BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN D'ALMEIDA

Une involution sur un espace de modules de fibrés instantons

Bulletin de la S. M. F., tome 128, n° 4 (2000), p. 577-584
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_2000__128_4_577_0>

Bull. Soc. math. France,
128, 2000, p. 577–584.

UNE INVOLUTION SUR UN ESPACE DE MODULES DE FIBRÉS INSTANTONS

PAR JEAN D'ALMEIDA (*)

RÉSUMÉ. — On décrit une involution sur un ouvert de Zariski de l'espace des modules des fibrés instantons de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 4$. On en déduit la construction d'une famille de surfaces K_3 elliptiques admettant deux morphismes surjectifs distincts vers la droite projective. Ce sont des surfaces quartiques lisses de $\mathbb{P}^3$ munies d'un morphisme de degré 32 vers $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$!

ABSTRACT. — AN INVOLUTION ON A MODULI SPACE OF INSTANTON BUNDLES. — We describe an involution on the moduli space of instanton bundles with Chern classes $c_1 = 0$, $c_2 = 4$. We use this involution to construct elliptic K_3 surfaces with two surjective morphisms to the projective line.

1. Description de l'involution

Un *fibré instanton* E est un fibré vectoriel algébrique de rang 2 sur $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ tel que

$$c_1(E) = 0, \quad h^1\big(E(-2)\big) = 0, \quad h^0(E) = 0,$$

c_i désignant la i-ème classe de Chern et h^i la dimension du i-ème groupe de cohomologie. L'espace des modules des fibrés instantons de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 4$ est une variété quasi-projective irréductible (*cf.* [B]) et lisse (*cf.* [LP]) de dimension 29. Pour un tel fibré on a $h^0(E(i)) = 0$ pour $i \leq 0$ et donc $h^3(E(i)) = 0$ pour $i \geq -4$ par dualité de Serre. Le théorème de Riemann-Roch s'écrit alors

$$h^2\big(E(i)\big) - h^1\big(E(i)\big) = \frac{1}{3}(i+1)(i+2)(i+3) - c_2(i+2), \quad -4 \leq i \leq 0.$$

(*) Texe recu le 14 septembre 1999, accepté le 27 octobre 1999.
J. D'ALMEIDA, UFR de Mathématiques, UMR AGAT CNRS, Université des Sciences et Technologies de Lille, 59665 Villeneuve d'Ascq CEDEX (France). Email : dalmeida@agat.univ-lille1.fr.
Mots clés : espace de modules, fibrés instantons, surface K_3, surfaces elliptiques

Classification mathématique par matières : 14F05, 14J27, 14J28, 14M12.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/2000/577/\$ 5.00

On a donc

$$h^2\big(E(-2)\big) = h^1\big(E(-2)\big) = 0.$$

On peut obtenir un fibré de ce type en partant d'une courbe elliptique lisse connexe de degré 8 assez générale de $\mathbb{P}^3$ en effectuant la construction de Serre [H]. On supposera en particulier que la courbe n'est pas tracée sur une surface cubique et qu'elle n'a pas de quintisécante. Le schéma de Hilbert paramétrant les courbes lisses de degré 8 et de genre 1 de $\mathbb{P}^3$ est irréductible et la courbe générique a les propriétés indiquées.

Soit J_X le faisceau d'idéaux définissant la courbe dans $\mathbb{P}^3$. On a une suite exacte

$$0 \to O_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow E(2) \longrightarrow J_X(4) \to 0.$$

Le fibré ainsi obtenu est stable et vérifie

$$h^1\big(E(-2)\big) = 0, \quad h^1\big(E(-1)\big) = 4, \quad h^1(E) = 6,$$
$$h^1\big(E(1)\big) = 4, \quad h^1\big(E(2)\big) = h^1\big(J_X(4)\big) = 0.$$

Seule la dernière égalité est non triviale. Elle résulte du fait que la courbe ne contient pas six points alignés [A].

Les fibrés ainsi construits constituent un ouvert de Zariski U de l'espace des modules des fibrés instantons de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 4$.

THÉORÈME 1. — *Il existe sur l'ouvert U une involution sans point fixe $E \to E^t$ telle qu'on ait une suite exacte*

$$0 \to E^t(-2) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^3}^4 \longrightarrow E(2) \to 0.$$

Une section de $E^t(2)$ est liée à une section de $E(2)$ par deux surfaces quartiques. Les fibrés E et E^t ont les mêmes plans sauteurs.

Démonstration. — Soit X une courbe lisse connexe de degré 8 de $\mathbb{P}^3$, lieu des zéros d'une section de $E(2)$. On a $h^0\big(J_X(4)\big) = 3$. On va montrer que $J_X(4)$ est engendré par ses sections globales. Il s'agit de montrer que l'intersection de trois surfaces quartiques linéairement indépendantes contenant X est réduite à X.

Rappelons pour cela la notion d'équivalence d'une composante pour une intersection (voir [F]).

Si Y est un schéma et $X_i \hookrightarrow Y$ des sous-schémas localement intersection complète et V une sous-variété de dimension k de Y, le produit d'intersection $X_1 \cdots X_r \cdot V$ est une classe dans le groupe d'équivalence rationnelle $A_m(\bigcap X_i \cap V)$, $m = \dim V - \sum_{i=1}^r \operatorname{codim}(X_i, Y)$. Si Z est une composante connexe de $\bigcap X_i \cap V$, on note $(X_1 \cdots X_r \cdot V)^Z$ la partie de $X_1 \cdots X_r \cdot V$ de support Z. On l'appelle l'équivalence de Z dans $X_1 \dots X_r \cdot V$. Si N_i est la restriction à Z du fibré normal de X_i dans Y, on a alors

$$(X_1 \dots X_r \cdot V)^Z = \Big\{ \prod_{i=1}^{r} c(N_i) \cap s(Z,V) \Big\}_m$$

où c désigne la classe de Chern totale, s la classe de Segre; l'indice m signifie que l'on prend la composante de degré m. En particulier si $Y = \mathbb{P}^3$, X_1, X_2, X_3 trois surfaces de $\mathbb{P}^3$ de degrés n_1, n_2, n_3, Z une courbe lisse composante connexe de $X_1 \cap X_2 \cap X_3$, l'équivalence de Z dans $X_1X_2X_3$ est

$$(n_1 + n_2 + n_3 - 4) \deg Z + 2 - 2g,$$

g étant le genre de Z (voir [F, example 9.1.1]). Dans le cas qui nous intéresse, on obtient 64, c'est-à-dire $4 \times 4 \times 4$. La courbe X est donc l'intersection schématique des trois surfaces quartiques linéairement indépendantes qui engendrent $H^0(J_X(4))$. On peut alors construire le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(O_{\mathbb{P}^3}) \otimes O_{\mathbb{P}^3} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & H^0\big(E(2)\big) \otimes O_{\mathbb{P}^3} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & H^0\big(J_X(4)\big) \otimes O_{\mathbb{P}^3} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & O_{\mathbb{P}^3} \arrow[r] & E(2) \arrow[r] & J_X(4) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent donne une suite exacte

$$0 \to \ker\alpha \to \ker\beta \to \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma \to 0.$$

Or $\ker\alpha = \operatorname{coker}\alpha = \operatorname{coker}\gamma = 0$. Il en résulte que $\ker\beta = \ker\gamma$ et $\operatorname{coker}\beta = 0$. Le fibré $E(2)$ est engendré par ses sections globales. On note

$$E^t(-2) = \ker\beta.$$

C'est un fibré vectoriel. On vérifie immédiatement que c'est un instanton de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 4$.

On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& & E^t(-2) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d] & E^t(-2) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & O_{\mathbb{P}^3} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\alpha"] & O_{\mathbb{P}^3}^4 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & O_{\mathbb{P}^3}^3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & O_{\mathbb{P}^3} \arrow[r] & E(2) \arrow[r] \arrow[d] & J_X(4) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

On considère alors une courbe Y liée à X par deux surfaces quartiques générales de $H^0(J_X(4))$. La courbe Y est lisse connexe de degré 8 et de genre 1.

Lorsqu'on dispose d'une résolution $0 \to A \to B \to J_C \to 0$ de l'idéal d'une courbe C de $\mathbb{P}^3$, on peut par *mapping cone* (*cf.* [PS]) obtenir une résolution d'une courbe Γ liée à C par deux surfaces de degrés s et t. On a

$$0 \to B^v(-s-t) \longrightarrow A^v(-s-t) \oplus O_{\mathbb{P}^3}(-s) \oplus O_{\mathbb{P}^3}(-t) \longrightarrow J_\Gamma \to 0$$

où v désigne le dual. En partant de la résolution $0 \to E^t(-6) \to O^3_{\mathbb{P}^3}(-4) \to J_X$ donnée par γ on obtient

$$0 \to O_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow E^t(2) \longrightarrow J_Y(4) \to 0.$$

La courbe Y est donc le lieu des zéros d'une section de $E^t(2)$. En dualisant β, on obtient que $E^t(2)$ est engendré par ses sections globales.

Il en résulte que $J_Y(4)$ est engendré par ses sections globales. La courbe Y n'a donc pas de quintisécante. Les formules de liaison donnent

$$h^0\big(J_Y(3)\big) = h^1\big(O_X(1)\big) = 0.$$

La courbe Y n'est donc pas tracée sur une surface cubique et E^t appartient à l'ouvert U.

Montrons maintenant que l'involution est sans point fixe. Supposons par l'absurde qu'il existe un fibré E tel que $E = E^t$. On a alors les deux suites exactes

$$0 \to O_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow E(2) \longrightarrow J_X(4) \to 0,$$

$$0 \to E(-2) \longrightarrow O^3_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow J_X(4) \to 0.$$

Si Q_1 et Q_2 désignent deux surfaces quartiques assez générales contenant X on peut construire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & O_{\mathbb{P}^3}(-4) & \longrightarrow & E(-2) & \longrightarrow & J_X & \to & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle\binom{Q_1}{Q_2}} & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & O^2_{\mathbb{P}^3} & \longrightarrow & O^3_{\mathbb{P}^3} & \longrightarrow & O_{\mathbb{P}^3} & \to & 0 \\
 & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & J_Z(4) & \longrightarrow & J_X(4) & \longrightarrow & O_X & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

La dernière ligne signifie que la courbe Z (intersection complète de degré 16) a le même support que X. Il s'agit d'une structure double sur X (construction de Ferrand).

Les deux surfaces sont donc tangentes le long de X. Ceci est absurde (voir [PS, prop. 4.1]).

Considérons maintenant un plan H de $\mathbb{P}^3$. Ce plan est sauteur pour le fibré E si la restriction de E à H n'est pas stable, c'est-à-dire si $H^0(H, E_H) \neq 0$. En considérant la suite exacte

$$0 \to O_H \longrightarrow E_H(2) \longrightarrow J_{X\cap H}(4) \to 0,$$

on voit que H est un plan sauteur si et seulement si les huit points de $X \cap H$ sont situés sur une conique de H. Considérons la correspondance d'incidence point-hyperplan $F \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^{3*}$. On note p et q les projections de F sur les facteurs et $O(a,b) = p^*O(a) \otimes q^*O(b)$. La résolution de F est

$$0 \to O(-1,-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^{3*}} \longrightarrow O_F \to 0.$$

Après tensorisation par $p^*E(-3)$ et image directe par q on obtient

$$\begin{aligned} R^1q_*\big(p^*E(-3)\big) &\longrightarrow H^2\big(E(-4)\big) \otimes O(-1) \\ &\longrightarrow H^2\big(E(-3)\big) \otimes O \longrightarrow R^2q_*\big(p^*E(-3)\big) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Par dualité de Serre, les plans sauteurs constituent le support de $R^2q_*(p^*E(-3))$. Les dimensions des espaces vectoriels de cohomologie étant $h^2(E(-4)) = 6$, $h^2(E(-3)) = 4$, la formule de Porteous donne le nombre attendu de plans sauteurs : 20.

Ceci coïncide avec le résultat obtenu en utilisant la « formule » de Severi donnant le nombre de coniques huit-sécantes à une courbe de $\mathbb{P}^3$.

Montrons maintenant que E et E^t ont les mêmes plans sauteurs. Si H est un plan sauteur de E, les points de $X \cap H$ sont situés sur une conique. On peut trouver une quartique de H contenant les huit points et d'admettant pas la conique comme composante. On a donc une résolution

$$O \to O_{\mathbb{P}^2}(-6) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}(-4) \oplus O_{\mathbb{P}^2}(-2) \longrightarrow J_{X\cap H} \to 0,$$

c'est-à-dire que les huit points constituent l'intersection complète d'une conique et d'une quartique de H. Considérons deux surfaces quartiques générales contenant X. La liée Y de X est une section de $E^t(2)$. Les groupes de points $X \cap H$ et $Y \cap H$ sont alors liés par les traces sur H des deux surfaces quartiques. Le *mapping cone* montre que $Y \cap H$ est contenu dans une conique. Par conséquent H est un plan sauteur pour E^t.

2. Construction des surfaces

Commençons par quelques rappels sur les fibrés engendrés par leurs sections globales. Soient Z une variété lisse, $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang r sur Z engendré par ses sections globales et $V \subset H^0(Z,\mathcal{E})$ un sous-espace vectoriel de dimension v. On note Z_s le sous-schéma où l'évaluation $V \otimes O_Z \to \mathcal{E}$ a un rang inférieur ou égal à s, $s \leq \min(v,r)$.

Pour un choix générique de V, en utilisant le théorème de transversalité de Kleiman (*cf.* [K]), on montre que Z_s est vide ou est une sous-variété de codimension $(v-s)(r-s)$ dont le lieu singulier est $\mathrm{Sing}(Z_s) = Z_{s-1}$.

Soit $\mathcal{E}$ un fibré de rang 2 sur $\mathbb{P}^3$. Une surface S de $\mathbb{P}^3$ est dite *surface déterminant* de $\mathcal{E}$ s'il existe deux sections s_1 et s_2 de $\mathcal{E}$ telles que S soit le schéma des zéros de $s_1 \wedge s_2 \in H^0(\mathbb{P}^3, \Lambda^2\mathcal{E})$. On a alors le résultat standard suivant.

PROPOSITION 1. — *Une surface lisse de $\mathbb{P}^3$ est une surface déterminant d'un fibré de rang 2 sur $\mathbb{P}^3$ si et seulement si il existe un morphisme surjectif de S vers $\mathbb{P}^1$.*

Démonstration. — Si S est le schéma des zéros de $s_1\wedge s_2$, le morphisme consiste à envoyer le schéma des zéros de $\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2$ sur $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{P}^1$. Les sections s_1 et s_2 ne s'annulent pas simultanément car S est lisse.

Réciproquement si $\varphi : S \to \mathbb{P}^1$ est un morphisme surjectif, on considère la factorisation de Stein de $\varphi : S \xrightarrow{\pi} C \to \mathbb{P}^1$ où π est à fibres connexes. La courbe C est $\mathbb{P}^1$ car $h^1(S,O_S) = h^0(S,\Omega^1_S) = 0$.

Soit F une fibre lisse de π. La formule d'adjonction s'écrit

$$\omega_F = \omega_S \otimes O_F = O_{\mathbb{P}^3}(d-4) \otimes O_F$$

si d est le degré de S. La construction de Serre permet d'avoir un fibré $\mathcal{E}$ de rang 2 sur $\mathbb{P}^3$ et une section $s \in H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{E})$ dont le schéma des zéros est F. On a $c_1(\mathcal{E}) = d$, $c_2(\mathcal{E}) = \deg F$. La suite exacte $0 \to O_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{E} \to J_F(d) \to 0$ donne

$$0 \to H^0(O_{\mathbb{P}^3}) \longrightarrow H^0(\mathcal{E}) \xrightarrow{\wedge s} H^0\big(J_F(d)\big) \to 0.$$

L'équation f de la surface S appartient à $H^0\big(J_F(d)\big)$. Donc il existe $s_1 \in H^0(\mathcal{E})$ tel que $f = s_1 \wedge s$. $\square$

Il est naturel de voir s'il existe des surfaces munies de deux morphismes surjectifs vers $\mathbb{P}^1$ et d'étudier le morphisme vers $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ qui en résulte.

Considérons maintenant un fibré E appartenant à l'ouvert de Zariski U sur lequel on a construit l'involution $E \to E^t$. Si V est un sous-espace vectoriel de dimension 2 assez général de $W = H^0(E(2))$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & V \otimes O_{\mathbb{P}^3} \arrow[d] \arrow[dr, "\sigma"] & & \\
0 \arrow[r] & E^t(-2) \arrow[r] \arrow[dr, "\psi"'] & W \otimes O_{\mathbb{P}^3} \arrow[r] \arrow[d] & E(2) \arrow[r] & 0 \\
 & & \frac{V}{W} \otimes O_{\mathbb{P}^3} \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

La surface d'équation $\det\sigma$ est lisse et est une surface déterminant de $E(2)$. On vérifie immédiatement qu'en tout point de $\mathbb{P}^3$, σ est surjectif si et seulement si ψ l'est. La surface S admet donc aussi pour équation $\det({}^t\psi)$ où ${}^t\psi$ désigne le transposé de ψ. La surface S est donc aussi une surface déterminant de $E^t(2)$. Le degré de S est $c_1(E(2)) = 4$: c'est donc une surface K_3. Les fibrés E et E^t étant distincts, S est munie de deux morphismes distincts f et g vers $\mathbb{P}^1$ dont les fibres sont des courbes elliptiques de degré 8. On a donc un morphisme

$$S \xrightarrow{(f,g)} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

La fibre au-dessus d'un point générique (a,b) de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est l'intersection de la courbe $f^{-1}(a)$ section de $E(2)$ et de $g^{-1}(b)$ section de $E^t(2)$. Les courbes liées à $f^{-1}(a)$ par deux surfaces quartiques forment un plan projectif dans $P(H^0(E^t(2)))$. Les fibres $g^{-1}(t)$ forment une droite projective dans $P(H^0(E^t(2)))$. Si cette droite projective est contenue dans le plan projectif précédent, alors $g^{-1}(b)$ est liée $f^{-1}(a)$ par deux surfaces quartiques et le nombre de leurs points d'intersection est 32 (voir [F, p. 159]). Sinon comme $\dim(P(H^0(E^t(2)))) = 3$, la droite et le plan en question se coupent en un point. Il y a donc une fibre $g^{-1}(t^0)$ liée à $f^{-1}(a)$. Cette fibre rencontre donc $f^{-1}(a)$ en 32 points. Mais les fibres $g^{-1}(t)$ sont numériquement équivalentes sur S, donc on a le même nombre d'intersection entre $f^{-1}(a)$ et $g^{-1}(b)$. La formule d'Hurwitz s'écrit

$$0 = K_S = (f,g)^*\big(O(-2,-2)\big) + R$$

où R désigne le diviseur de ramification sur S et K_S le diviseur canonique. Il en résulte que R est linéairement équivalent à $2C_1 + 2C_2$ où C_1 est une fibre de f et C_2 une fibre de g.

Je tiens à remercier le *referee* pour ses suggestions.

BIBLIOGRAPHIE

[A] D'ALMEIDA (J.). — *Courbes de l'espace projectif*, J. reine angew Math., t. **370**, 1986, p. 30–51.

[B] BARTH (W.). — *Irreducibility of the space of mathematical instanton with rank* 2 *and* $c_2 = 4$, Math. Ann., t. **258**, 1981, p. 81–106.

[F] FULTON (W.). — *Intersection Theory.* — Springer Verlag, 1984.

[H] HARTSHORNE (R.). — *Stable vector bundles of rank 2 on* $\mathbb{P}^3$, Math. Ann., t. **238**, 1978, p. 229–280.

[K] KLEIMAN (S.). — *The transversality of a general translate*, Compositio Math., t. **38**, 1974, p. 287–297.

[LP] LE POTIER (J.). — *Sur l'espace des modules des fibrés de Yang Mills*, Mathématiques et Physique, Séminaire École Normale Supérieure 1979–1982, Birkhaüser, 1983.

[PS] PESKINE (C.), SZPIRO (L.). — *Liaison des variétés algébriques*, Inv. Math., t. **26**, 1974, p. 271–302.