2)} \\ &\qquad \times \big[(e^{-(\alpha_2+\alpha_3)} - 1)(e^{-\alpha_3} - 1) \\ &\qquad\qquad + (e^{-(\alpha_2+\alpha_3)} - 1)(e^{-(\alpha_1+\alpha_2)} - 1) \\ &\qquad\qquad\qquad + (e^{-(\alpha_2+\alpha_3)} - 1)(e^{-\alpha_3} - 1)(e^{-(\alpha_1+\alpha_2)} - 1)\big] \\ &= e^{2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3} \\ &\qquad \times \big[1 + e^{-(\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)} - e^{-(\alpha_2+\alpha_3)} - e^{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}\big] \\ &= e^{2\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3} + e^{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3} \\ &\qquad\qquad - e^{2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3} - e^{\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3}.\end{aligned}$$

Démonstration. — Soit $v = s_{\mu_1} \cdots s_{\mu_N}$ une décomposition non nécessairement réduite d'un élément v de W. On pose $\Gamma = \Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_N)$ et $g = g_{\mu_1,\ldots,\mu_N}$. Soit w un élément quelconque de W.

Une généralisation immédiate de la proposition 3.36 de [13], où le résultat n'est énoncé que pour des décompositions réduites, nous donne :

$$\forall \tau \in K_T(X), \quad \chi\big(\overline{\Gamma}_\varepsilon, g^*(*\tau)\big) = *\big(D_{\underline{v}(\varepsilon)} i_T^*(\tau)\big)(1),$$

où pour $\underline{u} \in \underline{W}$, on a posé $D_{\underline{u}} = D_u$. Or d'après la définition des fonctions ψ^w (proposition 4.4) :

$$\forall (u,w) \in W^2, \quad \big(D_u(\psi^w)\big)(1) = \delta_{u,w}.$$

On déduit des deux formules précédentes que pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on a

$$\chi\big(\overline{\Gamma}_\varepsilon, g^*(*\widehat{\psi}^w)\big) = \delta_{\underline{v}(\varepsilon),\underline{w}}. \tag{6}$$

D'après la caractérisation de la base $\{\widehat{\mu}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$, on a donc

$$g^*(\widehat{\psi}^w) = \sum_{\varepsilon\in\mathcal{E},\, \underline{v}(\varepsilon)=\underline{w}} *\widehat{\mu}_\varepsilon,$$

d'où on déduit

$$\psi^w(v) = \big(i_T^*(\widehat{\psi}^w)\big)(v) = \sum_{\varepsilon\in\mathcal{E},\underline{v}(\varepsilon)=\underline{w}} *\mu_\varepsilon\big((\mathbf{1})\big),$$

ce qui nous donne bien le théorème 4.7 à l'aide du théorème 4.3, grâce à la formule suivante (voir [6]) :

$$\rho - v\rho = \sum_{j=1}^{N} \beta_j. \tag{7}$$

□

4.3. Une autre base de $K_T(X)$. — Dans ce paragraphe, on se place dans le cas fini (*i.e.* W fini $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ de dimension finie). On note w_0 le plus grand élément de W. On choisit $w_0 = s_{\mu_1} \cdots s_{\mu_N}$ une décomposition réduite de w_0 et on pose $\Gamma = \Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_N)$ et $g = g_{\mu_1,\ldots,\mu_N}$.

Comme dans le cas des variétés de Bott-Samelson, $K_T(X)$ s'identifie à $K^0(H,X)$ (voir [13]). De plus, comme X est lisse, $K^0(H,X)$ est isomorphe à $K_0(H,X)$ le groupe construit à partir du semi-groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux H-équivariants cohérents sur X (voir [7]). On identifie donc ces trois groupes.

Dans [13], Kostant et Kumar montrent que la décomposition en cellules de Schubert $X = \coprod_{w\in W} X_w$ fournit une base $\{[\mathcal{O}_{\overline{X}_w}]\}_{w\in W}$ de $K_0(H,X)$. Les classes $[\mathcal{O}_{\overline{X}_w}]$ sont définies par le faisceau structural de $\overline{X}_w$ prolongé par 0 sur $X \setminus \overline{X}_w$. Pour $w \in W$, on pose $\hat{\gamma}^w = *[\mathcal{O}_{\overline{X}_w}] \in K_T(X)$, et $\gamma^w = i_T^*(\hat{\gamma}^w)$. Le résultat suivant est prouvé dans [13] :

PROPOSITION 4.8. — *Pour tout $w \in W$ et tout entier $1 \leq i \leq r$,*

$$D_i(\gamma^w) = \begin{cases} \gamma^w & \text{si} \quad ws_i < w, \\ \gamma^{ws_i} & \text{si} \quad ws_i > w. \end{cases}$$

On définit les éléments $a_w^v \in R[T]$ par $\gamma^w = \sum_{v\in W} a_w^v \psi^v$. On va donner une expression explicite de ces coefficients. Soit $w \in W$ et soit s_i une réflexion simple telle que $ws_i > w$. Si on applique l'opérateur D_i à la décomposition $\gamma^w = \sum_{v\in W} a_w^v \psi^v$, on obtient

$$\gamma^{ws_i} = D_i(\gamma^w) = \sum_{v\in W} a_w^v D_i \psi^v.$$

En utilisant les relations vérifiées par les fonctions ψ^v, on trouve alors :

$$\sum_{v\in W} a_{ws_i}^v \psi^v = \sum_{v\in W,\, vs_i<v} a_w^v(\psi^v + \psi^{vs_i}) = \sum_{v\in W,\, vs_i<v} a_w^v \psi^v + \sum_{v\in W,\, vs_i>v} a_w^{vs_i} \psi^v.$$

On obtient donc la relation de récurrence suivante sur les coefficients a_w^v :

$$a_{ws_i}^v = \begin{cases} a_w^v & \text{si } vs_i < v, \\ a_w^{vs_i} & \text{si } vs_i > v. \end{cases}$$

On déduit de ces relations, en utilisant les relations (1) et (2) :

$$\forall (w,v) \in W^2, \quad a_w^v = a_1^{\underline{v}\,\underline{w^{-1}}}, \tag{8}$$

où pour $\underline{u} \in \underline{W}$, on a posé $a_1^{\underline{u}} = a_1^u$.

Il suffit donc de trouver la décomposition de γ^1. Pour cela, on aura besoin des valeurs de γ^1 :

$$\gamma^1(1) = \prod_{\alpha\in\Delta_+} (1 - e^{-\alpha}), \quad \gamma^1(v) = 0 \text{ si } v \neq 1.$$

La valeur de $\gamma^1(1)$ est calculée à l'aide de la formule d'auto-intersection et les autres valeurs sont nulles par le théorème de localisation.

Comme on a $\widehat{\gamma}^1 = \sum_{v\in W} a_1^v \widehat{\psi}^v$, soient $v \in W$ et $\varepsilon \in \mathcal{E}$ tel que $v(\varepsilon) = v$; d'après la formule (6), le coefficient a_1^v est donné par

$$a_1^v = *\chi\big(\overline{\Gamma}_\varepsilon, g^*(*\hat{\gamma}^1)\big).$$

En utilisant la formule (5) et les valeurs de $*\gamma^1 = *i_T^*\widehat{\gamma}^1$, on obtient alors

$$a_1^v = \sum_{\varepsilon'\leq\varepsilon,\, v(\varepsilon')=1} \frac{\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-e^{-\alpha})}{\prod_{i\in\pi_+(\varepsilon)}(1-e^{-\alpha_i(\varepsilon')})}.$$

On a donc la proposition suivante :

PROPOSITION 4.9. — *Soit $v \in W$ et soit $v = s_{i_1}\cdots s_{i_\ell}$ une décomposition réduite de v. Pour tout sous-ensemble I de $\{1,\dots,\ell\}$ et tout entier $1 \leq j \leq \ell$, on pose $\beta_j(I) = (\prod_{p\in I,\, p\leq j} s_{i_p})\alpha_{i_j}$ ($\beta_j(I) = \alpha_{i_j}$ si $I \cap \{1,\dots,j\} = \varnothing$). Alors l'élément de $R[T]$*

$$\sum_{k=1}^{\ell} \sum \frac{\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-e^{-\alpha})}{\prod_{j=1}^{\ell}(1-e^{-\beta_j(\{j_1,\dots,j_k\})})},$$

où la deuxième somme porte sur l'ensemble des indices $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq \ell$ tels que $s_{i_{j_1}}\cdots s_{i_{j_k}} = 1$, ne dépend pas du choix d'une décomposition réduite de v. Si on note b^v cet élément, alors $a_1^v = b^v$.

REMARQUE 4.10. — La proposition précédente est encore valable si on prend une décomposition non réduite de v.

Si on utilise la relation (8), et si pour $\underline{v} \in \underline{W}$, on pose $b^{\underline{v}} = b^v$, on obtient alors le théorème suivant :

THÉORÈME 4.11. — *Soit $w \in W$, alors :*

$$*[\mathcal{O}_{\overline{X}_w}] = \sum_{v\in W} b^{\,\underline{v}\,\underline{w}^{-1}}\, \widehat{\psi}^v.$$

Soit Q_W le $Q[T]$-module libre qui admet pour base la famille $\{\delta_w\}_{w\in W}$ et qu'on munit d'une structure d'anneau définie par

$$(q_1\delta_{w_1}).(q_2\delta_{w_2}) = q_1(w_1q_2)\delta_{w_1w_2},\ \forall (q_1,q_2)\in Q[T]^2, \text{ et } (w_1,w_2)\in W^2,$$

où l'action de W sur $Q[T]$ est déduite de celle de W sur T. Dans [13], B. Kostant et S. Kumar introduisent des éléments $\{y_i\}_{1\leq i\leq r}$ de $Q[T]$ définis par

$$y_i = \frac{1}{1-e^{-\alpha_i}}(\delta_1 - e^{-\alpha_i}\delta_{s_i}).$$

Les y_i vérifiant les relations de tresses, on peut définir un élément $y_w \in Q_W$ pour tout $w \in W$. On définit alors des éléments $\{b_{v,w}\}_{(v,w)\in W^2}$ de $Q[T]$ par

$$y_{v^{-1}} = \sum_{w\in W} b_{v,w}\delta_{w^{-1}}.$$

D'après l'expression combinatoire de $b_{v,w}$ donnée par le lemme 3.5 de [14], on a $b^v = b_{v^{-1},1}\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-e^{-\alpha})$; de plus, S. Kumar [14] montre que quand $\overline{X}_v$ est lisse, $b_{v,1} = \prod_{\gamma\in S(v)}(1-e^{-\gamma})^{-1}$, où pour $u \in W$, $S(u) = \{\alpha \in R^+, s_\alpha \le u\}$. En particulier $b^{w_0} = 1$ et donc d'après le théorème 4.11 :

$$*[\mathcal{O}_{\overline{X}_{w_0}}] = \sum_{w\in W} \widehat{\psi}^{\,w}.$$

5. Lien avec les algèbres de Hecke

Dans cette section, on va donner une démonstration purement combinatoire du théorème 4.7. Cette démonstration est similaire à celle donnée par Sara Billey dans [4] dans le cas de la cohomologie équivariante. Le théorème 5.2, dont on va donner une idée de la démonstration, est démontré pour le type A dans [16]. Contrairement à ce qu'on a fait précédemment, on doit d'abord démontrer que l'expression du théorème 4.7 est indépendante du choix d'une décomposition de $v \in W$. C'est pour cela qu'on utilise les algèbres de Hecke.

Soit A un anneau commutatif. On définit l'algèbre $\mathcal{H}$ comme la A-algèbre de Hecke engendrée par $\{u_i\}_{1\le i\le r}$ soumis aux relations de tresses définissant W et aux relations $u_i^2 = u_i$. Soit $w \in W$, on peut définir $u_w \in \mathcal{H}$ par $u_w = u_{i_1}\cdots u_{i_\ell}$ où $w = s_{i_1}\cdots s_{i_\ell}$ est une décomposition réduite quelconque de w. Les éléments $\{u_w\}_{w\in W}$ forment une base du A-module $\mathcal{H}$.

Soit $s_{i_1},\dots,s_{i_k}$ une suite de réflexions simples et soit $\underline{w} = \underline{s}_{i_1}\cdots\underline{s}_{i_k} \in \underline{W}$. On a $u_{i_1}\cdots u_{i_k} = u_w$ d'après les relations vérifiées par les u_i.

Pour tout $1 \le i \le r$, on définit la fonction

$$h_i : A \longrightarrow \mathcal{H}, \quad x \longmapsto 1 + (x-1)u_i.$$

On vérifie que ces fonctions h_i satisfont les relations suivantes (énoncées sous une forme différente dans [8]) :

Proposition 5.1. — *Soient $1 \le i,j \le r$ des entiers distincts, deux éléments quelconques x et y de A vérifient les équations suivantes :*

- $h_i(x)h_j(y) = h_j(y)h_i(x)$ *si* $(s_is_j)^2 = 1$,
- $h_i(x)h_j(xy)h_i(y) = h_j(y)h_i(xy)h_j(x)$ *si* $(s_is_j)^3 = 1$,
- $h_i(x)h_j(xy)h_i(xy^2)h_j(y) = h_j(y)h_i(xy^2)h_j(xy)h_i(x)$ *si* $(s_is_j)^4 = 1$,
- $h_i(x)h_j(x^3y)h_i(x^2y)h_j(x^3y^2)h_i(xy)h_j(y)$ $= h_j(y)h_i(xy)h_j(x^3y^2)h_i(x^2y)h_j(x^3y)h_i(x)$ *si* $(s_is_j)^6 = 1$.

On prendra dans la suite pour A l'anneau $R[T]$. Soit $v \in W$ et $v = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ une décomposition réduite de v. Pour $1 \leq j \leq \ell$, on définit un élément β_j de $\mathfrak{h}^*$ par $\beta_j = s_{i_1} \ldots s_{i_{j-1}} \alpha_{i_j}$. On définit alors un élément de $\mathcal{H}$ par

$$\mathcal{R}_{i_1,\ldots,i_\ell} = \prod_{j=1}^{\ell} h_{i_j}(e^{-\beta_j}).$$

À l'aide de la proposition 5.1, une démonstration analogue à celle donnée par Sara Billey dans [4] dans le cas de l'algèbre nil-Coxeter nous donne le résultat suivant :

THÉORÈME 5.2. — *Soit $v \in W$. L'élément $\mathcal{R}_{i_1,\ldots,i_\ell}$ de $\mathcal{H}$ est indépendant du choix d'une décomposition réduite $v = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ de v. Il ne dépend que de v et on le note donc $\mathcal{R}_v$.*

Donnons une idée de la démonstration. D'après la définition de $\mathcal{R}_{i_1,\ldots,i_\ell}$ et d'après la connexité du graphe des décompositions réduites de v, on peut se contenter de regarder ce qui se passe pour un élément v correspondant à une relation de tresses. Prenons par exemple $v = s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$. Alors on a

$$\mathcal{R}_{i,j,i} = h_i(e^{-\alpha_i}) h_j(e^{-\alpha_i - \alpha_j}) h_i(e^{-\alpha_j}),$$
$$\mathcal{R}_{j,i,j} = h_j(e^{-\alpha_j}) h_i(e^{-\alpha_i - \alpha_j}) h_j(e^{-\alpha_i}),$$

et en utilisant la deuxième relation de la proposition 5.1, on obtient le résultat. Les autres cas se traitent de la même manière.

Le terme $\sum_{\ell(w) \leq m \leq \ell(v)} \sum (e^{-\beta_{j_1}} - 1) \cdots (e^{-\beta_{j_m}} - 1)$ du théorème 4.7 est le coefficient de $\mathcal{R}_v$ sur u_w dans la base $\{u_w\}_{w \in W}$ de $\mathcal{H}$ et est donc bien indépendant de la décomposition réduite de v choisie.

Notons $\widetilde{\psi}^w$ l'élément de $F(W; R[T])$ défini par la formule du théorème 4.7 (on pose $\widetilde{\psi}^w(v) = 0$ si v n'est pas plus grand que w). Pour démontrer ce théorème, il suffit de montrer que les fonctions $(\widetilde{\psi}^w)_{w \in W}$ vérifient les quatre propriétés de la proposition 4.4. Les propriétés (i) et (iv) sont immédiates.

Pour démontrer la propriété (ii), rappelons tout d'abord le lemme suivant (voir [6]) :

LEMME 5.3. — *Soient $v \in W$ et $v = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ une décomposition réduite de v. Alors on a $\Delta(v^{-1}) = \{\beta_j, 1 \leq j \leq k\}$.*

D'après ce lemme et la formule 7, on a donc

$$\widetilde{\psi}^w(w) = \prod_{\beta \in \Delta(w^{-1})} e^{\beta} \prod_{\beta \in \Delta(w^{-1})} (e^{-\beta} - 1) = \prod_{\beta \in \Delta(w^{-1})} (1 - e^{\beta}) = \psi^w(w),$$

ce qui nous donne la propriété (ii).

Montrons maintenant que les $(\widetilde{\psi}^w)_{w\in W}$ vérifient la propriété (iii) de la proposition 4.4. Soient $w \in W$ et s_i une réflexion simple.

• Supposons tout d'abord $ws_i > w$. Il faut alors montrer que pour tout $v \in W$, on a

$$\widetilde{\psi}^w(v) = \widetilde{\psi}^w(vs_i)e^{-v\alpha_i}.$$

On peut supposer $vs_i > v$. Si v n'est pas plus grand que w, vs_i non plus car w n'a pas de décomposition qui finit par s_i car $ws_i > w$. On suppose donc $w \le v < vs_i$. Comme w n'a aucune décomposition qui finit par s_i, la somme est la même à gauche et à droite de l'égalité. Il suffit donc de vérifier $e^{\rho - v\rho} = e^{\rho - vs_i\rho}e^{-v\alpha_i}$, ce qui est une conséquence immédiate de la formule 7.

• Supposons maintenant $ws_i < w$. Il faut montrer que pour tout $v \in W$, on a

$$\frac{\widetilde{\psi}^w(v) - \widetilde{\psi}^w(vs_i)e^{-v\alpha_i}}{1 - e^{-v\alpha_i}} = \widetilde{\psi}^w(v) + \widetilde{\psi}^{ws_i}(v). \tag{9}$$

Supposons tout d'abord $vs_i > v$. On se place dans le cas où $w \le vs_i$ (sinon le résultat est trivial). On choisit une décomposition réduite $v = s_{i_1}\cdots s_{i_\ell}$ de v. On prend pour vs_i la décomposition $vs_i = s_{i_1}\cdots s_{i_\ell}s_i$. On trouve alors (en utilisant la formule 7)

$$\widetilde{\psi}^w(vs_i)e^{-v\alpha_i} = \widetilde{\psi}^w(v) + (e^{-v\alpha_i} - 1)(\widetilde{\psi}^w(v) + \widetilde{\psi}^{ws_i}(v)),$$

le premier terme venant des sous décompositions de v « égales » à w, le deuxième des mêmes sous décompositions de v auxquelles on rajoute s_i à la fin et qui redonnent donc w (car $ws_i < w$), et le troisième des sous décompositions de v « égales » à ws_i. On trouve alors bien la formule (9).

Supposons maintenant $vs_i < v$. On peut appliquer ce qui précède à $v' = vs_i$ car $v's_i > v'$ et on trouve

$$\frac{\widetilde{\psi}^w(vs_i) - \widetilde{\psi}^w(v)e^{v\alpha_i}}{1 - e^{v\alpha_i}} = \widetilde{\psi}^w(vs_i) + \widetilde{\psi}^{s_iw}(vs_i).$$

De plus, on peut appliquer le cas $ws_i > w$ à $w' = ws_i$ et on obtient $\widetilde{\psi}^{ws_i}(vs_i) = e^{v\alpha_i}\widetilde{\psi}^{ws_i}(v)$. En substituant ainsi $\widetilde{\psi}^{ws_i}(vs_i)$ dans l'expression précédente, on obtient la formule (9).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Arabia (A.) – *Cohomologie T-équivariante de la variété de drapeaux d'un groupe de Kac-Moody*, Bull. Soc. Math. France, t. **117** (1989), pp. 129–165.

[2] Atiyah (M.) & Bott (R.) – *A Lefschetz fixed-point formula for elliptic complexes I*, Ann. of Math., t. **86** (1967), pp. 347–407.

[3] BERLINE (N.) & VERGNE (M.) – *Classes caractéristiques équivariantes. Formules de localisation en cohomologie équivariante*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **295** (1982), pp. 539–541.

[4] BILLEY (S.) – *Kostant polynomials and the cohomology of G/B*, Duke Math. J., t. **96** (1999), pp. 205–224.

[5] BOTT (R.) & SAMELSON (H.) – *Applications of the theory of Morse to symmetric spaces*, Amer. J. Math., t. **70** (1958), pp. 964–1028.

[6] BOURBAKI (N.) – *Groupes et algèbres de Lie, chap. 4–6*, Hermann, Paris, 1968.

[7] CHRISS (N.) & GINZBURG (V.) – *Representation Theory and Complex Geometry*, Birkhäuser, 1997.

[8] FOMIN (S.) & KIRILLOV (A.N.) – *Universal exponential solution of the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys., t. **37** (1996), pp. 273–284.

[9] GRAHAM (W.) – *Equivariant K-theory and Schubert varieties*, Preprint, 2002.

[10] HANSEN (H.C.) – *On cycles in flag manifolds*, Math. Scand., t. **33** (1973), pp. 269–274.

[11] KAC (V.G.) – *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, 1985.

[12] KAC (V.G.) & PETERSON (D.H.) – *Regular functions on certain infinite dimensional groups*, in *Arithmetic and Geometry*-II, Birkhäuser, 1983, pp. 141–166.

[13] KOSTANT (B.) & KUMAR (S.) – *T-equivariant K-theory of generalized flag varieties*, J. Diff. Geom., t. **32** (1990), pp. 549–603.

[14] KUMAR (S.) – *The nil-Hecke ring and singularities of Schubert varieties*, Invent. Math., t. **123** (1996), pp. 471–506.

[15] ———, *Kac Moody Groups, their Flag Varieties and Representation Theory*, Progress in Mathematics, vol. 204, Birkhäuser, 2002.

[16] LASCOUX (A.), LECLERC (B.) & THIBON (J.-Y.) – *Flag varieties and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys., t. **40** (1997), pp. 75–90.