BULLETIN DE LA S. M. F.

BENOÎT RITTAUD

Équidistribution presque partout modulo 1 de suites oscillantes perturbées

Bulletin de la S. M. F., tome 128, n° 3 (2000), p. 451-471
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_2000__128_3_451_0>

Bull. Soc. math. France,
128, 2000, p. 451–471.

ÉQUIDISTRIBUTION PRESQUE PARTOUT MODULO 1 DE SUITES OSCILLANTES PERTURBÉES

PAR BENOÎT RITTAUD (*)

RÉSUMÉ. — Soient $(h_n)_n$ une suite de nombre réels, F une fonction réelle $\mathbb{Z}^d$-périodique définie sur $\mathbb{R}^d$ et Θ un vecteur de $\mathbb{R}^d$. Sous des conditions de croissance de $(h_n)_n$, des conditions de régularité sur F et, dans certains cas, des conditions diophantiennes sur Θ, nous démontrons que la suite $(th_nF(n\Theta))_n$ est équidistribuée modulo 1 pour presque tout nombre réel t. Des versions « perturbatives » de ce résultat sont également établies. Ces résultats permettent de démontrer la convergence ponctuelle de certaines moyennes ergodiques non conventionnelles associées à des endomorphismes du tore de dimension d.

ABSTRACT. — UNIFORM DISTRIBUTION ALMOST EVERYWHERE MODULO 1 OF OSCILLATING SEQUENCES. — Let $(h_n)_n$ be a sequence of real numbers, F a real $\mathbb{Z}^d$-periodic function defined on $\mathbb{R}^d$ and Θ an element of $\mathbb{R}^d$. Under increasing conditions on $(h_n)_n$, regularity conditions on F and, in some cases, diophantine conditions on Θ, we prove that the sequence $(th_nF(n\Theta))_n$ is uniformly distributed modulo 1 for almost every real number t. "Perturbative" versions of this result are also given. These results allow us to prove the pointwise convergence of non conventionnal ergodic averages associated to endomorphisms of the torus of dimension d.

Nous nous intéressons à l'équidistribution pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ de suites de la forme $(th_nF(n\Theta))_n$, où $(h_n)_n$ est une suite réelle croissante, Θ un vecteur de $\mathbb{R}^d$ et $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathbb{Z}^d$-périodique. Nous étudions aussi, sous les mêmes hypothèses, les suites du type $(th_n(F(n\Theta)+\varepsilon_n))_n$, où $(\varepsilon_n)_n$ est une suite qui tend vers 0. Certains des résultats présentés ici ont été annoncés dans [9].

Lorsque la suite $(F(n\Theta))_n$ (ou $(F(n\Theta)+\varepsilon_n)_n$) est constante et que h_n croît au moins polynomialement, l'équidistribution t-presque partout est donnée par un lemme métrique de J.F. Koksma. Utilisé dans le cas $h_n = b^n$ ($b \in \mathbb{N}$, $b > 1$), ce résultat indique que presque tout réel est normal dans la base b.

(*) Texte reçu le 22 juin 1999, accepté le 29 septembre 1999.
B. RITTAUD, Université Paris-XIII, Institut Galilée, Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications, av. J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse. Email : rittaud@math.univ-paris13.fr.
Classification mathématique par matières : 11 J 71, 11 K 38, 28 D 99.

Mots clés : équidistribution modulo 1, moyennes ergodiques diagonales, type diophantien, discrépance.

L'introduction d'un terme oscillant $F(n\Theta)$, comme dans la suite $(tn\cos(n\theta))_n$ où $\theta \in \mathbb{R}$, rend la démarche plus délicate. Un résultat d'équidistribution, sans hypothèse métrique, a été obtenu par D. Berend et G. Kolesnik [2] pour les suites de terme général $u_n = P(n)f(n\theta)$, où P est un polynôme non nul, θ un nombre irrationnel et f une fonction 1-périodique de classe $C^{2\mathrm{Deg}(P)+1}$ n'ayant, ainsi que ses premières dérivées, qu'un nombre fini de zéros dans $[0,1[$. Ce théorème s'applique par exemple à la suite $(n\cos(n\theta))_n$, où $\theta \notin 2\pi\mathbb{Q}$, mais non à la suite $(n\{n\theta\}^2)_n$, où $\{.\}$ désigne l'application partie fractionnaire.

Nous présentons ici un résultat d'équidistribution t-presque partout de suites du type $(th_nF(n\Theta))_n$, où $\Theta \in \mathbb{R}^d$, avec des hypothèses de régularité plus faibles que dans [2] : la suite $(P(n))_n$ est remplacée par une suite à croissance exponentielle ou polynomiale « prescrite » (*i.e.* encadrée par deux polynômes), la fonction F devient essentiellement C^1 de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}^d$-périodique. Toutefois, lorsque la croissance de $(h_n)_n$ n'est que polynomiale, notre méthode nous impose de faire une hypothèse diophantienne sur Θ.

La technique que nous développons permet également de montrer que, sous les mêmes hypothèses, si $(\varepsilon_n)_n$ est une suite tendant assez vite vers 0, alors la suite $(th_n(F(n\Theta)+\varepsilon_n))_n$ est équidistribuée modulo 1 pour presque tout réel t. C'est le cas, par exemple, de la suite $(tn(\cos(n2\pi\sqrt{2}\,)+1/\sqrt{n}\,))_n$.

Ces résultats permettent de montrer la convergence ponctuelle de moyennes ergodiques non conventionnelles du type

$$(*) \qquad \frac{1}{N}\sum_{n<N}\prod_{i\leq p} f_i(T_i^n x),$$

où les T_i sont des endomorphismes de $\mathbb{T}^d$, tore de dimension d, et les f_i des fonctions de $L^p(\mu)$ $(p \in \mathbb{N}^*)$.

Lorsque la suite $(h_n)_n$ est à croissance exponentielle, nous n'avons pas besoin d'hypothèse diophantienne sur Θ ; l'étude de ce cas permet de démontrer la convergence de (*) quand les endomorphismes n'ont pas de bloc de Jordan non-trivial associé à une valeur propre de module 1. Une version de ce résultat a été annoncée, sans démonstration, dans [7]. C'est pour résoudre les autres cas qu'il nous faut étudier les suites oscillantes lorsque $(h_n)_n$ croît polynomialement. D'après un résultat de A. Baker [1], l'hypothèse diophantienne sur Θ n'est pas excessive.

Le lemme métrique de Koksma permet de se ramener à l'estimation du cardinal d'un ensemble d'entiers. Pour cette estimation, nous utilisons l'outil de la discrépance, en exprimant cet ensemble comme celui des entiers n pour lesquels $n\Theta$ est compris entre deux lignes de niveau de F.

C'est là que nous utilisons l'hypothèse diophantienne, qui nous garantit une décroissance polynomiale de la discrépance de la suite $(n\Theta)_n$ et, partant, une majoration polynomiale du cardinal cherché.

Dans le cas unidimensionnel, la discrépance consiste en un supremum sur les intervalles : cette définition est adéquate dans la mesure où les images inverses par F d'intervalles peuvent, le plus souvent, s'écrire comme réunion finie (à cardinal majoré) d'intervalles. En revanche, la définition de la discrépance en dimension d, qui consiste en un supremum sur des pavés, doit être adaptée à des ensembles dont les frontières sont données par des lignes de niveau. Ces ensembles auront la propriété de mesurabilité au sens de Jordan.

La discrépance donne une estimation du nombre d'entiers n pour lesquels $\{n\Theta\}$ appartient à un domaine fixé, et il est bien entendu qu'il n'y a pas de sens à vouloir donner une estimation en général si le domaine peut varier avec n. Notre étude nécessite pourtant une estimation sur des bandes de niveau dépendant de n, estimation que l'on peut donner grâce au lemme 6.2 qui établit que ces bandes se déplacent suffisamment lentement pour que la discrépance fournisse de l'information.

Je remercie Emmanuel Lesigne pour son aide, déterminante tout au long de ce travail.

1. Présentation des résultats

Dans toute la suite, $d \in \mathbb{N}^*$ est fixé, $\|.\|$ est la norme de $\mathbb{R}^d$ associée au produit scalaire usuel $(.,.)$, μ est la mesure de Lebesgue, δ_0 la masse de Dirac en zéro et $I := [0,1[^d$ est le cube unité de $\mathbb{R}^d$. Un vecteur $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d)$ de $\mathbb{R}^d$ est dit *d-irrationnel* lorsque $1, \theta_1, \ldots, \theta_d$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Si $x \in \mathbb{R}^d$, on note $\{x\}$ sa partie fractionnaire, vecteur de $\mathbb{R}^d$ constitué des parties fractionnaires des composantes de x, et $r(x)$ la valeur $\prod_{1\le i\le d} \max(|x_i|, 1)$. Enfin, si $t \in \mathbb{R}$, $\langle t\rangle$ désigne la distance de t à $\mathbb{Z}$.

Les deux définitions suivantes sont classiques (*cf.* [6]).

DÉFINITION. — *Soit ν une mesure de probabilités sur* $[0,1]$. *On dit que la suite* $(u_n)_n$ admet ν pour distribution asymptotique modulo 1 *si, pour toute fonction continue* 1*-périodique f, la suite des moyennes $N^{-1}\sum_{n<N} f(u_n)$ converge vers $\int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}\nu(s)$. Lorsque ν est la mesure de Lebesgue, la suite $(u_n)_n$ est dite* équidistribuée modulo 1.

DÉFINITION. — *Soit $\Theta \in \mathbb{R}^d$ d-irrationnel. On appelle* type diophantien *de Θ et on note $\eta(\Theta)$ l'infimum des $\sigma \in [1,+\infty]$ tels qu'il existe $c > 0$ pour lequel, pour tout $h = (h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{Z}^d$ non nul, $r(h)^\sigma \cdot \langle (h,\Theta)\rangle \ge c$.*

On peut démontrer que $\eta(\Theta) = 1$ pour presque tout $\Theta \in \mathbb{R}^d$ (*cf.* [10] par exemple).

DÉFINITION. — *Une suite réelle positive $(u_n)_n$ est à croissance* exponentielle (*resp.* polynomiale) *lorsqu'il existe $\lambda > 1$ tel que, pour tout n assez grand,*

$u_{n+1}/u_n > \lambda$ (*resp.* $u_{n+1}/u_n > 1 + \lambda/n$). *La suite réelle positive* $(u_n)_n$ *est à* décroissance exponentielle (*resp.* polynomiale) *lorsque* $(1/u_n)_n$ *est à croissance exponentielle* (*resp. polynomiale*). *La suite* $(u_n)_n$ *est* à croissance polynomiale prescrite *si elle est à croissance polynomiale et s'il existe* $c > 0$ *tel que* $u_n \leq n^c$ *pour tout* n *assez grand.*

Voici trois énoncés qui correspondent, avec des hypothèses simplifiées, aux théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3 que nous verrons ensuite.

THÉORÈMES.

• *Soient* $(h_n)_n$ *une suite réelle à croissance exponentielle,* $(a_n)_n$ *une suite réelle bornée telle que* $|a_n| > n^{-\alpha}$ *pour un certain* $\alpha > 0$. *La suite* $(th_n a_n)_n$ *est équidistribuée modulo* 1 t*-presque partout.*

• *Soient* $(h_n)_n$ *une suite réelle à croissance polynomiale prescrite,* $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *une fonction* $\mathbb{Z}^d$*-périodique de classe* C^1 *sans point critique, et* Θ *un vecteur de* $\mathbb{R}^d$ *de type diophantien fini. La suite* $(th_n F(n\Theta))_n$ *admet une distribution asymptotique modulo* 1 t*-presque partout.*

• *Sous les hypothèses de ce dernier énoncé, si* $(\varepsilon_n)_n$ *est une suite réelle bornée et* $(h'_n)_n$ *une suite réelle telle que* $(|h'_n/h_n|)_n$ *soit à décroissance polynomiale, alors la suite* $(t(h_n F(n\Theta) + \varepsilon_n h'_n))_n$ *admet une distribution asymptotique modulo* 1 t*-presque partout.*

Pour des raisons techniques qui tiennent à la démonstration du théorème 1.4 *infra*, il nous faut également énoncer ces théorèmes le long de sous-suites qui possèdent des propriétés de densité asymptotique.

DÉFINITION. — *Soit* W *une partie infinie de* $\mathbb{N}$, *soit* $Z \subset \mathbb{N}$. *La* densité asymptotique de Z dans W (*ou* W-densité) *est, quand elle existe, la valeur*

$$\mathrm{da}_W(Z) := \lim_{N\to+\infty} \Big(\frac{\mathrm{Card}(Z \cap W \cap [0, N[\,)}{\mathrm{Card}(W \cap [0, N[\,)} \Big).$$

En prenant la limite inférieure (*resp. supérieure*), *on définit la* W*-densité asymptotique* inférieure (*resp.* supérieure), *notée* $\mathrm{dai}_W(Z)$ (*resp.* $\mathrm{das}_W(Z)$). *On pose* $\mathrm{da}(Z) = \mathrm{da}_{\mathbb{N}}(Z)$.

NOTATIONS. — *On désigne par* $P_W(\mathbb{N})$ *l'ensemble des parties infinies* Z *de* $\mathbb{N}$ *telles que* $\mathrm{da}_W(Z) = 0$ *ou* $\mathrm{dai}_W(Z) > 0$, *et on pose*

$$P^+(\mathbb{N}) := \big\{ Z \subset \mathbb{N} : \mathrm{dai}(Z) > 0 \big\}.$$

Cet ensemble $P^+(\mathbb{N})$ *sera envisagé comme un ensemble de suites croissantes.*

Nous avons les résultats suivants :

THÉORÈME 1.1. — *Soit* $(h_n)_n$ *une suite à croissance exponentielle, soit* $(a_n)_n$ *une suite bornée telle que, pour tout* n, $|a_n| > n^{-\alpha}$ *pour un certain* $\alpha > 0$. *Quel que soit* $Z \in P^+(\mathbb{N})$, *la suite* $(th_n a_n)_{n\in Z}$ *est équidistribuée modulo* 1 t*-presque partout.*

THÉORÈME 1.2. — *Soit* $(h_n)_n$ *une suite à croissance polynomiale prescrite, soit* $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *une fonction* $\mathbb{Z}^d$*-périodique telle qu'il existe un fermé négligeable* Y *en-dehors duquel* F *est de classe* C^1 *et constante au voisinage de chaque point critique. Soit* $\Theta \in \mathbb{R}^d$ *de type diophantien fini, soit enfin* W *l'ensemble des entiers naturels* n *tels que* $n\Theta$ *soit hors de* Y *et régulier pour* F. *Le long de toute suite élément de* $P^+(\mathbb{N}) \cap P_W(\mathbb{N})$, *la suite* $(th_n F(n\Theta))_n$ *admet une distribution asymptotique modulo* 1 t*-presque partout.*

On peut donner la généralisation que voici du théorème précédent.

THÉORÈME 1.3. — *Sous les hypothèses du théorème* 1.2, *soit* $(\varepsilon_n)_n$ *une suite réelle bornée, soit* $(h'_n)_n$ *une suite réelle telle que la suite* $(|h'_n/h_n|)_n$ *soit à décroissance polynomiale. Posons*

$$W_0 := \{n \in \mathbb{N} : F(n\Theta) = 0\},$$

soit $Z \in P^+(\mathbb{N}) \cap P_W(\mathbb{N})$ *telle que* $\mathrm{da}(Z \cap W_0) = 0$ *ou que la suite* $(th'_n\varepsilon_n)_{n\in Z\cap W_0}$ *admette une distribution asymptotique modulo* 1 t*-presque partout. La suite* $(t(h_n F(n\Theta) + h'_n\varepsilon_n))_{n\in Z}$ *admet une distribution asymptotique modulo* 1 t*-presque partout.*

Le théorème 1.1 s'applique par exemple à la suite $(t\lambda^n \cos(n\theta))_n$ pour presque tous réels θ et t, où $\lambda > 1$. Si l'on se donne $\theta \in \mathbb{R}$, $\eta(\theta) < \infty$, alors le théorème 1.2 s'applique à la suite $(tn\{n\theta\}^2)_n$, ainsi qu'à la suite $(t\sqrt{n}\cos(n\theta))_n$. Toujours sous l'hypothèse $\eta(\theta) < +\infty$, le théorème 1.3 s'applique à la suite $(t(n\sin(n\theta) + \sqrt{n}))_n$, ainsi qu'à la suite $(tnF(n\theta))_n$ où F est une fonction en escaliers. Enfin, si $\eta(\theta_1, \theta_2) < \infty$, le théorème 1.2 s'applique à la suite $(tn(\cos(n\theta_1) + \cos(n\theta_2 + \psi)))_n$, où $\psi \in \mathbb{R}$. Si l'on remplace cette suite par $(tn(\cos(n\theta_1) + \cos(n\theta_2 + \psi) + 1/\sqrt{n}))_n$, c'est le théorème 1.3 qui s'applique.

Compléments au théorème 1.3.

- La suite $(t(h_n F(n\Theta) + h'_n\varepsilon_n))_n$ admet t-presque partout la distribution asymptotique modulo 1 donnée par $(1 - \mu(F^{-1}(0)))\mu + \mu(F^{-1}(0))\nu_t$, où ν_t désigne la distribution asymptotique modulo 1 de $(th'_n\varepsilon_n)_{n\in W_0}$ t-presque partout.

- L'hypothèse de finitude du type diophantien de Θ peut être légèrement affaiblie (*cf.* remarque à la fin de l'article).

Voici une conséquence des théorèmes 1.1 et 1.3.

THÉORÈME 1.4. — *Soit A une matrice (d,d) à coefficients entiers. Pour toute forme linéaire ϕ, la suite $(t\phi(A^n))_n$ possède une distribution asymptotique modulo 1 t-presque partout.*

Une question est de savoir si ce résultat s'étend à toutes les matrices (d,d) à coefficients réels. Notre méthode de démonstration est en fait opérante pour toute matrice telle que le vecteur constitué des arguments des valeurs propres de module 1 associées à des blocs de Jordan non-triviaux soit de type diophantien fini. Le théorème 1.4 possède l'application suivante à la convergence ponctuelle de moyennes diagonales :

THÉORÈME 1.5. — *Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soient $A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{M}_d(\mathbb{Z})$ et $f_1, \ldots, f_p \in L^p(\mathbb{T}^d)$. Les moyennes*

$$(*) \qquad \frac{1}{N} \sum_{n<N} \prod_{i<p} f_i(A_i^n x)$$

forment une suite convergente pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

REMARQUES. — On peut obtenir une expression de la limite, à l'aide de considérations techniques sur le groupe engendré par les arguments des valeurs propres de module 1. On peut aussi, sans difficulté supplémentaire, énoncer le résultat pour toutes les matrices réelles telles que le vecteur constitué des arguments des valeurs propres de module 1 associées à des blocs de Jordan non-triviaux soit de type diophantien fini.

Voici le plan de ce qui va suivre : dans un premier temps (section 2), nous effectuons quelques rappels concernant des résultats classiques en théorie de l'équidistribution modulo 1. Nous montrons ensuite (section 3) comment les théorèmes 1.4 et 1.5 se démontrent à partir des théorèmes 1.1 et 1.3. La section 4 est consacrée à la démonstration du théorème 1.1. Nous nous intéressons ensuite à des résultats de discrépance (section 5), qui permettent finalement de démontrer le théorème 1.3 (section 6).

2. Résultats généraux d'équidistribution

Dans cette section, nous énonçons quelques lemmes de base sur les propriétés de distribution asymptotique. Des preuves détaillées de chacun de ces lemmes se trouvent dans [10].

Si $Z \subset \mathbb{N}$, on pose :

$$Z(N) := Z \cap [0, N[\quad \text{et} \quad \overline{Z(N)} := \big([0, N[\cap \mathbb{N}\big) \backslash Z(N).$$

Si $A \subset \mathbb{T}^d$, on note $\chi_A^\Theta := \big\{n \in \mathbb{N} : n\Theta \in A \bmod \mathbb{Z}^d\big\}$.

LEMME 2.1. — *Soit* $\{W_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ *une partition finie ou dénombrable de* $\mathbb{N}$ *telle que* $\mathrm{da}(W_k) = w_k$ *pour tout* k, *avec* $\sum_k w_k = 1$. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite réelle. Si, pour tout* k, *la suite* $(u_n)_{n\in W_k}$ *admet* ν_k *pour distribution asymptotique modulo* 1, *alors la suite* $(u_n)_n$ *admet* $\sum_k w_k\nu_k$ *pour distribution asymptotique modulo* 1.

Le lemme suivant provient d'un résultat donné dans [6, chap. 1, th. 4.2] ou dans [8, chap. III, § 3.1] :

LEMME MÉTRIQUE (J.F. Koksma). — *Si la suite* $(u_n)_n$ *est telle que*

$$\sum_{N>0} \frac{1}{N^3} \sum_{i<N} \sum_{j<N} \min\Big(1, \frac{1}{|u_i - u_j|}\Big) < +\infty,$$

alors la suite $(tu_n)_n$ *est équidistribuée modulo* 1 t*-presque partout.*

Notons que c'est ce résultat qui permet de montrer que, si $(h_n)_n$ est une suite telle que $h_{n+1} - h_n > n^{-\alpha}$ pour un $\alpha < 1$, alors la suite $(th_n)_n$ est équidistribuée modulo 1 t-presque partout.

On déduit du lemme métrique le résultat suivant :

LEMME 2.2. — *Soit* $(u_n)_{n>0}$ *une suite réelle, soit* $Z \subset \mathbb{N}$ *tel que* $\mathrm{dai}(Z) > 0$. *S'il existe* $\delta > 1$ *tel que, pour tout* N *assez grand,*

$$\sum_{i,j\in Z(N)} \min\Big(1, \frac{1}{|u_i - u_j|}\Big) \leq \frac{N^2}{\log^\delta(N)},$$

alors la suite $(tu_n)_{n\in Z}$ *est équidistribuée modulo* 1 t*-presque partout.*

COROLLAIRE 2.3. — *S'il existe* $\delta > 1$ *pour lequel, pour tout* N *assez grand,*

$$\sum_{i<N} \sum_{j<N} \min\Big(1, \frac{1}{|u_i - u_j|}\Big) \leq \frac{N^2}{\log^\delta(N)},$$

alors, si Z *est tel que* $\mathrm{dai}(Z) > 0$, *la suite* $(tu_n)_{n\in Z}$ *est équidistribuée modulo* 1 t*-presque partout.*

Le résultat suivant nous permettra de nous placer sur des ensembles d'entiers n pour lesquels $\{n\Theta\}$ est à distance minorée des irrégularités de la fonction F des théorèmes 1.2 et 1.3. Ce résultat est conséquence de [11, p. 286], au moins dans le cas où les parties de $\mathbb{N}$ considérées possèdent une densité asymptotique.

LEMME 2.3. — *Soit* Z *une partie infinie de* $\mathbb{N}$, *soit* $(Z_m)_m$ *une suite de parties de* $\mathbb{N}$ *telle que* $\mathrm{dai}_Z(Z_m)$ *tende vers 1 quand* m *tend vers* $+\infty$. *Si, pour tout* m, *la sous-suite* $(u_n)_{n\in Z\cap Z_m}$ *est équidistribuée modulo* 1, *alors la suite* $(u_n)_{n\in Z}$ *l'est également.*

Notons que, dans le lemme précédent, on peut remplacer équidistribution par distribution selon une mesure ν.

Voici une conséquence de l'unique ergodicité de la rotation d'angle Θ et du théorème «de Portmanteau» (*cf.* [4, p. 21–22]) :

LEMME 2.4. — *Soit $\Theta \in \mathbb{R}^d$ un vecteur d-irrationnel. Si $A \subset \mathbb{T}^d$ est de frontière négligeable, alors* $\mathrm{da}(\chi_A^{\Theta}) = \mu(A)$.

COROLLAIRE 2.5. — *Soit $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable $\mathbb{Z}^d$-périodique telle que $A := F^{-1}(0) \cap \mathbb{T}^d$ soit de frontière négligeable et de complémentaire non négligeable. Alors, $(F(n\Theta))_{n \notin \chi_A^{\Theta}}$ admet une distribution asymptotique modulo 1 étrangère à δ_0.*

3. Démonstration des théorèmes 1.4 et 1.5

Dans cette section, nous supposons démontrés les théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3.

3.1. Un énoncé sur des sommes finies de suites.

PROPOSITION 3.1. — *Soit $J' \in \mathbb{N}^*$; soit, pour tout entier $j \in [1, J']$, une suite $(h_n^{(j)})_n$ à croissance polynomiale prescrite ou à croissance exponentielle. On suppose que, pour tout $j \in [1, J'-1]$, la suite $(h_n^{(j)}/h_n^{(j+1)})_n$ est à décroissance polynomiale (si $J' > 1$).*

Pour tout $j \in [1, J']$, soit $F^{(j)} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathbb{Z}^d$-périodique telle qu'il existe un fermé négligeable $Y^{(j)}$ en-dehors duquel $F^{(j)}$ est bornée, de classe C^1 et constante au voisinage de chaque point critique.

On note J le nombre de j pour lesquels $(h_n^{(j)})_n$ est à croissance polynomiale prescrite. Soit, pour tout $j \in [1, J]$ si $J > 0$ (resp. $j \in [J+1, J']$ si $J < J'$), $\Theta_j \in \mathbb{R}^d$ de type diophantien fini (resp. $\Theta_j \in \mathbb{R}^d$ quelconque). On pose, pour tout $j \in [1, J']$ et pour tout n,

$$b_n^{(j)} = h_n^{(j)} F^{(j)}(n\Theta_j).$$

La suite $(t \sum_{j \leq J'} b_n^{(j)})_n$ admet une distribution asymptotique modulo 1 t-presque partout.

Démonstration. — Pour tout $j \in [1, J']$, on note

$$W_0^j = \{n \in \mathbb{N} : F^{(j)}(n\Theta_j) = 0\},$$
$$W^j = \{n \in \mathbb{N} : n\Theta_j \in I \backslash Y^{(j)} \text{ et } n\Theta_j \text{ régulier pour } F^{(j)}\}.$$

Soit $\mathcal{Z}$ l'ensemble des éléments de densité asymptotique non nulle du clan engendré par les W_0^j : d'après le lemme 2.4, tout élément Z de ce clan vérifie que $\mathrm{da}(Z \cap W^j)$ existe pour tout $j \in [1, J']$; donc $\mathcal{Z} \subset \bigcap_j P_{W^j}(\mathbb{N})$.

Soit $Z \in \mathcal{Z}$, soit $k \in [1, J']$ tel que $Z \cap W_0^k \in \mathcal{Z}$. Si $J \neq 0$ (resp. $J = 0$) alors, d'après le théorème 1.2 (resp. d'après le théorème 1.1), la suite $(tb_n^{(1)})_{n \in Z \cap W_0^k}$ admet une distribution asymptotique modulo 1 t-presque partout.

Faisons l'hypothèse de récurrence selon laquelle, jusqu'à un certain $j \in [1, J'[$, pour tout $Z \in \mathcal{Z}$ et tout $k \in [1, J']$ tels que $Z \cap W_0^k \in \mathcal{Z}$, la suite

$$\Big(t \sum_{i=1}^{j} b_n^{(i)}\Big)_{n \in Z \cap W_0^k}$$

admet une distribution asymptotique modulo 1 t-presque partout.

Premier cas : $J \neq 0$ et $j < J$.

Alors, d'après le théorème 1.3, pour tout $Z \in \mathcal{Z}$, la suite $(t(\sum_{i=1}^{j+1} b_n^{(j)}))_{n \in Z}$ admet une distribution asymptotique modulo 1 t-presque partout. Pour tout k, on a soit $Z \cap W_0^k \in \mathcal{Z}$, soit $\mathrm{da}(Z \cap W_0^k) = 0$. Dans le premier cas, on a donc que la suite $(t(\sum_{i=1}^{j+1} b_n^{(i)}))_{n \in Z \cap W_0^k}$ admet une distribution asymptotique modulo 1 t-presque partout.

Deuxième cas : $J < J'$ et $J' > j \geq J$.

D'après le corollaire du lemme 2.4, pour tout $j \in [J+1, J']$, l'ensemble des $n \notin W_0^j$ pour lesquels $|F^{(j)}(n\Theta_j)| \leq n^{-\alpha}$ pour un certain $\alpha > 0$ est de densité nulle. Pour notre problème de densité asymptotique, on peut supposer cet ensemble vide (α sera fixé plus loin).

Pour tout $i < j$, la suite $(h_n^{(i)}/h_n^{(j)})_n$ est à décroissance polynomiale. Si α est assez petit, on peut alors écrire

$$h_n^{(j+1)} F^{(j+1)}(\Theta_{j+1}) + \sum_{i \leq j} h_n^{(i)} F^{(i)}(n\Theta_i) = h_n^{(j+1)} a_n,$$

où a_n est minoré en module par $n^{-\alpha}$ pour tout $n \notin W_{j+1}$ (à une constante multiplicative près). En appliquant le théorème 1.1 et les lemmes 2.4 et 2.1, on montre que, pour tout $Z \in \mathcal{Z}$ et tout k tel que $\mathrm{da}(Z \cap W_0^k) > 0$, la suite $(t \sum_{i=1}^{j+1} b_n^{(i)})_{n \in Z \cap W_0^k}$ admet une distribution asymptotique modulo 1 t-presque partout.

Par récurrence, on montre ainsi que la suite $(t \sum_{i=1}^{J'} b_n^{(i)})_{n \in Z}$ admet une distribution asymptotique mod. 1 t-presque partout quel que soit $Z \in \mathcal{Z}$. Il suffit alors de remarquer que $\mathbb{N} \in \mathcal{Z}$.

La proposition est démontrée.

Compléments.

- On peut, sans difficulté supplémentaire, supposer les $F^{(j)}$ de $\mathbb{R}^{d_j}$ dans $\mathbb{R}$, sans que les d_j soient égaux (et, bien sûr, $\Theta_j \in \mathbb{R}^{d_j}$).
- Posons $\gamma = \{n \in \mathbb{N} : F^{(j)}(n\Theta_j) = 0 \text{ pour tout } j\}$. La distribution asymptotique de la suite $(t \sum_{j \leq J'} b_n^{(j)})_n$ est donnée par $(1-\gamma)\mu + \gamma\delta_0$.

3.2. Démonstration du théorème 1.4.

À changement de base près, on suppose A sous forme de Jordan réelle, et on écrit :

$$A = \begin{pmatrix} A_{<1} & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_{>1} \end{pmatrix},$$

où $A_{<1}$ (resp. A_1, $A_{>1}$) est la restriction de A à la somme des sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de module plus petit que 1 (resp. égal à 1, plus grand que 1). On note alors

$$\phi(A^n) = \phi_{<1}(n) + \phi_1(n) + \phi_{>1}(n),$$

où $\phi_{<1}(n)$ (resp. $\phi_1(n)$, $\phi_{>1}(n)$) contient les coefficients de $(A_{<1})^n$ (resp. $(A_1)^n$, $(A_{>1})^n$). On néglige le terme $\phi_{<1}(n)$, qui tend vers 0.

Notons $\theta_1, \dots, \theta_K$ les arguments des valeurs propres de A_1. La quantité $\phi_1(n)$ s'exprime comme combinaison linéaire de termes de la forme

$$n^\ell \sum_{k \le K} c_k \cos(n \cdot 2\pi\theta_k + \psi_k),$$

où ℓ, $K \in \mathbb{N}^*$ et où $c_1, \dots, c_K$, $\psi_1, \dots, \psi_K \in \mathbb{R}$.

De la même manière, si $\theta'_1, \dots, \theta'_{K'}$ sont les arguments des valeurs propres de $A_{>1}$, alors $\phi_{>1}(n)$ est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$\lambda^n n^\ell \sum_{k \le K'} c_k \cos(n \cdot 2\pi\theta'_k + \psi_k),$$

où $\lambda > 1$, $\ell \in \mathbb{N}$, $K' \in \mathbb{N}^*$ et où $c_1, \dots, c_{K'}$, $\psi_1, \dots, \psi_{K'} \in \mathbb{R}$.

Rappelons que le poids d'un nombre algébrique est le plus grand des modules des coefficients de son polynôme minimal (lequel est supposé à coefficients entiers et premiers entre eux dans leur ensemble). Le résultat suivant est tiré de [1, p. 22] :

THÉORÈME 3.1. — *Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (resp. $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$) un élément de $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{C}^{n+1}$) dont toutes les coordonnées sont des nombres algébriques de degré au plus d et de poids au plus A (resp. B, où $B \ge 2$). Donnons-nous une détermination du logarithme dans $\mathbb{C}$, et posons*

$$\Lambda := \beta_0 + \beta_1 \log(\alpha_1) + \cdots + \beta_n \log(\alpha_n).$$

Il existe un réel $C = C(n, d, A) > 0$ (dépendant de la détermination du logarithme) tel que, si $\Lambda \ne 0$, alors $|\Lambda| > B^{-C}$.

On en tire le résultat suivant, où l'on appelle *argument* du nombre complexe $e^{i2\pi\theta}$ le réel θ :

PROPOSITION 3.2. — *Soit M une matrice (d,d) à coefficients entiers, dont toutes les valeurs propres sont de module* 1, *soient $d' \in \mathbb{N}^*$, $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{d'})$ un vecteur de $\mathbb{R}^{d'}$ constitué d'arguments de valeurs propres de M. Si Θ est d'-irrationnel, alors $\eta(\Theta) < +\infty$.*

Nous pouvons à présent démontrer le théorème 1.4. Nous avons vu plus haut que, pour tout n, $\phi_1(n)$ s'exprime comme combinaison linéaire de termes de la forme $b_n^{(j)} = h_n^{(j)} F^{(j)}(n\Theta)$, où $(h_n^{(j)})_n$ est polynomial en n pour tout j, $F^{(j)}$ analytique $\mathbb{Z}^d$-périodique et $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_K)$. Si Θ est K-irrationnel, alors les fonctions $F^{(j)}$ et les suites $(h_n^{(j)})_n$ vérifient les conditions qui leurs sont assignées dans la proposition 3.1. Il en va de même si l'on adjoint les termes de $\phi_{>1}(n)$, qui s'écrivent $h_n^{(j')} F^{(j')}(n\Theta')$, avec $\Theta' = (\theta'_1, \ldots, \theta'_{K'})$, $(h_n^{(j')})_n$ à croissance exponentielle et $(h_n^{(j')}/h_n^{(j'+1)})_n$ à décroissance polynomiale.

Si Θ est K-irrationnel, alors $\eta(\Theta) < \infty$ d'après la proposition, et ne reste alors qu'à appliquer la proposition 3.1.

Supposons donc Θ K-rationnel, et notons $\widetilde{\Theta} \in \mathbb{R}^{\tilde{d}}$ (où $\tilde{d} < K$) un vecteur extrait de Θ, dont les coordonnées engendrent, avec l'unité, un $\mathbb{Q}$-espace contenant tous les θ_j. On suppose $\tilde{d}$ minimal, donc $\widetilde{\Theta}$ est $\tilde{d}$-irrationnel. D'après la proposition 3.2, $\eta(\widetilde{\Theta}) < \infty$.

Pour chaque θ_j, il existe un entier $p_j > 0$ tel que $p_j\theta_j$ mod. 1 soit combinaison linéaire à coefficients entiers des coordonnées de $\widetilde{\Theta}$. On note p le plus petit commun multiple des p_j.

Puisque, pour tout j, $F^{(j)}(n\Theta)$ s'écrit sous la forme

$$\sum_{k<K} c_k \cos(n \cdot 2\pi\theta_k + \psi_k),$$

pour tout entier naturel $r < p$ fixé, la quantité $F^{(j)}((ap+r)\Theta)$ se réécrit comme combinaison linéaire d'images par des fonctions trigonométriques d'expressions du type

$$2\pi a\Big(\sum_{i<\tilde{d}} q_i\theta_i\Big) + \widetilde{\psi}_j,$$

où les q_i sont des entiers fixes et où $\widetilde{\psi}_j$ ne dépend que de r.

Sur chaque sous-suite arithmétique de raison p et de premier terme r entier inférieur à p, on peut alors envisager l'expression $F^{(j)}(n\Theta)$ comme de la forme $\widetilde{F}_r^{(j)}(n\widetilde{\Theta})$. Par ailleurs, la fonction $\widetilde{F}_r^{(j)}$ vérifie les hypothèses de la proposition 3.1. On applique alors cette même proposition le long de chacune de ces sous-suites arithmétiques et on conclut avec le lemme 2.1.

Le théorème 1.4 est démontré.

3.3. Démonstration du théorème 1.5.

Nous ne considérons que le cas $p = 2$, qui contient toute la généralité nécessaire. On renomme A la matrice A_1 et B la matrice A_2. De même, $f := f_1$ et $g := f_2$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz (ou de Hölder dans le cas $p > 2$) et le théorème ergodique permettent d'obtenir une inégalité maximale (*cf.* [10]), de laquelle on déduit, par des arguments classiques (*cf.* par exemple [5]) que l'ensemble des fonctions f et g pour lesquelles les moyennes (*) convergent est un fermé de L^2. Il suffit donc, par densité et bilinéarité, d'étudier les moyennes (*) lorsque f et g sont des caractères :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2i\pi(x,p)} \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{2i\pi(x,q)},$$

où p, $q \in \mathbb{Z}^d$. Les moyennes (*) s'écrivent alors

$$\frac{1}{N}\sum_{n<N} \mathrm{e}^{2i\pi(x,{}^tA^np+{}^tB^nq)}.$$

Posons :

$$C := \begin{pmatrix} {}^tA & 0 \\ 0 & {}^tB \end{pmatrix}.$$

Pour tout vecteur unitaire v de $\mathbb{R}^d$, donnons-nous une forme linéaire ϕ_v sur l'espace des matrices $(2d, 2d)$ à coefficients réels pour laquelle, quel que soit n, $\phi_v(C^n) = (v, {}^tA^np + {}^tB^nq)$. D'après le théorème 1.4 appliqué à C, la suite des moyennes $N^{-1}\sum_{n<N} \mathrm{e}^{2i\pi t\phi_v(C^n)}$ converge pour presque tout t. On conclut alors avec le théorème de Fubini.

4. Démonstration du théorème 1.1

Soient c, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour tout n, $n^{-\alpha} \le |a_n| \le c$. Soit $\lambda > 1$ tel que $h_{n+1}/h_n < \lambda$ pour tout n. On prend $h_1 = 1$ et, pour tout $N > 0$, on pose :

$$A_N := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : 0 \le m < n < N,\ \lambda^{n-m} > n^{2\alpha}\},$$
$$A'_N := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : 0 \le m < n < N,\ \lambda^{n-m} \le n^{2\alpha}\}.$$

Si $(m,n) \in A_N$, alors il existe n_0 et $c' > 0$ tels que $|h_na_n - h_ma_m| \ge c'\lambda^n$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A'_N) &= \mathrm{Card}\left(\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : n - 2\alpha\log_\lambda(n) \le m < n < N\}\right) \\ &\le \sum_{n<N} 2\alpha\log_\lambda(n) \le c''N\log(N),\end{aligned}$$

où $c'' > 0$.

On écrit alors :

$$\begin{aligned}
&\sum_{0\le m<n<N} \min\Big(1, \frac{1}{|h_n a_n - h_m a_m|}\Big)\\
&\qquad \le \sum_{(m,n)\in A_N} \min\Big(1, \frac{1}{|h_n a_n - h_m a_m|}\Big) + c'' N\log(N)\\
&\qquad \le \sum_{(m,n)\in A_N} \frac{1}{c'\lambda^n} + c'' N\log(N)\\
&\qquad \le \frac{1}{c'(1-\lambda)} N + c'' N\log(N).
\end{aligned}$$

On applique alors le corollaire du lemme 2.2, et le théorème 1.1 est démontré.

REMARQUE. — Toute sous-suite de $(\lambda^n/n^\alpha)_n$ est à croissance exponentielle, donc la suite $(t\lambda^n/n^\alpha)_n$ admet une distribution asymptotique modulo 1 le long de toute sous-suite t-presque partout, y compris le long des sous-suites de densité asymptotique nulle. En revanche, sous la seule contrainte $n^{-\alpha} \le a_n \le 1$ pour tout n et si Z est une partie quelconque de $\mathbb{N}$, la suite $(t\lambda^n a_n)_{n\in Z}$ n'admet pas, en général, de distribution asymptotique modulo 1 t-presque partout (*cf.* [10] pour un exemple).

5. Discrépance sur des familles

DÉFINITION. — *Soit $(u_n)_{n\ge 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{T}^d$. Pour tout $X \subset \mathbb{T}^d$, on pose $A(X,N) = \mathrm{Card}(n < N : u_n \in X)$. La* discrépance à l'ordre N *de la suite $(u_n)_n$ est la quantité*

$$D_N\big((u_n)_n\big) = \sup_{P\in\mathcal{P}} \Big(\Big|\frac{A(P,N)}{N} - \mu(P)\Big|\Big),$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des pavés de $\mathbb{T}^d$, c'est-à-dire des parties de $\mathbb{T}^d$ s'écrivant comme produit de d intervalles de $\mathbb{T}^1$.

On note $D_N(\Theta)$ la valeur $D_N((n\Theta)_{n\ge 0})$. Le translaté d'un pavé de $\mathbb{T}^d$ étant un pavé de $\mathbb{T}^d$, on a $D_N(\Theta) = D_N(((n+n_0)\Theta)_{n\ge 0})$ pour tout $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Les étapes de démonstration du résultat suivant sont données dans [6, chap. 2, exercice 3.17]. Une preuve détaillée est exposée dans [10].

THÉORÈME 5.1. — *Soit Θ de type diophantien η fini. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:*

$$D_N(\Theta) = O\big(N^{-1/(d(\eta-1+\varepsilon)+1)}\big).$$

Dans la suite de cette section, on se donne une fois pour toutes une suite $(u_n)_n$ d'éléments de I, dont on note D_N la discrépance à l'ordre N. On pose, pour tout $X \subset I$,

$$D_N(X) = \left| \frac{A(X,N)}{N} - \mu(X) \right|$$

et, si $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble de l'ensemble des parties de I, on pose

$$D_N(\mathcal{X}) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \big(D_N(X) \big).$$

Ainsi, $D_N(\mathcal{P}) = D_N$.

DÉFINITIONS. — *Si G est une hypersurface de I et Λ un vecteur de la base canonique $\mathcal{B}$, on dit que G est un graphe* orienté suivant la direction Λ *s'il existe une fonction f d'un ouvert d'un plan orthogonal à Λ, à valeurs dans une droite parallèle à Λ et dont G soit le graphe.*

On note T_Λ^t la translation de vecteur $t\Lambda$. Soit $G \subset I$ un graphe orienté suivant le vecteur $\Lambda \in \mathcal{B}$. On pose

$$O^+ := \Big(\bigcup_{t>0} T_\Lambda^t(G) \Big) \cap I \quad \textit{et} \quad O^- := \Big(\bigcup_{t<0} T_\Lambda^t(G) \Big) \cap I.$$

Si G est un graphe orienté suivant le vecteur $\Lambda \in \mathcal{B}$ et si C est un pavé, on dit que G sépare *C lorsque $(G \cup O^+ \cup O^-) \cap C = C$. Les ouverts $O^+ \cap C$ et $O^- \cap C$ sont les ouverts* de C associés à G. *Un ouvert O est dit* associé au graphe G *lorsqu'il existe un pavé C tel que O soit ouvert de C associé à G. Si K est un réel positif, $\mathcal{G}_K$ est l'ensemble des ouverts associés à des graphes lipschitziens, de constante de Lipschitz uniformément majorée par K.*

Enfin, si r est un entier positif, les pavés cubiques de côté $1/r$ définis par le réseau $(1/r)\mathbb{Z}^d$ dans I sont les r-cubes.

Nous allons montrer le résultat suivant, en nous inspirant de [6, § 2, th. 1.6] :

THEORÈME 5.2. — *Il existe une constante $c = c(d,K)$ telle que :*

$$D_N(\mathcal{G}_K) \le c D_N^{1/d}.$$

Démonstration. — Soit $X \in \mathcal{G}_K$, défini par un graphe G orienté suivant $\Lambda \in \mathcal{B}$ et par le pavé C. Nous utiliserons le résultat suivant : si $P_1 \subset X \subset P_2$, alors

$$D_N(X) \le \max\big(D_N(P_1), D_N(P_2)\big) + \mu(P_2 \backslash P_1).$$

Soit $r \in \mathbb{N}^*$, soit P_1 (resp. P_2) la réunion des r-cubes inclus dans X (resp. intersectant X). On a $P_1 \subset X \subset P_2$ et, par définition de $X \in \mathcal{G}_K$, si deux r-cubes

H et H' de P_1 (resp. de P_2) sont tels que $H' = T_\Lambda^t(H)$ pour un $t \in \mathbb{R}$, alors tous les r-cubes de la forme $T_\Lambda^s(H)$ pour $s \in [0,t]$ appartiennent également à P_1 (resp. P_2). En réunissant ces r-cubes, il vient que P_1 (resp. P_2) s'écrit comme la réunion d'au plus r^{d-1} parallèlépipèdes rectangles deux à deux disjoints, orientés suivant la base canonique et tronqués lorsqu'ils rencontrent la frontière de C ; on note G_1^u (resp. G_2^u) ces parallèlépipèdes, où u est un entier compris entre 1 et un entier majoré par r^{d-1} (et l'on suppose que $G_1^u \subset G_2^u$ pour tout u). Ainsi, $D_N(P_1) \le r^{d-1} D_N$ et $D_N(P_2) \le r^{d-1} D_N$.

Sans diminuer la généralité, on suppose Λ vertical. L'ensemble $P_2 \backslash P_1$ est la réunion des $G_2^u \backslash G_1^u$. Ces ensembles sont des parallèllépipèdes rectangles orientés suivant Λ (et éventuellement tronqués s'ils rencontrent le bord de C). Soient Q l'un de ces parallélépipèdes, $p(Q)$ le nombre de r-cubes dont il est la réunion, B le projeté de Q sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ parallèlement à Λ, et f la restriction à Q de l'application dont G est le graphe.

En considérant les r-cubes extrémaux de Q, on trouve y, $z \in B$, tels que

$$\frac{p(Q) - 2}{r} \le \left|f(y) - f(z)\right|.$$

Puisque y, $z \in B$, on a $\|y - z\| \le \sqrt{d-1}/r$. Le graphe étant de constante de Lipschitz au plus K, on en tire

$$p(Q) \le 2 + K\sqrt{d-1},$$

donc $\mu(Q) \le (2 + K\sqrt{d-1}\,) r^{-d}$ et donc

$$\mu(P_2 \backslash P_1) \le (2 + K\sqrt{d-1}\,) \cdot r^{-1}.$$

En conséquence, $D_N(G) \le r^{d-1} D_N + (2 + K\sqrt{d-1}\,) \cdot r^{-1}$: il suffit alors de prendre pour r la partie entière de $D_N^{-1/d}$.

Le théorème est démontré.

6. Démonstration du théorème 1.3

Dans tout ce qui suit, nous nous plaçons dans le cas où $h_n = n$ et où $h'_n = \varepsilon_n n^a$, avec $|\varepsilon_n| \le 1$ et $a \in]0,1[$. Nous ferons les remarques nécessaires aux endroits de la preuve où le cas général nécessite quelques aménagements.

On note $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = \frac{\|x\|}{\|\Theta\|} F(x) + \varepsilon_x \cdot \Big(\frac{\|x\|}{\|\Theta\|}\Big)^a,$$

où, par définition, $\varepsilon_x = \varepsilon_{E(\|x\|/\|\Theta\|)}$, E désignant la fonction partie entière. Il nous faut étudier la distribution asymptotique modulo 1 de la suite $(\mathrm{tg}(n\Theta))_n$.

Dans la suite, on confond F avec sa restriction à I, et $Y \cup F^{-1}(0)$ avec l'ensemble $(Y \cup F^{-1}(0)) \cap I$. Par hypothèse, Y est un compact négligeable de I. On note R l'ensemble des points de $I \backslash Y$ réguliers pour F.

Pour tout réel s, soit X_s l'intérieur de l'ensemble $F^{-1}(s) \backslash Y$. Puisque I est de mesure finie, l'ensemble

$$\mathcal{S} := \{s \in \mathbb{R} : X_s \neq \emptyset\}$$

est au plus dénombrable. On pose

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in K} \{s_k\},$$

où K est un intervalle de $\mathbb{N}$ (fini, infini, ou vide). Si l'ouvert X_0 est non vide, on impose à K de contenir 0 et l'on choisit s_0 nul. On pose enfin

$$W = \chi_R^\Theta \quad \text{et} \quad W_k = \chi_{X_{s_k}}^\Theta$$

pour tout $k \in K$.

Puisque Y est compact négligeable, sa frontière est négligeable et, d'après le lemme 2.4, $W \bigcup_{k \in K} W_k = \mathbb{N}$ (à une partie de densité asymptotique nulle près).

Soit $Z \in P^+(\mathbb{N}) \cap P_W(\mathbb{N})$ vérifiant les hypothèses du théorème 1.3. Pour tout $k \in K$ non nul tel que $W_k \cap Z$ est infini, le lemme métrique d'équidistribution donne que la suite

$$\big(\mathrm{tg}(n\Theta)\big)_{n \in W_k \cap Z} = (ts_k n + \varepsilon_n n^a)_{n \in W_k \cap Z}$$

est équidistribuée modulo 1 t-presque partout. Si $0 \in K$ et si $\mathrm{da}(Z \cap W_0) > 0$, alors, d'après l'une des hypothèses, la suite $(\mathrm{tg}(n\Theta))_{n \in W_0 \cap Z}$ admet une distribution asymptotique modulo 1 t-presque partout.

Puisque $F_{|I \backslash Y}$ est constante au voisinage de ses points critiques, la frontière de R, et celle de chacun des X_{s_k}, est incluse dans Y. D'après le lemme 2.4, on a donc $\mathrm{da}(W) = \mu(R) =: z$, et $\mathrm{da}(W_k) = \mu(X_{s_k}) =: z_k$ pour tout $k \in K$. On a

$$z + \sum_{k \in K} z_k = 1.$$

On exclut le cas trivial où $\mathrm{da}(W \cap Z) = 0$, et donc, puisque $Z \in P_W(\mathbb{N})$, $\mathrm{dai}(W \cap Z) > 0$. La conclusion sera donc donnée par le lemme 2.1, sous réserve que nous montrions que la suite $(\mathrm{tg}(n\Theta))_{n \in W \cap Z}$ est équidistribuée modulo 1 t-presque partout.

D'après le lemme 2.3, il suffit de montrer que, pour presque tout réel t, il existe une suite $(Z_m)_m$ de parties de $W \cap Z$, telles que $\mathrm{da}_{W \cap Z}(Z_m)$ tende vers 1 et telles que, pour tout m, la suite $(\mathrm{tg}(n\Theta))_{n \in Z_m}$ soit équidistribuée modulo 1 t-presque partout.

D'après le lemme 2.2, puisque $\mathrm{dai}(Z \cap W) > 0$, il nous suffit de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 6.1. — *Il existe une suite d'ensembles $Z_m \subset W \cap Z$ telle que* $\mathrm{dai}_{W\cap Z}(Z_m)$ *tend vers* 1 *et telle que, pour tout* m :

$$S(N) := \sum_{i,j \in]N/\log^2(N),N[\cap Z_m} \min\Big(1, \frac{1}{|g(i\Theta)-g(j\Theta)|}\Big) = O\Big(\frac{N^2}{\log^2(N)}\Big).$$

6.1. Construction de $(Z_m)_m$ et réduction de l'expression de $S(N)$.

Dans ce qui suit, on suppose fixé $Z \in \mathcal{Z}$ tel que $\mathrm{dai}(Z \cap W) > 0$. Soient, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, des ensembles P_m et P'_m, recouvrant $I \backslash R$, réunions finies de cubes ouverts et vérifiant que

$$\mu\big(P_m \backslash (I \backslash R)\big) \leq \frac{1}{m} \quad \text{et} \quad \mathrm{Adh}(P'_m) \subset P_m.$$

Posons alors

$$Z_m := \big\{n \in Z : \{n\Theta\} \notin P_m\big\}.$$

Puisque les P_m sont de frontière négligeable, on montre que $\mathrm{dai}_{W\cap Z}(Z_m)$ converge vers 1.

Dans toute la suite, m est fixé, et on note F_m la restriction de F à $I \backslash P_m$. La fonction F_m est minorée en module par une valeur strictement positive notée v. Enfin, on note K la constante de Lipschitz de F_m : pour tous y, $z \in I \backslash P_m$,

$$\big\|F_m(y) - F_m(z)\big\| \leq K \cdot \|y - z\|.$$

Soit $b \in]0, a[$. Pour tout N plus grand qu'un certain N_0, on a :

$$N^a < \frac{vN}{4\log^2(N)}. \tag{1}$$

Pour tout $i \in [N/\log^2(N), N]$, on pose :

$$E_i := \big\{n\Theta : n \in]N/\log^2(N), N[\cap Z_m,\ |g(i\Theta) - g(n\Theta)| \leq N^b\big\},$$
$$E'_i := \big\{n\Theta : n \in]N/\log^2(N), N[\cap Z_m,\ |g(i\Theta) - g(n\Theta)| > N^b\big\}.$$

D'après l'inégalité (1), pour tout $i \in Z_m \cap]N/\log^2(N), N[$, les quantités $g(i\Theta) - 2N^a$ et $g(i\Theta) + 2N^a$ ont même signe, ce dont nous nous servirons en section 6.3.

On écrit alors, chacune des sommes ci-dessous s'entendant pour $n \in Z_m$ et pour $i \in Z_m \cap]N/\log^2(N), N[$:

$$\begin{aligned} S(N) \le \sum_i \sum_{n\Theta \in E_i} \min\Big(1, \frac{1}{|g(i\Theta) - g(n\Theta)|}\Big) \\ + \sum_i \sum_{n\Theta \in E_i'} \min\Big(1, \frac{1}{|g(i\Theta) - g(n\Theta)|}\Big) \\ \le \sum_i \mathrm{Card}(E_i) + \sum_i N^{1-b}. \end{aligned}$$

La dernière somme étant de l'ordre d'une puissance de N inférieure à 2, il ne reste qu'à estimer la première pour démontrer la proposition 6.1.

6.2. Étude des lignes de niveau de F_m.

Dans la suite, on note w un majorant de $|F_m|$.

Avec le théorème d'inversion locale, on montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un vecteur Λ de la base canonique $\mathcal{B}$ et un voisinage de x tels que toute ligne de niveau de F intersecte ce voisinage selon un graphe C^1 orienté suivant Λ. On en tire un recouvrement fini de $I \backslash P_m$ par des ouverts notés génériquement V tels qu'il existe $\Lambda \in \mathcal{B}$ pour lequel toute ligne de niveau de F intersectant V soit un graphe orienté suivant Λ.

Fixons $r \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que chaque r-cube C intersectant $I \backslash P_m$ soit tel qu'il existe un V contenant C et que $C \cap \mathrm{Adh}(P_m') = \emptyset$. On note $U_1, \dots, U_L$ les r-cubes intersectant $I \backslash P_m$ ainsi construits. Notons que la valeur de L dépend de celle de m mais, comme m a été fixé une fois pour toutes, L sera également dans toute la suite une valeur constante.

À l'aide de la formule de la co-aire (*cf.* [3]), on montre le résultat suivant (*cf.* [10]) :

LEMME 6.1. — *Il existe une constante $\alpha = \alpha(m)$ telle que*

$$\mu\big(F_m^{-1}(H)\big) \le \alpha |H|$$

pour tout intervalle H de $\mathbb{R}$, où $|H|$ désigne la longueur de H.

6.3. Estimation du cardinal de E_i.

Soit $n \in E_i$. On a

$$F_m(n\Theta) \in \big[(g(i\Theta) - N^b - n^a \varepsilon_n)/n, (g(i\Theta) + N^b - n^a \varepsilon_n)/n\big]$$

et, puisque $b < a$, cet intervalle est inclus dans

$$I_n := \big](g(i\Theta) - 2N^a)/n, (g(i\Theta) + 2N^a)/n\big[.$$

Nous avons noté plus haut que $g(i\Theta) - 2N^a$ et $g(i\Theta) + 2N^a$ sont de même signe : sans diminuer la généralité, on le suppose positif. À N fixé, la suite des bornes inférieures des I_n est donc décroissante, ainsi que celle des bornes supérieures. Un calcul montre alors (*cf.* [10]) :

LEMME 6.2. — *Fixons n, et soit k le plus petit entier naturel tel que $I_n \cap I_{n+k} \neq \emptyset$ (ou $k = N - n - 1$). Alors,*

$$\frac{(4/w)N^a}{\log^2(N)} \leq k \leq \frac{16}{v} N^a \log^2(N).$$

Notons que, dans le cas général où h_n est à croissance polynomiale, l'hypothèse de prescription de la croissance de $(h_n)_n$ est nécessaire pour pouvoir donner une estimation analogue.

Dans la suite, l'entier $n \in [N/\log^2(N), N[$ est fixé.

Par définition, quel que soit l'entier n', si $n'\Theta \in E_i$, alors $F_m(n'\Theta) \in I_{n'}$. Ainsi, pour tout $n' > n$, on a :

$$E_i \cap \{n\Theta, \dots, n'\Theta\} \subset \Big\{ j\Theta \in \{n\Theta, \dots, n'\Theta\} : \{j\Theta\} \in F_m^{-1}\Big(\bigcup_{n \leq p \leq n'} I_p \Big) \Big\}.$$

En particulier, pour le k du lemme 6.2 , on a $\bigcup_{p=n}^{n+k} I_p = I_n \cup I_{n+k}$, et donc :

$$\begin{aligned} (2) \qquad E_i \cap \{n\Theta, \dots, (n+k)\Theta\} & \\ \subset \big\{ j\Theta \in \{n\Theta, \dots, (n+k)\Theta\} &: \{j\Theta\} \in F_m^{-1}(I_n \cup I_{n+k}) \big\}. \end{aligned}$$

Si $M < M'$ sont deux entiers et X une partie de $\mathbb{T}^d$, on pose :

$$D_{M..M'}(X) = \Big| \frac{\operatorname{Card}(\{j \in [M, M'] \cap \mathbb{N} : \{j\Theta\} \in X\})}{M' - M + 1} - \mu(X) \Big|.$$

Par construction des U_ℓ, pour tout intervalle ouvert J, l'ensemble $(F_m)^{-1}(J) \cap U_\ell$ est l'intersection de deux éléments de $\mathcal{G}_K$. On en déduit alors que, pour une certaine constante $c > 0$ (théorème 5.2) :

$$D_{n..n+k}(F_m^{-1}(I_n \cup I_{n+k}) \cap U_\ell) \leq 2D_{n..n+k}(\mathcal{G}_K) \leq 2D_k(\mathcal{G}_K) \leq 2cD_k^{1/d}.$$

On en tire que, pour une constante c' donnée par le théorème 5.1 :

$$D_{n..n+k}\big(F_m^{-1}(I_n \cup I_{n+k})\big) \leq 2cLD_k^{1/d} \leq 2cc'Lk^{-1/d(d(\eta-1/2)+1)}.$$

REMARQUE. — Si l'on s'interroge sur l'équidistribution de $(tnF(v_n))_n$ où $(v_n)_n$ est une suite réelle, la méthode ne demeure opérante que si, d'une part, la discrépance de $(v_n)_n$ est à décroissance polynomiale et si, d'autre part,

$$D_N\big((v_n)_n\big) = D_N\big((v_{n+n_0})_n\big)$$

pour tout entier n_0.

D'autre part, d'après le lemme 6.1, on a :

$$\mu\big(F_m^{-1}(I_n \cup I_{n+k})\big) \le \frac{2\alpha \cdot 4N^a}{n} \le 8\alpha N^{a-1}\log^2(N).$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}&\big(\{j \in [n, n+k] : \{j\Theta\} \in F_m^{-1}(I_n \cup I_{n+k})\}\big)\\ &\le 2cc'Lk^{1-1/d(d(\eta-1/2)+1)} + k\cdot 8\alpha N^{a-1}\log^2(N).\end{aligned}$$

Avec les estimations du lemme 6.2 et l'inclusion (2), on a donc :

$$\begin{aligned}E_i &\cap \big\{n\Theta, \dots, (n + (4/w)N^a/\log^2(N))\Theta\big\}\\ &\subset E_i \cap \big\{n\Theta, \dots, (n+k)\Theta\big\}\\ &\qquad\subset \big\{j\Theta \in [n\Theta, (n+k)\Theta] : \{j\Theta\} \in F_m^{-1}(I_n \cup I_{n+k})\big\},\end{aligned}$$

d'où, pour une certaine constante $\tilde{c}$, et en posant $\eta' = 1 - 1/d(d(\eta - \frac{1}{2})) + 1$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}&\big(E_i \cap \{n\Theta, \dots, (n + (4/w)N^a/\log^2(N))\Theta\}\big)\\ &\le 2cc'Lk^{\eta'} + k\cdot 8\alpha N^{a-1}\log^2(N)\\ &\qquad \le \tilde{c}\big[N^{a\eta'}\log^{2\eta'}(N) + N^{2a-1}\log^4(N)\big].\end{aligned}$$

En sommant sur tous les intervalles de la forme

$$\big[j\cdot(4/w)N^a/\log^2(N), (j+1)\cdot(4/w)N^a/\log^2(N)\big]$$

intersectant $[N/\log^2(N), N]$, on obtient :

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}(E_i) &\le \frac{N}{(4/w)N^a/\log^2(N)}\tilde{c}\big[(N^{a\eta'}\log^{2\eta'}(N)) + N^{2a-1}\log^4(N)\big]\\ &\le (w\tilde{c}/4)\big[N^{a(\eta'-1)+1}\log^{2(\eta'+1)}(N) + N^a\log^6(N)\big].\end{aligned}$$

Puisque $\eta' < 1$, on a $a(\eta'-1)+1 < 1$. La quantité $\operatorname{Card}(E_i)$ est donc majorée par une puissance de N strictement inférieure à 1, à une constante multiplicative près indépendante de $i \in [N/\log^2(N), N[$.

Le théorème est démontré.

Remarque. — Dire que $\Theta \in \mathbb{R}^d$ est de type diophantien fini est exactement dire que Θ est de type au plus polynomial (*cf.* [6, chap. 2, déf. 3.3]). Le théorème 5.1 peut être étendu pour donner une estimation de la discrépance à l'ordre N de la suite $(n\Theta)_n$ pour Θ de type au plus exponentiel, ce qui inclut certains vecteurs de Liouville. La décroissance de $D_N(\Theta)$ pour ces Θ est alors logarithmique en N, ce qui permet de majorer $\sum_{i<N}\operatorname{Card}(E_i)$ par le terme général d'une série de Bertrand (convergente).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAKER (A.). — *Transcendental Number Theory.* — Cambridge University Press, 1975.

[2] BEREND (D.), KOLESNIK (G.). — *Distribution modulo* 1 *of some oscillating sequences*, Israel J. of Math., t. **71**, n° 2, 1990.

[3] BÉRARD (P.), MEYER (D.). — *Inégalités isopérimétriques et applications*, Ann. Sci. École Normale Sup., t. **15**, série 4, 1982, p. 513–542.

[4] BILLINGSLEY (P.). — *Convergence of probability measures.* — Wiley, New York, 1968.

[5] GARSIA (A.). — *Topics in almost everywhere convergence.* — Markham Publishing Company, Chicago, 1970.

[6] KUIPERS (L.), NIEDERREITER (H.). — *Uniform distribution of sequences.* — Wiley-Interscience, New York, 1974.

[7] LESIGNE (E.). — *Loi des grands nombres pour des sommes de Riesz-Raïkov multidimensionnelles*, Comp. Math., t. **110**, 1998, p. 39–49.

[8] RAUZY (G.). — *Propriétés statistiques de suites arithmétiques.* — Presses Universitaires de France, 1976.

[9] RITTAUD (B.). — *Équidistribution presque partout modulo* 1 *de suites oscillantes*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **327**, série I, 1998, p. 339–342.

[10] RITTAUD (B.). — *Convergence ponctuelle de moyennes ergodiques non conventionnelles et distribution asymptotique de suites oscillantes.* — Thèse de doctorat, Université de Tours, 1999.

[11] THOMAS (A.), DUPAIN (Y.). — *Sous-suites équiréparties d'une suite donnée*, Acta Arit., t. **26**, 1975, p. 285–292.