Bull. Soc. math. France
130 (4), 2002, p. 537–572

DEUX COMPOSANTES DU BORD DE $\mathbf{I}_3$

PAR NICOLAS PERRIN

RÉSUMÉ. — Nous étudions deux nouvelles composantes irréductibles du bord de la variété $\mathbf{I}_3$ des instantons de degré 3. Nous décrivons $\mathbf{I}_3$ grâce aux transformations cubo-cubiques involutives déduites de la monade de Beilinson (ce sont des transformations de Cremona particulières).

Nous exhibons alors les deux composantes du bord par dégénérescence sur les transformations. Nous mettons en évidence la dualité qui les lie : les transformations cubo-cubiques de l'une sont les inverses de l'autre.

Nous décrivons en détail la géométrie associée et donnons ainsi des descriptions birationnelles de l'espace des modules des courbes de degré 7 et de genre 2 ainsi que des courbes de degré 9 et genre 6.

ABSTRACT (*Two components of the boundary of* $\mathbf{I}_3$). — We study two new components of the boundary of $\mathbf{I}_3$ the variety of degree 3 mathematical instantons. We describe $\mathbf{I}_3$ thanks to the involutive cubo-cubic transformations induced by Beilinson's monad (these are particular Cremona transformations).

We then exhibit the two boundary components by making the transformations degenerate. We show that the two components are in duality : the cubo-cubic transforms of the first component are the inverse of those of the second one.

We also describe in detail the associated geometry. In particular we give a birational description of the moduli space of genus 2 and degree 7 curves and of genus 6 and degree 9 curves.

Texte reçu le 27 juin 2001, révisé le 1er février 2002, accepté le 8 mars 2002

NICOLAS PERRIN, Université de Versailles, 45 avenue des États-Unis, 78035 Versailles Cedex (France) • *E-mail :* `perrin@math.uvsq.fr` • *Url :* `http://www.math.uvsq.fr/~perrin`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14D20.

Mots clefs. — Instantons, espaces de modules de faisceaux et de courbes, transformations birationnelles de l'espace projectif.

© Société Mathématique de France

Introduction

Un instanton E de degré n est un fibré vectoriel stable de rang 2 sur $\mathbb{P}^3$ tel que $c_1(E)=0$, $c_2(E)=n$ et tel que le groupe $H^1E(-2)$ soit nul. La variété $\mathbf{I}_n$ des instantons de degré n est donc un ouvert de l'espace des modules $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,n,0)$ des faisceaux sans torsion semi-stables de classes de Chern $(0,n,0)$. Dans cet article nous nous intéressons au bord de $\mathbf{I}_n$ dans la variété projective $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,n,0)$.

On ne sait décrire ce bord que pour $n=1$ [2] et $n=2$ [12]. La variété $\mathbf{I}_3$ est de dimension 21. Elle a été étudiée par G. Ellingsrud et S.A. Strømme [5] qui ont prouvé son irréductibilité, et par L. Gruson et M. Skiti [9] qui ont montré qu'elle est birationnelle aux réseaux de quadriques de $\mathbb{P}^{3\vee}$. Au vu des résultats de [12], L. Gruson et G. Trautmann ont conjecturé que le bord de $\mathbf{I}_3$ a huit composantes irréductibles toutes en codimension 1 (voir remarque 3.6.8 pour plus de détails sur cette conjecture). Dans [9], les auteurs mettent également en évidence deux composantes irréductibles du bord de $\mathbf{I}_3$ correspondant à des diviseurs des réseaux de quadriques. Nous donnons ici une généralisation de ces réseaux et décrivons deux nouvelles composantes irréductibles $\partial\mathbf{I}_3^1$ et $\partial\mathbf{I}_3^2$ du bord de la variété des instantons de degré 3 qui sont « symétriques » l'une de l'autre.

Considérons la famille $\partial\mathbf{I}_3^1$ des faisceaux obtenus comme noyau d'une flèche surjective de E'' vers $\theta(2)$ où E'' est un instanton de degré 1 et θ est une théta-caractéristique ayant pour support une conique lisse. Cette famille est contenue dans $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$. Considérons par ailleurs un ouvert $\mathbf{U}$ (que l'on définira plus loin) de $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$. Un faisceau général de $\mathbf{U}$ a deux points singuliers. Soit $\mathbf{U}'$ le fermé qui correspond aux faisceaux E'' de $\mathbf{U}$ dont le lieu singulier est un point double, nous montrons alors le théorème suivant :

Théorème 0.1. — (i) *La variété $\partial\mathbf{I}_3^1$ est birationnelle à la variété des surfaces quintiques rationelles réglées autoduales. Elle forme une composante du bord de $\mathbf{I}_3$.*

(ii) *La famille $\mathbf{U}$ est une fibration en $\mathbb{P}^9$ au-dessus du schéma des cubiques gauches irréductibles. Le fermé $\mathbf{U}'$ est décrit dans chaque fibre par une hypersurface irréductible de degré 6.*

(iii) *Il existe une application rationnelle naturelle, génériquement injective, du fermé $\mathbf{U}'$ dans $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$ dont l'image $\partial\mathbf{I}_3^2$ est une composante irréductible du bord de $\mathbf{I}_3$. L'application réciproque associe à un faisceau $E\in\partial\mathbf{I}_3^2$ son bidual $E''\in\mathbf{U}'$.*

Pour prouver que ces familles sont adhérentes à la variété des instantons, nous montrons qu'elles peuvent être paramétrées par des diviseurs dans une généralisation des réseaux de quadriques (§1). Cette paramétrisation fait apparaître la symétrie entre $\partial\mathbf{I}_3^1$ et $\partial\mathbf{I}_3^2$.

Dans les deuxième et troisième paragraphes, nous étudions respectivement les familles $\partial\mathbf{I}_3^1$ et $\partial\mathbf{I}_3^2$. Nous décrivons en particulier la géométrie de leurs éléments de saut. Rappelons que l'on appelle plan instable (resp. droite bisauteuse) de $E \in \mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$ tout plan H (resp. toute droite L) tel que $h^0E_H > 0$ (resp. telle que $h^1E_L > 0$). La courbe des plans instables des faisceaux de ces deux composantes est ACM de degré 6 et de genre 3. La surface réglée recouverte par les droites bisauteuses est soit une quintique rationnelle, soit une sextique elliptique. Les éléments de saut des deux composantes sont reliés, ce qui traduit la symétrie entre $\partial\mathbf{I}_3^1$ et $\partial\mathbf{I}_3^2$. Elle s'exprime assez simplement en termes de transformations cubo-cubiques (voir §1). En effet, une courbe ACM de degré 6 et de genre 3 permet de définir une application birationnelle — appelée transformation cubo-cubique — de $\mathbb{P}^3$ dans lui-même. Son application réciproque est encore une transformation cubo-cubique (*i.e.* associée à une courbe ACM de degré 6 et de genre 3). La *dualité* se traduit par le fait que les transformations cubo-cubiques qui proviennent de $\partial\mathbf{I}_3^2$ sont les inverses de celles de $\partial\mathbf{I}_3^1$.

Dans le troisième paragraphe, nous étudions la famille $\mathbf{U}$ que nous décrivons explicitement ainsi que le fermé $\mathbf{U}'$ et le fermé de $\mathbf{U}$ des faisceaux E'' qui ne sont plus réflexifs. Nous donnons alors la courbe qui constitue le lieu singulier de E''.

Enfin dans un dernier paragraphe, nous présentons deux situations géométriques remarquables reliées à notre étude. Nous donnons une description birationnelle de l'espace des modules des courbes de degré 7 et de genre 2 d'un espace projectif. Cette description et la formule d'Hürwitz permettent de retrouver le fait que $\mathbf{U}'$ est définie dans les fibres au-dessus des cubiques gauches par une hypersurface de degré 6.

Proposition 0.2. — *L'espace des modules des courbes de degré* 7 *et de genre* 2 *de* $\mathbb{P}^3$ *est birationnellement isomorphe au quotient par* PGL_2 *de la variété* $\mathbb{G}(2, H^0\mathcal{O}_{S^2\mathbb{P}^1}(3))$ *des pinceaux de cubiques du plan* $S^2\mathbb{P}^1$.

Nous exhibons également une famille $\mathfrak{I}$ de dimension 36 d'involutions birationnelles de $\mathbb{P}^3$ dans lui-même. Nous montrons que $\mathfrak{I}$ est birationnelle au schéma de Hilbert $\mathfrak{H}_{9,6}$ des courbes de degré 9 et de genre 6. Nous montrons par ailleurs :

Proposition 0.3. — *L'espace des modules des courbes de degré* 9 *et de genre* 6 *de* $\mathbb{P}^3$ *est birationnellement isomorphe au quotient par* PGL_2 *de la variété* $\mathbb{G}(4, H^0\mathcal{O}_{S^2\mathbb{P}^1}(3))$ *des sous-espaces vectoriels de dimension* 4 *de cubiques du plan* $S^2\mathbb{P}^1$.

Remerciements. — Je tiens à remercier ici mon directeur de thèse Laurent Gruson pour toute l'aide qu'il m'a apportée durant la préparation de ce travail.

1. Construction et déformation de faisceaux

Dans ce paragraphe nous expliquons comment la suite spectrale de Beilinson (voir [13]) ramène les problèmes sur les faisceaux à des problèmes d'algèbre linéaire. Nous étudions alors ces questions d'algèbre linéaire et leurs traductions géométriques. En particulier, nous construisons ainsi des déformations de faisceaux.

1.1. Les transformations cubo-cubiques. — Soit R un espace vectoriel de dimension 3 et soient V et W deux espaces vectoriels de dimension 4. Une *transformation cubo-cubique* est un élément A de l'espace projectif

$$\mathbf{T} = \mathbb{P}\big(\mathrm{Hom}(R \otimes V, W)^{\vee}\big).$$

C'est une application linéaire de R dans $H^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^{\vee})\times\mathbb{P}(W)}(1)$ dont l'image définit une sous-variété Π de $\mathbb{P}(V^{\vee}) \times \mathbb{P}(W)$. La projection p (resp. q) de Π sur $\mathbb{P}(V^{\vee})$ (resp. $\mathbb{P}(W)$) est pour une transformation cubo-cubique générale l'éclatement de la courbe Y (resp. Y') ACM de degré 6 et de genre 3 donnée par la résolution

$$0 \to R \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^{\vee})}(-4) \xrightarrow{A} W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^{\vee})}(-3) \longrightarrow \mathcal{I}_Y \to 0,$$

respectivement

$$0 \to R \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-4) \xrightarrow{{}^tA} V^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-3) \longrightarrow \mathcal{I}_{Y'} \to 0.$$

Cette construction décrit une application birationnelle de $\mathbb{P}(V^{\vee})$ dans $\mathbb{P}(W)$. Si on échange les rôles de $V^{\vee}$ et de W, on a son application réciproque. Nous dirons qu'une transformation cubo-cubique associée à une courbe Y est involutive s'il existe un isomorphisme $\alpha : W \to V^{\vee}$ tel que $\alpha(Y') = Y$. La transformation cubo-cubique et son inverse sont alors définies par la même courbe.

Pour plus de détails sur les transformations cubo-cubiques, voir aussi [19, p. 179].

Remarque 1.1.1. — Le groupe $\mathrm{PGL}(R) \times \mathrm{PGL}(W)$ agit sur $\mathbf{T}$. Il existe un bon quotient pour cette action qui est fibré principal homogène sous ce groupe sur un ouvert. Par ailleurs, sur l'ouvert des éléments de $\mathbf{T}$ qui définissent une courbe, il existe un morphisme f vers le schéma de Hilbert $\mathfrak{H}_{6,3}$ des courbes ACM de degré 6 et de genre 3 : à A on associe Y. Ce morphisme est sur cet ouvert le bon quotient de $\mathbf{T}$ par $\mathrm{PGL}(R) \times \mathrm{PGL}(W)$ (pour plus de détails, voir [6]).

1.2. Généralisation des réseaux de quadriques. — Dans la suite on identifie V à l'espace vectoriel $H^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$. Dans [9], la famille des instantons sans droite trisauteuse est identifiée à un ouvert des réseaux de quadriques de $\mathbb{P}^{3\vee}$. Cette identification se fait grâce aux multiplications du module de Rao d'un faisceau $E \in \mathbf{I}_3$: pour un instanton général E, on a

$$h^1E(-1) = 3, \quad h^1E = 4 \quad \text{et} \quad h^1E(1) = 1.$$

La multiplication $H^1E \otimes V \to H^1E(1)$ est non dégénérée, elle permet d'identifier H^1E à $V^\vee$. La multiplication

$$H^1E(-1) \otimes V \longrightarrow H^1E \backsimeq V^\vee$$

donne alors le réseau de quadriques.

Nous n'allons plus maintenant identifier directement H^1E à $V^\vee$ mais *garder en mémoire* cette identification par la donnée d'un morphisme (qui est un isomorphisme dans le cas des instantons) de H^1E dans $V^\vee$ et de sa « réciproque » de $V^\vee$ dans H^1E. Les composantes du bord vont apparaître lorsque ces morphismes ne seront plus des isomorphismes. Ainsi, pour retrouver E, nous aurons besoin d'identifier H^1E (resp. $H^1E(-1)$) à un espace vectoriel W (resp. R) de dimension 4 (resp. 3), d'un morphisme $R \to W \otimes V^\vee$ (une transformation cubo-cubique) et de deux morphismes $W \to V^\vee$ et $V^\vee \to W$ vérifiant les conditions de symétrie suivantes : la composée $R \to V^\vee \otimes V^\vee$ (resp. $R \to W \otimes W$) se factorise par $S^2V^\vee$ (resp. S^2W). Dans le cas des instantons, la première condition traduit le fait que la multiplication dans le module de Rao est associative. Nous faisons intervenir la seconde flèche pour conserver la symétrie : sur l'ouvert des instantons, la flèche de W dans $V^\vee$ est inversible et l'identification nous permet de faire jouer le même rôle à W et $V^\vee$. Nous avons ainsi une flèche de $V^\vee$ dans W (l'inverse de la précédente) telle que la composée $R \to W \otimes W$ se factorise par S^2W.

Nous nous donnons donc pour généraliser les réseaux de quadriques trois flèches

$$R \otimes V \xrightarrow{\varphi} W, \quad W \xrightarrow{\psi} V^\vee, \quad V^\vee \xrightarrow{\psi'} W$$

qui vérifient les conditions de symétrie précédentes. Considérons ainsi la sous-variété $\mathbf{F}$ de $\mathbf{T}\times\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W, V^\vee))\times\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V^\vee, W))$ formée des triplets (φ, ψ, ψ') tels que les composées

$$R \otimes V \otimes V \xrightarrow{\varphi\otimes\mathbf{1}_V} W\otimes V \xrightarrow{\psi\otimes\mathbf{1}_V} V^\vee \otimes V \longrightarrow \mathbf{C},$$

$$R \otimes W^\vee \otimes W^\vee \xrightarrow{\varphi\otimes\mathbf{1}_{W^\vee}} V^\vee \otimes W^\vee \xrightarrow{\psi'\otimes\mathbf{1}_{W^\vee}} W \otimes W^\vee \longrightarrow \mathbf{C}$$

se factorisent par $R \otimes S^2V$ et $R \otimes S^2W^\vee$ et tels que

$$\psi' \circ \psi = \lambda\, \mathbf{1}_W \quad \text{et} \quad \psi \circ \psi' = \mu\, \mathbf{1}_{V^\vee}.$$

Ces dernières conditions viennent de l'identification au niveau des instantons : ψ et ψ' sont dans ce cas inverses l'un de l'autre. En particulier, dès que l'un de ces deux morphismes n'est plus inversible, les composées doivent être nulles. Nous appellons $\mathbf{F}_{i,j}$ l'image réciproque dans $\mathbf{F}$ du localement fermé de $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W, V^\vee)) \times \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V^\vee, W))$ formé des couples d'applications linéaires (ψ, ψ') de rangs i et j. La dernière condition impose que si $i \neq 4$ alors $j \leq 4-i$. Un point général de $\bigcup_j \mathbf{F}_{i,j}$ pour i fixé différent de 4 est dans $\mathbf{F}_{i,4-i}$ que nous noterons $\mathbf{F}_i$. Notons $\mathbf{F}_4$ l'ouvert sur lequel ψ est inversible.

1.3. Lien avec les faisceaux. — Un élément de $\mathbf{F}_{i,j}$ nous permet grâce à la condition de symétrie sur ψ de construire un complexe

$$R \otimes \Omega^2(2) \xrightarrow{\varphi} W \otimes \Omega^1(1) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}.$$

Sa cohomologie au centre est un élément de $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$. Cette construction détermine une application rationnelle g (définie là où φ est injective et ψ surjective) de $\mathbf{F}$ vers $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$.

Cette application envoie $\mathbf{F}_4$ dans $\mathbf{I}_3$ et même sur l'ouvert des instantons sans droite trisauteuse (voir [9]). De plus, deux diviseurs de $\mathbf{F}_4$ font apparaître deux composantes irréductibles du bord de $\mathbf{I}_3$ (*cf.* [9]). M. Skiti [21] a également montré que $\mathbf{F}_2$ s'envoie sur les instantons à droite trisauteuse. Nous montrons que $\mathbf{F}_3$ et $\mathbf{F}_1$ permettent d'identifier deux nouvelles composantes du bord de $\mathbf{I}_3$.

En particulier, nous regardons l'image par g de $\mathbf{F}_3$ dans $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$ qui sera l'un des deux bords recherchés ($\partial\mathbf{I}_3^1$). Nous étudions les transformations cubo-cubiques associées. Notons $\mathbf{T}_3^1$ l'image de $\mathbf{F}_3$ dans $\mathbf{T}$. La variété $\mathbf{F}_4$ correspond au cas où la transformation cubo-cubique est involutive. Ce n'est plus le cas pour $\mathbf{F}_3$, on a une rupture de symétrie. Les transformations cubo-cubiques inverses de celles de $\mathbf{T}_3^1$ sont celles obtenues comme image de $\mathbf{F}_1$ (proposition 3.6.1). Elles nous permettrent de décrire la seconde composante du bord de $\mathbf{I}_3$.

Sur $\mathbf{F}_1$, la seconde flèche du complexe n'est plus surjective et nous avons alors une application rationnelle vers $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$. L'application g n'utilise pas la condition de symétrie sur ψ'. Nous pouvons définir g sur le localement fermé $\mathbf{F}^1$ de $\mathbf{T}\times\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W,V^\vee))$ des paires qui vérifient la première condition de symétrie et telles que la seconde flèche est de rang 1. L'application ainsi définie est à valeurs dans un ouvert $\mathbf{U}$ (voir §3) de $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$. Nous verrons qu'il est dominant. L'image de $\mathbf{F}_1$ dans $\mathbf{F}^1$ est un fermé et son image par g est un fermé $\mathbf{U}'$ (voir §3) de codimension 1 de $\mathbf{U}$ (là où le lieu singulier du faisceau est concentré en un point). Nous montrons que la seconde condition de symétrie (sur ψ') nous permet de prolonger ce morphisme vers $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$. Son image décrit la seconde composante irréductible $\partial\mathbf{I}_3^2$ du bord de $\mathbf{I}_3$ recherchée.

Remarques 1.3.1. — (i) La fibre générique du morphisme g est isomorphe à $\mathrm{PGL}(R) \times \mathrm{PGL}(W)$. En effet, le faisceau obtenu est à cohomologie naturelle. Les multiplications de H^1_*E nous permettent de retrouver φ et ψ. Sur un ouvert rencontrant $\mathbf{F}_4$ et $\mathbf{F}_3$, le morphisme ψ' est uniquement déterminé par les deux autres ; la fibre est alors isomorphe à $\mathrm{PGL}(R) \times \mathrm{PGL}(W)$ (*cf.* [9] pour $\mathbf{F}_4$ et proposition 2.2.3 pour $\mathbf{F}_3$).

(ii) Les variétés $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_3$ sont isomorphes (il suffit d'échanger les rôles de V et W). Par ailleurs, les composantes $\partial\mathbf{I}_3^1$ et $\partial\mathbf{I}_3^2$ du bord de $\mathbf{I}_3$ sont birationnelles au quotient de $\mathbf{F}_3$ et $\mathbf{F}_1$ par $\mathrm{PGL}(R)\times\mathrm{PGL}(W)$. Ainsi les deux quotients

$\partial\mathbf{I}_3^1/\,\mathrm{PGL}(V)$ et $\partial\mathbf{I}_3^2/\,\mathrm{PGL}(V)$ sont birationnels (l'existence de ces deux quotients est assurée au moins sur un ouvert par un théorème de Rosenlicht [18]). Ceci est une autre forme de la symétrie entre $\partial\mathbf{I}_3^1$ et $\partial\mathbf{I}_3^2$.

1.4. Propriétés de F. — Nous donnons ici une démonstration de quelques propriétés de la variété $\mathbf{F}$, des variétés $\mathbf{F}_i$ pour $1 \le i \le 4$ et de la variété $\mathbf{F}^1$.

FAIT 1.4.1. — *Les variétés $\mathbf{F}_i$ pour $1 \le i \le 3$ sont irréductibles de dimension* 43*.*

Démonstration. — Soit Z_i l'image de la projection de $\mathbf{F}_i$ vers le produit d'espaces projectifs $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W,V^\vee))\times\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V^\vee,W))$. L'image de la projection de Z_i vers $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W,V^\vee))$ est la sous-variété irréductible de dimension $15-(4-i)^2$ des morphismes de rang i. La fibre de cette projection au-dessus de ψ est alors donnée par $\mathbb{P}((\mathrm{Ker}\,\psi)^\vee\otimes\mathrm{Coker}\,\psi)$. La variété Z_i est donc irréductible de dimension 14. Mais alors la fibre au-dessus de $(\psi,\psi')\in Z_i$ est donnée par $\mathbb{P}(R\otimes(S^2\mathrm{Im}\psi\oplus S^2\mathrm{Ker}\psi\oplus(\mathrm{Im}\psi)^\vee\otimes\mathrm{Ker}\psi))$; ainsi $\mathbf{F}_i$ est irréductible de dimension 43. □

FAIT 1.4.2. — *Les variétés $\mathbf{F}_i$ pour $1 \le i \le 3$ sont adhérentes à $\mathbf{F}_4$. Les variétés $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}_4$ sont irréductibles de dimension* 44*.*

Démonstration. — Soit (φ,ψ,ψ') un élément de $\mathbf{F}_i$ assez général. On décompose $V^\vee$ et W en $\mathrm{Im}\,\psi\oplus\mathrm{Coker}\,\psi$ et $\mathrm{Im}\,\psi\oplus\mathrm{Ker}\,\psi$. On peut alors supposer que, dans des bases bien choisies, les applications linéaires φ, ψ et ψ' s'écrivent sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

où A et D sont symétriques. Considérons le morphisme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbf{F}$ qui à a associe $(\varphi_a,\psi_a,\psi'_a)$, où les morphismes φ_a, ψ_a et ψ'_a sont donnés, dans les mêmes bases, par les matrices

$$\begin{pmatrix} A & a^tC \\ C & D \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & aI \end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \begin{pmatrix} aI & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Alors pour a non nul, le triplet définit un élément de $\mathbf{F}_4$ alors que sa limite est (φ,ψ,ψ'). La variété $\mathbf{F}_4$ est donc un ouvert dense de $\mathbf{F}$. Il suffit donc de montrer son irréductibilité. Soit Z_4 l'image de $\mathbf{F}_4$ dans $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W,V^\vee))\times\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V^\vee,W))$. Le morphisme de Z_4 dans $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W,V^\vee))$ est un isomorphisme sur l'ouvert des applications inversibles (sa fibre est donnée par l'inverse). La variété Z_4 est donc irréductible de dimension 15. De plus la fibre au-dessus d'un point de Z_4 est donnée par $\mathbb{P}(R\otimes S^2V)$ avec l'identification de W et $V^\vee$ grâce à ψ. La variété $\mathbf{F}_4$ est donc irréductible de dimension 44. □

FAIT 1.4.3. — *Le morphisme de $\mathbf{F}^1$ dans $\mathbf{T}$ est birationnel sur son image.*

Démonstration. — Soit $\varphi \in \mathbf{T}$ un élément assez général dans l'image de $\mathbf{F}^1$. Il existe donc un morphisme ψ_0 vérifiant les conditions de symétrie. Dans des bases de $V^\vee$ et W, on peut écrire φ et ψ_0 sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où A est de taille 1×1 et D de taille 3×3. On cherche tous les morphismes ψ de rang 1 qui vérifient les conditions de symétrie. Un tel morphisme peut s'écrire dans les mêmes bases sous la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix};$$

on a alors les équations $\delta D = {}^t(\delta D)$ et $\gamma A + \delta C = {}^t(\beta D)$. La première équation est un système linéaire de taille 9×9 et si φ est assez général, la seule solution est $\delta = 0$. De la même façon, on voit que l'on a $\beta = 0$ et $\gamma = 0$ pour φ assez général. Il suffit par exemple de vérifier que c'est le cas si D (resp. A) est donné par

$$D_1 = I, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

resp. (a_1, a_2, a_3) tels que a_1, a_2 et $a_1^3 - a_2^3$ sont non nuls. □

FAIT 1.4.4. — *L'action de* $\mathrm{PGL}(W) \times \mathrm{PGL}(R)$ *sur les variétés* $\mathbf{F}_i$ *pour* $1 \leq i \leq 4$ *est libre sur un ouvert de chacune de ces variétés.*

Démonstration. — Un élément (φ, ψ, ψ') de $\mathbf{F}$ est donné par des matrices

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

où A et D sont symétriques et A est de taille $i \times i$ si $(\varphi, \psi, \psi') \in \mathbf{F}_i$. Le quotient par $\mathrm{PGL}(R)$ consiste à prendre un sous-espace de dimension 3 des matrices de la première forme. Cette action est génériquement libre. Un élément h de $\mathrm{PGL}(W)$ qui est dans le stabilisateur vérifie $h \circ \varphi = \lambda\varphi$, $\psi \circ h = \mu\psi$ et $h \circ \psi' = \nu\psi'$. Si h est donné par

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

alors on a $\alpha = \mu I$, $\beta = 0$, $\delta = \nu I$, $\alpha A = \lambda A$, $\delta D = \lambda D$ et $\gamma A + \delta C = \lambda C$. Ceci nous donne $\lambda = \mu = \nu$, $\alpha = \lambda I$, $\delta = \lambda I$ et $\gamma A = 0$. Si φ est assez général, on a donc $\gamma = 0$ et $h = \lambda I$. □

Notations

(i) Nous noterons π le morphisme de $\mathbf{F}$ vers $\mathbf{T}$.

(ii) Nous noterons $\mathfrak{H}_{d,g}$ le schéma de Hilbert des courbes de degré d et de genre g de $\mathbb{P}^3$.

(iii) Nous noterons $\mathbb{G}$ la grassmannienne des droites de $\mathbb{P}^3$ et K (resp. Q) le sous-fibré (resp. le quotient) tautologique sur $\mathbb{G}$. Nous identifierons la grassmannienne des droites de $\mathbb{P}^{3\vee}$ à $\mathbb{G}$. Nous noterons $\mathbb{F}(i,j;4)$ les variétés d'incidences des quotients de rang i et de rang j de V et p et q les projections respectives.

2. La famille $\partial\mathbf{I}_3^1$

Considérons la famille $\partial\mathbf{I}_3^1$ contenue dans $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$ formée des faisceaux obtenus comme noyaux d'une flèche surjective de E'' vers $\theta(2)$ où E'' est un instanton de degré 1 et θ est une thêta-caractéristique sur une conique lisse C (si on identifie C à $\mathbb{P}^1$, le faisceau θ s'identifie à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$). Nous montrons que cette variété forme une famille irréductible de dimension 20 qui est adhérente à $\mathbf{I}_3$. C'est une composante irréductible du bord de $\mathbf{I}_3$ dans $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$.

2.1. Instantons de degré 1. — Nous rappelons dans ce paragraphe ce dont nous avons besoin sur les instantons de degré 1. En particulier, ce sont des fibrés de corrélation nulle et nous décrivons leurs éléments de saut. Pour plus de détails, voir [13].

Définition 2.1.1. — *Sur $\mathbb{P}^3$ (et plus généralement sur $\mathbb{P}^n$ pour n impair), un fibré vectoriel E'' est dit de corrélation nulle s'il est obtenu comme noyau d'un morphisme surjectif :*

$$T_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1).$$

Remarques 2.1.2. — (i) Comme on a l'identification

$$\mathrm{Hom}\big(T_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)\big) = \Lambda^2 V,$$

un tel fibré correspond à la donnée d'une forme symplectique $\omega_{E''}$ qui doit être non dégénérée (pour la surjectivité de la flèche), ce qui explique la nécessité d'être dans un espace projectif de dimension impaire (*cf.* [13, p. 78]).

(ii) Le faisceau de corrélation nulle E'' est autodual. On peut donc le voir comme le conoyau d'une section partout non nulle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^3}(1)$.

Proposition 2.1.3. — *Soient E'' un fibré de corrélation nulle dans $\mathbb{P}^3$ et $\omega_{E''} \in \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ la forme symplectique associée. La variété des droites sauteuses de E'' est le complexe linéaire $\mathcal{A}_{E''} = \mathbb{G} \cap V(\omega_{E''})$, où $V(\omega_{E''})$ est l'hyperplan de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ défini par $\omega_{E''}$.*

Démonstration. — Supposons E'' donné par une section $s : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^3}(1)$. Pour toute droite L, le faisceau $\Omega^1_L(1)$ s'identifie à

$$\mathcal{O}_L(-1) \oplus H^0\mathcal{O}_L(1) \otimes \mathcal{O}_L.$$

Le morphisme, déduit de s_L, de $\mathcal{O}_L(-1)$ vers $\mathcal{O}_L(-1)$ est nul si et seulement si la droite est isotrope pour $\omega_{E''}$. □

REMARQUES 2.1.4. — (i) La variété d'incidence $\mathbb{F}(1,2;4)$ s'identifie à

$$\mathbb{P}_{\mathbb{P}^3}\big(\Omega^1(2)\big).$$

Le quotient $E''(1)$ de $\Omega^1(2)$ définit une sous-variété $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^3}(E''(1))$ de $\mathbb{F}(1,2;4)$. Le complexe de droites $\mathcal{A}_{E''}$ est l'image de X par la projection dans $\mathbb{G}$. La variété X s'identifie donc à $\mathbb{P}_{\mathcal{A}_{E''}}(Q)$.

(ii) La donnée de E'' est équivalente à celle de $\mathcal{A}_{E''}$. Les fibres de corrélation nulle sont stables [13, p. 180] . L'espace des modules des ces fibrés est isomorphe à $\mathbb{P}(\Lambda^2 V) \setminus \mathbb{G}$, c'est-à-dire à la variété des complexes linéaires non singuliers de droites [13, p. 364].

PROPOSITION 2.1.5. — *Un instanton de degré* 1 *est un fibré de corrélation nulle.*

Démonstration. — Pour plus de détails, voir [13, p. 252]. On applique la suite spectrale de Beilinson à $E''(1)$. Elle donne la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow \Omega^1(2) \longrightarrow E''(1) \to 0.$$

On peut montrer un résultat plus fort : tout fibré stable de rang 2 sur $\mathbb{P}^3$ de classes de Chern $(0,1,0)$ est un fibré de corrélation nulle [13, p. 362]. Ceci signifie que, dans cette proposition, la condition d'instanton donnée par l'annulation de $H^1E''(-2)$ n'est pas nécessaire [13, p. 358]. □

2.2. Une composante du bord. — Notons b le morphisme de $\partial\mathbf{I}^1_3$ vers $\mathbf{I}_1$ qui à un faisceau E associe son bidual E'' (ou encore le complexe de droites $\mathcal{A}_{E''}$).

PROPOSITION 2.2.1. — *La variété* $\partial\mathbf{I}^1_3$ *est irréductible de dimension* 20.

Démonstration. — On a un morphisme de $\partial\mathbf{I}^1_3$ vers $\mathbf{I}_1 \times \mathfrak{H}_{2,0}$ qui à un faisceau E associe son bidual E'' et son lieu singulier C (qui est une conique). Il suffit donc de montrer que l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(E'', \theta(2))$ est de dimension constante égale à 8. Pour ceci, on remarque que pour toute conique C (que l'on identifie à $\mathbb{P}^1$), on a $\Omega^1(1)_{|C} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. Si le faisceau $E''_{|C}$ se décompose en $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$ avec $a \geq 0$, alors la surjection de $\Omega^1(1)$ dans E'' impose $a \leq 1$. L'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(E'', \theta(2))$ qui est $H^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3-a) \oplus H^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3+a)$ est alors de dimension 8. □

Nous donnons maintenant une description birationnelle géométrique de $\partial\mathbf{I}_3^1$. Elle fait apparaître des éléments de saut de E (voir proposition 2.3.2).

PROPOSITION 2.2.2. — *La fibre de b au-dessus d'un complexe de droites $\mathcal{A}$ est birationnellemement isomorphe au schéma de Hilbert des courbes rationnelles lisses de degré* 5 *de* $\mathcal{A}$.

La variété $\partial\mathbf{I}_3^1$ est birationnellemement isomorphe à la variété $\mathbf{H}_5^5$ des courbes rationnelles lisses de degré 5 *de* $\mathbb{G}$ *qui sont tracées sur un complexe non singulier de droites.*

Démonstration. — Rappelons que le schéma de Hilbert des courbes rationnelles lisses de degré 5 de $\mathcal{A}$ est irréductible et lisse de dimension 15 (*cf.* [14]).

Soit Γ une courbe rationnelle lisse de degré 5 dans $\mathcal{A}$. Supposons que Γ est tracée sur un unique complexe de droites et qu'il est non singulier (ceci est le cas pour une courbe générale, *cf.* [15]). Le faisceau $Q_{|\Gamma}$ est alors isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module (*cf.* [15] : si $Q_{|\Gamma}$ a un facteur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, on définit la droite L_0 grâce au quotient de dimension 2

$$V \longrightarrow H^0 Q_{|L} \longrightarrow H^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1).$$

La courbe est alors tracée sur le complexe singulier des droites qui rencontrent L_0).

Considérons la surface réglée $\mathbb{P}_\Gamma(Q_{|\Gamma})$ (de morphisme la restriction de q). Elle est incluse dans $X = \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(Q)$. La section définie par la surjection de $Q_{|\Gamma}$ vers le facteur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ a pour image une courbe Z contenue dans X. Le morphisme $p : Z \to \mathbb{P}^3$ est de degré 2. Soit C son image. Comme Z est irréductible, la courbe C est une conique lisse ou une droite. Si c'est une droite L_0, alors Γ est tracée sur le cône des droites rencontrant L_0. C'est absurde ; donc C est une conique lisse et p est un isomorphisme de Z sur C.

La variété X s'identifie aussi à $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^3}(E''(1))$ (*cf.* remarque 2.1.4). La courbe Z est donc une section de la surface réglée $\mathbb{P}_C(E''(1)_{|C})$. Elle correspond à une surjection de $E''(1)_{|C}$ vers un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module inversible de degré celui de Γ, c'est-à-dire une surjection de $E''_{|C}$ vers $\theta(2)$. En prenant le noyau E de la composée $E'' \to E''_{|C} \to \theta(2)$, on a un faisceau de $\partial\mathbf{I}_3^1$.

Réciproquement, soit $E \in \partial\mathbf{I}_3^1$ un faisceau défini comme le noyau d'une surjection de E'' dans $\theta(2)$. Notons C le support de θ. La surface réglée $S = \mathbb{P}_C(E''(1)_{|C})$ est incluse dans $\mathbb{F}(1, 2; 4)$ et même dans $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^3}(E''(1))$. La surjection $E''(1)_{|C} \to \theta(3)$ définit une section $\sigma : C \to S$ de cette surface. Notons $Z = \sigma(C)$ et Γ l'image de Z par projection dans $\mathbb{G}$. C'est une courbe de degré 5. Cette construction est l'inverse de la précédente. On sait donc qu'il existe des faisceaux de $\partial\mathbf{I}_3^1$ pour lesquels Γ est lisse. Par irréductibilité de $\partial\mathbf{I}_3^1$ (proposition 2.2.1), c'est le cas pour un faisceau général.

Ces deux constructions sont donc inverses l'une de l'autre. La seconde partie de l'énoncé est une conséquence immédiate de ce qui précède. □

Dans la proposition suivante, nous montrons grâce aux réseaux de quadriques que la famille $\partial\mathbf{I}_3^1$ est adhérente à $\mathbf{I}_3$.

Proposition 2.2.3. — *La restriction de g à $\mathbf{F}_3$ est dominante sur $\partial\mathbf{I}_3^1$.*

Démonstration. — Soit $E \in \partial\mathbf{I}_3^1$ un faisceau à cohomologie naturelle. Nous identifions H^1E à W et $H^1E(-1)$ à R. La première multiplication du module de Rao nous donne une transformation cubo-cubique $\varphi \in \mathbf{T}$. Par ailleurs, la seconde multiplication du module de Rao nous donne un élément ψ dans $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W, V^\vee))$ qui vérifie la condition de symétrie. De plus, nous savons que $H^1E = H^0\theta(2)$ et $H^1E(1) = \mathrm{Coker}(H^0E''(1) \to H^0\theta(3))$; donc le morphisme ψ est de rang 3 (la multiplication par l'équation du plan de C est nulle). Prenons alors pour ψ' un morphisme de rang 1 dont le noyau est $\mathrm{Im}\,\psi$ et l'image est $\mathrm{Ker}\,\psi$ (ceci revient à choisir un isomorphisme entre $\mathrm{Coker}\,\psi$ et $\mathrm{Ker}\,\psi$ qui sont de dimension 1, il n'y a qu'une solution à scalaire près). Ce morphisme vérifie les conditions de symétrie et d'annulation. L'élément (φ, ψ, ψ') est donc dans $\mathbf{F}_3$. Ainsi $g^{-1}(\partial\mathbf{I}_3^1)$ est contenu dans $\mathbf{F}_3$ qui est irréductible de dimension égale à $\dim(g^{-1}(\partial\mathbf{I}_3^1))$ (la fibre générale est $\mathrm{PGL}(R) \times \mathrm{PGL}(W)$ l'action sur $\mathbf{F}_3$ étant génériquement libre). □

Corollaire 2.2.4. — *La variété $\partial\mathbf{I}_3^1$ est une composante irréductible du bord de $\mathbf{I}_3$.*

Démonstration. — Nous savons [9] que la restriction de g à $\mathbf{F}_4$ est une application rationnelle dominante sur $\mathbf{I}_3$. Or nous avons vu au fait 1.4.2 que $\mathbf{F}_3$ est adhérente à $\mathbf{F}_4$. Son image par g, qui est $\partial\mathbf{I}_3^1$, est donc adhérente à $\mathbf{I}_3$. Dans [16], nous décrivons $\partial\mathbf{I}_3^1$ comme le diviseur exceptionnel d'un éclatement. □

2.3. Éléments de saut. — Soit $E \in \partial\mathbf{I}_3^1$, nous étudions maintenant les éléments de saut de E.

Proposition 2.3.1. — *La variété Y des plans instables de E est une courbe ACM de degré 6 et de genre 3 de $\mathbb{P}^{3\vee}$. Elle a un point triple au point correspondant au plan de la conique C.*

Démonstration. — La variété d'incidence $\mathbb{F}(1, 3; 4)$ nous permet de calculer la résolution de l'idéal de la courbe Y des plans instables qui est donné par $R^1q_*p^*E$

$$0 \to R \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{3\vee}}(-4) \longrightarrow W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{3\vee}}(-3) \longrightarrow \mathcal{I}_Y \to 0$$

où $R = H^1E(-1)$, $W = H^1E$ et la multiplication est donnée par la multiplication du module de Rao de E. La courbe Y est ACM de degré 6 et de genre 3.

De plus, les groupes de cohomologie de E sont définis de la façon suivante :

$$0 \to H^0\theta(1) \longrightarrow H^1E(-1) \longrightarrow H^1E''(-1) \to 0 \quad \text{et} \quad H^1E = H^0\theta(2).$$

Pour voir que Y a un point triple donné par le plan contenant la conique, nous regardons la matrice A de la multiplication du module de Rao qui définit Y. La multiplication par l'équation H du plan de la conique a un noyau de dimension 2 dans $H^1E(-1)$. Les mineurs 2×2 de la matrice A sont donc contenus dans le noyau de H (vu comme forme linéaire sur $V^\vee$). Ainsi, la courbe Y a un point triple au point de $\mathbb{P}^{3\vee}$ dont l'idéal est engendré par le noyau de H. □

Si $E\in\partial\mathbf{I}_3^1$, notons Γ la courbe rationnelle quintique tracée sur $\mathbb{G}$ définie à la proposition 2.2.2.

Proposition 2.3.2. — *La variété des droites bisauteuses de E s'identifie à celle des trisécantes à Y la courbe des plans instables. C'est une courbe de degré* 8 *réunion de Γ et d'une cubique du plan dual de celui de la conique C.*

La courbe Y est le lieu double de la surface réglée définie par Γ et le lieu triple de celle définie par la courbe des droites bisauteuses.

Démonstration. — Une droite L qui passe par le point triple de Y est trisécante à Y (c'est-à-dire vérifie la condition $h^1\mathcal{I}_Y(1)_{|L}>0$) si elle recoupe Y ou est tangente à Y au point triple. Les trisécantes à Y passant par le point triple forment donc une cubique du plan dual de celui de la conique qui correspond à la projection de Y par rapport à son point triple. De façon générale, les trisécantes à Y sont données par le 0-ième idéal de Fitting Q de $R^1q_*p^*(\mathcal{I}_Y(1))(1)$ (avec la variété d'incidence $\mathbb{F}(2,3;4)$) qui a la résolution suivante :

$$R\otimes K\longrightarrow W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{G}}\longrightarrow Q\to 0.$$

Par ailleurs, les bisauteuses de E sont données (grâce à la variété d'incidence $\mathbb{F}(1,2;4)$) par le 0-ième idéal de Fitting de $R^1q_*p^*E$ qui a la même résolution. Les droites bisauteuses sont donc les trisécantes à la courbe Y des plans instables.

Les droites bisauteuses sont données par le support du conoyau de la flèche suivante : $q_*p^*E''\to q_*p^*\theta(2)$.

Lemme 2.3.3. — *En dehors du plan des droites coupant la conique en deux points, le support $\mathcal{S}$ du conoyau de la flèche $q_*p^*E''\to q_*p^*\theta(2)$ est exactement Γ.*

Démonstration. — Remarquons que le support $\mathcal{S}$ est contenu dans la variété des droites rencontrant C. Fixons une droite L rencontrant C en un seul point x et ℓ son représentant dans $\mathbb{G}$. On a alors

$$q_*p^*\theta(2)_\ell\simeq\theta(2)_L=\theta(2)_x.$$

Le faisceau $\Omega^1(1)_{|L}$ s'identifie à $\mathcal{O}_L(-1)\oplus H^0\mathcal{O}_L(1)\otimes\mathcal{O}_L$. Soit $s:\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)\to\Omega^1(1)$ la section définissant E'' ; on a alors l'équivalence :

L *est isotrope pour* $\omega_{E''}$

$$\iff \textit{la composée } \mathcal{O}_L(-1)\xrightarrow{s_L}\Omega^1(1)_L\longrightarrow\mathcal{O}_L(-1)\ \textit{ est nulle.}$$

Si L n'est pas isotrope, alors la flèche $H^0E''_L \otimes \mathcal{O}_L \to E''_L$ est surjective donc la composée $H^0E''_L \otimes \mathcal{O}_L \to E''_L \to \theta(2)_L \simeq H^0\theta(2)_L$ l'est aussi. Cette droite n'est donc jamais dans $\mathcal{S}$. Le support de $\mathcal{S}$ est donc contenu dans $\mathcal{A}_{E''}$.

Supposons maintenant que L est isotrope. Le faisceau E''_L est alors isomorphe au faisceau $\mathcal{O}_L(-1) \oplus \mathcal{O}_L(1)$ et la flèche $H^0E''_L \to H^0\theta(2)_L$ se factorise par $\mathcal{O}_L(1)$. La droite ℓ est donc dans $\mathcal{S}$ si et seulement si la composée $\mathcal{O}_L(1) \to E''_L \to \theta(2)_L$ est nulle.

Remarquons maintenant que la surface $\mathbb{P}_L(E''_L)$ est isomorphe à la surface F_2 (l'éclatement du cône quadrique en son sommet). La condition précédente signifie que le point $\sigma(x)$ (avec les notations de la proposition 2.2.2) est dans le diviseur exceptionnel ou encore que son image $p(\sigma(x))$ dans $\mathbb{G}$ est ℓ.

Ainsi $\ell \in \mathcal{S}$ si et seulement si $p(\sigma(x)) = \ell$ où $x = L \cap C$, ce qui termine la démonstration puisque $\Gamma = p(\sigma(C))$. □

Retour à la proposition 2.3.2. — La courbe Γ est donc le lieu des trisécantes à Y qui ne passent pas par le point triple. La seconde composante du lieu des droites bisauteuses est alors donnée par les trisécantes qui passent par le point triple, c'est la projection de Y à partir de son point triple. C'est une cubique du plan des droites du plan de C.

Il reste à déterminer le lieu singulier des surfaces réglées. Or si H est un plan stable, nous avons la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_H \longrightarrow E_H(1) \longrightarrow \mathcal{I}_Z(2) \to 0$$

où Z est de longueur 4. Une droite de H est bisauteuse si elle passe par trois points de Z. Il en existe donc au plus une et les plans stables ne sont pas dans le lieu singulier. Si H est instable nous avons la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_H \longrightarrow E_H \longrightarrow \mathcal{I}_Z \to 0$$

avec Z de longueur 3. Les trois droites passant par deux des points de Z sont alors bisauteuses. Les plans instables forment donc le lieu triple de la surface réglée des bisauteuses. De plus, une de ces droites est contenue dans le plan de C (car deux des trois points de Z sont sur la conique) et les deux autres sont sur la surface réglée qui correspond à Γ. □

Remarque 2.3.4. — Notons $\mathfrak{H}^t_{6,3}$ (resp. $\mathfrak{H}^1_{6,3}$) le fermé de $\mathfrak{H}_{6.3}$ (resp. de $\mathfrak{H}^t_{6,3}$) des courbes ayant un point triple (resp. dont la courbe des trisécantes est tracée sur un complexe linéaire de droites). Les variétés $\partial\mathbf{I}^1_3$, $\mathbf{H}^5_5$ et $\mathfrak{H}^1_{6,3}$ sont birationnelles et irréductibles. Les morphismes de $\partial\mathbf{I}^1_3$ vers $\mathbf{H}^5_5$ et $\mathfrak{H}^1_{6,3}$ sont donnés respectivement par les droites bisauteuses et les plans instables d'un faisceau. Les morphismes entre $\mathbf{H}^5_5$ et $\mathfrak{H}^1_{6,3}$ sont donnés dans un sens par le lieu double de la surface et dans l'autre par le lieu des trisécantes ne passant pas par le point triple. Cette dernière correspondance birationnelle est décrite plus en détails dans [15].

3. La famille $\partial \mathbf{I}_3^2$

Nous étudions un ouvert $\mathbf{U}$ de l'espace $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$ qui paramétrise les faisceaux de rang 2 sans torsion semi-stables et de classes de chern $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ et $c_3 = 2$ de $\mathbb{P}^3$. Nous montrons que la donnée d'un faisceau E'' dans $\mathbf{U}$ est équivalente à celle de la surface formée par la réunion de ses droites bisauteuses et nous décrivons géométriquement les surfaces ainsi obtenues.

3.1. Exemple. — Soit Y une courbe de degré 7 et de genre 2 assez générale (notamment lisse et irréductible) et ξ un élément non nul de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}}(\mathcal{I}_Y(4), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$. Il définit une extension dont le terme central est un faisceau $E''(2)$. Le faisceau E'' est réflexif (voir [11]) et $E'' \in M_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$. De plus pour Y assez générale (irréductible, lisse et non contenue dans une cubique), ces faisceaux sont à cohomologie minimale en degrés variant de -2 à 1.

Soit $\mathbf{U}_0$ l'ouvert de $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$ (qui contient les faisceaux de l'exemple) des faisceaux E'' tels que la cohomologie de $E''(-2)$, $E''(-1)$, E'' et $E''(1)$ est naturelle, c'est-à-dire qu'au plus un groupe de cohomologie est non nul. On a alors

$$h^2 E''(-2) = 1, \quad h^1 E''(-1) = 2, \quad h^1 E'' = 3$$

et tous les groupes de cohomologie de $E''(1)$ sont nuls. Cet ouvert $\mathbf{U}_0$ contient des faisceaux réflexifs et des faisceaux sans torsion. Nous décrirons les sous-variétés correspondantes et le lieu singulier des faisceaux sans torsion. Soit E'' dans $\mathbf{U}_0$ et considérons la suite spectrale de Beilinson associée à $E''(1)$ (voir par exemple [13]) :

$$E_1^{p,q} = H^q E''(p+1) \otimes \Omega^{-p}(p) \Longrightarrow E''(1).$$

Nous en déduisons les deux suites exactes

$$(1) \qquad \begin{aligned} &0 \to H^1 E''(-1) \otimes \Omega^2(2) \longrightarrow H^1 E'' \otimes \Omega^1(1) \longrightarrow F \to 0 \\ &0 \to H^2 E''(-2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow F \longrightarrow E''(1) \to 0. \end{aligned}$$

Remarques 3.1.1. — (i) Soit $\mathbf{W}$ la variété des faisceaux F obtenus grâce à une suite exacte du type de (1). Nous montrons (proposition 3.4.1) qu'elle est birationnelle au schéma de Hilbert $\mathfrak{H}_{3,0}$ des cubiques gauches irréductibles. La fibre du morphisme de $\mathbf{U}_0$ vers $\mathbf{W}$ au-dessus de F est un ouvert de $\mathbb{P}(H^0 F(1)^\vee)$ (là où la section est injective). En effet, si $E''(2)$ est le conoyau d'une section de $F(1)$, alors E'' a la cohomologie souhaitée.

(ii) Si E'' est réflexif, alors le faisceau F est localement libre. En effet, soit Z le lieu d'annulation de la section de $F(1)$; nous avons la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_Z(1) \longrightarrow \underline{\mathbf{Ext}}^1(E''(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \longrightarrow \underline{\mathbf{Ext}}^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \to 0,$$

le schéma Z est nécessairement de codimension 3 et dans ce cas sa longueur est donnée par $c_3(F)$ qui vaut ici 2. Or $\underline{\mathbf{Ext}}^1(E''(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$ est aussi de longueur 2 (sa longueur est $c_3(E'')$ voir [11]) et nous voyons que la première flèche est un isomorphisme donc le dernier terme de la suite exacte est nul et F est localement libre.

3.2. Fibrés de Steiner et fibrés de Schwarzenberger. — Nous rappelons brièvement les définitions et les propriétés des fibrés de Steiner et des fibrés de Schwarzenberger [20] que nous utilisons par la suite. Nous les définissons sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ avec $n \geq 2$. Pour plus de détails, voir [2], [20] et [23].

Définition 3.2.1. — *Un fibré vectoriel F de rang n sur $\mathbb{P}^n$ est appelé fibré de Steiner s'il existe un entier $k > 0$ et une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^k(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{n+k} \longrightarrow F \to 0.$$

Soit $\mathbf{Inc}_n$ la variété d'incidence point-hyperplan de $\mathbb{P}^n$, p et q les projections vers $\mathbb{P}^n$ et $\mathbb{P}^{n\vee}$. Soit C_n une courbe rationnelle normale dans $\mathbb{P}^{n\vee}$ et notons $X = q^{-1}(C_n)$. Nous noterons encore p et q les projections vers $\mathbb{P}^n$ et C_n. En suivant [23], notons $\mathcal{O}_{C_n}(m/n)$ le fibré en droites sur C_n de degré m correspondant à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ via l'isomorphisme $\mathbb{P}^1 \simeq C_n$.

Définition 3.2.2. — *Soit $m \in \mathbb{Z}$, on appelle fibré de Schwarzenberger associé à C_n le fibré $F_m(C_n) = p_* q^* \mathcal{O}_{C_n}(m/n)$.*

Proposition 3.2.3. — *Les fibrés de Schwarzenberger $F_m(C_n)$ sont des fibrés de Steiner.*

Démonstration. — Identifions C_n à $\mathbb{P}^1$ et notons S_n la représentation irréductible de dimension $n+1$ de SL_2. On a la résolution suivante de la variété d'incidence X dans $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1$:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1}(-1, -n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{O}_X \to 0.$$

Pour $m > n$, nous pouvons alors calculer une résolution de $F_m(C_n)$:

$$0 \to S_{m-n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow S_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow F_m(C_n) \to 0.$$

Remarquons que si $m < n-1$, le fibré $F_m(C_n)$ est alors isomorphe au faisceau dissocié $S_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus S_{n-m-2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$. Si $m = n-1$, alors $F_m(C_n) \simeq S_{n-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ et si $m = n$, alors $F_m(C_n) \simeq T_{\mathbb{P}^n}(-1)$. □

Nous dirons qu'un hyperplan H est *instable pour un fibré de Steiner F* si $h^0 F^\vee > 0$. On peut alors montrer que (*cf.* [23] pour les deux propositions suivantes) :

Proposition 3.2.4. — *Si $m > n$, la variété des hyperplans instables d'un fibré de Schwarzenberger $F_m(C_n)$ est exactement C_n. Ce n'est plus le cas si $m \leq n$.*

Proposition 3.2.5. — *Un fibré de Steiner dont la variété des plans instables est une courbe rationnelle normale C_n est un fibré de Schwarzenberger.*

Nous décrivons maintenant le lieu d'annulation d'une section d'un fibré de Schwarzenberger. Nous nous limitons au cas $n = 2$. L'espace vectoriel des sections de $F_m(C_2)$ est S_m. Un élément s de S_m définit une section $\mathcal{O}_{C_2} \xrightarrow{s} \mathcal{O}_{C_2}(m/2)$ qui, en appliquant le foncteur q_*p^*, définit un morphisme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to F_m(C_2)$ et donc une section s' de $F_m(C_2)$.

Notons $(x_i)_{1\le i\le m}$ les m points de C_2 où s s'annule. Dans $\mathbb{P}^2$, il existe une conique marquée pour la situation : la conique duale $C_2^\vee$ de C_2. Les m points $(x_i)_{1\le i\le m}$ définissent m droites tangentes à $C_2^\vee$ (c'est ce que nous appelons un *polygone de Poncelet pour* $C_2^\vee$ ou parfois *triplet* si le polygone est un triangle). On a alors (pour plus de détails, voir [2] ou [22]) :

Proposition 3.2.6. — *La section s' s'annule exactement aux $\binom{m}{2}$ sommets du polygone de Poncelet correspondant.*

Nous rappelons maintenant un résulat de [15] qui décrit, dans un plan $\mathbb{P}^2$ muni d'une conique C_0, les différentes positions d'une cubique par rapport à C_0 :

Proposition 3.2.7. — (i) *Une cubique générale de $\mathbb{P}^2$ a deux triangles de Poncelet en relation avec C_0. En dehors de l'ouvert de ces cubiques, on a les deux cas suivants.*

(ii) *Les cubiques ayant un unique triangle de Poncelet en relation avec C_0 forment une hypersurface irréductible de degré* 6.

(iii) *Les cubiques ayant une infinité de triangles de Poncelet en relation avec C_0 forment trois fermés irréductibles de codimension* 3. *La courbe générale de ces fermés est alors irréductible, resp. réunion d'une conique en relation de Poncelet avec C_0 et d'une droite, resp. réunion d'une conique et d'une droite tangente à C_0. Ces fermés sont de degrés respectifs* 5, 30 *et* 12.

3.3. Exemple. — Nous traitons ici en exemple une situation géométrique particulière, associée aux fibrés de Schwarzenberger, et que nous rencontrerons par la suite. Nous identifierons toujours C_n à $\mathbb{P}^1$.

Notons $F^\vee(1)$ le faisceau $F_4(C_3)$. C'est donc un faisceau localement libre de rang 3 sur $\mathbb{P}^3$ qui admet pour résolution

$$0 \to S_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow S_4 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow F^\vee(1) \to 0.$$

Le faisceau $F(1)$ est donc le noyau du morphisme de $S_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)$ dans $S_4 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)$. Le complexe d'Eagon Northcott (voir par exemple [8]) nous donne la suite exacte suivante (on note $\mathcal{O}$ pour $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$)

$$\begin{aligned} 0 \to S_2 \otimes \mathcal{O}(-2) \longrightarrow S_1 \otimes S_4 \otimes \mathcal{O}(-1) \longrightarrow S^2S_3 \otimes \mathcal{O} \\ \longrightarrow S_1 \otimes \mathcal{O}(2) \xrightarrow{u} S_4 \otimes \mathcal{O}(3) \to 0 \end{aligned}$$

où $F(1)$ est le noyau de u.

Par ailleurs, l'espace projectif $\mathbb{P}^3$ (resp. $\mathbb{P}^2$) peut être considéré comme la variété des diviseurs de degré 3 (resp. 2) de C_3. Soit maintenant I la variété d'incidence entre diviseurs de degrés 2 et 3 sur $\mathbb{P}^1$ (cette variété est la restriction de la variété d'incidence point-droite de $\mathbb{P}^3$ au-dessus de la Veronese $\mathcal{V}$ des bisécantes à C_3). Nous noterons p et q les projections vers $\mathbb{P}^3$ et $\mathbb{P}^2$. La variété d'incidence I a la résolution suivante dans $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^3}(-2,-2) \longrightarrow K_{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^3}(0,-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^3} \longrightarrow \mathcal{O}_I \to 0$$

où $K_{\mathcal{V}} = F_3(C_2)^\vee$ sur $\mathbb{P}^2$ (ce faisceau est la restriction du sous-fibré tautologique de $\mathbb{G}$ à la Veronese $\mathcal{V}$). Ce qui donne la résolution

$$0 \to S_2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \to S_1 \otimes S_4 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \to S^2S_3 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to p_*q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3) \to 0.$$

Le faisceau $F(1)$ s'identifie donc au faisceau $q_*p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$. On peut ainsi identifier les sections de $F(1)$ avec les cubiques du plan $\mathbb{P}^2$, ce qui s'écrit $H^0F(1) \simeq S^3S_2$ (après identification de $\mathbb{P}^2$ à $\mathbb{P}(S_2)$).

3.4. Étude des éléments de saut. — Dans la proposition suivante, le faisceau F est donné par un faisceau $E'' \in \mathbf{U}_0$.

Proposition 3.4.1. — *La variété des plans instables de E'' est une cubique gauche C de $\mathbb{P}^{3\vee}$. Si C est irréductible, le dual de F est un fibré de Schwarzenberger associé à C.*

Démonstration. — Les plans instables de E'' sont les plans H tels que $H^0F_H(-1)$ est non nul. Les formules de Bott et la suite exacte (1) montrent que pour tout plan H le groupe $H^2F_H(-1)$ est nul. Les plans instables de E'' sont donc les plans H qui vérifient la condition $h^1F_H(-1) > 1$. Rappelons que l'on note p (resp. q) la projection de $\mathbb{F}(1,2;4)$ vers $\mathbb{P}^3$ (resp. $\mathbb{G}$). La variété des plans instables est donnée par le premier idéal de Fitting du faisceau $R^1q_*p^*F(0,-1)$ qui admet la résolution suivante :

$$0 \to H^1F(-2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{3\vee}}(-1) \xrightarrow{M} H^1F(-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{3\vee}} \longrightarrow R^1q_*p^*F(0,-1) \to 0.$$

Mais on a $H^1F(-2) = H^1E''(-1)$ et $H^1F(-1) = H^1E''$ qui sont de dimensions respectives 2 et 3. Ce premier idéal de Fitting est une cubique gauche sauf si les mineurs de M ont un facteur commun. C'est alors un plan ou une quadrique. Dans ce cas, la flèche de $\Omega^2(2)^2$ dans $\Omega^1(1)^3$ qui définit F n'est plus injective, ce qui ne peut se produire. Le faisceau F est complètement déterminé par cette courbe (elle détermine la suite exacte (1)).

Six cas sont possibles si la cubique n'est pas irréductible (en excluant les matrices qui donnent des surfaces) : la courbe est réunion d'une conique et d'une droite se coupant en un point, ou une chaîne de trois droites, ou trois droites concourantes non coplanaires, ou une droite double et une droite non contenue dans son plan qui la recoupe, ou une droite triple dans un cône quadratique, ou enfin une droite triple donnée par le carré de l'idéal d'une droite (pour la description de ces courbes, voir [17]). Le faisceau F général obtenu dans le cas où C dégénère est alors sans torsion de lieu singulier contenant une droite. L'espace vectoriel $H^0F(1)$ est toujours de dimension 10 et les faisceaux E'' obtenus sont sans torsion et leur lieu singulier contient une droite. Ces faisceaux forment un fermé de codimension 1 de $\mathbf{U}_0$.

Nous nous plaçons dans toute la suite sur l'ouvert $\mathbf{U}$ de $\mathbf{U}_0$ formé des faisceaux dont la courbe des plans instables est une cubique gauche irréductible.

La suite exacte (1) nous permet alors de montrer que tous les groupes de cohomologie $H^q(F^\vee(1) \otimes \Omega^{-p}(-p))$ sont nuls sauf pour $q = 2$ et $p = -2$ ou -3. Ils valent alors respectivement S_4 et S_1. La suite spectrale de Beilinson $H^q(F^\vee(1) \otimes \Omega^{-p}(-p)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(p)$ converge vers $F^\vee(1)$ en degré nul et vers 0 ailleurs. Ceci nous donne la résolution :

$$0 \longrightarrow S_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{u} S_4 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow F^\vee(1) \to 0.$$

Le faisceau $F^\vee(1)$ est donc un fibré de Steiner et ses plans instables sont donnés par C. La proposition 3.2.5 nous permet de dire que $F^\vee(1)$ est le fibré de Schwarzenberger $F_4(C_3)$ associé à $C = C_3$ (on peut également le voir directement sans utiliser ce dernier résultat). □

Rappelons que l'on se place maintenant sur l'ouvert $\mathbf{U}$ de $\mathbf{U}_0$ formé des faisceaux E'' dont la courbe des plans instables du faisceau F associé est une cubique gauche irréductible. Nous étudions maintenant la fibre du morphisme de $\mathbf{U}$ dans $\mathbf{W}$ au-dessus de F, c'est-à-dire les sections de $F(1)$.

Remarques 3.4.2. — (i) L'espace vectoriel $V^\vee$ est isomorphe à S_3. Nous avons donc une identification $\Lambda^2 V = \Lambda^2 S_3 = S^2 S_2$ (voir [7]). La variété des bisécantes à C décrit le plongement de Veronese v de $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(S_2)$ dans $\mathbb{G} \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ d'image $\mathcal{V}$.

Remarquons que l'on a également $\Lambda^2 V = S_4 \oplus S_0$. Le facteur S_0 correspond au complexe linéaire de $\mathbb{G}$ dans lequel la courbe des droites tangentes à C est tracée (ou encore qui contient la Veronese $\mathcal{V}$). La surface recouverte par ces droites est la surface quartique développée de C (voir aussi [15]).

(ii) Nous avons vu dans l'exemple 3.3 que l'espace vectoriel $H^0F(1)$ est isomorphe à S^3S_2 en tant que SL_2-module. Dans $\mathbb{P}(S_2)$, nous avons une conique canonique C_0 dont l'image $v(C_0)$ dans $\mathcal{V}$ est la courbe des tangentes à C. La donnée de la section $s \in H^0F(1) = S^3S_2$ correspond à la donnée d'une cubique X de $\mathbb{P}(S_2)$. La courbe $v(X)$ est alors elliptique de degré 6 sur $\mathcal{V}$. Cette courbe définit (toute courbe de $\mathbb{G}$ définit une surface réglée, pour plus de détails voir [15]) une surface réglée sextique elliptique S dont le modèle non singulier est donné par la restriction du quotient tautologique Q de la grassmanienne à $v(X)$. Le modèle non singulier de la surface duale $S^\vee$ est donné par la restriction de $K^\vee$ à $v(X)$.

(iii) Nous déterminons (proposition 3.5.4) les conditions nécessaires et suffisantes sur l'élément de S^3S_2 (la section de $F(-1)$) pour que le faisceau E'' soit réflexif.

Proposition 3.4.3. — *La variété des droites de saut de $F(-1)$ s'identifie à la Veronese $\mathcal{V}$ des bisécantes à C.*

Démonstration. — La variété d'incidence permet de montrer que les droites sauteuses sont données par le support du faisceau $R^1q_*p^*F(0,-1)$ dont on a une présentation

$$H^1F(-2)\otimes K \xrightarrow{\alpha} H^1F(-1)\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{G}} \longrightarrow R^1q_*p^*F(0,-1)\to 0.$$

Par ailleurs, les bisécantes à C sont données (*cf.* [8]) par le support du faisceau R^1q_*J où J est l'idéal de $p^{-1}C$ dans $\mathbb{F}(2,3;4)$. Or ce faisceau admet la résolution suivante : $S_1\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}(2,3;4)}(-3)\to S_2\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}(2,3;4)}(-2)\to J\to 0$ qui nous donne la présentation

$$S_1\otimes K(-1)\xrightarrow{\beta} S_2\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(-1)\longrightarrow R^1q_*J\to 0.$$

Les flèches $\beta(1)$ et α sont égales et les deux faisceaux ont donc le même idéal de Fitting.

Cette étude permet d'identifier le faisceau $R^1q_*p^*F(0,-1)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)$ au faisceau $R^1q_*J\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(2)$. Ce dernier faisceau est localement libre de rang 1 sur $\mathcal{V}$. En effet, si la droite L coupe C en a points on a $J_L=\mathcal{O}_L(-a)$. Or une cubique gauche a au plus des bisécantes ainsi H^1J_L est non nul si et seulement si L est bisécante à C et alors $h^1J_L=1$. Ainsi le faisceau $R^1q_*J\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(2)$ est inversible sur $\mathcal{V}$. La présentation de R^1q_*J nous permet de dire que $R^1q_*J\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(2)$ s'identifie à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(3)$. □

Proposition 3.4.4. — *La courbe $v(X)$ est la courbe des droites bisauteuses de E''.*

Démonstration. — La courbe des droites bisauteuses de E'' est définie par le 0-ième idéal de Fitting de $R^1q_*p^*E''$. Notons $\mathcal{G}$ le faisceau $R^1q_*p^*F(0,-1)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)$. On a la suite exacte

$$\mathcal{O}_{\mathbf{G}}\xrightarrow{s_0}\mathcal{G}\longrightarrow R^1q_*p^*E''\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(1)\to 0$$

où la flèche s_0 est déduite de la flèche $s:\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}((-1)\to F(-1)$. Nous avons vu à la proposition précédente que le faisceau $\mathcal{G}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(3)$. La flèche qui à s associe s_0 est l'identification entre $H^0F(1)$ et S^3S_2 (*cf.* exemple 3.3). La cubique plane X définie par s est exactement le lieu des zéros de s_0, ce qui montre que les bisauteuses de E'' sont exactement données par $v(X)$. □

3.5. Étude de la surface réglée. — Pour aborder la suite de l'étude de **U**, trois points de vue sont possibles : étudier les différents faisceaux E'' obtenus à partir d'une cubique gauche C et d'une cubique plane X de $\mathbb{P}(S_2)$ ou décrire la position d'une cubique plane X par rapport à une conique fixée (la conique canonique C_0 de $\mathbb{P}(S_2)$) ou encore décrire la surface S (ou $S^\vee$) et notamment préciser son modèle non singulier.

Les questions qui se posent sur E'' sont alors de savoir si E'' est réflexif ou non et de décrire son lieu singulier. Pour la position de X par rapport à C_0, nous avons montré dans [15] que l'on a soit deux, soit un unique, soit une infinité de triplets sur X associés à la conique (sommets d'un triangle de Poncelet tangent à C_0). Enfin la surface $S^\vee$ étant réglée sur une courbe elliptique X, les résultats de Atiyah [1] vont nous permettre de dire que le faisceau $K_X^\vee$, localement libre de rang 2 sur X, est soit somme directe de deux faisceaux inversibles de degrés 3 non isomorphes, soit extension non triviale de deux faisceaux inversibles de degrés 3 isomorphes, soit somme directe de deux faisceaux inversibles de degrés 3 isomorphes.

Nous montrons que ces trois problèmes sont équivalents et que les différents cas se correspondent.

Proposition 3.5.1. — *Le faisceau $K_X^\vee$ est de l'une des deux formes suivantes :*

(i) *somme directe de deux faisceaux inversibles de degré* 3 *;*

(ii) *extension non triviale d'un faisceau inversible de degré* 3 *par lui-même.*

Démonstration. — La restriction de la suite exacte tautologique de $\mathbb{G}$ à $\mathcal{V}$ nous donne :

$$0 \to S_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(-1) \longrightarrow S_3 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \longrightarrow K_{\mathcal{V}}^\vee \to 0$$

Le fibré $K_{\mathcal{V}}^\vee$ est donc un fibré de Schwarzenberger [20].

Le groupe $H^0K_X^\vee(-1)$ est nul : il s'identifie à $H^1K_{\mathcal{V}}^\vee(-4)$ qui est nul. Comme le degré de $K_X^\vee(-1)$ est nul et qu'il n'a pas de section, ce faisceau ne peut être somme directe de deux faisceaux de degrés non nul. Le faisceau $K_X^\vee$ est donc de l'une des deux formes souhaitées (voir [10, th. V.2.15], voir aussi [1]). $\square$

Proposition 3.5.2. — *La variété des quotients inversibles de degré* 3 *de $K_X^\vee$ s'identifie à celle des triplets de points associés à C_0 sur la cubique X.*

Démonstration. — La variété des triplets de points associés à C_0 s'identifie à $\mathbb{P}(H^0(K_{\mathcal{V}}^\vee))^\vee$: les sections s'annulent exactement sur les triplets (*cf.* proposition 3.2.6). Si un triplet Z est sur X, alors la restriction de la section correspondante à X donne une surjection $K_X^\vee \to \mathcal{O}_X(2-Z)$; ce dernier faisceau est inversible de degré 3.

Réciproquement, soit $\mathcal{L}$ un quotient inversible de degré 3 de $K_X^\vee$. Notons $\mathcal{L}'$ le noyau de $K_X^\vee \to \mathcal{L}$ qui est inversible de degré 3. Soit N le noyau de la composée $K_{\mathcal{V}}^{\vee} \to K_X^{\vee} \to \mathcal{L}$. Nous avons la suite exacte

$$0 \to K_{\mathcal{V}}^{\vee}(-3) \longrightarrow N \longrightarrow \mathcal{L}' \to 0.$$

L'espace vectoriel H^0N est le noyau de la flèche de $H^0\mathcal{L}'$ dans $H^1K_{\mathcal{V}}^{\vee}(-3)$. Ces groupes sont de dimension respectives 3 et 2. Le faisceau N a donc au moins une section qui nous définit une section de $K_{\mathcal{V}}^{\vee}$ (donc un triplet Z) et ainsi une surjection $\mathcal{I}_Z(2) \to \mathcal{L}$. La restriction de cette surjection à X nous donne alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{Z\cap X} & \longrightarrow & \mathcal{I}_Z(2)_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_X\big(2-(Z\cap X)\big) & \to & 0. \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \mathcal{L} & & & & \end{array}$$

Comme $\mathcal{L}$ est sans torsion la flèche $\mathcal{O}_{Z\cap X} \to \mathcal{L}$ est nulle. Nous avons donc une flèche surjective de $\mathcal{O}_X(2-(Z\cap X))$ vers $\mathcal{L}$ qui doit être un isomorphisme. Le degré de $\mathcal{O}_X(2-(Z\cap X))$ est $6-\mathrm{Card}(Z\cap X)$ et doit être égal à $\deg(\mathcal{L})$, c'est-à-dire 3. Ceci n'est possible que si Z est contenu dans X, c'est-à-dire si la section correspond à un triplet sur la cubique.

Il nous reste à vérifier que cette section est uniquement déterminée. Si $h^0N \geq 2$ alors nous avons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{O}_{\mathcal{V}}^2 & \longrightarrow & K_{\mathcal{V}}^{\vee} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{C_1}(2) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{L}' & \longrightarrow & K_X^{\vee} & \longrightarrow & \mathcal{L} & \to & 0 \end{array}$$

où C_1 est une conique. Ceci est absurde car $\mathcal{L}$ est localement libre sur la cubique X alors que $\mathcal{O}_{C_1}(2) \to \mathcal{L}$ doit être surjective. $\square$

Remarque 3.5.3. — Cette proposition nous permet de mettre en rapport la proposition 3.5.1 et les résultats de [15]. En effet, nous avons trois cas selon que $K_X^{\vee}$ a deux, un seul ou une infinité de quotients inversibles de degré 3.

Parallèlement, les résultats de [15] décrivent la position des cubiques X dans un plan muni d'une conique C_0 (voir proposition 3.2.7). De la même façon, nous avons sur X deux, un unique ou une infinité de triplets associés à la conique canonique. Chacun des trois cas se correspondent.

La donnée d'un quotient de rang 3 de $K_X^{\vee}$ correspond à la donnée d'une section de la surface $S^{\vee}$. C'est une courbe elliptique de degré 3, c'est-à-dire une cubique plane. Il y a donc selon les cas deux, une unique ou une infinité de cubiques planes tracées sur $S^{\vee}$. L'intersection résiduelle de $S^{\vee}$ et du plan d'une telle cubique est formée de trois génératrices de la surface (les trois points du triplet sur X). De telles cubiques correspondent donc à des points triples de S, il y en a donc deux, un unique ou une infinité.

Nous étudions maintenant le faisceau E'' dans chacun de ces cas. Remarquons qu'un triplet de points associé à C_0 ou encore une section de $K_{\mathcal{V}}^{\vee}$ correspond à un plan H de $\mathbb{P}^{3\vee}$: les trois points de $\mathcal{V}$ sont les trois bisécantes à C

passant par les points de $H \cap C$. Les triplets correspondent donc aux points de $\mathbb{P}^3$. L'incidence point/droite restreinte à $\mathcal{V}$ est de degré 3 au-dessus de $\mathbb{P}^3$. C'est l'incidence I entre diviseurs de degrés 2 et 3 sur $\mathbb{P}^1$ que nous avons décrite dans l'exemple 3.3.

PROPOSITION 3.5.4. — (i) *Un point de $\mathbb{P}^3$ est singulier pour E'' si et seulement si son triplet associé à C_0 est sur la cubique X. Ces points sont aussi le lieu triple de S.*

(ii) *Le faisceau E'' est réflexif si et seulement si X a un nombre fini de triplets associés à C_0.*

Démonstration. — Nous avons vu (exemple 3.3) que le faisceau $p_*q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$ s'identifie à $F(1)$ qui est alors un module inversible sur la $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$-algèbre finie $p_*\mathcal{O}_I$. La flèche de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ dans $F(1)$ est donc nulle si et seulement si celle de $p_*\mathcal{O}_I$ dans $F(1)$ est nulle. Mais alors la section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$ définissant X nous donne le morphisme de $p_*q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ dans $F(1)$ dont le conoyau est $p_*q^*\mathcal{O}_X$ (le support de ce faisceau est la surface S). Le lieu triple de ce dernier faisceau décrit les triplets de points associés à C_0 qui sont sur X. Ce lieu est donc donné par l'annulation de la flèche de $p_*\mathcal{O}_I$ dans $F(1)$, ce qui est équivalent à l'annulation de s. C'est donc le lieu singulier de E''.

Le faisceau E'' étant défini comme le conoyau de $s : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \to F$, il est réflexif si et seulement si son lieu singulier est en codimension 3, c'est-à-dire si et seulement si X a un nombre fini de triplets associés à C_0. □

Nous décrivons dans la proposition suivante le lieu singulier du faisceau E'' lorsqu'il est infini. Ceci a lieu sur trois fermés irréductibles des cubiques planes (*cf.* proposition 3.2.7).

PROPOSITION 3.5.5. — *Si X est une cubique irréductible ayant une infinité de triplets associés à C_0, resp. la réunion d'une droite et d'une conique en relation de Poncelet avec C_0, resp. la réunion d'une conique et d'une droite tangente à C_0 alors le lieu singulier de E'' est une cubique gauche, resp. une droite, resp. une conique.*

Démonstration. — Les points singuliers de E'' sont donnés par les quotients inversibles de rang 3 de $K_X^\vee$. Or on sait que dans ce cas $K_X^\vee = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est inversible de degré 3. Ainsi les seuls quotients possibles sont isomorphes à $\mathcal{L}$ et ces quotients sont donnés par $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}, \mathcal{L})) = \mathbb{P}^1$. Le lieu singulier de E'' est donc une courbe rationnelle de $\mathbb{P}^3$. Son degré est donné par le nombre de points dans un hyperplan, c'est-à-dire par le nombre de triplets tangents en un point fixé de la conique. Le degré est 3, 1 et 2 dans chacun des trois cas considérés. □

Nous résumons les résultats obtenus sur la famille $\mathbf{U}$ dans le théorème suivant. Notons Ψ le morphisme de $\mathbf{U}$ dans $\mathfrak{H}_{3,0}$ qui à un faisceau associe sa courbe des plans instables.

THÉORÈME 3.5.6. — (i) *Le morphisme Ψ est dominant. La fibre de Ψ au-dessus de $C \in \mathfrak{H}_{3,0}$ est un ouvert de $\mathbb{P}(H^0\mathcal{O}_{S^2C}(3)^\vee)$ la famille des cubiques du plan S^2C (dont l'image dans $\mathbb{G}$ est la famille des sextiques elliptiques de la Veronese $\mathcal{V}$ des bisécantes à C).*

(ii) *La sous-variété $\mathbf{U}'$ des faisceaux réflexifs ayant un unique point singulier est une hypersurface irréductible donnée dans chaque fibre par une hypersurface irréductible de degré* 6.

(iii) *Le lieu des faisceaux non réflexifs est réunion de trois fermés irréductibles de codimension* 3 *donnés dans les fibres par des fermés irréductibles de degrés* 5*,* 30 *et* 12.

Démonstration. — Le morphisme Ψ est évidemment dominant : toute courbe irréductible C définit un faisceau F et la fibre est donnée par $\mathbb{P}(H^0F(1))^\vee = \mathbb{P}(H^0\mathcal{O}_{S^2C}(3)^\vee)$. Les autres énoncés sont des conséquences des propositions 3.5.4 et 3.2.7.

Remarquons qu'une fois la cubique gauche fixée, la sextique elliptique $v(X)$ de $v(\mathbb{P}(S_2))$ correspond à une surface $S^\vee$ dans $\mathbb{P}^{3^\vee}$. Cette surface possède deux, une unique ou une infinité de cubiques planes coupant C en trois points (correspondant aux triplets de X). Chacune de ces cubiques planes C' redonne $v(X)$: à un point de C' on associe la bisécante à C passant par ce point. ☐

Notons $\mathfrak{H}^d_{6,3}$ (resp. $\mathfrak{H}^2_{6,3}$) le localement fermé de $\mathfrak{H}_{6,3}$ (resp. $\mathfrak{H}^d_{6,3}$) des courbes réunion d'une cubique gauche irréductible et d'une cubique plane qui se coupent en trois points (resp. dont la surface des trisécantes non contenues dans le plan de la cubique porte une seule cubique plane).

Nous pouvons définir une application rationnelle r de $\mathfrak{H}^d_{6,3}$ vers $\mathbf{U}$: la cubique gauche C définit un point de $\mathfrak{H}_{3,0}$ et la cubique plane détermine une courbe elliptique de degré 6 sur la Veronese $\mathcal{V}$ des bisécantes à C. En effet, à un point de la cubique plane on associe la bisécante à la cubique gauche passant par ce point. Le théorème 3.5.6 nous permet de dire que ceci définit un élément E'' de $\mathbf{U}$. La cubique gauche C est alors la courbe des plans instables de E''.

COROLLAIRE 3.5.7. — *L'application rationnelle r est dominante de degré* 2*. Elle est ramifiée au-dessus de $\mathbf{U}'$. L'image réciproque de $\mathbf{U}'$ est $\mathfrak{H}^2_{6,3}$.*

Démonstration. — Une courbe de la fibre au-dessus de E'' est réunion d'une cubique gauche C et d'une cubique plane C' la rencontrant en trois points. La cubique gauche C est la courbe des plans instables de E''. Soit $S^\vee$ la surface recouverte par les droites bisauteuses de E''. Elle détermine la courbe $v(X)$ tracée dans la variété des bisécantes à C. La courbe C et la surface $S^\vee$ sont donc fixées par E''. La fibre est déterminée par les cubiques planes C' tracées sur $S^\vee$. L'étude prédédente nous permet de dire que génériquement il y a deux telles cubiques et qu'au-dessus de $\mathbf{U}'$ il y en a une unique. La fibre au-dessus des trois composantes du lieu où le faisceau est non réflexif est infinie. □

3.6. Lien avec les instantons de degré 3. — Nous montrons le lien entre la famille $\mathbf{U}$ et les instantons de degré 3. Donnons-nous, pour un faisceau $E'' \in \mathbf{U}'$ dont le lieu singulier est concentré au point P, une flèche surjective vers le faisceau du point $E'' \to \mathcal{O}_P$. Le noyau E est un élément de $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$. Par l'intermédiaire de la variété $\mathbf{F}$, nous déterminons un morphisme canonique $E'' \to \mathcal{O}_P$ dont le noyau est dans le bord de $\mathbf{I}_3$. Ces faisceaux forment une composante irréductible du bord.

Pour construire les déformations nous utilisons les transformations cubo-cubiques. Nous avons vu que que la famille $\partial\mathbf{I}_3^1$ et la famille $\mathbf{U}'$ sont chacune birationnelles à des fermés du schéma de $\mathfrak{H}_{6,3}$. Le morphisme f nous permet de remonter ces courbes en des transformations cubo-cubiques.

Notons $\mathbf{T}_3^t$, $\mathbf{T}_3^1$, $\mathbf{T}_3^d$ et $\mathbf{T}_3^2$ les images réciproques par f de $\mathfrak{H}_{6,3}^t$, $\mathfrak{H}_{6,3}^1$, $\mathfrak{H}_{6,3}^d$ et $\mathfrak{H}_{6,3}^2$.

Proposition 3.6.1. — *Les transformations cubo-cubiques de $\mathbf{T}_3^d$ (resp. $\mathbf{T}_3^2$) sont obtenues comme inverses de celles de $\mathbf{T}_3^t$ (resp. $\mathbf{T}_3^1$). La variété $\mathbf{T}_3^1$ (resp. $\mathbf{T}_3^2$) est l'intersection de $\pi(\mathbf{F})$ avec $\mathbf{T}_3^t$ (resp. $\mathbf{T}_3^d$). Enfin on a $\pi^{-1}(\mathbf{T}_3^1) = \mathbf{F}_3$ et $\pi^{-1}(\mathbf{T}_3^2) = \mathbf{F}_1$.*

Démonstration. — Nous commençons par décrire les résolutions des idéaux des courbes des différentes sous-variétés du schéma de Hilbert.

Lemme 3.6.2. — *Soit $t \in \mathbf{T}_3^t$, il existe des bases de W et de V telles que cette application s'écrive comme une matrice 4×4 (de V dans W) à coefficients dans $R^\vee$ sous la forme suivante*

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

où A est de taille 3×3. De plus, on peut choisir A symétrique si et seulement si $t \in \mathbf{T}_3^1$.

Démonstration. — Soit $t \in \mathbf{T}_3^t$ et soit Y la courbe de $\mathfrak{H}_{6,3}^t$ correspondant à t. Son idéal est résolu par

$$0 \to R \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(-4) \xrightarrow{t} W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(-3) \longrightarrow \mathcal{I}_Y \to 0.$$

Le point triple est donné par le deuxième idéal de Fitting de $\mathcal{I}_Y$ donc par les mineurs 2×2 de la matrice 3×4 (de R dans W) à coefficients dans $V^\vee$. Ils sont tous dans l'idéal engendré par le noyau de $H \in V$ définissant le point triple. Nous avons donc une matrice 4×4 (de V dans W) à coefficients dans $R^\vee$ de la forme voulue. Si une transformation cubo-cubiques peut s'écrire sous cette forme, elle donne évidement une courbe de degré 6 et de genre 3 ayant un point triple.

De plus, la courbe Y est sur un complexe de droites si et seulement si la matrice est la multiplication du modules de Rao d'un faisceau de $\partial\mathbf{I}_3^1$, ce qui nous donne exactement la condition de symétrie (voir le paragraphe précédent : étude de $\partial\mathbf{I}_3^1$). □

LEMME 3.6.3. — *Soit $t \in \mathbf{T}_3^d$, il existe des bases de W et de V telles que cette application s'écrive comme une matrice 4×4 (de V dans W) à coefficients dans $R^\vee$ sous la forme suivante*

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

où D est de taille 3×3. De plus, on peut choisir D symétrique si et seulement si $t \in \mathbf{T}_3^2$.

Démonstration. — Soit $t \in \mathbf{T}_3^d$ et soit Y' la courbe correpondante qui est ACM de degré 6 et de genre 3. Son idéal vérifie

$$0 \to \mathcal{I}_{Y'} \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow \mathcal{L}' \to 0$$

où C est une cubique gauche et $\mathcal{L}'$ est supporté par une cubique plane C' rencontrant C en trois points. Les résolutions de $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{I}_C$ sont

$$0 \to R \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(-4) \to (R \oplus B) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(-3) \xrightarrow{(a,H)} B \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(-2) \to \mathcal{L}' \to 0$$

et

$$0 \to R_0 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(-3) \longrightarrow W_0 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(-2) \longrightarrow \mathcal{I}_C \to 0$$

où R et B sont des espaces vectoriels de dimension 3 et R_0, W_0 sont des espaces vectoriels de dimensions respectives 2 et 3. La flèche de $\mathcal{I}_C$ dans $\mathcal{L}'$ nous définit des flèches de W_0 dans B et de R_0 dans $R \oplus B$. Comme Y' est ACM, on a nécessairement $W_0 \simeq B$. Ceci impose que l'application de R_0 dans $R \oplus B$ est injective. Notons W le conoyau de cette injection, nous avons la résolution de l'idéal $\mathcal{I}_{Y'}$:

$$0 \to R \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(-4) \xrightarrow{M} W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(-3) \longrightarrow \mathcal{I}_{Y'} \to 0.$$

Enfin, comme C n'a pas de composante dans le plan de C', on voit, par restriction à ce plan, que $R_0 \cap B$ est nul dans $R \oplus B$. Ceci nous permet de dire que les flèches $R_0 \to R$ et $W_0 \to W$ sont injectives. En prenant des bases de R_0 et W_0 complétées en des bases de R et de W, la matrice M s'écrit

$$\begin{pmatrix} N & * \\ 0 & H \end{pmatrix}$$

où N est la matrice de la cubique gauche et H est l'équation du plan de C'. Soit V_0 le sous-espace vectoriel de dimension 3 de V qui est le noyau de la forme linéaire $H \in V^\vee$. En prenant un base de V_0 complétée en une base de V on a une matrice de la forme voulue. Dans les notations de l'énoncé, la matrice D représente l'élément de $R^\vee \otimes V_0^\vee \otimes W_0$. Si une transformation cubo-cubique s'écrit sous cette forme elle donne une courbe de $\mathfrak{H}_{6,3}^d$.

La courbe est dans $\mathfrak{H}_{6,3}^2$ s'il y a une unique cubique plane sur la surface des trisécantes. Or nous avons vu que ceci n'est possible que si le faisceau $K(1)_X$ est extension non triviale d'un faisceau $\mathcal{L}$ par lui-même qui est alors une théta-caractéristique (car $\Lambda^2 K(1)_X = \mathcal{O}_X$). La courbe X est la courbe des droites paramétrisant les trisécantes vue dans le plan des bisécantes de C.

De plus, l'application rationnelle du plan de X dans celui de C' qui a une bisécante de C associe son point d'intersection avec le plan de C' est la transformation quadratique associée aux sommets du triangle de Poncelet sur X (c'est-à-dire aux points définis par $\mathcal{L}$). Sa réciproque est la transformation quadratique associée aux points de $C \cap C'$. Cette application induit une bijection de X sur C'. Si $\mathcal{L}'$ est donné par la multiplication

$$R \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_0^\vee)}(-3) \longrightarrow W_0 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_0^\vee)}(-2),$$

alors $\mathcal{L}$ est donné par la multiplication

$$R \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W_0)}(-3) \longrightarrow V_0^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W_0)}(-2).$$

Le faisceau $\mathcal{L}$ étant une théta-caractéristique, il existe un isomorphisme entre $R^\vee$ et $V_0^\vee$ tel que la composée $V_0 \otimes V_0 \to R \otimes V_0 \to W_0$ se factorise par $S^2 V_0$.

Nous utilisons alors le résultat de Barth [2] suivant : si on a trois espaces vectoriels R_0, $V_0^\vee$ et W_0 de dimension 3 et un élément de $R^\vee \otimes V_0^\vee \otimes W_0$ tel qu'il existe un isomorphisme entre $R^\vee$ et $V_0^\vee$ tel que la composée

$$V_0 \otimes V_0 \longrightarrow R \otimes V_0 \longrightarrow W_0$$

se factorise par $S^2 V_0$, alors il existe deux autres isomorphismes entre W_0 et $V_0^\vee$ et entre $R^\vee$ et W_0 tels que l'application $R \to V_0^\vee \otimes V_0^\vee$ (resp. $V_0^\vee \to W_0 \otimes W_0$) se factorise par $S^2 V_0^\vee$ (resp. $S^2 W_0$). Ceci n'est vrai qu'en dimension 3 car alors tous les réseaux de quadriques vérifient la condition α_3 de Barth (*cf.* [2]). Ce résultat nous permet de choisir A symétrique si et seulement si $t \in \mathbf{T}_3^2$. $\square$

Les transformations cubo-cubiques de $\mathbf{T}_3^d$ (resp. $\mathbf{T}_3^2$) sont les inverses de celles de $\mathbf{T}_3^t$ (resp. $\mathbf{T}_3^1$) car elles sont obtenues par échange des rôles de $V^\vee$ et W. De plus, on sait que $\mathbf{T}_3^1$ est l'image de $\mathbf{F}_3$ dans $\mathbf{T}_3^t$ (proposition 2.2.3) ainsi, par échange des rôles, nous voyons que $\mathbf{T}_3^2$ est l'image de $\mathbf{F}_1$ dans $\mathbf{T}_3^d$. Nous avons ici disymétrisé les rôles de W et $V^\vee$ ce qui nous donne la *dualité* entre ces deux cas. $\square$

Rappelons que l'on a défini un morphisme $f : \mathbf{T} \to \mathfrak{H}_{6,3}$ (remarque 1.1.1) ainsi qu'un morphisme $r : \mathfrak{H}_{6,3}^d \to \mathbf{U}$ (corollaire 3.5.7). Soit $\varphi \in \mathbf{T}_3^d$, le lemme 3.6.3 assure l'existence de $\psi \in \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W, V^\vee))$ tel que l'on a un complexe :

$$R \otimes \Omega^2(2) \xrightarrow{\varphi} W \otimes \Omega^1(1) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}.$$

Proposition 3.6.4. — *Ce complexe définit un morphisme h d'un ouvert de $\mathbf{T}_3^d$ vers $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$. Ce morphisme est la composée de $r\circ f$ sur $\mathbf{T}_3^d$. L'image réciproque de $\mathbf{U}'$ est $\mathbf{T}_3^2$.*

Démonstration. — Nous construisons en fait un morphisme vers $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$ à partir d'une variété dominant birationnellement $\mathbf{T}_3^d$, ce qui nous donnera notre morphisme sur un ouvert. Considérons ainsi la sous-variété $\mathbf{F}^1$ de $\mathbf{T}\times\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W,V^\vee))$. Cette variété contient la projection naturelle de $\mathbf{F}_1$ comme une sous-variété de codimension 1. De plus $\mathbf{F}^1$ domine birationnellement $\mathbf{T}_3^d$. En effet, le morphisme de $\mathbf{F}^1$ vers $\mathbf{T}$ est birationnel sur son image (fait 1.4.3) qui est $\mathbf{T}_3^d$ (lemme 3.6.3). Sur $\mathbf{F}^1$, nous avons un complexe universel

$$R\otimes\Omega^2(2)\xrightarrow{\varphi}W\otimes\Omega^1(1)\xrightarrow{\psi}\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$$

qui est injectif sur un ouvert de $\mathbf{F}^1$ et jamais surjectif. Sa cohomologie au centre nous donne un faisceau plat qui décrit un morphisme vers $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$.

Soit $t\in\mathbf{T}_3^d$, son image par f nous donne une courbe Y' de $\mathfrak{H}_{6,3}^d$. Le lemme 3.6.3 nous permet d'écrire le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & 0 \arrow[r] & R_0\otimes\Omega^2(2) \arrow[r]\arrow[d] & W_0\otimes\Omega^1(1) \arrow[r]\arrow[d] & F \arrow[r] & 0\\
 & 0 \arrow[r] & R\otimes\Omega^2(2) \arrow[r]\arrow[d] & W\otimes\Omega^1(1) \arrow[r]\arrow[d] & Q \arrow[r] & 0\\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \arrow[r] & \Omega^2(2) \arrow[r, "v"]\arrow[d] & \Omega^1(1) \arrow[r]\arrow[d] & \mathcal{I}_P \arrow[r] & 0\\
 & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

où le faisceau F est le fibré de Schwarzenberger associé à la cubique gauche (*cf.* proposition 3.4.1) et v est l'équation du plan H de $\mathbb{P}^{3\vee}$ qui correspond à un point P de $\mathbb{P}^3$. Le lemme du serpent nous donne la suite exacte suivante

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)\longrightarrow F\longrightarrow Q\longrightarrow\mathcal{I}_P\to 0.$$

La construction par le complexe nous dit que $E''(1)$ est le noyau de $Q\to\mathcal{I}_P$ alors que nous savons que l'image de r est donnée par le conoyau de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)\to F$. □

Nous calculons maintenant la limite d'une famille d'instantons dont le terme dans $\mathbf{F}$ tend vers un élément t_0 de $\mathbf{F}_1$. Soit donc A un anneau de valuation discrète de corps résiduel k et t_A un A-point de $\mathbf{F}$ dont le point générique t_g est dans $\mathbf{F}_4$ et le point spécial t_0 est assez général dans $\mathbf{F}_1$. Soit $\mathcal{E}$ la famille plate obtenue à partir de t_A et du morphisme g.

Proposition 3.6.5. — *Le bidual E'' du faisceau limite E de $\mathcal{E}$ est le faisceau de $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$ donné par $h\circ\pi(t_0)$.*

Démonstration. — On construit la monade $R\otimes\Omega^2(2)_A \to W\otimes\Omega^1(1)_A \to \mathcal{I}_{A,P}$ (où $\mathcal{I}_{A,P}$ est l'idéal dans $\mathbb{P}^3_A$ du point $P \in \mathbb{P}^3_k$) obtenue à partir du point t_A. Le faisceau $\mathcal{E}$ est la cohomologie au centre de cette monade. Les hypothèses de généricité nous permettent de dire que la première flèche horizontale est injective même au point spécial ce qui nous permet de conclure à la platitude de $\mathcal{E}$. La monade au point spécial est

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to R\otimes\Omega^2(2) & \longrightarrow & K & \longrightarrow & E(1) \to 0 \\
\| & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to R\otimes\Omega^2(2) & \longrightarrow & W\otimes\Omega^1(1) & \longrightarrow & Q \;\to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathcal{L} & = & \mathcal{L} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0
\end{array}$$

où $\mathcal{L}$ est une extension de $\mathcal{I}_P$ par $\mathcal{O}_P$. Le bidual de $E(1)$ est évidement donné par le noyau de la flèche $Q \to \mathcal{I}_P$ déduite de $Q \to \mathcal{L}$, ce qui nous dit qu'il est donné par $h\circ\pi(t_0)$.

Remarquons que le faisceau $\mathcal{L}$ est une extension triviale, c'est-à-dire qu'il est isomorphe à $\mathcal{I}_P \oplus \mathcal{O}_P$. En effet, cette extension est donnée par $\mathcal{I}_{A,P}\otimes k$. $\square$

Soit $E'' \in \mathbf{U}$, soient φ et ψ au-dessus de E'' dans $\mathbf{F}^1$. Ces morphismes correspondent au choix d'un élément dans la fibre de r (il y a *a priori* deux choix, mais si $E'' \in \mathbf{U}'$, il n'y aura pas d'ambiguité) puis d'un élément de $\mathrm{PGL}(R)\times\mathrm{PGL}(W)$. Soit Q le conoyau de la flèche $R\otimes\Omega^2(2) \xrightarrow{\varphi} W\otimes\Omega^1(1)$. Le faisceau E'' est le noyau de la surjection $Q \to \mathcal{I}_P$ déduite de ψ. Nous avons donc une flèche $\mathrm{Hom}(E'',\mathcal{O}_P) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_P,\mathcal{O}_P)$. La proposition précédente nous dit que, pour qu'il existe une flèche s de E'' dans $\mathcal{O}_P$ dont le noyau est un faisceau du bord de $\mathbf{I}_3$, il faut que l'image de s dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_P,\mathcal{O}_P)$ soit nulle. Notons (*) cette condition.

PROPOSITION 3.6.6. — *Un faisceau $E'' \in \mathbf{U}$ vérifie la condition* (*) *si et seulement si $E'' \in \overline{\mathbf{U}}'$. Sur $\mathbf{U}'$, il existe un unique élément de* $\mathrm{Hom}(E'',\mathcal{O}_P)$ *nul dans* $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_P,\mathcal{O}_P)$. *Cet élément définit un morphisme α de $\mathbf{U}'$ dans* $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$ *birationnel sur son image.*

Démonstration. — Le faisceau E'' est le noyau de la surjection $Q \to \mathcal{I}_P$ déduite de ψ. Le point P détermine un sous-espace vectoriel V_0 de dimension 3 de V et ψ détermine un sous-espace vectoriel $W_0 = \mathrm{Ker}\psi$ de dimension 3 de W et un quotient W_1 de rang 1. On a la suite exacte

$$0 \to V_0^\vee \longrightarrow \mathrm{Hom}(Q,\mathcal{O}_P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E'',\mathcal{O}_P) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_P,\mathcal{O}_P).$$

Nous allons montrer que selon que ψ' existe ou non (*i.e.* selon que $E'' \in \overline{\mathbf{U}}'$ ou non), l'espace $\mathrm{Hom}(Q, \mathcal{O}_P)$ est de dimension 4 ou 3 et qu'ainsi il existe ou non un élément de $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(E'', \mathcal{O}_P))$ qui donne une extension triviale de $\mathcal{I}_P$ par $\mathcal{O}_P$.

La définition de Q nous permet de donner la suite exacte suivante

$$0 \to \mathrm{Hom}(Q, \mathcal{O}_P) \longrightarrow W^\vee \otimes V_0^\vee \longrightarrow R^\vee \otimes V_0 \to \mathrm{Ext}^1(Q, \mathcal{O}_P) \to 0$$

où la flèche centrale est la composée

$$W^\vee \otimes V_0^\vee \xrightarrow{\varphi} R^\vee \otimes V^\vee \otimes V_0^\vee \to R^\vee \otimes V_0^\vee \otimes V_0^\vee \to R^\vee \otimes \Lambda^2 V_0^\vee \to R^\vee \otimes V_0.$$

L'espace vectoriel $W_1^\vee \otimes V_0^\vee$ est donc contenu dans $\mathrm{Hom}(Q, \mathcal{O}_P)$. Pour savoir si le noyau est réduit à cet espace ou est de dimension supérieure à trois, il faut étudier la flèche réduite qui est la composée

$$W_0^\vee \otimes V_0^\vee \longrightarrow R^\vee \otimes V_0^\vee \otimes V_0^\vee \longrightarrow R^\vee \otimes \Lambda^2 V_0^\vee \longrightarrow R^\vee \otimes V_0.$$

Cette flèche est non bijective si l'image de $W_0^\vee \otimes V_0^\vee$ dans $R^\vee \otimes V_0^\vee \otimes V_0^\vee$ rencontre $R^\vee \otimes S^2 V_0^\vee$, c'est-à-dire exactement si on peut trouver un morphisme de W_0 dans $V_0^\vee$ qui rend la flèche φ symétrique. Ceci est exactement la condition d'appartenance à $\overline{\mathbf{U}}'$. Si le faisceau E est dans l'image de α, alors on retrouve E'' qui est le bidual de E.

Remarquons que si on est dans un des trois fermés de codimension 3 de $\mathbf{U}$ pour lesquels E'' est non réflexif, alors le choix du morphisme de E'' dans $\mathcal{O}_P$ n'est plus canonique (on a un $\mathbb{P}^1$ d'éléments qui donnent une extension triviale de $\mathcal{I}_P$ par $\mathcal{O}_P$). Le morphisme α n'est donc pas défini sur ces fermés. □

Nous montrons enfin que le morphisme obtenu par composition de $h \circ \pi$ de $\mathbf{F}_1$ dans $\mathbf{U}'$ avec α définit un morphisme de $\mathbf{F}_1$ dans $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$ qui prolonge g sur $\mathbf{F}_1$. Pour ceci, nous montrons que pour toute famille d'instantons $\mathcal{E}$ construite comme pour la proposition 3.6.5, la limite E est l'image de t_0 par $\alpha \circ h \circ \pi$.

Corollaire 3.6.7. — *L'image de $\mathbf{F}_1$ par $\alpha \circ h \circ \pi$ est une variété irréductible $\partial \mathbf{I}_3^2$ de $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$ qui est dans le bord de $\mathbf{I}_3$. Ce morphisme prolonge le morphisme g sur $\mathbf{F}_1$.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{E}$ une famille d'instantons construite comme pour la proposition 3.6.5. Soit E le faisceau limite et E'' son bidual. Nous avons vu que E'' est $h \circ \pi(t_0)$ et que E est le noyau d'une flèche $s \in \mathrm{Hom}(E'', \mathcal{O}_P)$ qui s'annule dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_P, \mathcal{O}_P)$. Mais alors ceci impose (proposition 3.6.6) que $E'' \in \mathbf{U}'$ (car t_0 est assez général) et que le faisceau E est exactement $\alpha(E'')$.

Réciproquement, si E est général dans l'image de α, alors son bidual E'' est général dans $\mathbf{U}'$ et l'élément t_0 correspondant peut être choisit général. Nous pouvons alors construire la déformation comme pour la proposition 3.6.5 dont la limite est E.

Remarquons que ce morphisme est défini par un faisceau universel sur $\mathbf{F}_1$. En effet sur $\mathbf{F}_1$, le morphisme $h \circ \pi$ à valeur dans $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$ est défini par le faisceau universel $\mathbf{E}''$ donné sur $\mathbf{F}_1 \times \mathbb{P}^3$ par la cohomologie au centre du complexe

$$R \otimes \Omega^2(2) \longrightarrow W \otimes \Omega^1(1) \longrightarrow \mathcal{O}.$$

Au-dessus du localement fermé $\mathbf{U}'$ de $\mathbf{U}$, si on note Z le fermé $\mathbf{U}' \times \mathbb{P}^3$ défini par le lieu singulier, le noyau de la flèche de fibrés $\mathcal{H}om(\mathbf{E}'', \mathcal{O}_Z) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_Z)$ est inversible. Ce faisceau nous donne une section de $\mathbf{U}'$ dans le fibré $\mathcal{H}om(\mathbf{E}'', \mathcal{O}_Z)$ et le noyau $\mathbf{E}$ de la flèche universelle $\mathbf{E}'' \to \mathcal{O}_Z$ est le faisceau recherché. $\square$

Remarque 3.6.8. — Nous décrivons ici plus précisément la conjecture de L. Gruson et G. Trautmann. Nous donnons également quelques résultats complémentaires sur cette conjecture.

La conjecture affirme que tous les faisceaux E du bord de $\mathbf{I}_3$ sont sans torsion non localement libres. Deux cas se présentent selon que le bidual E'' du faisceau E est localement libre ou non. Dans le premier cas (type 1), le lieu singulier de E est une courbe de degré inférieur ou égal à 3. Dans le second cas (type 2), le bidual est seulement réflexif et on conjecture que le lieu singulier d'un faisceau général E est concentré en un point. Le bord de $\mathbf{I}_3$ aurait alors quatre composantes de chaque type.

Les courbes associées aux faisceaux de type 1 seraient : une droite, une cubique gauche (ces deux cas apparaissent dans [9]), une conique (c'est le cas de $\partial\mathbf{I}_3^1$ que nous traitons ici) et une cubique plane (ce cas peut être obtenu par « déformation par homothétie » voir la prépublication math.AG/0112199 de l'auteur).

Les quatres composantes de type 2 correspondraient à des faisceaux réflexifs de troisième classe de Chern vallant 2, 4, 6 ou 8. Nous traitons ici le cas $c_3 = 2$ (variété $\partial\mathbf{I}_3^2$). Des faisceaux appartenant aux cas $c_3 = 4$ ou 6 peuvent être obtenus par « déformation de courbes ».

Concernant la conjecture de L. Gruson et G. Trautman sur le bord de $\mathbf{I}_3$, nous savons construire sept composantes irréductibles en codimension 1 sur les huit prédites. L'existence de la composante du second type correspondant à $c_3 = 6$ est plus incertaine : nous savons construire des familles de tels faisceaux mais qui sont en codimension au moins 2.

4. Quelques situations géométriques associées

Nous décrivons dans ce paragraphe deux applications géométriques des résultats précédents. Nous donnons une paramétrisation de l'espace des modules des courbes de degré 7 et de genre 2. Nous exhibons une famille $\mathfrak{I}$ de dimension 36 d'involutions birationnelles de $\mathbb{P}^3$ et nous donnons une représentation birationnelle de cette famille.

4.1. Espace des modules des courbes de degré 7 et de genre 2

Notons $\mathfrak{H}_{7,2}$ le schéma de Hilbert des courbes de degré 7 et de genre 2 de $\mathbb{P}^3$. Nous avons vu dans l'exemple 3.1 que si Y est une courbe de degré 7 et de genre 2 irréductible et lisse alors le groupe

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}}\big(\mathcal{I}_Y(2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)\big) = H^0\omega_Y$$

est de dimension 2. Ainsi il existe un pinceau d'extensions non nulles. Chacune de ces extensions donne un faisceau $E'' \in \mathbf{U}_0$ qui est réflexif. La remarque 3.1.1 nous permet alors de dire que le faisceau F déduit de E'' grâce à la suite spectrale de Beilinson est localement libre et donc associé à une cubique gauche irréductible C (proposition 3.4.1). Le faisceau E'' est alors dans l'ouvert $\mathbf{U}$. La flèche naturelle de $F(1)$ dans $\mathcal{I}_Y(4)$ (qui se factorise par $E''(2)$) nous donne la suite exacte

$$(**)\qquad 0 \to \mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow F(1) \longrightarrow \mathcal{I}_Y(4) \to 0.$$

Cette construction est indépendante du choix de l'extension et nous permet de définir un morphisme Φ de $\mathfrak{H}_{7,2}$ dans $\mathfrak{H}_{3,0}$ le schéma de Hilbert des cubiques gauches irréductibles qui a la courbe Y associe la cubique gauche C qui définit F.

Proposition 4.1.1. — *La fibre de Φ au-dessus d'une courbe $C \in \mathfrak{H}_{3,0}$ est birationnellement isomorphe à $\mathbb{G}(2, H^0\mathcal{O}_{S^2C}(3))$ la variété des pinceaux de cubiques du plan S^2C.*

Démonstration. — Soit donc $C \in \mathfrak{H}_{3,0}$. La donnée de $Y \in \mathfrak{H}_{7,2}$ au-dessus de C nous permet de définir un élément de $\mathbb{G}(2, H^0\mathcal{O}_{S^2C}(3))$ grâce à la suite exacte (**). Réciproquement, soit un morphisme $\mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^3} \to F(1)$ donné par un élément de $\mathbb{G}(2, H^0\mathcal{O}_{S^2C}(3))$. Fixons un point de ce pinceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to F(1)$. Le conoyau est alors un faisceau $E'' \in \mathbf{U}$ et on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow E''(2) \longrightarrow \mathcal{I}_Y(4) \to 0$$

qui définit une courbe Y de degré 7 et de genre 2 qui est indépendente du point du pinceau fixé. Le faisceau $E''(2)$ est régulier au sens de Castelnuovo-Mumford et pour un pinceau général, la courbe Y est lisse. □

Remarque 4.1.2. — L'espace des modules des courbes de degré 7 et de genre 2 de $\mathbb{P}^3$ est le quotient par PGL_4 de $\mathfrak{H}_{7,2}$. Le schéma $\mathfrak{H}_{3,0}$ n'a qu'une orbite sous PGL_4 (il est isomorphe au quotient $\mathrm{PGL}_4 / \mathrm{PGL}_2$), donc l'espace des modules est birationnellement isomorphe au quotient par PGL_2 de la variété $\mathbb{G}(2, S^3S_2)$ des pinceaux de cubiques du plan $\mathbb{P}(S_2)$.

Nous pouvons à partir du pinceau retrouver le modèle non singulier de la courbe : nous avons une droite $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}(S^3S_2)$, la courbe Y est un revêtement double au-dessus. En effet, si nous choisissons un point de $\mathbb{P}^1$, c'est-à-dire une section de $F(1)$, elle détermine $E''(2)$ et donc deux points de Y donnés par les deux points singuliers de E''. Ce sont les deux points où la section de ω_Y définissant E'' s'annule. Quand on fait varier le point de $\mathbb{P}^1$, on fait varier le faisceau E'' c'est-à-dire l'élément de $H^0\omega_Y$. On recouvre de cette façon tout Y. Le revêtement double de Y au-dessus de $\mathbb{P}^1$ est donné par le $\mathbf{g}_2^1$ défini par ω_Y. Les points de ramification de ce morphisme apparaissent quand la section de ω_Y s'annule doublement en un point. Ceci correspond exactement aux faisceaux de $\mathbf{U}'$ ou encore aux cubiques ayant un unique triplet associé à la conique canonique. L'image des points de ramification est donc formée par l'intersection du pinceau $\mathbb{P}^1$ avec la variété des cubiques ayant un unique triplet. La formule d'Hürwitz nous permet de retrouver le fait que le degré de cette dernière variété est 6. La courbe abstraite paramétrisant Y est le revêtement double de $\mathbb{P}^1$ ramifié aux 6 points d'intersection du pinceau et de cette variété.

4.2. Involutions birationnelles de $\mathbb{P}^3$. — Les involutions du plan projectif $\mathbb{P}^2$ sont géométriquement connues depuis longtemps (voir par exemple [4]) mais la preuve rigoureuse de leur classification est plus récente. A. Beauville et L. Bayle [3] ont donné une preuve simplifiée de ce résultat en utilisant la théorie de Mori. Dans $\mathbb{P}^3$, il ne semble pas qu'il existe, comme dans le cas de $\mathbb{P}^2$, une classification des involutions birationnelles. Je décris ci-dessous une famille de telles involutions.

FAIT 4.2.1. — *Toute courbe de degré* 9 *et de genre* 6 *définit une involution birationnelle de* $\mathbb{P}^3$. *La famille d'involutions* $\mathfrak{I}$ *ainsi construite est birationnelle au schéma* $\mathfrak{H}_{9,6}$ *des courbes de degré* 9 *et de genre* 6.

Démonstration. — Considérons une courbe X de degré 9 et de genre 6 générale, elle est toujours sur quatre quartiques (*i.e.* $H^0\mathcal{I}_X(4)$ est de dimension 4). Prenons trois de ces quartiques, l'intersection résiduelle à X est formée de deux points. Nous décrivons ainsi une famille de dimension 3 (birationnelle à $\mathbb{P}(H^0\mathcal{I}_X(4))$ ce qui définit une involution.

La courbe de degré 9 et de genre 6 est le lieu où l'involution n'est pas définie. Le schéma de Hilbert $\mathfrak{H}_{9,6}$ des courbes de degré 9 et de genre 6 paramétrise donc birationnellement cette famille d'involutions. Nous voyons ainsi apparaitre une famille à 36 paramètres d'involutions de $\mathbb{P}^3$. □

REMARQUES 4.2.2. — (i) Ces involutions sont liées à notre situation de la façon suivante : prenons deux quartiques contenant X (*i.e.* un sous-espace vectoriel U de dimension 2 de $H^0\mathcal{I}_X(4)$), l'intersection résiduelle est une courbe Y de degré 7 et de genre 2. Lorsqu'on fait varier une troisième quartique dans le pinceau $\mathbb{P}(H^0\mathcal{I}_X(4)/U)$, celle-ci découpe sur Y un $\mathbf{g}_2^1$ qui détermine exactement le revêtement double de Y au-dessus de $\mathbb{P}^1$ défini au paragraphe précédent.

(ii) Le quotient de $\mathbb{P}^3$ par une involution de la famille $\mathfrak{I}$ est rationnel. Il est birationnel à $\mathbb{P}(H^0\mathcal{I}_X(4))$: si P est un point de $\mathbb{P}^3$ en dehors de X, alors on lui associe l'ensemble des quartiques contenant X et P qui est un sous-espace de codimension 1 de $H^0\mathcal{I}_X(4)$. Réciproquement, un sous-espace de dimension 3 de $H^0\mathcal{I}_X(4)$ détermine deux points points de $\mathbb{P}^3$ comme intersection résiduelle de X.

Nous allons maintenant décrire birationnellement cette famille d'involutions modulo PGL_4 ou encore l'espace des modules des courbes de degré 9 et de genre 6 de $\mathbb{P}^3$.

Soit X une courbe de degré 9 et de genre 6 de $\mathbb{P}^3$. Nous lui associons une cubique gauche C de $\mathbb{P}^{3\vee}$: l'ensemble des plans H tels que $X \cap H$ est formé de neuf points situés sur un pinceau de cubiques est une cubique gauche C de $\mathbb{P}^{3\vee}$. Ceci nous permet de définir un morphisme $\mathbf{\Psi}$ de $\mathfrak{H}_{9,6}$ vers $\mathfrak{H}_{3,0}$.

Proposition 4.2.3. — *La fibre du morphisme $\mathbf{\Psi}$ au-dessus d'une courbe $C \in \mathfrak{H}_{3,0}$ est isomorphe à $\mathbb{G}(4, H^0\mathcal{O}_{S^2C}(3))$, la variété des sous-espaces de dimension 4 de cubiques du plan S^2C.*

Démonstration. — À une cubique gauche C nous pouvons associer le fibré de Schwarzenberger F et réciproquement (*cf.* proposition 3.4.1). Nous avons vu qu'alors $V^\vee$ s'identifie à S_3 et $H^0F(1)$ à S^3S_2 (c'est-à-dire les cubiques du plan S^2C). Prenons un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $H^0F(1)$. Nous pouvons former la flèche suivante $F^\vee(-5) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^4$ dont le conoyau est l'idéal $\mathcal{I}_X$ d'une courbe de degré 9 et de genre 6.

Réciproquement, si X est une courbe de degré 9 et de genre 6 de $\mathbb{P}^3$, nous avons la résolution

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-7)^2 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-6)^5 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^4 \longrightarrow \mathcal{I}_X.$$

Nous pouvons alors considérer le faisceau $F^\vee(-4)$ conoyau de la première flèche. C'est un fibré de Schwarzenberger $F_4(C_3)$ associé à la cubique gauche $C = C_3$ de $\mathbb{P}^{3\vee}$ définie par l'ensemble des plans H tels que $X \cap H$ est formé de neuf points situé sur un pinceau de cubiques. $\square$

Remarque 4.2.4. — Les transformations cubo-cubiques associées aux instantons sont involutives. Elles définissent donc également des involutions birationnelles de $\mathbb{P}^3$. Considérons un réseau R de quadriques. Soit P un point de $\mathbb{P}^3$; son image par l'involution est le point P' orthogonal à P pour toutes les formes quadratiques du réseau R. Si L est la droite qui joint P à P', alors le réseau R se restreint sur L en une famille de dimension 2 de formes quadratiques (sinon il n'existe pas de point P' sur L qui est orthogonal à P pour toutes les formes quadratiques. Ceci signifie que la droite L est contenue dans au moins une quadrique du réseau.

Réciproquement, si L une droite contenue dans une quadrique du réseau, la restriction de R à L définit un pinceau de formes quadratiques. L'othogonal de ce pinceau est une forme quadratique qui a deux points isotropes. Ils sont reliés par l'involution.

Nous avons donc montré que *le quotient de* $\mathbb{P}^3$ *par l'involution associée à* R *est la variété des droites contenue dans une des quadriques de* R*. C'est un complexe cubique de droites.*

On peut facilement vérifier que ce complexe cubique de droites est un fibré en coniques (toutes non singulières) au-dessus d'une surface de Del Pezzo de degré 2 (revêtement double du plan $\mathbb{P}(R)$ ramifié au-dessus de la quartique correspondant aux cônes). Ce fibré en coniques ne semble pas avoir de section ; je ne sais pas s'il est rationnel ou seulement unirationnel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Atiyah (M.F.) – *Vector bundles over an elliptic curve*, Proc. Lond. Math. Soc., t. **(3) VII** (1957), pp. 414–452.

[2] Barth (W.) – *Moduli of vector bundles on the projective plane*, Invent. Math., t. **42** (1977), pp. 63–91.

[3] Bayle (L.) & Beauville (A.) – *Birational involutions of* $\mathbb{P}_2$*. Kodaira's issue*, Asian J. Math., t. **4** (2000), no. 1, pp. 11–17.

[4] Bertini (E.) – *Ricerche sulle transformazioni univoche involutorie nel piano*, Annali di Mat., t. **8** (1877), pp. 224–286.

[5] Ellingsrud (G.) & Strømme (S.A.) – *Stable rank-2 vector bundles on* $\mathbb{P}^3$ *with* $c_1 = 0$ *and* $c_2 = 3$, Math. Ann., t. **255** (1981), pp. 123–135.

[6] ———, *On the Chow ring of a geometric quotient*, Ann. of Math., t. **130** (1989), no. 1, pp. 159–187.

[7] Fulton (W.) & Harris (J.) – *Representation Theory*, Graduate Text in Math., vol. 129, Springer Verlag, 1991.

[8] Gruson (L.) & Peskine (C.) – *Courbes de l'espace projectif : variétés de sécantes*, Enumerative Geometry and Classical Algebraic Geometry, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

[9] Gruson (L.) & Skiti (M.) – *3-instantons et réseaux de quadriques*, Math. Ann., t. **298** (1994), pp. 253–273.

[10] Hartshorne (R.) – *Algebraic Geometry*, Graduate Text in Math., vol. 52, Springer Verlag, 1977.

[11] ———, *Stable Reflexives Sheaves*, Math. Ann., t. **254** (1980), pp. 121–176.

[12] Narasimhan (M.S.) & Trautmann (G.) – *Compactification of* $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0, 2)$ *and Poncelet pairs of conics*, Pacific J. Math., t. **145** (1990), no. 2, pp. 255–365.

[13] Okonek (C.), Schneider (M.) & Spindler (H.) – *Vector bundles on complex projective spaces*, Progress in Math., Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1980.

[14] Perrin (N.) – *Courbes rationnelles sur les variétés homogènes*, à paraître aux Ann. Inst. Fourier, 2002 ; prépublication : math.AG/0003199.

[15] ———, *Lieu singulier des surfaces rationnelles*, à paraître dans Math. Zeit., 2002 ; prépublication : math.AG/0101083.

[16] ———, *Une composante du bord des instantons de degré* 3, C. R. Acad. Sci. Paris, série I Math., t. **330** (2000), no. 3, pp. 217–220.

[17] Rao (P.A.) – *A family of vector bundles on* $\mathbb{P}^3$, Lecture Note in Math., vol. 1266, Springer Verlag, 1985.

[18] Rosenlicht (M.) – *A remark on quotient spaces*, Ann. Acad. Brasil. Ci., t. **35** (1963), pp. 487–489.

[19] Roth (L.) & Semple (J.G.) – *Introduction to Algebraic Geometry*, Oxford Science Publications, 1949.

[20] Schwarzenberger (R.L.E.) – *Vector bundles on the projective plane*, Proc. London Math. Soc., t. **(3) 11** (1961), pp. 623–640.

[21] Skiti (M.) – *Espace de module des fibrés vectoriels et groupe de Picard*, en préparation.

[22] Trautmann (G.) – *Poncelet curves and associated theta characteristics*, Exposition. Math., t. **6** (1988), no. 1, pp. 29–64.

[23] Vallès (J.) – *Nombre maximal d'hyperplans instables pour un fibré de Steiner*, Math. Zeit., t. **233** (2000), pp. 507–514.