BULLETIN DE LA S. M. F.

RAPHAËL DANCHIN

# Persistance de structures géométriques et limite non visqueuse pour les fluides incompressibles en dimension quelconque

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 127, nº 2 (1999), p. 179-227

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1999__127_2_179_0>

*Bull. Soc. math. France,*
127, 1999, p. 179–227.

# PERSISTANCE DE STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES ET LIMITE NON VISQUEUSE POUR LES FLUIDES INCOMPRESSIBLES EN DIMENSION QUELCONQUE

PAR RAPHAËL DANCHIN

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on s'intéresse à la limite non visqueuse du système de Navier-Stokes incompressible en dimension $d$. On suppose que le tourbillon initial a des propriétés de régularité stratifiée (qui généralisent de façon naturelle la structure de poche de tourbillon). On prouve la persistance de cette régularité stratifiée localement en temps et uniformément par rapport à la viscosité, ainsi que des estimations uniformes de la norme lipschitzienne du champ de vitesse. On obtient alors un résultat de convergence forte vers les solutions du système d'Euler avec même donnée initiale, lorsque la viscosité tend vers zero.

ABSTRACT. — PERSISTENCE OF GEOMETRIC STRUCTURES AND INVISCID LIMIT FOR INCOMPRESSIBLE FLUIDS IN ANY DIMENSION. — We investigate here the inviscid limit for $d$-dimentional incompressible Navier-Stokes equations. We suppose the initial vorticity has striated regularity (which is a natural way of generalising the structure of vortex patches). We prove the persistence of striated regularity locally in time and uniformly with respect to the viscosity, together with uniform estimates on a fixed time interval for the lipschitzian norm of the velocity. This entails a result of strong convergence to the solution of Euler equations with the same initial datum, when viscosity tends to zero.

(*) Texte reçu le 10 février 1998, révisé le 16 juillet 1998, accepté le 20 novembre 1998.
R. DANCHIN, Laboratoire d'Analyse Numérique, Paris VI, 4 place Jussieu, 75252 Paris CEDEX 05. Email : danchin@ann.jussieu.fr

Classification AMS : 35 Q 30, 76 D 05, 35 B 65.

Mots clés : poches de tourbillon, fluides visqueux, régularité conormale, limite non visqueuse.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1999/179/\$ 5.00

## Introduction

Considérons le système de Navier-Stokes incompressible en dimension quelconque $d \geq 2$ :

$$(\mathrm{NS}_\nu) \qquad \begin{cases} \partial_t v_\nu + v_\nu \cdot \nabla v_\nu - \nu \Delta v_\nu = -\nabla P_\nu, \\ \operatorname{div} v_\nu = 0, \\ v_\nu(0) = v^0. \end{cases}$$

Dans le système précédent, la viscosité $\nu$ est une constante strictement positive, la vitesse $v_\nu(t,x)$ est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$ dépendant du temps $t \geq 0$ et la pression $P_\nu(t,x)$ est un scalaire. On considèrera également le système d'Euler que l'on notera (E) et qui consiste à faire $\nu = 0$ dans $(\mathrm{NS}_\nu)$. On s'intéresse ici aux solutions de $(\mathrm{NS}_\nu)$ dans $\mathbb{R}^d$ entier, c'est-à-dire que $x$ décrit tout $\mathbb{R}^d$.

Au champ $v_\nu$, on associe une matrice antisymétrique $\Omega_\nu$, appelée *matrice tourbillon* et définie par

$$(\Omega_\nu)^i_j = \partial_j v^i_\nu - \partial_i v^j_\nu.$$

À partir de $(\mathrm{NS}_\nu)$, il est facile de montrer que $\Omega_\nu$ est solution de

$$(\mathrm{T}_\nu) \qquad \begin{cases} (\partial_t + v_\nu \cdot \nabla)\Omega_\nu - \nu \Delta \Omega_\nu = -\Omega_\nu \cdot \nabla v_\nu - {}^t\nabla v_\nu \cdot \Omega_\nu, \\ \Omega_\nu(0) = \Omega^0. \end{cases}$$

De la définition de $\Omega_\nu$, on obtient

$$(\mathrm{BS}) \qquad \Delta v^i_\nu = \sum_{j=1}^d \partial_j \left(\Omega_\nu\right)^i_j.$$

Grâce à (BS), la connaissance de la matrice tourbillon permet de reconstruire $v_\nu$ à un polynôme harmonique près. Si l'on suppose de plus que $v_\nu$ est somme finie de champs à coefficients dans $L^{p_i}$ ($p_i \in [1,+\infty[$), et que $\Omega_\nu$ est dans $L^q$ pour un $q < d$, on peut inverser le laplacien. Le champ $v_\nu$ est alors déterminé de manière unique par la *loi de Biot-Savart* :

$$(\mathrm{BS}') \qquad v^i_\nu(x) = c_d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x^k - y^k}{|x-y|^d} (\Omega_\nu)^i_k(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{avec} \quad c_d = \frac{2\pi^{d+1/2}}{\Gamma\big(\frac{1}{2}(d+1)\big)},$$

où l'on a adopté la convention d'Einstein pour la sommation sur les indices répétés.

Dans le cas particulier de la dimension 2, le second membre de $(\mathrm{T}_\nu)$ est nul. Il en résulte que, pour un fluide non visqueux (*i.e.* $\nu = 0$) ayant un champ de vitesse suffisamment régulier, le tourbillon est constant le long des lignes de flot.

Ceci entraîne notamment la stabilité des structures de type *poche de tourbillon* (ou *vortex patch* en anglais) où l'on suppose que $\Omega^0$ est la fonction caractéristique d'un domaine borné $D^0$ (voir [Yu]).

Dans [Ch2], J.-Y. Chemin prouve que la régularité de la frontière de la poche est préservée pour tout temps si l'on suppose que $\partial D^0$ est dans une classe de Hölder $C^r$ avec $r \in \,]1,+\infty]\backslash\mathbb{N}$. Il montre également une propriété plus générale de persistance de la régularité stratifiée pour le système d'Euler incompressible en dimension deux (voir également [Se]).

Toujours en dimension 2, nous nous sommes intéressés dans [D2] à la convergence des solutions de $(\mathrm{NS}_\nu)$ vers celles de

$$
\text{(E)} \qquad \begin{cases} \partial_t v + v\cdot\nabla v = -\nabla P, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v(0) = v^0, \end{cases}
$$

lorsque $\Omega^0$ est la fonction caractéristique d'un domaine borné régulier ou, plus généralement, possède des propriétés de régularité stratifiée. Nous avons établi des bornes uniformes en $\nu$ sur la norme lipschitzienne de la vitesse, ainsi qu'un résultat de convergence pour tout temps de $v_\nu$ vers $v$, en un sens qui conserve la structure stratifiée. Notons que pour des raisons techniques qui apparaîtront clairement dans cet article aussi (*cf.* remarque 1.7), nous avons dû abandonner le cadre des espaces de Hölder. Les résultats démontrés correspondent en fait au cas de poches de tourbillon à frontière dans des classes de Besov $B^{1+r}_{a,\infty}$ pour un $a \in \,]2,+\infty[$ et $r \in \,]2/a, 1[$.

Dans cet article, on se propose de généraliser tout ceci au cas de la dimension $d \geq 3$. Il ne faut cependant pas s'attendre à retrouver vraiment les résultats de la dimension 2. La question de l'existence globale pour (E) ou $(\mathrm{NS}_\nu)$ restant ouverte, nous devrons en effet nous contenter de résultats *locaux* en temps. Par ailleurs, même pour un fluide non visqueux, la structure de poche de tourbillon *stricto sensu* n'a aucune stabilité en dimension $d \geq 3$ (ceci est dû à la présence du terme supplémentaire dit de *stretching* au membre de droite de $(\mathrm{T}_\nu)$). Nous nous limiterons donc dans un premier temps à l'étude de la stabilité et de la convergence de structures stratifiées telles qu'elles sont définies dans [Ch2]. En reprenant les idées de P. Gamblin et X. Saint-Raymond (voir [GSR]), et de P. Serfati (voir [Se]), nous nous intéresserons ensuite à une structure de poche de tourbillon généralisée liée à des domaines dont la frontière est une hypersurface de classe $B^{1+r}_{a,\infty}$ avec $a > d$ et $r \in \,]d/a, 1[$).

Rappelons que dans le cas d'une donnée initiale mieux que lipschitzienne, on dispose déjà de résultats d'existence et d'unicité d'une solution régulière $v_\nu$ pour $(\mathrm{NS}_\nu)$ (resp. $v$ pour (E)) avec convergence forte de $v_\nu$ vers $v$ quand $\nu$ tend vers 0. Nous prendrons comme résultat de référence le théorème suivant dû à T. Kato et G. Ponce (voir [KP1] et [KP2]) :

THÉORÈME 0.1. — *Soient $\nu^* > 0$, $p \in ]1,+\infty[$ et $s > 1 + d/p$. Soit $v^0$ un champ de vecteurs à divergence nulle et à coefficients dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe un temps $T > 0$ tel que pour tout $\nu \in ]0,\nu^*]$, le système $(\mathrm{NS}_\nu)$ (resp. (E)) admette une unique solution $v_\nu$ (resp. $v$) dans $C([0,T];W^{s,p})$ et tel que de plus, $v_\nu$ tende vers $v$ dans $C([0,T];W^{s,p})$ lorsque $\nu$ tend vers 0.*

Ce théorème ne s'applique pas à des données initiales de type poche de tourbillon puisque le gradient de la vitesse n'est même pas continu. Nous verrons cependant dans la partie 3 que les hypothèses de régularité stratifiées sur la donnée initiale entraînent $v^0 \in W^{1,\infty}$ si bien que notre travail peut également être vu comme l'étude d'un cas limite du théorème de Kato et Ponce.

La partie essentielle de cet article consiste à prouver des estimations de $\|\nabla v_\nu\|_{L^\infty}$ indépendantes de $\nu$ sur un intervalle de temps fixe, ainsi qu'un résultat de persistance des structures stratifiées pour $(\mathrm{NS}_\nu)$ ou (E). Comme on dispose par ailleurs de la convergence $L^2$ de $v_\nu$ vers $v$ lorsque $v$ est à gradient borné (voir la proposition 1.5), on en déduit un résultat de convergence de $v_\nu$ vers $v$ pour la régularité stratifiée, similaire à celui obtenu en dimension deux mais local en temps (voir le théorème 1.1).

Dans le théorème 1.2, nous prouverons un résultat de convergence plus précis pour la régularité conormale par rapport à une hypersurface.

La troisième partie est consacrée à la preuve d'une estimation stationnaire pour le gradient de la vitesse lorsque le tourbillon a des propriétés de régularité stratifiée. Il s'agit en fait d'étendre le résultat correspondant de [GSR] au cas de la dimension quelconque.

Dans la quatrième partie, on prouve le théorème 1.1 de persistance et de convergence pour la géométrie stratifiée, ainsi que le résultat de convergence $L^2$ de la proposition 1.5.

Enfin, dans la dernière partie, nous établissons le résultat de persistance et de convergence pour la régularité conormale.

Nous avons mis en appendice un certain nombre de lemmes techniques afin d'alléger les parties précédentes.

REMERCIEMENTS. — L'auteur exprime sa reconnaissance au rapporteur anonyme qui lui a signalé une erreur grossière dans la première version de cet article.

## 1. Énoncé des résultats

### 1.1 Espaces conormaux et espaces stratifiés de type Besov

Nous commençons par définir les espaces de fonctions que nous utiliserons pour énoncer le théorème de propagation de régularité conormale. Ces espaces qui sont construits à partir d'espaces de Besov du type $B^r_{a,\infty}(\mathbb{R}^d)$ (que l'on notera simplement $B^r_a$), correspondent à des fonctions bornées qui sont « plus régulières que prévu » dans certaines directions données par une famille de champs de vecteurs de rang au moins $d-1$ en tout point.

Pour les espaces de Besov, nous adopterons provisoirement la définition suivante. Nous en verrons une autre (équivalente) dans la partie 2.

DÉFINITION 1.1. — *Soient $a \in [1, +\infty]$ et $r \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$ ; notons $k$ la partie entière de $r$. On dira qu'un élément $u$ de $W^{k,a}(\mathbb{R}^d)$ appartient à $B^r_a(\mathbb{R}^d)$ si*

$$\|u\|_{B^r_a} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial_\alpha u\|_{L^a} + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{h \neq 0} \frac{\|\partial_\alpha \tau_h u - \partial_\alpha u\|_{L^a}}{|h|^{r-k}} < +\infty$$

*où $\tau_h u(x) = u(x+h)$. Pour $r \in ]0,1[$, on notera*

$$B^{r-1}_a(\mathbb{R}^d) = \big\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\ u = u_0 + \partial_j v^j \quad \text{avec } v^j \in B^r_a(\mathbb{R}^d) \text{ et } u_0 \in L^a(\mathbb{R}^d) \big\}.$$

REMARQUE 1.1. — L'espace $\big(B^r_a, \|\cdot\|_{B^r_a}\big)$ est un Banach qui coïncide avec l'espace de Hölder usuel lorsque $r$ est positif non entier et $a = +\infty$. C'est une algèbre lorsque $r > d/a$.

REMARQUE 1.2. — On dispose de plus des résultats d'inclusion suivants : si $1 \leq a \leq b \leq \infty$, $B^r_a$ est continûment inclus dans $B_b^{r-d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}$ (voir par exemple [T]). En particulier, $B^r_a \hookrightarrow C^{r-\frac{d}{a}}$ lorsque $r - d/a \notin \mathbb{N}$. Les fonctions de $B^r_a$ sont donc continues lorsque $r > d/a$ et de classe $C^1$ lorsque $r > 1 + d/a$.

On va maintenant définir des espaces de Besov non isotropes à partir de champs de vecteurs peu réguliers. Cette approche trouve ses origines dans [A] et [Ch1]. Cependant les définitions données ici s'inspirent davantage de celles de [GSR] et [D2].

NOTATIONS. — *Si $X$ est un champ de vecteurs à coefficients dans $B^r_a$, on posera*

$$\|X\|_{B^r_a} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{1 \leq i \leq d} \|X^i\|_{B^r_a}.$$

*Si de plus ce champ est à divergence dans $B^r_a$, on écrira*

$$\widetilde{\|}X\|_{B^r_a} \stackrel{\text{déf}}{=} \|X\|_{B^r_a} + \|\operatorname{div} X\|_{B^r_a}.$$

*Pour un champ $X$ à coefficients et divergence dans $B^r_a$, on définit la dérivée d'une fonction bornée $u$ selon $X$ en posant*

$$X(x,D)u = \partial_i(X^i u) - u \operatorname{div} X.$$

*Par ailleurs, si $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille d'éléments d'un espace de Banach $(B, \|\cdot\|_B)$, on écrira*

$$|||f|||_B \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\lambda\in\Lambda} \|f_\lambda\|_B.$$

*Si $(A_1,\dots,A_{d-1})$ est un $(d-1)$-uplet de $\mathbb{R}^d$, on notera $A_1\wedge\dots\wedge A_{d-1}$ (ou parfois $\overset{d-1}{\wedge}(A)$) l'élément de $\mathbb{R}^d$ tel que*

$$\forall B \in \mathbb{R}^d, \quad \overset{d-1}{\wedge}(A)\cdot B = \det(A_1,\dots,A_{d-1},B).$$

*Enfin $\Lambda^m_k$ désignera l'ensemble des $k$-uplets strictement ordonnés d'éléments de $\{1,\dots,m\}$.*

Nous pouvons maintenant définir des espaces stratifiés de type Besov.

Définition 1.2. — *Soient $a \in \,]d,\infty[$ et $r \in \,]d/a, 1[$. Soit $m \in \mathbb{N}^\star$. On dira qu'une famille $X = (X_i)_{1\le i\le m}$ de champs de vecteurs est $(r,a)$-substantielle si les $X_i$ sont à coefficients et à divergence dans $B^r_a(\mathbb{R}^d)$ et*

$$I(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{\lambda\in\Lambda^m_{d-1}} \big|\overset{d-1}{\wedge}(X_\lambda)(x)\big|^{\frac{1}{d-1}} > 0.$$

*On note alors $B^r_a(X)$ l'espace des fonctions $u$ bornées sur $\mathbb{R}^d$ et telles que $X_i(x,D)u \in B^{r-1}_a(\mathbb{R}^d)$ pour tout $i \in \{1,\dots,m\}$, muni de la norme*

$$\|u\|_{B^r_{a,X}} \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(\frac{1}{I(X)}\Big)\Big(\|u\|_{L^\infty}\cdot \widetilde{|||}X|||_{B^r_a} + \big|\big|\big|X(x,D)u\big|\big|\big|_{B^{r-1}_a}\Big).$$

Comme cas particuliers d'espaces stratifiés, nous allons définir des espaces conormaux par rapport à des hypersurfaces à régularité dans une classe de Besov.

DÉFINITION 1.3. — *Soient $a \in [d, +\infty]$ et $r > d/a$.*

• *On dira qu'un fermé $\Sigma$ de $\mathbb{R}^d$ est une hypersurface de classe $B_a^{r+1}$ si il existe un voisinage $V$ de $\Sigma$ et une application $f \in B_a^{r+1}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\nabla f$ ne s'annule pas sur $V$ et $\Sigma = f^{-1}(0) \cap V$.*

• *On dira qu'un champ $X$ à coefficients $B_a^r$ est tangent à $\Sigma$ si $X \cdot \nabla f_{|\Sigma} \equiv 0$. On notera $\mathcal{T}_a^r(\Sigma)$ l'ensemble des champs de classe $B_a^r$ tangents à $\Sigma$.*

REMARQUE 1.3. — La définition de $\mathcal{T}_a^r(\Sigma)$ ne dépend pas de l'équation de $\Sigma$ choisie.

DÉFINITION 1.4. — *Soient $a \in [d, +\infty]$, $r \in ]d/a, 1[$ et $\Sigma$ une hypersurface compacte de classe $B_a^{r+1}$. On définit alors l'espace conormal associé à $\Sigma$, noté $B_{a,\Sigma}^r$ par*

$$B_{a,\Sigma}^r = \left\{u \in L^\infty \,;\ \forall X \in \mathcal{T}_a^r(\Sigma),\ \operatorname{div}(Xu) \in B_a^{r-1}\right\}.$$

Lorsque $a = +\infty$, on notera respectivement $C^r(X)$ et $C_\Sigma^r$ les espaces de la définition 1.2 et 1.4.

REMARQUE 1.4. — L'espace $C_\Sigma^r$ ainsi défini est contenu dans celui de [GSR] qui est l'ensemble des fonctions bornées telles que

$$\text{(i)} \qquad \forall X \in \mathcal{T}_\infty^r,\ (\operatorname{div} X = 0) \implies (\operatorname{div} Xu \in C^{r-1}),$$

$$\text{(ii)} \qquad \forall \epsilon \in ]0,1[, \quad \|u\|_{C^r(\Sigma_\epsilon^c)} \leq C\epsilon^{-r}.$$

Il n'est pas évident de savoir par quoi remplacer la condition (ii) dans le cas des espaces de Besov, ce qui explique pourquoi nous avons choisi une définition légèrement différente.

Pour terminer, signalons que l'espace $B_{a,\Sigma}^r$ contient la fonction caractéristique de l'ouvert borné délimité par l'hypersurface $\Sigma$. Plus généralement, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 1.1. — *Soit $D$ un ouvert borné à frontière $B_a^{1+r}$ avec $a \in ]d, +\infty]$ et $r \in ]d/a, 1[$. Alors pour toute fonction $\phi \in B_a^r$, on a*

$$1_D \phi \in B_{a,\Sigma}^r.$$

Nous renvoyons au lemme A.4 de l'appendice pour la démonstration de ce résultat.

### 1.2 Deux théorèmes de convergence.

Commençons par définir la notion de champ de vecteurs transporté par le flot.

PROPOSITION 1.2. — *Soient $v$ un champ de vecteurs lipschitzien et $\psi$ son flot, c'est-à-dire l'unique solution de l'équation*

$$\psi(t,x) = x + \int_0^t v\big(s, \psi(s,x)\big)\,\mathrm{d}s.$$

*Soient $X^0$ un champ de vecteurs de $B_a^r$ et*

$$X_t(x) \stackrel{\text{déf}}{=} X^0(x,D)\psi_t\big(\psi_t^{-1}(x)\big)$$

*le champ transporté de $X^0$ par le flot $\psi$ à l'instant $t$. Alors $X_t$ est solution de*

$$\text{(TG)} \qquad \begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla)X = X(x,D)v, \\ X_{|t=0} = X^0. \end{cases}$$

*Démonstration.* — Il suffit de dériver en temps la relation $X_t\big(\psi_t(x)\big) = X^0(x,D)\psi_t(x)$ et de revenir à la définition du flot. □

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de convergence pour la régularité stratifiée. Dans le théorème suivant, les quantités ayant $\nu$ en indice sont liées à $(\mathrm{NS}_\nu)$ si $\nu > 0$ et à (E) si $\nu = 0$, et on notera indifféremment $X_{t,\nu,\lambda}$ ou $X_{\nu,\lambda}(t)$ le champ transporté de $X_\lambda^0$ par le flot $\psi_\nu$ à l'instant $t$.

THÉORÈME 1.1. — *Soient $m \in \mathbb{N}^\star$, $a \in \,]d,+\infty[$ et $r \in \,]d/a,1[$. Soit $(X_\lambda^0)_{1\le\lambda\le m}$, une famille $(r,a)$-substantielle de champs de vecteurs. On suppose que le champ de vecteurs $v^0$ est à coefficients dans $H^1(\mathbb{R}^d)$, à divergence nulle et que son tourbillon $\Omega^0$ est dans $B_a^r(X^0)$.*

*Alors il existe une constante $C$ ne dépendant que de $d$, $m$, $a$ et $r$, et un temps $T$ vérifiant*

$$CT\|\Omega^0\|_{L^\infty\cap L^2}\log\Big(e + \frac{\|\Omega^0\|_{B^r_{a,X^0}}}{\|\Omega^0\|_{L^\infty\cap L^2}}\Big) \geq 1,$$

*tels que pour tout $\nu > 0$ (resp. pour $\nu = 0$), $(\mathrm{NS}_\nu)$ (resp. (E)) admette une unique solution $v_\nu$ avec donnée initiale $v^0$, dans*

$$L^\infty\big([0,T];\mathrm{Lip}\big) \cap C\big([0,T];H^1\big)$$

*uniformément en $\nu$. De plus, la famille $X_{t,\nu}$ transportée par le flot de $v_\nu$ reste $(r,a)$-substantielle et $\Omega_\nu(t)$ reste dans $B_a^r(X_{t,\nu})$ uniformément en $\nu$. Enfin, $v_\nu$ tend vers $v_0$ et $\psi_\nu - \mathrm{Id}$ tend vers $\psi_0 - \mathrm{Id}$ dans $L^\infty([0,T];C^{1-\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$, lorsque $\nu$ tend vers 0. Si $r' < r$, alors :*

- $X^0_\lambda(x,D)\psi_\nu$ *(resp.* $X_{\nu,\lambda}$, *resp.* $\operatorname{div} X_{\nu,\lambda}$) *tendent vers* $X^0_\lambda(x,D)\psi_0$ *(resp.* $X_{0,\lambda}$, *resp.* $\operatorname{div} X_{0,\lambda}$) *dans* $L^\infty([0,T];B^{r'}_a)$, *et*
- $X_{\nu,\lambda}(x,D)\Omega_\nu$ *tend vers* $X_{0,\lambda}(x,D)\Omega$ *dans* $L^\infty([0,T];B^{r'-1}_a)$.

Nous pouvons également énoncer une version conormale du théorème de convergence.

THÉORÈME 1.2. — *Soient* $a\in\,]d,+\infty[$ *et* $r\in\,]d/a,1[$. *Soit* $\Sigma^0$ *une hypersurface compacte de classe* $B^{r+1}_a$. *On suppose que le champ de vecteurs* $v^0$ *est dans* $H^1(\mathbb{R}^d)$, *à divergence nulle et que son tourbillon* $\Omega^0$ *est dans* $B^r_{a,\Sigma^0}$.

*Alors il existe un temps* $T$ *ne dépendant que des données initiales et tel que pour tout* $\nu>0$ *(resp. pour* $\nu=0$), $(\mathrm{NS}_\nu)$ *(resp.* (E)) *admette une unique solution* $v_\nu$ *dans* $L^\infty([0,T];\mathrm{Lip})\cap C([0,T];H^1)$ *avec donnée initiale* $v^0$. *Pour tout* $t\in[0,T]$ *et* $\nu\geq 0$,

$$\Sigma_{t,\nu}\overset{\text{déf}}{=}\psi_{t,\nu}(\Sigma^0)$$

*est une hypersurface compacte de classe* $B^{r+1}_a$, *et* $\Omega_\nu(t)$ *est dans* $B^r_{a,\Sigma_{t,\nu}}$. *Enfin,* $v_\nu$ *tend vers* $v_0$ *et* $\psi_\nu-\mathrm{Id}$ *tend vers* $\psi_0-\mathrm{Id}$ *dans* $L^\infty([0,T];C^{1-\epsilon})$ *pour tout* $\epsilon>0$ *lorsque* $\nu$ *tend vers* $0$. *De plus,* $\Sigma_{t,\nu}$ *tend vers* $\Sigma_{t,0}$ *au sens suivant. Soit* $(f^0=0)$ *une équation de classe* $B^{1+r}_a$ *de* $\Sigma^0$. *Posons*

$$f_{t,\nu}\overset{\text{déf}}{=}f^0\circ\psi^{-1}_{t,\nu}.$$

*Alors pour tout* $r'<r$, $f_\nu$ *tend vers* $f_0$ *dans* $L^\infty([0,T];B^{1+r'}_a)$ *lorsque* $\nu$ *tend vers* $0$.

REMARQUE 1.5. — En dimension $d\geq 3$, l'hypothèse $v^0\in H^1$ est automatiquement vérifiée dès que $\Omega^0\in L^p\cap L^\infty$ pour un $p<2d/(d+2)$ (c'est le cas par exemple si $\Omega^0\in B^r_a(X^0)$ est à support compact ou dans $L^1$). Ceci se démontre aisément à partir de (BS′).

REMARQUE 1.6. — Dans les théorèmes précédents, on établit l'existence d'un intervalle de temps commun pour Euler et Navier-Stokes quelle que soit la viscosité, sur lequel la solution de $(\mathrm{NS}_\nu)$ converge vers celle de (E) avec même donnée initiale. En revanche, si l'on suppose, toujours sous les hypothèses du théorème 1.1 ou 1.2, que $v$ est lipschitzienne jusqu'au temps $T'>T$, on ne sait pas montrer qu'il en est de même pour $v_\nu$ lorsque $\nu$ est suffisamment petit.

L'existence d'une solution à gradient borné pour un tourbillon initial dans $B^r_{a,\Sigma^0}$ résulte du théorème 1.1. On montrera en effet l'existence d'une famille $X^0$ $(r,a)$-substantielle et telle que $B^r_{a,\Sigma^0} \subset B^r_a(X^0)$. La preuve des autres résultats du théorème 1.2 : propagation de la régularité conormale et convergence de $\Sigma_{t,\nu}$ vers $\Sigma_{t,0}$, fera l'objet de la cinquième partie.

La démonstration du théorème 1.1 repose essentiellement sur une estimation stationnaire du gradient de la vitesse (proposition 1.3) et sur la proposition 1.4, relative aux équations de transport-diffusion dans les espaces de Besov et qui donne des estimations *a priori* indépendantes de la viscosité. La partie convergence du théorème se déduit alors par interpolation avec le résultat de convergence $L^2$ donné par la proposition 1.5.

L'estimation stationnaire suivante s'inspire d'un théorème de J.-Y. Chemin valable en dimension 2 (voir [Ch2]), d'un résultat de P. Gamblin et X. Saint-Raymond [GSR] valable en dimension 3. On le trouve avec la même généralité qu'ici mais sous une forme un peu différente, dans la thèse de P. Serfati [Se, chap. 4].

PROPOSITION 1.3. — *Soient $q \in [1,+\infty[$, $r \in ]0,1[$, $m \in \mathbb{N}^\star$ et $(X_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille $(r,\infty)$-substantielle de champs de vecteurs. Soit $p \in ]1,d[$. Alors il existe une constante $C$ ne dépendant que de $d, r, p$ et $m$ telle que pour tout champ de vecteurs $v \in L^q$, à divergence nulle, à gradient dans $L^p$ et à tourbillon dans $C^r(X)$, on ait*

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \leq C\Big(\|\Omega\|_{L^p} + \|\Omega\|_{L^\infty} \log\Big(e + \frac{\|\Omega\|_{r,X}}{\|\Omega\|_{L^\infty}}\Big)\Big).$$

Pour la démonstration du théorème suivant, nous renvoyons à [D2].

PROPOSITION 1.4. — *Soient $T > 0$ et $v$ un champ de vecteurs de $C^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ à divergence nulle et à dérivées spatiales bornées. Soient*

$$r \in ]-1,1[, \quad a \in [2,+\infty[, \quad \nu \geq 0,$$
$$(u,f) \in L^\infty\big([0,T], B^r_a(\mathbb{R}^d) \times B^r_a(\mathbb{R}^d)\big).$$

*Supposons qu'il existe un $\lambda > 0$ indépendant du temps tel que*

$$\operatorname{Supp} \widehat{g} \cap B(0,\lambda) = \emptyset$$

*et que $u$ vérifie*

$$(\partial_t + v\cdot\nabla)u - \nu\Delta u = f + \nu g.$$

*Alors il existe une constante $C$ ne dépendant que de $\lambda$, de $r$ et de $a$, telle que, si $V(t) = \int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^\infty}\, \mathrm{d}s$, on ait*

$$\big\|u(t)\big\|_{B^r_a} \leq C\Big(\big\|u(0)\big\|_{B^r_a} + \|g\|_{L^\infty([0,t];B^{r-2}_a)} + \int_0^t \mathrm{e}^{-CV(s)}\big\|f(s)\big\|_{B^r_a}\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{e}^{CV(t)}.$$

REMARQUE 1.7. — Lorsque $\nu = 0$, le résultat précédent demeure bien évidemment pour les espaces de Hölder (voir par exemple [Ch2]). La partie existence et régularité d'une solution pour le système d'Euler s'étend donc aux espaces de Hölder. Le théorème correspondant se trouve d'ailleurs dans [GSR] et [Se] dans le cas $d = 3$. Lorsque $\nu > 0$, on ne sait pas démontrer un analogue de la proposition 1.4 dans les espaces de Hölder, ce qui nous a amené à utiliser les espaces $B^r_a$ pour $a < \infty$.

Énonçons maintenant le résultat de convergence $L^2$ de $(\mathrm{NS}_\nu)$ vers (E).

PROPOSITION 1.5. — *Soit $v^0 \in H^1$. On suppose que* (E) *a une solution*

$$v \in L^\infty(\,]0,T[; L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(\,]0,T[\,; H^1(\mathbb{R}^d))$$

*avec donnée initiale $v^0$ telle que $\nabla v \in L^1(\,]0,T[\,; L^\infty(\mathbb{R}^d))$. Alors il existe une constante $C$ ne dépendant que de $d$ et telle que pour toute solution $v_\nu$ de* $(\mathrm{NS}_\nu)$ *appartenant à*

$$L^\infty(\,]0,T[\,; L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(\,]0,T[\,; H^1(\mathbb{R}^d)),$$

*on ait*

$$\|v_\nu - v\|_{L^2} \leq C\nu^{1/2}\|\Omega^0\|_{L^2} e^{C\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau}.$$

## 2. Décomposition de Littlewood-Paley, paraproduit et espaces de Besov

Définissons d'abord la décomposition de Littlewood-Paley (voir [Ch2] pour plus de détails) :

PROPOSITION 2.1. — *Soient*

$$\mathcal{C} = \left\{x \in \mathbb{R}^d,\ \tfrac{5}{6} \leq |x| \leq \tfrac{12}{5}\right\} \quad et \quad \mathcal{B} = \left\{x \in \mathbb{R}^d,\ |x| \leq \tfrac{6}{5}\right\}.$$

*Il existe deux applications à valeurs réelles, $\chi \in C_0^\infty(\mathcal{B})$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{C})$ telles que :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \chi(\xi) + \sum_{q\in\mathbb{N}} \varphi(2^{-q}\xi) = 1,$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \tfrac{1}{3} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{q\in\mathbb{N}} \varphi^2(2^{-q}\xi) \leq 1.$$

On définit alors des opérateurs $\Delta_p$ et $S_p$ de $\mathcal{L}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), C^\infty(\mathbb{R}^d))$ qui correspondent respectivement à des localisations en fréquences voisines de $2^p$ pour $\Delta_p$ et plus petites que $2^p$ pour $S_p$.

Plus précisément, soient $h = \mathcal{F}^{-1}\varphi$ et $\tilde{h} = \mathcal{F}^{-1}\chi$. On pose :

$$\Delta_p u = \begin{cases} 0 & \text{si } p \leq -2, \\ \chi(D)u = \tilde{h} \star u & \text{si } p = -1, \\ \varphi(2^{-p}D)u = 2^{pd}\displaystyle\int h(2^p y)u(x-y)\,\mathrm{d}y & \text{si } p \geq 0, \end{cases}$$

et

$$S_p u = \chi(2^{-p}D)u = \sum_{q \leq p-1} \Delta_q u = 2^{pd} \int \tilde{h}(2^p y)u(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Remarque 2.1. — La famille $(\Delta_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ est «presque» orthogonale au sens $L^2$. Plus précisément, si $u$ et $v$ appartiennent à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$|p-q| \geq 2 \implies \Delta_p\Delta_q u \equiv 0, \tag{2.1}$$

$$|p-q| \geq 4 \implies \Delta_q\big(S_{p-1}u\Delta_p v\big) \equiv 0, \tag{2.2}$$

$$\big(q \leq r-4 \text{ et } |p-r| \geq 2\big) \implies \Delta_p\big(\Delta_q u \Delta_r v\big) \equiv 0. \tag{2.3}$$

Définition 2.1. — *Pour $a \in [1,+\infty]$ et $r \in \mathbb{R}$, on note $B^r_a(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des distributions $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telles que*

$$\|u\|_{B^r_a} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_q 2^{qr}\|\Delta_q u\|_{L^a} < +\infty.$$

L'espace $\big(B^r_a(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{B^r_a}\big)$ est un Banach qui coïncide avec l'espace de la définition 1.1 lorsque $r \in\, ]-1,+\infty[\setminus\mathbb{N}$, avec équivalence des normes (voir [T]). Dans le cas particulier où $a = +\infty$, on note

$$C^r \stackrel{\text{déf}}{=} B^r_\infty$$

et on pose

$$\|u\|_r \stackrel{\text{déf}}{=} \|u\|_{B^r_\infty}.$$

L'espace $C^r$ coïncide avec l'espace de Hölder usuel lorsque $r$ est positif non entier. Si $r \in \mathbb{N}$, on préfèrera le noter $C^r_\star$ pour éviter les confusions avec l'espace des applications $r$ fois continûment différentiables. L'inclusion

$$\mathrm{Lip}_r \hookrightarrow C^r_\star$$

où $\mathrm{Lip}_r$ désigne l'espace des distributions $u$ bornées telles que $\partial^\alpha u$ soit bornée pour $|\alpha| \leq r$, est stricte.

REMARQUE 2.2. — On a le classique résultat d'interpolation suivant

$$\forall u \in B^s_a(\mathbb{R}^d) \cap B^t_a(\mathbb{R}^d),\ \forall \theta \in [0,1],$$
$$\|u\|_{B_a^{\theta s+(1-\theta)t}} \leq \|u\|^{\theta}_{B^s_a} \cdot \|u\|^{1-\theta}_{B^t_a}.$$

Le lemme suivant est une conséquence de la définition 1.1. Il montre que les fonctions suffisamment régulières opèrent à droite et à gauche dans les espaces de Besov. Ceci justifie *a posteriori* la définition des hypersurfaces de classe $B^{1+r}_a$.

LEMME 2.1. — *Soient* $a \in ]d,+\infty]$ *et* $r \in ]d/a, 1[$. *Supposons* $u \in B^{r+1}_a$, $F \in B^{r+1}_a$ *et* $F(0) = 0$. *Alors* $F \circ u \in B^{1+r}_a$. *Si* $a \in [1,+\infty]$, $r \in ]0,1[$, $\psi \in \mathrm{Lip}$ *est inversible et le jacobien de* $\psi^{-1}$ *est borné, alors* $u \circ \psi \in B^r_a$. *En particulier,*

$$\|u \circ \psi\|_{B^r_a} \leq C \max\bigl(1, \|\nabla\psi\|_{L^\infty}\bigr)\bigl(\|\det \nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}\bigr)^{\frac{1}{a}} \|u\|_{B^r_a}. \tag{2.4}$$

Rappelons maintenant quelques résultats élémentaires sur la décomposition de Littlewood-Paley. Le lecteur intéressé par la preuve de ces résultats pourra consulter par exemple [Ch2] et [D2].

LEMME 2.2. — *Soient* $u \in B^r_a$ *et* $\psi \in C^\infty_0$. *On suppose que* $\psi$ *est supportée dans une couronne* $\mathcal{C}(0, R_1, R_2)$. *Alors, il existe une constante* $C$ *ne dépendant que de* $r$, $R_1$ *et* $R_2$ *telle que*

$$\bigl\|\psi(2^{-q}D)u\bigr\|_{L^a} \leq C\|\mathcal{F}^{-1}\psi\|_{L^1} 2^{-qr}\|u\|_{B^r_a}.$$

DÉFINITION 2.2. — *On dira qu'une suite* $(u_q)_{q\geq -1}$ *d'éléments de* $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *est à fréquences dans des boules dyadiques* (*resp. couronnes dyadiques*) *s'il existe un réel* $R > 0$ (*resp. deux réels* $R_2 > R_1 > 0$), *tel(s) que*

$$\mathrm{Supp}(\hat{u}_q) \subset B(0, 2^q R) \quad \textit{pour } q \geq -1$$

(*resp.* $\mathrm{Supp}(\hat{u}_q) \subset \mathcal{C}(0, 2^q R_1, 2^q R_2)$ *pour* $\mathrm{Supp}(\hat{u}_{-1}) \subset B(0, 2^{-1}R_2)$ *et* $q \in \mathbb{N}$).

Le lemme suivant assure entre autres que la définition 2.1 des espaces de Besov ne dépend pas de la décomposition de Littlewood-Paley choisie.

LEMME 2.3.

• *Soit* $(u_q)_{q\geq -1}$ *à fréquences dans des boules dyadiques. On suppose qu'il existe* $r > 0$, $a \in [1,+\infty]$ *et une constante* $K \geq 0$ *tels que*

$$\forall q \geq -1, \quad \|u_q\|_{L^a} \leq K 2^{-qr}.$$

*Posons*

$$u = \sum_{q \geq -1} u_q.$$

*Alors $u \in B^r_a(\mathbb{R}^d)$ et il existe une constante $C \geq 0$ indépendante des $u_q$, de $a$ et de $r$ telle que*

$$\|u\|_{B^r_a} \leq \frac{C^{1+r}}{r} K.$$

• *Soit $(u_q)_{q \geq -1}$ à fréquences dans des couronnes dyadiques. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{R}$, $a \in [1, +\infty]$ et une constante $K \geq 0$ tels que*

$$\forall q \geq -1, \quad \|u_q\|_{L^a} \leq K 2^{-qr}.$$

*Posons*

$$u = \sum_{q \geq -1} u_q.$$

*Alors $u \in B^r_a(\mathbb{R}^d)$ et il existe une constante $C \geq 0$ indépendante des $u_q$, de $a$ et de $r$ telle que*

$$\|u\|_{B^r_a} \leq C^{1+|r|} K.$$

Définissons maintenant le paraproduit de J.-M. Bony (voir [B]). La présentation donnée ici s'inspire de [GR].

DÉFINITION 2.3. — *Soient $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On appelle paraproduit de $u$ par $v$, l'élément $T_u v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ défini par*

$$T_u v = \sum_q S_{q-1} u \Delta_q v.$$

*On notera $R(u,v)$ le reste de $u$ et $v$, défini par*

$$R(u,v) = \sum_q \Delta_q u \widetilde{\Delta}_q v \quad \text{où} \quad \widetilde{\Delta}_q = \Delta_{q-1} + \Delta_q + \Delta_{q+1}$$

*et on posera*

$$T'_u v = T_u v + R(u,v).$$

REMARQUE 2.3. — On a évidemment

$$\forall (u,v) \in \big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\big)^2, \quad uv = T_u v + T_v u + R(u,v).$$

La définition de paraproduit et de reste s'étend sans difficulté à un grand nombre d'espaces fonctionnels ; pour une étude systématique de l'opérance du reste et du paraproduit sur les espaces de Besov, on renvoie à [Ya]. Nous aurons seulement besoin des résultats suivants :

LEMME 2.4. — *Soient $a \in [1, +\infty]$ et $r \in \mathbb{R}$.*

- *L'opérateur $T$ est bilinéaire continu de $L^\infty \times B^r_a$ dans $B^r_a$. Si $t < 0$, il est également continu de $C^t \times B^r_a$ dans $B^{r+t}_a$ et de $B^t_a \times C^r$ dans $B^{r+t}_a$.*
- *L'opérateur $R$ est continu de $B^t_a \times C^r$ dans $B^{r+t}_a$ dès que $r + t > 0$. Plus précisément, il existe des constantes $C$ universelles telles que*

$$\forall r \in \mathbb{R}, \qquad \|T_u v\|_{B^r_a} \leq C^{|r|+1} \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{B^r_a}, \tag{2.5}$$

$$\forall r \in \mathbb{R},\ \forall t < 0, \quad \|T_u v\|_{B^{r+t}_a} \leq \frac{C^{|r+t|+1}}{-t} \|u\|_t \|v\|_{B^r_a}, \tag{2.6}$$

$$\forall r \in \mathbb{R},\ \forall t < 0, \quad \|T_u v\|_{B^{r+t}_a} \leq \frac{C^{|r+t|+1}}{-t} \|u\|_{B^t_a} \|v\|_r, \tag{2.6'}$$

$$\forall (r,t) \in \mathbb{R}^d,\ r + t > 0, \quad \|R(u,v)\|_{B^{r+t}_a} \leq \frac{C^{r+t+1}}{r+t} \|u\|_{B^t_a} \|v\|_r. \tag{2.7}$$

Le lemme suivant clarifie le comportement des opérateurs de Fourier homogènes dans les espaces de Besov et les propriétés de commutation du paraproduit avec de tels opérateurs.

LEMME 2.5. — *Soient $m \in \mathbb{R}$ et $R > 0$. Soit $f$ une application de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ homogène de degré $m$ en dehors de la boule $B(0, R)$. Il existe alors une constante $C$ ne dépendant que de $R$ telle que, pour tout réel $r$, pour tout $t < 1$ et pour tout $a \in [1, +\infty]$, on ait*

$$\big\|f(D)u\big\|_{B^{r-m}_a} \leq C^{|r|+|m|+1} \|u\|_{B^r_a}, \tag{2.8}$$

$$\big\|[T_u, \Delta_q]v\big\|_{L^a} \leq C 2^{-q(r+t)} \|\nabla u\|_{B^{t-1}_a} \|v\|_r, \tag{2.9}$$

$$\big\|[T_u, f(D)]v\big\|_{B^{r-m+t}_a} \leq \frac{C^{|r|+|m|+1}}{1-t} \|\nabla u\|_{B^{t-1}_a} \|v\|_r, \tag{2.10}$$

$$\big\|[T_u, f(D)]v\big\|_{B^{r-m+t}_a} \leq \frac{C^{|r|+|m|+1}}{1-t} \|\nabla u\|_{t-1} \|v\|_{B^r_a}, \tag{2.10'}$$

$$\big\|[T_u, f(D)]v\big\|_{B^{r-m+1}_a} \leq C^{|r|+|m|+1} \|\nabla u\|_{L^\infty} \|v\|_{B^r_a}. \tag{2.11}$$

REMARQUE 2.4. — On a

$$T_u v = T_u\big(1 - \chi(D)\big)v,$$

ce qui permet, d'après (2.8), de remplacer $\|v\|_{B^r_a}$ par $\|\nabla v\|_{B^{r-1}_a}$ dans les estimations sur le paraproduit.

DÉFINITION 2.4. — *Soient $X$ un champ de vecteurs à coefficients dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On définit formellement l'action du para-champ $T_X$ par*

$$T_X u = T_{X^i} \partial_i u.$$

Le lemme suivant montre que la régularité de $X(x, D)u$ est essentiellement donnée par celle de $T_X u$.

LEMME 2.6. — *Soient $X$, un champ de vecteurs à coefficients dans $B^r_a$ et $u \in C^s$. Alors on a :*

(2.12) $(s < 1 \text{ et } r + s > 1) \Longrightarrow$

$$\|T_X u - X(x, D)u\|_{B^{r+s-1}_a} \leq \frac{C^{|r|+|s|+1}}{(1-s)(r+s-1)} \|X\|_{B^r_a} \cdot \|\nabla u\|_{s-1},$$

(2.13) $(s < 0,\ r < 1 \text{ et } r + s > 0) \Longrightarrow$

$$\|T_X u - \operatorname{div} X u\|_{B^{r+s-1}_a} \leq \frac{C}{s(r+s)(r-1)} \|X\|_{B^r_a} \cdot \|u\|_s.$$

*Si de plus,* $\operatorname{div} X \in B^r_a$, *alors,*

(2.14) $(s < 1 \text{ et } r + s > 0) \Longrightarrow$

$$\|T_X u - X(x, D)u\|_{B^{r+s-1}_a} \leq \frac{C^{|r|+|s|+1}}{(r+s)(1-s)} \|\widetilde{X}\|_{B^r_a} \cdot \|\nabla u\|_{s-1}.$$

*La première et la dernière inégalités sont valables dans le cas $s = 1$ à condition de remplacer $\|\nabla u\|_{s-1}$ par $\|\nabla u\|_{L^\infty}$. La deuxième reste vraie pour $s = 0$ si on remplace $\|u\|_0$ par $\|u\|_{L^\infty}$.*

*Démonstration.* — Elle repose sur les lemmes 2.4 et 2.5 appliqués aux identités :

$$X(x, D)u - T_X u = R(X^i, \partial_i u) + T_{\partial_i u} X^i \qquad \text{pour (2.12)},$$

$$\operatorname{div} X u - T_X u = [\partial_i, T_{X^i}]u + \partial_i R(X^i, u) + \partial_i T_u X^i \qquad \text{pour (2.13)},$$

$$X(x, D)u - T_X u = \partial_i R(X^i, u) - R(\operatorname{div} X, u) + T_{\partial_i u} X^i \quad \text{pour (2.14)}.$$

REMARQUE 2.5. — Ceci prouve au passage que la définition 2.4 a un sens intrinsèque dans $B^{r+s-1}_a$ pour $X$ à coefficients dans $B^r_a$, $u \in C^s$ et $r + s > 0$. En effet, si $T$ et $\widetilde{T}$ sont les paraproduits associés à deux décompositions de Littlewood-Paley, on a, d'après l'inégalité (2.13),

$$\|T_X u - \widetilde{T}_X u\|_{B^{s+r-1}_a} \leq C \|X\|_{B^r_a} \cdot \|\nabla u\|_{s-1} \quad \text{si} \quad s < 0 \quad \text{et} \quad r < 1.$$

Rappelons enfin un résultat classique d'analyse harmonique (voir par exemple [St, p. 42 et p. 250]) :

LEMME 2.7. — *Soit $f$ une application de $C^\infty(\mathbb{R}^d\backslash\{0\})$ homogène de degré* 0. *Alors l'opérateur $f(D)$ défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par*

$$f(D)u(x) = (2\pi)^{-d}\int \mathrm{e}^{ix\cdot\xi} f(\xi)\,\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

*se prolonge par continuité sur tout $L^p$ pour $p \in\, ]1,+\infty[$. De plus, il existe $C \geq 0$ indépendante de $p$ telle que*

$$\forall u \in L^p(\mathbb{R}^d), \quad \big\|f(D)u\big\|_{L^p} \leq \frac{Cp^2}{p-1}\|u\|_{L^p}.$$

## 3. Estimation stationnaire du gradient de la vitesse

Dans cette partie, on démontre une estimation stationnaire pour le gradient de la vitesse, valable lorsque le tourbillon appartient à un espace stratifié $C^r(X)$. Comme il s'agit juste d'une généralisation facile du résultat de [GSR] au cas de la dimension $d \geq 2$ quelconque, nous indiquons principalement les modifications à apporter à la démonstration originale. Il s'agit de prouver le :

THÉORÈME 3.1. — *Soient $r \in\, ]0,1[$ et $(X_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille $(r,\infty)$-substantielle de champs de vecteurs. Soit $p \in\, ]1,+\infty[$. Alors il existe une constante $C$ ne dépendant que de $d$ et de $m$, et telle que pour toute matrice antisymétrique $\Omega$ à coefficients dans $L^p(\mathbb{R}^d)\cap C^r(X)$, le champ $v$ à divergence nulle donné par la loi de Biot-Savart* (BS′) *vérifie*

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \leq C\Big(\frac{p^2}{p-1}\|\Omega\|_{L^p} + \frac{\|\Omega\|_{L^\infty}}{r(1-r)}\log\Big(e + \frac{|\!|\!|X|\!|\!|_r\|\Omega\|_{L^\infty} + |\!|\!|\operatorname{div}(X\otimes\Omega)|\!|\!|_{r-1}}{I(X)\|\Omega\|_{L^\infty}}\Big)\Big).$$

*Preuve.* — Admettons provisoirement le lemme suivant :

LEMME 3.1. — *Soient $r \in\, ]0,1[$, $m \geq d-1$ et $(X_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille $(r,\infty)$-substantielle de champs de vecteurs. Alors il existe des fonctions $a_{ij}$ et $b_{ij}^{ka}$ (avec $1 \leq i,j,k \leq d$ et $1 \leq a \leq m$) de $C^r(\mathbb{R}^d)$ telles que*

$$\text{(3.1)}\qquad \forall\xi \in \mathbb{R}^d,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\qquad \xi_i\xi_j = a_{ij}(x)|\xi|^2 + \sum_{a,k} b_{ij}^{ka}(x)\xi_k\big(X_a(x)\cdot\xi\big),$$

$$\text{(3.2)}\qquad \|b_{ij}^{ka}\|_r \leq C\frac{m^{2d-2}}{I(X)}\cdot\frac{|\!|\!|X|\!|\!|_r^{9d-10}}{I(X)},$$

$$\text{(3.3)}\qquad \|a_{ij}\|_{L^\infty} \leq 1,$$

*où $C$ ne dépend que de $d$.*

Par définition de $v$, on a

$$\nabla v^k = \Delta_{-1}\nabla v^k + \sum_j \nabla\partial_j\Delta^{-1}(\mathrm{Id}-\Delta_{-1})\Omega_j^k. \tag{3.4}$$

Donc, d'après le lemme 2.7 et les inégalités de Bernstein, on a

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \le C\Big(\frac{p^2}{p-1}\|\nabla v\|_{L^p} + \sum_{i,j}\big\|\partial_i\partial_j\Delta^{-1}(\mathrm{Id}-\Delta_{-1})\Omega_j^k\big\|_{L^\infty}\Big).$$

On conclut à l'aide du lemme 3.1 de la même façon que dans [GSR]. □

*Preuve du lemme 3.1.* — Commençons par énoncer et prouver une version locale du lemme 3.1.

LEMME 3.2. — *Soit $r \in ]0,1[$ et $(Y_i)_{1\le i\le d-1}$ une famille de champs de vecteurs sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ à coefficients dans $C^r(\Omega)$ et telle que*

$$I(\Omega,Y) \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \inf_{x\in\Omega} |\overset{d-1}{\wedge}(Y)|^{\frac{1}{d-1}}(x) > 0.$$

*Alors il existe des fonctions $a_{ij}$ et $b_{ij}^{ka}$ $(1 \le i,j,k \le d$ et $1 \le a \le d-1)$ de $C^r(\Omega)$ et que*

$$\forall\xi\in\mathbb{R}^d,\ \forall x\in\Omega,\ \ \xi_i\xi_j = a_{ij}(x)|\xi|^2 + \sum_{a,k} b_{ij}^{ka}(x)\xi_k(Y_a(x)\cdot\xi), \tag{3.5}$$

$$\|b_{ij}^{ka}\|_{C^r(\Omega)} \le \frac{C}{I(\Omega,Y)}\Big(\frac{\|Y\|_{C^r(\Omega)}}{I(\Omega,Y)}\Big)^{8d-9}, \tag{3.6}$$

$$\|a_{ij}\|_{L^\infty} \le 1, \tag{3.7}$$

*où $C$ est une constante ne dépendant que de $d$.*

*Preuve du lemme 3.2.* — Considérons l'application linéaire suivante :

$$\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d,\quad \xi \longmapsto \eta = \begin{pmatrix} Y_1\cdot\xi \\ \vdots \\ Y_{d-1}\cdot\xi \\ \overset{d-1}{\wedge}(Y)\cdot\xi \end{pmatrix}.$$

Cette application est inversible. La matrice $A$ de son inverse est la transposée de

$$\frac{1}{|\overset{d-1}{\wedge}(Y)|^2}\begin{pmatrix} (-1)^{d-1}(Y_2\wedge Y_3\wedge\ldots\wedge Y_{d-1}\wedge(\overset{d-1}{\wedge}(Y))) \\ (-1)^{d-2}(Y_1\wedge Y_3\wedge\ldots\wedge Y_{d-1}\wedge(\overset{d-1}{\wedge}(Y))) \\ \vdots \\ -(Y_1\wedge\ldots\wedge Y_{d-2}\wedge(\overset{d-1}{\wedge}(Y))) \\ \overset{d-1}{\wedge}(Y) \end{pmatrix}.$$

Notons $q_{ij}(\xi) = \xi_i\xi_j$ et $Q_{ij}$ la matrice correspondante. Posons

$$a_{ij} = \frac{q_{ij}(\overset{d-1}{\wedge}(Y))}{|\overset{d-1}{\wedge}(Y)|^2}.$$

Il est clair que le vecteur $\overset{d-1}{\wedge}(Y)$ est isotrope pour la forme quadratique $q_{ij}(\xi) - a_{ij}|\xi|^2$. En écrivant que ${}^tAAe_i\cdot e_j = Ae_i\cdot Ae_j$, on vérifie par ailleurs que

$${}^tAA = \frac{1}{|\overset{d-1}{\wedge}(Y)|^2}\begin{pmatrix} & & & 0\\ & B & & 0\\ & & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

où la matrice $B$ a pour coefficients des polynômes homogènes de degré $2d-4$ en les coefficients des $(Y_i)_{1\le i\le d-1}$. En travaillant avec la variable $\eta = A^{-1}\xi$ et en utilisant l'isotropie de $\overset{d-1}{\wedge}(Y)$ pour $q_{ij}(\xi) - a_{ij}|\xi|^2$, on obtient donc

$${}^tAQ_{ij}A - a_{ij}{}^tAA = \frac{1}{|\overset{d-1}{\wedge}(Y)|^4}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d}\\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ m_{d1} & m_{d2} & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

les coefficients $m_{ij}$ étant homogènes de degré $4d-6$ par rapport aux $(Y_k)_{1\le k\le d-1}$ si $i<d$ et $j<d$, et de degré $3d-4$ sinon.

En revenant aux variables $\xi$, on obtient

$$|\overset{d-1}{\wedge}(Y)|^4(x)\big(\xi_i\xi_j - a_{ij}|\xi|^2\big) = \sum_{k,a}\tilde{b}_{ij}^{ka}(x)\,\xi_k\big(Y_a(x)\cdot\xi\big)$$

avec des $\tilde{b}_{ij}^{ka}$ homogènes de degré $4d-5$. On pose alors

$$b_{ij}^{ka} = \tilde{b}_{ij}^{ka}\,|\overset{d-1}{\wedge}(Y)|^{-4}$$

et on en déduit aisément les inégalités souhaitées. □

*Preuve du lemme 3.1 (suite).* — Pour $\lambda\in\Lambda_{d-1}^m$, posons

$$U_\lambda = \Big\{x\in\mathbb{R}^d,\ |\overset{d-1}{\wedge}(X_\lambda)|^{\frac{1}{d-1}} > \tfrac12 I(X)\Big\}.$$

Le lemme 3.2 découle clairement du lemme 3.1 dès que l'on dispose d'une partition de l'unité $(\phi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda^m_{d-1}}$ de classe $C^\infty$ telle que

$$\text{(i)}\qquad \sum_{\lambda\in\Lambda^m_d}\phi_\lambda\equiv 1,$$

$$\text{(ii)}\qquad \operatorname{Supp}\phi_\lambda\subset U_\lambda,$$

$$\text{(iii)}\qquad \|\phi_\lambda\|_r\le C_d\,m^{d-1}\Big(\frac{|||X|||_r}{I(X)}\Big)^{d-1}.$$

Pour construire cette partition de l'unité, on se donne une approximation de l'identité $\chi$ de classe $C^\infty$ et on pose, pour $\epsilon>0$,

$$\chi_\epsilon(\cdot)=\epsilon^{-d}\chi(\epsilon^{-1}\cdot)$$

On définit

$$F_\lambda\overset{\text{déf}}{=}\big\{x\in\mathbb{R}^d,\ |\overset{d-1}{\wedge}(X)|^{\frac{1}{d-1}}\ge I(X)\big\},$$

$$F^\epsilon_\lambda\overset{\text{déf}}{=}\big\{x\in\mathbb{R}^d,\ d(x,F_\lambda)\le\epsilon\big\},$$

et on pose

$$\phi^\epsilon_\lambda=1_{F^{\epsilon/2}_\lambda}\star\chi_{\epsilon/2},\quad \phi_\lambda=\phi^\epsilon_\lambda\prod_{\mu\ll\lambda}(1-\phi^\epsilon_\mu),$$

où $\ll$ désigne l'ordre lexicographique strict sur les éléments de $\Lambda^m_{d-1}$.

En remarquant que $\mathbb{R}^d=\bigcup_{\lambda\in\Lambda^m_{d-1}}F_\lambda$ et

$$1-\sum_{\lambda\in\Lambda^m_{d-1}}\phi_\lambda=\prod_{\lambda\in\Lambda^m_{d-1}}(1-\phi^\epsilon_\lambda),$$

on constate que (i) est vérifiée.

En revenant à la définition de $\phi_\lambda$, on obtient

$$\sup_{x\neq y}\frac{|\phi_\lambda(x)-\phi_\lambda(y)|}{|x-y|^r}\le C_d\,m^{d-1}\epsilon^{-r},$$

ce qui donne (iii) si on choisit $\epsilon=(2(I(X))^{-1}|||X|||_r)^{\frac{1-d}{r}}$. Enfin, en conservant cette valeur de $\epsilon$ et pour $x\in F^\epsilon_\lambda$, on a

$$\big|\overset{d-1}{\wedge}(X_\lambda)\big|(x)\ge I(X)^{d-1}-\epsilon^r\big\|\overset{d-1}{\wedge}(X_\lambda)\big\|_r\ge\big(\tfrac12 I(X)\big)^{d-1}.$$

Ceci assure que $\operatorname{Supp}\phi_\lambda\subset F^\epsilon_\lambda\subset U_\lambda$. $\square$

## 4 Propagation de la régularité stratifiée

Dans cette partie, on prouve le théorème 1.1.

*Première étape.* — Démonstration d'estimations uniformes en $\nu$ pour les solutions régulières de $(\mathrm{NS}_\nu)$. Il s'agit de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1. — *Soient $T > 0$, $q \in ]1, +\infty[$ et $v \in C([0,T]; W^{\infty,q})$ une solution de $(\mathrm{NS}_\nu)$ ou de (E) en dimension $d$; soit $\psi$ son flot. Soient $a \in ]d, +\infty[$, $r \in ]d/a, 1[$, $(X^0_\lambda)_{1\leq\lambda\leq m}$, une famille $(r,a)$-substantielle de champs de vecteurs, et $(X_{t,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$, la famille transportée par le flot de $v$. Alors $X_t$ reste $(r,a)$-substantielle pour tout $t \in [0,T]$. De plus, il existe une constante $C$ ne dépendant que de $r$, de $a$ et de $d$ et telle que les estimations suivantes soient vérifiées :*

$$(4.1)\quad \|\Omega(t)\|_{L^p} \leq \|\Omega^0\|_{L^p}\,\mathrm{e}^{CV(t)} \quad \textit{si } \Omega \in L^\infty([0,T]; L^p) \textit{ pour un } p \in [1, +\infty],$$

$$(4.2)\quad \|\mathrm{div}\, X_{t,\lambda}\|_{B^r_a} \leq \|\mathrm{div}\, X^0_\lambda\|_{B^r_a}\,\mathrm{e}^{CV(t)},$$

$$(4.3)\quad I(X_t) \geq I(X^0)\,\mathrm{e}^{-CV(t)},$$

$$(4.4)\quad \|X_{t,\lambda}(x,D)\Omega(t)\|_{B^{r-1}_a} \leq C\big(\|X^0_\lambda(x,D)\Omega^0\|_{B^{r-1}_a} + \widetilde{\|}X^0_\lambda\|_{B^r_a}\|\Omega^0\|_{L^\infty}\big)\,\mathrm{e}^{CW(t)},$$

$$(4.4')\quad \|\mathrm{div}(X_{t,\lambda}\otimes\Omega)\|_{B^{r-1}_a} \leq C\big(\|X^0_\lambda\|_{B^r_a}\|\Omega^0\|_{L^\infty} + \|\mathrm{div}(X^0_\lambda\otimes\Omega^0)\|_{B^{r-1}_a}\big)\,\mathrm{e}^{CW(t)},$$

$$(4.5)\quad \|\Omega(t)\|_{B^r_{a,X_t}} \leq C\|\Omega^0\|_{B^r_{a,X_0}}\,\mathrm{e}^{CW(t)},$$

$$(4.6)\quad \|X_{t,\lambda}\|_{B^r_a} \leq C\Big(\frac{\|\mathrm{div}(X^0_\lambda\otimes\Omega^0)\|_{B^{r-1}_a}}{\|\Omega^0\|_{L^\infty}} + \|X^0_\lambda\|_{B^r_a}\Big)\,\mathrm{e}^{CW(t)},$$

$$(4.6')\quad \|X^0_\lambda(x,D)\psi(t)\|_{B^r_a} \leq C\Big(\frac{\|\mathrm{div}(X^0_\lambda\otimes\Omega^0)\|_{B^{r-1}_a}}{\|\Omega^0\|_{L^\infty}} + \|X^0_\lambda\|_{B^r_a}\Big)\,\mathrm{e}^{CW(t)},$$

*avec*

$$V(t) = \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau \quad \textit{et} \quad W(t) = \|\Omega^0\|_{L^\infty} t + V(t).$$

*Les estimations (4.4′), (4.6) et (4.6′) restent valables si on remplace $X_\lambda$ par tout champ $Y$ transporté par le flot et tel que $Y^0 \in B^r_a$ et $\mathrm{div}(Y^0\otimes\Omega^0)$*

*dans* $B_a^{r-1}$. *Les estimations* (4.2) *et* (4.4) *demeurent également valables si l'on suppose de plus* $\operatorname{div} Y^0 \in B_a^r$. *Enfin, si* $\phi^0 \in B_a^r$ *et* $\phi_t = \phi^0 \circ \psi_t^{-1}$, *alors*

$$\|\phi_t\|_{B_a^r} \leq C\|\phi^0\|_{B_a^r} \mathrm{e}^{CV(t)}, \tag{4.7}$$

$$\big\|\phi\Omega(t)\big\|_{B_a^r} \leq C\big(\|\phi^0\|_{B_a^r}\|\Omega^0\|_{L^\infty} + \|\phi^0\Omega^0\|_{B_a^r}\big)\,\mathrm{e}^{CV(t)}. \tag{4.8}$$

*Démonstration.* — Soit donc $v$ une solution régulière de $(\mathrm{NS}_\nu)$ et $\Omega$ son tourbillon. On a

$$(\partial_t + v\cdot\nabla)\Omega - \nu\Delta\Omega = \mathcal{A}\Omega \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}\Omega = -\Omega\cdot\nabla v - {}^t\nabla v\cdot\Omega. \tag{4.9}$$

Supposons $\nu > 0$ (le cas $\nu = 0$ se traite facilement en passant en formulation lagrangienne). En prenant le produit scalaire $L^2$ de (4.9) avec $\Omega$, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\Omega\|_{L^2}^2 \leq C\|\mathcal{A}\Omega\|_{L^2}\,\|\Omega\|_{L^2} \leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}\,\|\Omega\|_{L^2}^2,$$

ce qui, par le lemme de Gronwall, donne (4.1) dans le cas $p = 2$.

La même inégalité reste valable pour les normes $L^\infty$ grâce au principe du maximum. En effet, le système (4.7) peut s'écrire

$$(\partial_t + v\cdot\nabla - \nu\Delta)\Omega_j^i = (\mathcal{A}\Omega)_j^i.$$

Il en résulte par exemple que

$$(\partial_t + v\cdot\nabla - \nu\Delta)\Big(\int_0^t \big\|(\mathcal{A}\Omega)_j^i(s)\big\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}s - \Omega_j^i\Big) \geq 0.$$

En appliquant le principe du maximum (voir par exemple [F, chap. 2]), on montre donc que

$$\Omega_j^i(t,x) \leq \big\|\Omega_j^i(0)\big\|_{L^\infty} + \int_0^t \big\|(\mathcal{A}\Omega)_j^i(s)\big\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}s \quad \text{pour} \quad t \geq 0.$$

On obtient de la même façon l'inégalité correspondante pour $-\Omega_j^i(t,x)$ et (4.1) en résulte pour $p = +\infty$ à l'aide du lemme de Gronwall. Le résultat pour $p \in [2, +\infty]$ suit par interpolation.

Le cas $p \in [1,2[$ (dont on ne se servira pas pour prouver le théorème 1.1), résulte d'un argument de dualité. En effet, soient $p \in [1,2[$ et $p'$ l'exposant conjugué. On a

$$\|\Omega(t)\|_{L^p} = \max_{\|f_t\|_{L^{p'}} \le 1} \int \Omega_t(x) \cdot f_t(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soit $\mathcal{A}^*$ l'adjoint de $\mathcal{A}$ au sens de la dualité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $f_0$ la solution à l'instant 0 du système rétrograde

$$\begin{cases} (\partial_s + v\cdot\nabla + \nu\Delta + \mathcal{A}^*)\phi = 0, \\ \phi_{|s=t} = f_t. \end{cases}$$

Alors, en raisonnant comme pour prouver (4.1) avec $p \in [2,+\infty]$, on obtient

$$\|f_0\|_{L^{p'}} \le \|f_t\|_{L^{p'}}\,\mathrm{e}^{CV(t)}.$$

De plus $\int \Omega_t(x)\cdot f_t(x)\,\mathrm{d}x = \int \Omega^0(x)\cdot f_0(x)\,\mathrm{d}x$, d'où la conclusion.

En revenant à l'équation (TG), on montre aisément que

$$(\partial_t + v\cdot\nabla)\operatorname{div} X_{t,\lambda} = 0.$$

L'estimation (4.2) résulte alors de la proposition 1.4.

Pour prouver (4.3), nous avons besoin de l'identité suivante :

$$\begin{aligned} (4.10)\quad X_{\lambda_1}\wedge\ldots\wedge AX_{\lambda_{d-1}} + \cdots + AX_{\lambda_1}\wedge\ldots\wedge X_{\lambda_{d-1}} \\ = \big((\operatorname{tr} A)I_d - {}^tA\big)(X_{\lambda_1}\wedge\ldots\wedge X_{\lambda_{d-1}}), \end{aligned}$$

valable pour toute matrice $A$ et qui se démontre en décomposant les champs sur la base canonique.

Des équations (TG) vérifiées pour chaque champ $X_{\lambda_j}$ et de (4.10), on obtient alors

$$\big(\partial_t + v\cdot\nabla\big)\overset{d-1}{\wedge}(X_\lambda) = -{}^t\nabla v\cdot\overset{d-1}{\wedge}(X_\lambda),$$

ou encore

$$\overset{d-1}{\wedge}(X_\lambda)(t,x) = \overset{d-1}{\wedge}(X_\lambda)\big(0,\psi_t^{-1}(x)\big) - \int_0^t {}^t\nabla v\cdot\overset{d-1}{\wedge}(X_\lambda)\big(s,\psi_t^{-1}(\psi_s(x))\big)\,\mathrm{d}s.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \big|\overset{d-1}{\wedge}(X_\lambda)(0,\psi_t^{-1}(x))\big| \le \big|\overset{d-1}{\wedge}(X_\lambda)(t,x)\big| \\ + \int_0^t \|\nabla v(t-s)\|_{L^\infty}\big|\overset{d-1}{\wedge}(X_\lambda)(t-s,\psi_s^{-1}(x))\big|\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Une simple application du lemme de Gronwall permet alors d'obtenir

$$(4.11)\qquad \big|\overset{d-1}{\wedge}(X_\lambda)(t,x)\big| \ge \big|\overset{d-1}{\wedge}(X_\lambda^0)(\psi_t^{-1}(x))\big|\,\mathrm{e}^{-\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau}.$$

On en déduit (4.3).

Pour obtenir les autres estimations, on reprend la démarche de [D2]. Désignons par $X$ un champ de la famille $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ou plus généralement vérifiant les hypothèses de la fin de la proposition 4.1, et appliquons-le à l'équation du tourbillon (4.9). Comme $X$ et $\partial_t + v\cdot\nabla$ commutent, on obtient formellement

$$(\partial_t + v\cdot\nabla)X(x,D)\Omega - \nu\Delta(X(x,D)\Omega) = \nu[X(x,D),\Delta]\Omega + X(x,D)\mathcal{A}\Omega.$$

Comme dans le cas de la dimension 2, il n'est pas clair que le commutateur $[X(x,D),\Delta]\Omega$ ait un sens avec l'hypothèse $\Omega\in B^r_a(X)\cap L^2$. L'idée à ce stade est d'appliquer seulement le parachamp $T_X$ à l'équation (4.9), au lieu du champ $X$ entier. Il y a bien sûr un prix à payer : $\partial_t + v\cdot\nabla$ et $T_X$ ne commutent pas, mais on dispose d'un lemme permettant d'estimer ce commutateur dans $B^{r-1}_a$ (voir [D2, lemme 5.1]). L'équation obtenue est la suivante :

$$\begin{aligned}(4.12)\qquad (\partial_t + v\cdot\nabla - \nu\Delta)&T_X\Omega\\ &= [\partial_t + v\cdot\nabla, T_X]\Omega + T_X\mathcal{A}\Omega + \nu[T_X,\Delta]\Omega.\end{aligned}$$

Notons que la seule différence de (4.12) avec l'équation correspondante dans le cas $d=2$, provient du terme supplémentaire $T_X\mathcal{A}\Omega$ qui n'est pas gênant puisqu'il peut être estimé de la même manière que $[\partial_t+v\cdot\nabla, T_X]\Omega$ (voir l'inégalité (A.1) de l'appendice). On obtient en définitive

$$\begin{aligned}\big\|[\partial_t + v\cdot\nabla, T_X]\Omega\big\|_{B^{r-1}_a} &+ \|T_X\mathcal{A}\Omega\|_{B^{r-1}_a}\\ &\le C\|\nabla v\|_{L^\infty}\big(\|\Omega\|_{L^\infty}\|X\|_{B^r_a} + \|T_X\Omega\|_{B^{r-1}_a}\big).\end{aligned}$$

Le terme de viscosité s'estime directement à partir de (2.10) :

$$\big\|[T_X,\Delta]\Omega\big\|_{B^{r-3}_a} \le C\|X\|_{B^r_a}\|\Omega\|_0.$$

En appliquant la proposition 1.4, il en résulte

$$\begin{aligned}\|T_{X_t}\Omega(t)\|_{B^{r-1}_a} \le C\mathrm{e}^{CV(t)}\Big\{&\|T_{X^0}\Omega^0\|_{B^{r-1}_a} + \sup_{\tau\in[0,t]}\|X(\tau)\|_{B^r_a}\|\Omega(\tau)\|_0\\ &+\int_0^t \mathrm{e}^{-CV(\tau)}\big\|\nabla v(\tau)\big\|_{L^\infty}\big(\|T_{X_\tau}\Omega(\tau)\|_{B^{r-1}_a} + \|\Omega(\tau)\|_{L^\infty}\|X(\tau)\|_{B^r_a}\big)\,\mathrm{d}\tau\Big\},\end{aligned}$$

puis, d'après (2.13),

$$\begin{aligned}(4.13)\quad \|\operatorname{div}(X_t\otimes\Omega_t)\|_{B^{r-1}_a}&\\ \le C\mathrm{e}^{CV(t)}\Big\{&\|X^0\|_{B^r_a}\|\Omega^0\|_{L^\infty}\\ &+\|\operatorname{div}(X^0\otimes\Omega^0)\|_{B^{r-1}_a} + \sup_{\tau\in[0,t]}\|X(\tau)\|_{B^s_a}\|\Omega(\tau)\|_0\\ &+\int_0^t \mathrm{e}^{-CV(\tau)}\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\big(\|\operatorname{div}(X_\tau\otimes\Omega_\tau)\|_{B^{r-1}_a} + \|\Omega(\tau)\|_{L^\infty}\|X(\tau)\|_{B^r_a}\big)\,\mathrm{d}\tau\Big\}\end{aligned}$$

et d'après (2.14),

$$
\begin{aligned}
(4.14)\quad \big\|X(x,D)\Omega(t)\big\|_{B^{r-1}_a} \leq C\,\mathrm{e}^{CV(t)}\Big\{ &\big\|X^0(x,D)\Omega^0\big\|_{B^{r-1}_a} \\
&+ \|\Omega^0\|_{L^\infty}\widetilde{\|}X^0\|_{B^r_a} + \sup_{\tau\in[0,t]} \|X_\tau\|_{B^r_a}\|\Omega_\tau\|_0 \\
+ \int_0^t \mathrm{e}^{-CV(\tau)}\|\nabla v_\tau\|_{L^\infty}\big(\|X(x,D)\Omega(\tau)\|_{B^{r-1}_a} &+ \|\Omega_\tau\|_{L^\infty}\widetilde{\|}X_\tau\|_{B^r_a}\big)\,\mathrm{d}\tau\Big\}.
\end{aligned}
$$

Remarquons ensuite que

$$
(4.15)\qquad \big\|X(x,D)v\big\|_{B^r_a} \leq C\big(\|\nabla v\|_{L^\infty}\|X\|_{B^r_a} + \|\operatorname{div}(X\otimes\Omega)\|_{B^{r-1}_a}\big).
$$

Pour le voir, il suffit d'écrire

$$
\begin{aligned}
X(x,D)v^i = T'_{\partial_k v^i}X^k + \sum_j\Big\{&[T_{X^k}, f_j(D)]\partial_k\Omega^i_j + f_j(D)(\operatorname{div} X\Omega^i_j) \\
&+ f_j(D)(T_X\Omega^i_j - \operatorname{div} X\Omega^i_j)\Big\}
\end{aligned}
$$

avec $f_j(D) = (1-\chi)(D)\Delta^{-1}\partial_j$, et d'appliquer les lemmes 2.4 et 2.5.

En utilisant maintenant (TG), la proposition 1.4 et (4.15), on obtient

$$
\begin{aligned}
(4.16)\ \|X(t)\|_{B^r_a} \leq \Big\{\|X^0\|_{B^r_a} + C\int_0^t \mathrm{e}^{-CV(\tau)}\big(&\|\operatorname{div}(X_\tau\otimes\Omega_\tau)\|_{B^{r-1}_a} \\
&+\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\|X(\tau)\|_{B^r_a}\big)\,\mathrm{d}\tau\Big\}\,\mathrm{e}^{CV(t)}.
\end{aligned}
$$

Posons

$$
\alpha(t) = \mathrm{e}^{-CV(t)}\Big(\frac{\|\operatorname{div}(X_t\otimes\Omega(t))\|_{B^{r-1}_a}}{\|\Omega^0\|_{L^\infty}} + \big\|X(t)\big\|_{B^r_a}\Big).
$$

À partir de (4.1) avec $p=+\infty$, de (4.13) et de (4.16), on obtient

$$
\alpha(t) \leq C\Big(\alpha(0) + \int_0^t \big(\|\Omega^0\|_{L^\infty} + \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\big)\alpha(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big),
$$

d'où, par le lemme de Gronwall

$$
(4.14)\qquad \alpha(t) \leq C\alpha(0)\,\mathrm{e}^{CW(t)}.
$$

On en déduit (4.4′) et (4.6). En revenant à (4.2) et (4.14), on obtient (4.4). Enfin, en utilisant (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4), on aboutit à (4.5).

D'après la définition du flot et le lemme de Gronwall, on a de plus

$$\|\nabla\psi_t\|_{L^\infty} \leq \mathrm{e}^{\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau}. \tag{4.17}$$

Par ailleurs, $X^0(x,D)\psi(t,x) = X_t(\psi_t(x))$. Donc, d'après le lemme 2.1,

$$\|X_t \circ \psi_t\|_{B^r_a} \leq C\|\nabla\psi_t\|_{L^\infty}\,\|X_t\|_{B^r_a},$$

ce qui, conjugué à (4.6), donne (4.6′).

L'estimation (4.7) résulte simplement du lemme 2.1 et de (4.17).

Reste à prouver (4.8). Par hypothèse, on a

$$\begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla)\phi = 0,\\ (\partial_t + v\cdot\nabla)\Omega - \nu\Delta\Omega = \mathcal{A}\Omega.\end{cases}$$

Si on cherche à obtenir directement une équation sur $\phi\Omega$, on va être gêné par le terme $\phi\Delta\Omega$ qui n'a pas de sens *a priori* sous les seules hypothèses $\phi \in B^r_a$ et $\phi\Omega \in B^r_a$. On procède comme pour prouver (4.4) : on passe au paraproduit. On obtient

$$(\partial_t + v\cdot\nabla - \nu\Delta)T_\phi\Omega = [\partial_t + v\cdot\nabla, T_\phi]\,\Omega + T_\phi\mathcal{A}\Omega - \nu[\Delta, T_\phi]\,\Omega.$$

D'après les lemmes A.1 et A.3 de l'appendice, on a

$$\|T_\phi\mathcal{A}\Omega\|_{B^r_a} \leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}\big(\|\phi\|_{B^r_a}\,\|\Omega\|_{L^\infty} + \|T_\phi\Omega\|_{B^r_a}\big),$$

$$\big\|[\partial_t + v\cdot\nabla, T_\phi]\Omega\big\|_{B^r_a} \leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}\big(\|\phi\|_{B^r_a}\,\|\Omega\|_{L^\infty} + \|T_\phi\Omega\|_{B^r_a}\big).$$

Enfin, d'après (2.10),

$$\big\|[\Delta, T_\phi]\Omega\big\|_{B^{r-2}_a} \leq C\|\Omega\|_0\,\|\phi\|_{B^r_a}.$$

La proposition 1.4 donne donc l'estimation voulue. □

Nous terminons la première étape avec le lemme suivant :

LEMME 4.1. — *Soient $p \in\, ]1,+\infty[$ et $v$ une solution de* ($\mathrm{NS}_\nu$) *ou de* (E) *appartenant à $L^\infty\big([0,T];\mathrm{Lip}\cap L^p\big)$. Alors il existe une constante $C$ ne dépendant que de $p$ et de $d$ et telle que*

$$\big\|v(t)\big\|_{L^p} \leq \|v^0\|_{L^p}\,\mathrm{e}^{CV(t)}.$$

*Preuve.* — D'après [GSR], $\|\nabla P\|_{L^p} \leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}\|v\|_{L^p}$. On a donc

$$\big\|-\nabla P + v\cdot\nabla v\big\|_{L^p} \leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}\,\|v\|_{L^p}.$$

Dans le cas $\nu = 0$, on en déduit aisément le résultat en passant en formulation lagrangienne (voir par exemple [GSR] pour plus de détails).

Lorsque $\nu > 0$, on écrit

$$v(t) = \mathrm{e}^{t\nu\Delta}v^0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\nu\Delta}\big(-\nabla P(s) + v\cdot\nabla v(s)\big)\,\mathrm{d}s$$

où $\mathrm{e}^{\tau\Delta}$ désigne le semi-groupe de la chaleur, et le lemme de Gronwall joint à l'inégalité $\|\mathrm{e}^{t\nu\Delta}u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p}$ donne l'estimation désirée. $\square$

*Deuxième étape.* — Minoration du temps d'existence de solutions régulières de Navier-Stokes en fonction de la norme du tourbillon initial dans $B^r_a(X^0)$, et indépendamment de la viscosité.

PROPOSITION 4.2. — *Soient $p \in\, ]1,+\infty[$ et $v^0$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ à divergence nulle et à coefficients dans $W^{\infty,p}$. On suppose de plus que $\Omega^0 \in L^2$. Soit $(X^0_\lambda)_{1\leq\lambda\leq m}$ une famille $(r,a)$-substantielle de champs de vecteurs. Alors il existe une constante $C \geq 1$ ne dépendant que de $d$, $m$, $r$ et $a$, et telle que, pour tout $\nu \geq 0$, si l'on pose*

$$L^0 = \log\Big(\mathrm{e} + \frac{\|\Omega^0\|_{B^r_{a,X^0}}}{\|\Omega^0\|_{L^\infty\cap L^2}}\Big) \quad \textit{et} \quad T = \frac{1}{C\|\Omega^0\|_{L^\infty\cap L^2}L^0},$$

*le système* $(\mathrm{NS}_\nu)$ *(ou* (E) *si $\nu = 0$), avec donnée initiale $v^0$ admette une unique solution $v \in C([0,T];W^{\infty,p})$ avec de plus*

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \leq C\|\Omega^0\|_{L^\infty\cap L^2}L^0.$$

*Preuve.* — Considérons la solution $v$ de $(\mathrm{NS}_\nu)$ ou de (E) donnée par le théorème de Kato et Ponce et notons $T_\nu$ son temps maximal d'existence, c'est-à-dire le plus grand élément de $]0,+\infty]$ tel que $v \in C([0,T_\nu[;W^{\infty,p})$.

Grâce aux propositions 1.3 et 4.1, aux injections $B^r_a \hookrightarrow C^\epsilon$ et $B^{r-1}_a \hookrightarrow C^{\epsilon-1}$ avec $\epsilon = r - d/a$, on établit que pour $t \in [0,T_\nu[$, on a

$$\big\|\nabla v(t)\big\|_{L^\infty} \leq C\Big(\|\Omega(t)\|_{L^\infty\cap L^2}\log\Big(\mathrm{e} + \frac{\|\Omega(t)\|_{B^r_{a,X_t}}}{\|\Omega(t)\|_{L^\infty}}\Big)\Big). \tag{4.18}$$

En reportant dans (4.18) les estimations (4.1) et (4.5), on obtient

$$W'(t) \leq C\|\Omega^0\|_{L^\infty\cap L^2}\,\mathrm{e}^{CW(t)}\big(L^0 + W(t)\big),$$

ou encore, quitte à changer $C$,

$$W'(t) \leq CL^0\|\Omega^0\|_{L^\infty\cap L^2}\,\mathrm{e}^{CW(t)}. \tag{4.19}$$

Notons $\overline{T}_\nu$ le plus grand réel positif tel que $W'(t) \leq 2C\|\Omega^0\|_{L^\infty\cap L^2}L^0$ sur $[0,\overline{T}_\nu]$. Il est bien connu (voir par exemple [KP2]) que

$$T_\nu < +\infty \implies \int_0^{T_\nu} \big\|\nabla v(\tau)\big\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau = +\infty,$$

et par conséquent $\overline{T}_\nu < T_\nu$.

Comme d'après (4.19), on a $W'(0) \leq CL^0\|\Omega^0\|_{L^\infty\cap L^2}$ et comme $v$ est en particulier continue à valeurs lipschitziennes, on a nécessairement $\overline{T}_\nu > 0$.

Posons $T = (4C^2\|\Omega^0\|_{L^\infty\cap L^2}L^0)^{-1}$. D'après (4.19), on a

$$1 - \mathrm{e}^{-CW(t)} \leq C^2 t\,\|\Omega^0\|_{L^\infty\cap L^2}L^0 \quad \text{pour} \quad t \in [0,T_\nu[.$$

Donc, pour $t \in [0,T] \cap [0,\overline{T}_\nu]$, on a $\mathrm{e}^{CW(t)} \leq \frac{4}{3}$, et donc, d'après (4.19),

$$W'(t) < 2C\,\|\Omega^0\|_{L^\infty\cap L^2}L^0.$$

Ceci entraîne $\overline{T}_\nu > T$ et donc *a fortiori* $T_\nu > T$. □

Les deux étapes suivantes, régularisation et passage à limite se traitent exactement comme dans le cas de la dimension 2, mais sur un intervalle de temps borné fixe. On renvoie donc à [D2] pour une preuve complète.

*Troisième étape.* — Régularisation et temps d'existence pour les solutions régularisées.

Donnons-nous $v^0$ vérifiant les hypothèses du théorème 1.1 et posons

$$v_n^0 = S_n v^0.$$

Comme $v^0 \in L^2$, on a visiblement $v_n^0 \in W^{\infty,2}$. La proposition 4.2 assure donc l'existence d'une constante $C$ *indépendante de $\nu$ et de $n$* telle que $(\mathrm{NS}_\nu)$ (ou (E)) admette une unique solution $v_n$ régulière avec donnée initiale $v_n^0$ sur l'intervalle de temps $[0,T_n]$ tel que

$$T_n = \frac{1}{C\|S_n\Omega^0\|_{L^\infty\cap L^2}L_n^0}, \quad L_n^0 = \log\Big(\mathrm{e} + \frac{\|S_n\Omega^0\|_{B^r_{a,X^0}}}{\|S_n\Omega^0\|_{L^\infty\cap L^2}}\Big).$$

De plus
$$\|\nabla v_n\|_{L^\infty([0,T_n]\times\mathbb{R}^d)} \leq C\|\Omega^0\|_{L^\infty\cap L^2}L_n^0.$$

On vérifie aisément que $\|\Omega_n^0\|_{L^\infty\cap L^2}L_n^0 \leq C\|\Omega^0\|_{L^\infty\cap L^2}L^0$, ce qui donne une minoration du temps d'existence et une estimation de $\|\nabla v_n\|_{L^\infty}$ indépendante de $n$ et de $\nu$. De plus, quitte à changer les constantes, toutes les estimations de la proposition 4.1 peuvent être rendues indépendantes de $n$ et de $\nu$.

*Quatrième étape.* — Convergence des solutions régularisées.

On commence par prouver que la suite $v_n$ est de Cauchy dans des espaces fonctionnels «grossiers» (du type $C^\alpha$ avec $\alpha < 0$), puis on montre les propriétés de régularité souhaitées sur $v$ grâce aux estimations uniformes obtenues dans la troisième étape. En particulier, son temps d'existence est minoré comme dans la proposition 4.2.

REMARQUE 4.1. — La solution $v$ vérifie de plus toutes les estimations de la proposition 4.1 avec des constantes ne dépendant que de $r$, $a$ et $d$, ainsi que celle du lemme 4.1.

*Cinquième étape.* — Limite non visqueuse.

Commençons par prouver la proposition 1.5. On procède comme dans [Ch3]. Notons donc $v_\nu$ la solution de $(\mathrm{NS}_\nu)$ de l'énoncé et $v$, celle de (E). Si l'on pose $w_\nu = v_\nu - v$, on obtient

$$\begin{cases} (\partial_t + v_\nu \cdot \nabla)w_\nu - \nu\Delta w_\nu = \nabla(p - p_\nu) + \nu\Delta v - w_\nu \cdot \nabla v, \\ w_\nu(0) = 0. \end{cases}$$

En prenant le produit scalaire $L^2$ avec $w_\nu$ et en tenant compte de $\operatorname{div} v = \operatorname{div} v_\nu = 0$, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|w_\nu\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla w_\nu\|_{L^2}^2 = -\nu\int \nabla w_\nu \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \int (w_\nu \cdot \nabla v) \cdot w_\nu \,\mathrm{d}x.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|w_\nu\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla w_\nu\|_{L^2}^2 \leq \nu\|\nabla v\|_{L^2}\|\nabla w_\nu\|_{L^2} + \|\nabla v\|_{L^\infty}\|w_\nu\|_{L^2}^2,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|w_\nu\|_{L^2}^2 \leq \tfrac{1}{2}\nu\|\nabla v\|_{L^2}^2 + 2\|w_\nu\|_{L^2}^2\|\nabla v\|_{L^\infty}.$$

Par le lemme de Gronwall, on en déduit

$$\|w_\nu\|_{L^2} \leq \left(\tfrac{1}{2}\nu\right)^{1/2}\|\nabla v\|_{L^2(]0,T[\times\mathbb{R}^d)}\,\mathrm{e}^{\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau}.$$

On conclut en remarquant que, par le lemme 2.7, on a

$$\|\nabla v\|_{L^2} \leq C\|\Omega\|_{L^2},$$

et en appliquant (4.1) avec $p = 2$ (qui reste valable avec les hypothèses de la proposition 1.5, comme on peut le constater en relisant la démonstration). $\square$

Revenons à la preuve du théorème 1.1. Notons respectivement $v_{\nu,n}$ et $v_n$ les solutions régularisées de $(\mathrm{NS}_\nu)$ et (E) telles qu'elles sont définies dans la troisième étape. Comme $v^0$ est dans $L^2$, ces solutions vérifient les hypothèses de la proposition 1.5. On a donc

$$\big\|(v_{\nu,n} - v_n)(t)\big\|_{L^2} \leq C\nu^{1/2}\|S_n\Omega^0\|_{L^2}\,\mathrm{e}^{C\int_0^t \|\nabla v_n(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau}.$$

Grâce aux estimations uniformes en $n$ de la troisième étape, on obtient donc l'existence d'une constante $C$ qui peut dépendre de $T$, mais pas de $\nu$, et telle que

$$\|v_\nu - v\|_{L^\infty(]0,T[;L^2)} \leq C\nu^{1/2}\|\Omega^0\|_{L^2}.$$

Donc $v_\nu$ tend vers $v$ dans $L^\infty(]0,T[;L^2)$. En combinant avec les estimations uniformes en $\nu$ de la quatrième étape, on en déduit notamment que $v_\nu$ tend vers $v$ dans $L^\infty([0,T];C^{1-\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$. Les autres résultats de convergence en découlent (voir [D2]). $\square$

## 5. Propagation de la régularité conormale

Dans cette partie, on démontre le théorème 1.2. On reprend la démarche de [GSR] en faisant les modifications adéquates pour traiter le cas de la dimension quelconque et tenir compte de la définition légérement différente des espaces conormaux. Résumons les étapes principales de la preuve.

*Première étape.* — On montre que si $\Sigma^0$ est une hypersurface compacte de classe $B^r_a$ alors il existe une famille $(r,a)$-substantielle $X^0$ de champs de vecteurs tangents à $\Sigma^0$ et telle que $B^r_{a,\Sigma^0} \subset B^r_a(X^0)$.

Ceci donne, *via* le théorème 1.1, l'existence et l'unicité de solutions lipschitziennes $v_\nu$ et $v$ pour $(\mathrm{NS}_\nu)$ et (E) sur un intervalle de temps $[0,T]$ indépendant de $\nu$, et avec de plus des propriétés de convergence et de bornes uniformes en $\nu$ dans des espaces appropriés : on dispose des estimations de la proposition 4.1.

*Deuxième étape.* — On montre que $f_\nu$ et $f$ sont dans $L^\infty([0,T];B^{1+r}_a)$ uniformément en $\nu$.

*Troisième étape.* — On en déduit la convergence de $f_\nu$ vers $f$ dans tous les $L^\infty([0,T];B^{1+r'}_a)$ tels que $r'<r$.

*Quatrième étape.* — On montre que pour tout $t\in[0,T]$, on a $\Omega_{t,\nu}\in B^r_{a,\Sigma_{t,\nu}}$ et $\Omega_t\in B^r_{a,\Sigma_t}$.

La première étape consiste à prouver la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1. — *Soit $a\in\,]d,+\infty]$, $r\in\,]d/a,1[$ et $\Sigma$ une hypersurface compacte de classe $B^{1+r}_a$. Alors il existe une famille $(r,a)$-substantielle $X$ composée de $\frac{1}{2}d(d+1)$ champs de vecteurs tangents à $\Sigma$ et telle que $B^r_{a,\Sigma}\subset B^r_a(X)$.*

*Preuve.* — Soit $(f=0)$ une équation de classe $B^{1+r}_a$ de $\Sigma$. Notons $V$ un voisinage de $\Sigma$ sur lequel $|\nabla f(x)|>c>0$.

Soit $(e_1,\dots,e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Pour $\lambda\in\Lambda^d_{d-2}$, on pose

$$Z_\lambda=e_{\lambda_1}\wedge\ldots\wedge e_{\lambda_{d-2}}\wedge\nabla f.$$

Il est clair que tous ces champs sont dans $\mathcal{T}^r_a(\Sigma)$. Ils sont de plus à divergence nulle. Pour le voir, il suffit de remarquer que

$$Z_\lambda=\epsilon_{\lambda_1,\dots,\lambda_d}(\partial_{\lambda_{d-1}}fe_{\lambda_d}-\partial_{\lambda_d}fe_{\lambda_{d-1}}), \tag{5.1}$$

où $\epsilon_{\lambda_1,\dots,\lambda_d}$ désigne la signature de la permutation $(\lambda_1,\dots,\lambda_d)$ et où $\lambda_{d-1}$ et $\lambda_d$ sont les seuls indices de $\{1,\dots,d\}$ n'apparaissant pas dans $\lambda$ et tels que $\lambda_{d-1}<\lambda_d$.

Soit $\chi$ une troncature positive de classe $C^\infty$, nulle près de $\Sigma$ et valant 1 près de $\mathbb{R}^d\backslash V$. On pose

$$Z_i=\chi\partial_i\quad\text{pour } i\in\{1,\dots,d\}.$$

On rebaptise $(X_k)_{1\le k\le N}$ avec $N=\frac{1}{2}d(d+1)$, la famille regroupant les $Z_i$ et les $Z_\lambda$. Soit

$$K=\chi^{-1}\big([0,\tfrac{1}{2}]\big).$$

Il est clair que pour $x\in\mathbb{R}^d\backslash K$, on a $|(Z_1\wedge\ldots\wedge Z_{d-1})(x)|\ge 2^{1-d}$. Pour prouver que $X$ est substantielle, il suffit donc d'établir que

$$\inf_{x\in K}\sup_{\mu\in\Lambda^N_{d-1}}\Big|\overset{d-1}{\wedge}(X_\mu)(x)\Big|>0.$$

Ceci va résulter du lemme suivant :

LEMME 5.1. — *Soit $A \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. Posons $A_\lambda = e_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge e_{\lambda_{d-2}} \wedge A$ pour $\lambda \in \Lambda^d_{d-2}$. Alors tout $B \in \mathbb{R}^d$ se décompose en*

$$B = \Big(\frac{A \cdot B}{|A|^2}\Big) A + \sum_{\lambda \in \Lambda^d_{d-2}} \frac{\det(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_{d-2}}, A, B)}{|A|^2} A_\lambda.$$

*Preuve.* — Supposons d'abord $B \in A^\perp$. Posons

$$K = \sum_{\lambda \in \Lambda^d_{d-2}} \det(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_{d-2}}, A, B) A_\lambda.$$

Fixons $k \in \{1, \ldots, d\}$. Alors on a

$$K \cdot e_k = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda^d_{d-2} \\ \ell \neq k}} \sum_{\substack{\lambda_{d-1} \notin \lambda \\ \lambda_d \notin \lambda}} A_\ell A_{\lambda_{d-1}} B_{\lambda_d} \det(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_d}) \times \det(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_{d-2}}, e_\ell, e_k).$$

Pour $\ell$ fixé distinct de $k$, seul l'élément de $\Lambda^d_{d-2}$ ne contenant ni $k$ ni $\ell$ donne une contribution non nulle dans la somme précédente. On doit avoir de plus $(k, \ell) = (\lambda_{d-1}, \lambda_d)$ ou $(k, \ell) = (\lambda_d, \lambda_{d-1})$ pour que le deuxième déterminant ne soit pas nul. On obtient donc, compte tenu de $A \cdot B = 0$,

$$K \cdot e_k = \sum_{\ell \neq k} (A_\ell^2 B_k - A_k A_\ell B_\ell) = |A|^2 B_k$$

Si $B$ est quelconque, on écrit $B = \Big(\dfrac{A \cdot B}{|A|^2}\Big) A + \widetilde{B}$ avec $\widetilde{B} \in A^\perp$. On conclut en remarquant que

$$\det(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_{d-2}}, A, B) = \det(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_{d-2}}, A, \widetilde{B}). \quad \square$$

Si $Y$ est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$, on en déduit que

$$\forall x \in K,\ Y(x) = \Big(\frac{Y(x) \cdot \nabla f(x)}{|\nabla f(x)|^2}\Big) \nabla f(x) + \sum_{\lambda \in \Lambda^d_{d-2}} \Big(\frac{\det(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_{d-2}}, \nabla f(x), Y(x))}{|\nabla f(x)|^2}\Big) Z_\lambda(x). \tag{5.2}$$

Si $x \in K$, la relation (5.2) assure que $(Z_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda^d_{d-2}}$ est une famille génératrice de $(\nabla f(x))^\perp$. Donc il existe $(\lambda^1, \ldots, \lambda^{d-1}) \in (\Lambda^d_{d-2})^{d-1}$ tel que $Z_{\lambda^1} \wedge \ldots \wedge Z_{\lambda^{d-1}}(x) \neq 0$. Donc l'application $x \mapsto \sup_{\mu \in \Lambda^N_{d-1}} |\overset{d-1}{\wedge} (X_\mu(x))|$ ne s'annule pas sur le compact $K$. Comme elle est continue, elle a une borne inférieure strictement positive sur $K$. La famille $X$ est donc $(r, a)$-substantielle.

Soit enfin $u \in B^r_{a,\Sigma}$ et $k \in \{1, \ldots, N\}$. Comme $X_k$ est de classe $B^r_a$ et est tangent à $\Sigma$, on a par hypothèse $\operatorname{div}(Xu) \in B^{r-1}_a$. Comme de plus $u \in L^\infty$, $\operatorname{div} X_k \in B^r_a$ et $X_k(x, D)u = \operatorname{div}(X_k u) - u \operatorname{div} X_k$, on a bien $X_k(x, D)u \in B^{r-1}_a$. $\square$

*Deuxième étape.* — Montrons que $f_\nu$ et $f$ sont dans $L^\infty([0,T];B^{r+1}_a)$ uniformément en $\nu$.

La proposition 5.1 nous autorise à appliquer le théorème 1.1. On dispose donc de toutes les estimations uniformes données par la proposition 4.1 sur un intervalle $[0,T]$ indépendant de la viscosité.

Pour simplifier les notations, on convient de noter avec un indice 0 les objets liés à l'équation (E). Considérons une équation $(f^0 = 0)$ de l'hypersurface initiale $\Sigma^0$ et notons $V^0$ un voisinage de $\Sigma^0$ sur lequel $|\nabla f^0| > c > 0$. Si l'on pose

$$f_{t,\nu} = f^0 \circ \psi^{-1}_{t,\nu},$$

on a clairement $f_\nu \in L^\infty([0,T];\mathrm{Lip}\cap W^{1,a})$ uniformément en $\nu$. Il ne reste plus qu'à prouver que $\nabla f_\nu \in L^\infty([0,T];B^r_a)$ uniformément en $\nu$.

Commençons par remarquer que $\nabla f_\nu$ est solution du système

$$\text{(TC)} \qquad \begin{cases} (\partial_t + v_\nu\cdot\nabla)\nabla f_\nu = -{}^t\nabla v_\nu \cdot \nabla f_\nu, \\ \nabla f_{\nu|t=0} = \nabla f^0 \in B^r_a. \end{cases}$$

Soit $\chi^0$ une troncature lisse valant 1 près de $\mathbb{R}^d\backslash V^0$ et nulle près de $\Sigma^0$.

Pour plus de clarté, on omet l'indice $\nu$ dans le reste de la deuxième étape. On définit $d$ champs $E_i$ dépendant du temps par

$$(TG) \qquad \begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla)E_i = E_i(x,D)v, \\ E_{i|t=0} = \chi^0\partial_i. \end{cases}$$

Comme $E^0_i$ est de classe $B^r_a$ et est tangent à $\Sigma^0$, on a $\mathrm{div}(E^0_i\otimes\Omega^0) \in B^{r-1}_a$. La remarque 4.1 assure donc que $E_i \in L^\infty([0,T];B^r_a)$ uniformément en $\nu$.

Pour $\lambda \in \Lambda^d_{d-2}$, on pose

$$Y^0_\lambda = E^0_{\lambda_1}\wedge\ldots\wedge E_{\lambda^0_{d-2}}\wedge\nabla f^0$$

et on note $Y_\lambda$ la solution de (TG) avec donnée initiale $Y^0_\lambda$. Comme $Y^0_\lambda$ est tangent à $\Sigma^0$ (car nul au voisinage de $\Sigma^0$) et dans $B^r_a$, la remarque 4.1 donne également $Y_\lambda \in L^\infty([0,T];B^r_a)$ uniformément en $\nu$.

Posons

$$W_\lambda = E_{\lambda_1}\wedge\ldots\wedge E_{\lambda_{d-2}}\wedge Y_\lambda.$$

En utilisant l'expression (5.1), on établit que

$$W^0_\lambda = -(\chi^0)^{2d-4}(\partial_{\lambda_{d-1}} f e_{\lambda_{d-1}} + \partial_{\lambda_d} f e_{\lambda_d}).$$

Donc

$$\sum_{\lambda\in\Lambda^d_{d-2}} W^0_\lambda = -(d-1)(\chi^0)^{2d-4}\nabla f^0. \tag{5.3}$$

D'après (4.10), on a

$$\begin{cases} (\partial_t + v_\nu\cdot\nabla)W_\lambda = -{}^t\nabla v_\nu\cdot W_\lambda,\\ W_{\lambda|t=0} = (\chi^0)^{d-2}(e_{\lambda_1}\wedge\ldots\wedge e_{\lambda_{d-2}}\wedge Y^0_\lambda). \end{cases}$$

Donc, en comparant avec (TC) et (5.3), on trouve

$$\sum_{\lambda\in\Lambda^d_{d-2}} W_\lambda = -(d-1)\big((\chi^0)^{2d-4}\circ\psi^{-1}_{t,\nu}\big)\nabla f_{t,\nu}.$$

En conséquence, $\big((\chi^0)^{2d-4}\circ\psi^{-1}_{t,\nu}\big)\nabla f_{t,\nu}\in L^\infty([0,T];B^r_a)$ uniformément en $\nu$.

*Étude de* $\big(1-\big((\chi^0)^{2d-4}\circ\psi^{-1}_{t,\nu}\big)\big)\nabla f_{t,\nu}$. — On utilise encore les champs

$$e_{\lambda_1}\wedge\ldots\wedge e_{\lambda_{d-2}}\wedge\nabla f^0$$

pour $\lambda\in\Lambda^d_{d-2}$, mais on les note $Z^0_{ij}$ avec la convention que $(i,j)$ est l'unique couple de $\{1,\ldots,d\}\backslash\{\lambda_1,\ldots,\lambda_{d-2}\}$ tel que $i<j$. Soit $Z_{ij}$ le champ transporté de $Z^0_{ij}$ par le flot de $v$. On a vu dans la première étape que les $Z^0_{ij}$ appartiennent à $\mathcal{T}^r_a(\Sigma^0)$. D'après la remarque 4.1, on a donc

$$Z_{ij}\in L^\infty([0,T];B^r_a)$$

uniformément en $\nu$.

Nous pouvons en fait reconstruire $\nabla f_t$ à l'aide des $Z_{ij,t}$. Ceci résulte du lemme suivant :

LEMME 5.2. — *Soit $A\in\mathbb{R}^d$. Pour $1\le i<j\le d$, notons*

$$B^j_i = e_{\lambda_1}\wedge\ldots\wedge e_{\lambda_{d-2}}\wedge A$$

*où $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{d-2})$ est le seul élément de $\Lambda^d_{d-2}$ ne comprenant ni $i$ ni $j$. Soit $(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\in\mathbb{N}^d$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{d}\alpha_i = d-2$. On note $\sigma$ la permutation* *de* $\{1,\dots,d\}$ *telle que* $\alpha_{\sigma(i)}$ *soit une famille décroissante avec de plus* $\sigma(i) < \sigma(i+1)$ *si* $\alpha_{\sigma(i)} = \alpha_{\sigma(i+1)}$. *Alors on a*

$$B_{\sigma(1)}^{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge B_{\sigma(1)}^{\sigma(\alpha_1+2)} \wedge B_{\sigma(2)}^{\sigma(\alpha_1+3)} \wedge \dots \wedge B_{\sigma(2)}^{\sigma(\alpha_1+\alpha_2+2)} \wedge B_{\sigma(3)}^{\sigma(\alpha_1+\alpha_2+3)} \wedge \dots \wedge B_{\sigma(k)}^{\sigma(d)} = \epsilon_\alpha \Big(\prod_{i=1}^{d} (A_i)^{\alpha_i}\Big) A.$$

*où* $\epsilon_\alpha \in \{-1,1\}$ *et* $k$ *est le plus grand entier tel que* $\alpha_{\sigma(k)} > 0$.

*Preuve.* — Quitte à multiplier le résultat final par $\epsilon_\sigma$, on peut toujours supposer que $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_d$. Supposons $A \neq 0$ et soit

$$K = B_1^2 \wedge \dots \wedge B_1^{\alpha_1+2} \wedge B_2^{\alpha_1+3} \wedge \dots \wedge B_k^d.$$

Comme tous les $B_i^j$ appartiennent à $A^\perp$, on sait déjà que $K = \lambda(A)A$. D'après (5.1), on a

$$B_i^j = \epsilon(A_i e_j - A_j e_i)$$

avec $\epsilon \in \{-1,1\}$.

Calculons $Y \cdot e_1$. On a :

$$\begin{aligned} Y \cdot e_1 &= \epsilon \det(e_1, B_1^2, \dots, B_1^{\alpha_1+2}, B_2^{\alpha_1+3}, \dots, B_k^d), \\ &= \epsilon \begin{vmatrix} 1 & -A_2 & \cdots & -A_{\alpha_1+2} & -A_{\alpha_1+3} & \cdots & -A_d \\ 0 & A_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & & \\ 0 & & \ddots & A_1 & 0 & & \\ 0 & & & 0 & A_2 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & A_k \end{vmatrix} \\ &= \epsilon \Big(\prod_{i=1}^{k} A_i^{\alpha_i}\Big) A_1, \end{aligned}$$

avec $\epsilon \in \{-1,1\}$, d'où le résultat. □

Soit donc $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i = d-2$. Notons $\sigma$ la permutation construite dans le lemme précédent et posons

$$U_\alpha = Z_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge \dots \wedge Z_{\sigma(k)\sigma(d)}.$$

On sait que le champ $U_\alpha$ est dans $L^\infty([0,T];B^r_a)$ uniformément en $\nu$ et vérifie, en vertu du lemme précédent et de (4.10),

$$\begin{cases}(\partial_t+v_\nu\cdot\nabla)U_\alpha=-{}^t\nabla v_\nu\cdot U_\alpha,\\ U_{\alpha|t=0}=\epsilon_\alpha\Big(\prod_{i=1}^d\big(\partial_i f^0\big)^{\alpha_i}\Big)\nabla f^0.\end{cases}$$

On a donc $U_{\alpha,t}=\epsilon_\alpha\Big(\prod\limits_{i=1}^d\big(\partial_i f^0\circ\psi_{t,\nu}^{-1}\big)^{\alpha_i}\Big)\nabla f_{t,\nu}$. Donc

$$\begin{aligned}&\big(1-(\chi^0\circ\psi_{t,\nu}^{-1})^{2d-4}\big)\nabla f_{t,\nu}\\ &=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_d=d-2}\frac{\epsilon_\alpha(d-2)!}{\alpha_1!\ldots\alpha_d!}\cdot\frac{\big(1-(\chi^0\circ\psi_{t,\nu}^{-1})^{2d-4}\big)\big(\prod\limits_{i=1}^d(\partial_i f^0\circ\psi_{t,\nu}^{-1})^{\alpha_i}\big)}{|\nabla f^0\circ\psi_{t,\nu}^{-1}|^{2d-4}}U_\alpha.\end{aligned}$$

De plus, on sait que $t\mapsto U_\alpha(1-(\chi^0)^{2d-4}\circ\psi_{t,\nu}^{-1})$ appartient à $L^\infty([0,T];B^r_a)$ uniformément en $\nu$ et est nul en dehors de $\psi_{t,\nu}(V^0)$, donc en dehors d'un domaine où $|\nabla f^0\circ\psi_{t,\nu}^{-1}|>c>0$. On en déduit que

$$\nabla f_{t,\nu}\big(1-(\chi^0)^{2d-4}\circ\psi_{t,\nu}^{-1}\big)$$

est dans $L^\infty([0,T];B^r_a)$ uniformément en $\nu$.

*Troisième étape.* — Convergence de $f_\nu$ vers $f$.

D'après le théorème 1.1, $\psi_\nu^{-1}$ converge vers $\psi^{-1}$ dans $L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^d)$. On a donc convergence de $f_\nu$ vers $f$ dans $L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^d)$. Par interpolation avec le résultat de bornes uniformes de la deuxième étape, on obtient la convergence de $f_\nu$ vers $f$ dans tous les $L^\infty([0,T];B^{1+r'}_a)$ tels que $r'<r$.

*Quatrième étape.* — On montre que pour tout $t\in[0,T]$, on a $\Omega_{t,\nu}\in B^r_{a,\Sigma_{t,\nu}}$ et $\Omega_t\in B^r_{a,\Sigma_t}$. Ce résultat découle du lemme suivant :

LEMME 5.3. — *Sous les hypothèses du théorème* 1.2, *la solution $v$ de $(E)$ ou de* $(\mathrm{NS}_\nu)$ *donnée par le théorème* 1.1 *vérifie la propriété suivante : si $t\in[0,T]$ et $\phi_t$ est une fonction de $B^r_a$ nulle sur $\Sigma_t$, alors $\phi_t\Omega_t\in B^r_a$.*

*Preuve.* — Posons $\phi_0=\phi_t\circ\psi_t$. Comme $\psi_t$ est lipschitzienne, on a clairement $\phi_0\in B^r_a$. De plus $\phi_0$ est nulle sur $\Sigma^0$. On en déduit que les champs $\phi_0\partial_i$ sont dans $\mathcal{T}^r_a(\Sigma^0)$. En conséquence, $\partial_i(\phi_0\Omega^0)\in B^{r-1}_a$ pour tout $i\in\{1,\ldots,d\}$. Comme $\phi_0\Omega^0\in L^a$ et

$$\phi_0\Omega^0=\Delta_{-1}(\phi_0\Omega^0)+\frac{D^j(Id-\Delta_{-1})}{i|D|^2}\big(\partial_j(\phi_0\Omega^0)\big),\tag{5.4}$$

on en déduit d'après (2.8) que $\phi_0\Omega^0\in B^r_a$. Grâce à l'estimation (4.8), on sait donc que $\phi\Omega\in L^\infty([0,T];B^r_a)$ uniformément en $\nu$. □

Soit $t \in [0,T]$. Donnons-nous un champ $X_t$ de classe $B^r_a$ et tangent à $\Sigma_t$ et montrons que $\operatorname{div}(X_t \otimes \Omega_t) \in B^{r-1}_a$.

Soit $(f^0 = 0)$ une équation de $\Sigma^0$ et $V^0$ un voisinage de $\Sigma^0$ sur lequel $|\nabla f^0| > c > 0$. Pour $\lambda \in \Lambda^d_{d-2}$, on note

$$Z^0_\lambda = e_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge e_{\lambda_{d-2}} \wedge \nabla f^0$$

et $Z_\lambda$, le champ transporté par le flot initialement égal à $Z^0_\lambda$.

Soit $\chi$ une troncature lisse valant 1 près de $\mathbb{R}^d \backslash V^0$ et nulle près de $\Sigma^0$. On pose

$$Z^0_i = \chi \partial_i \quad \text{pour} \quad i \in \{1, \ldots, d\}$$

et on note $Z_i$ les champs transportés des $Z^0_i$ par le flot. On a déjà prouvé dans les étapes précédentes que $Z_\lambda \in L^\infty([0,T]; B^r_a)$ et que $Z_i \in L^\infty([0,T]; B^r_a)$ uniformément en $\nu$.

Enfin, on note

$$f_t = f^0 \circ \psi_t^{-1}, \quad V_t = \psi_t(V^0)$$

et on définit $Z_0$ comme étant la solution du système

$$\begin{cases} (\partial_\tau + v \cdot \nabla) Z_{0,\tau} = Z_{0,\tau}(x,D)v, \\ Z_{0,\tau}{}_{|\tau=t} = \nabla f_t. \end{cases}$$

Remarquons d'abord que les champs $Z_\lambda$ restent tangents à $\Sigma_t$. Ceci se montre aisément à l'aide des équations vérifiées par $Z_{\lambda,s}$ et $\nabla f_s$, et qui entraînent $Z_{\lambda,s} \cdot \nabla f_s = (Z^0_\lambda \cdot \nabla f^0) \circ \psi_s^{-1}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \inf_{x \in V_t} \sup_{\lambda \in \Lambda^d_{d-2}} & \left|\det(Z_{\lambda_1,t}, \ldots, Z_{\lambda_{d-1}}, Z_{0,t})(x)\right| \\ &= \inf_{x \in V_t} \Big( \left|\nabla f_t(x)\right| \sup_{\lambda \in \Lambda^d_{d-1}} \Big| \overset{d-1}{\wedge} (Z_{\lambda,t})(x) \Big| \Big). \end{aligned}$$

En se souvenant de (4.11), on en déduit que

$$\inf_{x \in V_t} \sup_{\lambda \in \Lambda^d_{d-2}} \left|\det(Z_{\lambda_1,t}, \ldots, Z_{\lambda_{d-2},t}, Z_{0,t}(x))\right| > c' > 0,$$

pour une constante $c'$ dépendant de $t$ mais pas de $\nu$. Pour $x \notin V_t$, on a

$$\det\big(Z_1(t,x), \ldots, Z_d(t,x)\big) = \det\big(Z^0_1(\psi_t^{-1}(x)), \ldots, Z^0_d(\psi_t^{-1}(x))\big) = 1.$$

On note $(W_i)_{1 \le i \le N}$ la famille constituée des $Z_i$ et des $Z_\lambda$. On supposera que $W_N = Z_0$. Les considérations précédentes montrent que, quitte à prendre $c$ assez petite, les ouverts

$$U_k = \big\{x \in \mathbb{R}^d,\ |\det(W_{k_1}(x), \ldots, W_{k_d}(x))| > c\big\}$$

pour $k$ décrivant $\Lambda_d^N$, recouvrent $\mathbb{R}^d$. En notant $(\phi_k)_{k\in\Lambda_d^N}$ une partition de l'unité associée, on obtient

$$X_t = \sum_{k\in\Lambda_d^N} \sum_{j=1}^{d} \big[\big(W_{k_1},\dots,W_{k_d}\big)^{-1}(\phi_k X_t)\big]^j W_{k_j}.$$

Comme $|\det(W_{k_1},\dots,W_{k_d})| > c$ sur $\operatorname{Supp}\phi_k$, on en déduit l'existence de fonctions $\alpha_{k,t}$ de $B_a^r$ telles que

$$X_t = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{k,t} W_{k,t}.$$

L'hypothèse de tangence se traduit par $\alpha_{N,t} = 0$ sur $\Sigma_t$.

Il ne reste plus qu'à prouver que pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$, on a $\operatorname{div}(\alpha_{k,t}W_{k,t}\otimes\Omega) \in B_a^{r-1}$. Remarquons que $\alpha_{k,t}W_{k,t}$ est le champ transporté de $(\alpha_{k,t}\circ\psi_t)W_k^0$ par le flot. Pour $k < N$, $W_k^0 \in \mathcal{T}_a^r(\Sigma^0)$ par construction. Donc $(\alpha_{k,t}\circ\psi_t)W_k^0 \in \mathcal{T}_a^r(\Sigma^0)$. On en déduit que $\operatorname{div}((\alpha_{k,t}\circ\psi_t)W_k^0\otimes\Omega^0) \in B_a^{r-1}$. La remarque 4.1 assure donc que $\operatorname{div}(\alpha_{k,t}W_{k,t}\otimes\Omega) \in B_a^{r-1}$ uniformément en $\nu$.

Enfin, les composantes de $\alpha_{N,t}\nabla f_t$ sont des fonctions de $B_a^r$ qui s'annulent sur $\Sigma_t$. Le lemme 5.3 nous donne donc $\operatorname{div}(\alpha_{N,t}W_{N,t}\otimes\Omega) \in B_a^{r-1}$. $\square$

## Appendice

Le lemme suivant donne des estimations sur le terme de *stretching*, utilisées dans la partie 4.

LEMME A.1. — *Soient $r \in\, ]0,1[$ et $a \in [1,+\infty]$. Alors il existe une constante $C$ telle que pour tout champ $X$ à coefficients $B_a^r$ et pour toute fonction $\phi \in B_a^r$, on ait*

$$\text{(A.1)}\quad \big\|T_X(\Omega\cdot\nabla v + {}^t\nabla v\cdot\Omega)\big\|_{B_a^{r-1}} \le C\|\nabla v\|_{L^\infty}\big(\|\Omega\|_{L^\infty}\|X\|_{B_a^r} + \|T_X\Omega\|_{B_a^{r-1}}\big),$$

$$\text{(A.2)}\quad \big\|T_\phi(\Omega\cdot\nabla v + {}^t\nabla v\cdot\Omega)\big\|_{B_a^r} \le C\|\nabla v\|_{L^\infty}\big(\|\Omega\|_{L^\infty}\|\phi\|_{B_a^r} + \|T_\phi\Omega\|_{B_a^r}\big).$$

*Preuve.* — Démontrons d'abord la seconde inégalité qui est plus simple.

On remarque que

$$\begin{aligned}T_\phi \partial_j v^i &= \sum_k T_\phi (1-\chi)(D)\Delta^{-1}\partial_j\partial_k \Omega^i_k,\\ &= \sum_k \Big\{ [T_\phi, (1-\chi)(D)\Delta^{-1}\partial_j\partial_k]\, \Omega^i_k \\ &\qquad\qquad + (1-\chi)(D)\Delta^{-1}\partial_j\partial_k (T_\phi \Omega^i_k)\Big\}.\end{aligned}$$

L'opérateur $(1-\chi)(D)\Delta^{-1}\partial_j\partial_k$ étant d'ordre 0, on a, d'après (2.8) et (2.10),

$$\|T_\phi \nabla v\|_{B^r_a} \leq C\big(\|\Omega\|_0 \|\phi\|_{B^r_a} + \|T_\phi \Omega\|_{B^r_a}\big).$$

Comme $\phi\nabla v = T_\phi \nabla v + T'_{\nabla v}\phi$, le lemme 2.4 assure donc

$$\|\phi\nabla v\|_{B^r_a} \leq C(\|\nabla v\|_{L^\infty}\|\phi\|_{B^r_a} + \|T_\phi\Omega\|_{B^r_a}). \tag{A.3}$$

En partant de la définition 1.1, on prouve aisément que

$$\|\phi\Omega\nabla v\|_{B^r_a} \leq \|\phi\|_{B^r_a}\|\Omega\|_{L^\infty}\|\nabla v\|_{L^\infty} + \|\nabla v\|_{L^\infty}\|\phi\Omega\|_{B^r_a} + \|\Omega\|_{L^\infty}\|\phi\nabla v\|_{B^r_a},$$

ce qui, conjugué à (A.3) assure (A.2).

La deuxième inégalité repose sur le lemme suivant qui est démontré en détail pour les espaces de Hölder dans [D1].

LEMME A.2. — *Si $r \in\, ]0,1[$ et $a \in [1,+\infty]$, il existe des constantes $C$ ne dépendant que des paramètres de régularité et telles que si $\rho_1 < 0$ et $\rho_2 \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}\|T_X T_\alpha \beta\|_{B^{\rho_1+\rho_2+r-1}_a} \leq C\big(\|X\|_{B^r_a}\|\alpha\|_{\rho_1}\|\beta\|_{\rho_2} &\\ + \|\beta\|_{\rho_2}\|T_X\alpha\|_{B^{\rho_1+r-1}_a} &\\ + \|\alpha\|_{\rho_1}\|T_X\beta\|_{B^{\rho_2+r-1}_a}\big), &\end{aligned} \tag{A.4}$$

*cette estimation demeurant valable pour $\rho_1 = 0$ à condition de remplacer $\|\alpha\|_0$ par $\|\alpha\|_{L^\infty}$. Si de plus $\rho_1+\rho_2+r-1>0$, on a*

$$\begin{aligned}\|T_X R(\alpha_1,\alpha_2)\|_{B^{\rho_1+\rho_2+r-1}_a} &\\ \leq C\big(\|X\|_{B^r_a}\|\alpha\|_{\rho_1}\|\beta\|_{\rho_2} &\\ + \|\beta\|_{\rho_2}\|T_X\alpha\|_{B^{\rho_1+r-1}_a} &\\ + \|\alpha\|_{\rho_1}\|T_X\beta\|_{B^{\rho_2+r-1}_a}\big). &\end{aligned} \tag{A.5}$$

*Si $\rho \in \mathbb{R}$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est homogène de degré $m$ en dehors d'une boule centrée sur l'origine,*

$$(A.6) \qquad \big\|T_X f(D)\alpha\big\|_{B_a^{\rho+r-1-m}} \le C\|X\|_{B_a^r}\|\alpha\|_\rho + \|T_X\alpha\|_{B_a^{\rho+r-1}}.$$

*Preuve.* — Pour démontrer la première inégalité, on utilise la décomposition

$$T_X T_\alpha\beta = \sum_q T_X(S_{q-1}\alpha\Delta_q\beta).$$

Comme la suite de terme général $T_X(S_{q-1}\alpha\Delta_q\beta)$ est à fréquences dans des couronnes dyadiques, il suffit, d'après le lemme 2.3, de majorer la norme $L^a$ de chaque terme de manière adéquate, pour prouver (A.4). Pour cela, on utilise la formule de paradérivation de Leibniz-Chemin (voir [Ch1]).

Pour $q \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ et $q_1 \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, posons

$$A_{q_1,q} = \big([q_1 - 1, q - 2] \cup [q - 2, q_1 - 1]\big) \cap \mathbb{Z}.$$

On définit également, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$\varphi_i(\xi) = \xi_i\varphi(\xi), \quad \chi_i(\xi) = \xi_i\chi(\xi)$$

et des opérateurs $\Delta_{i,p}$ par :

$$\Delta_{i,p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \le -2, \\ \chi_i(D) & \text{si } p = -1, \\ \varphi_i(2^{-p}D) & \text{si } p \ge 0. \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned}(\text{A.7}) \quad & T_{X^i}\partial_i(S_{q-1}\alpha\Delta_q\beta) \\ &\qquad = (\Delta_q\beta)T_{X^i}\partial_i S_{q-1}\alpha + (S_{q-1}\alpha)T_{X^i}\partial_i\Delta_q\beta + R_3^q + R_4^q,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} R_3^q &= \sum_{\substack{|q_1-q|\le 3 \\ p\in A_{q_1,q}}} 2^{q_1}\operatorname{sgn}(q_1 - q)\Delta_p X^i\big\{\Delta_{i,q_1}(S_{q-1}\alpha\Delta_q\beta) \\ &\qquad\qquad + (S_{q-1}\alpha)\Delta_{i,q_1}\Delta_q\beta\big\}, \\ R_4^q &= \sum_{\substack{q_1\le q-1 \\ p\in A_{q_1,q}}} 2^{q_1}\operatorname{sgn}(q - q_1)\Delta_p X^i\Delta_q\beta\Delta_{i,q_1}S_{q-1}\alpha. \end{aligned}$$

En appliquant alors les lemmes 2.4, 2.5 et 2.2, on obtient l'inégalité voulue.

L'inégalité (A.5) se démontre en écrivant que

$$T_X R(\alpha,\beta) = \sum_q T_X(\Delta_q \alpha \widetilde{\Delta}_q \beta)$$

et en utilisant une décomposition analogue à (A.4). La restriction $\rho_1 + \rho_2 + r - 1 > 0$ provient de ce que les termes $T_X(\Delta_q \alpha \widetilde{\Delta}_q \beta)$ ne sont pas à fréquences dans des couronnes dyadiques, mais seulement dans des boules dyadiques.

L'inégalité (A.6) est une conséquence directe de (2.8) et (2.10). $\square$

*Suite de la preuve du lemme A.2.* — On écrit

$$T_X(\Omega \cdot \nabla v + {}^t\nabla v \cdot \Omega)^i_j = T_X T_{\Omega^i_k} \partial_j v^k + T_X T_{\partial_i v^k} \Omega^k_j + T_X T_{\partial_j v^k} \Omega^i_k + T_X T_{\Omega^k_j} \partial_i v^k + \sum_q T_X R^{ij}_q(v)$$

avec $R^{ij}_q(v) = \Delta_q \Omega^i_k \widetilde{\Delta}_q \partial_j v^k + \widetilde{\Delta}_q \partial_i v^k \Delta_q \Omega^k_j$.

D'après (A.4),

$$\begin{aligned}\big\| T_X T_{\Omega^i_k} \partial_j v^k + T_X T_{\partial_i v^k} \Omega^k_j + T_X T_{\partial_j v^k} \Omega^i_k + T_X T_{\Omega^k_j} \partial_i v^k \big\|_{B^{r-1}_a} \\ \le C\big\{ \|X\|_{B^r_a} \|\Omega\|_{L^\infty} \|\nabla v\|_{L^\infty} + \|T_X \Omega\|_{B^{r-1}_a} \|\nabla v\|_{L^\infty} \\ + \|\Omega\|_{L^\infty} \|T_X \nabla v\|_{B^{r-1}_a} \big\}.\end{aligned}$$

On applique (A.6) pour estimer le dernier terme, et on obtient l'inégalité souhaitée. Par ailleurs,

$$R^{ij}_q(v) = \partial_j\big(\Delta_q \Omega^i_k \widetilde{\Delta}_q v^k\big) + \partial_i\big(\Delta_q \Omega^k_j \widetilde{\Delta}_q v^k\big) + \partial_k\big(\Delta_q \Omega^j_i \widetilde{\Delta}_q v^k\big).$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_q T_X R^{ij}_q(v) &= T_X \partial_j R(\Omega^i_k, v^k) + T_X \partial_i R(\Omega^k_j, v^k) + T_X \partial_k R(\Omega^j_i, v^k) \\ &= \partial_j T_X R(\Omega^i_k, v^k) + \partial_i T_X R(\Omega^k_j, v^k) + \partial_k T_X R(\Omega^j_i, v^k) \\ &\quad - T_{\partial_j X^\ell} \partial_\ell R(\Omega^i_k, v^k) - T_{\partial_i X^\ell} \partial_\ell R(\Omega^k_j, v^k) \\ &\quad - T_{\partial_k X^\ell} \partial_\ell R(\Omega^j_i, v^k).\end{aligned}$$

Une application de (2.6′), de (2.8) et de (A.5) donne donc

$$\text{(A.8)}\quad \begin{aligned}&\Big\| \sum_q T_X R^{ij}_q(v) \Big\|_{B^{r-1}_a} \\ &\le C\big( \|v\|_1 \|\Omega\|_0 \|X\|_{B^r_a} + \|\Omega\|_0 \|T_X v\|_{B^{r-1}_a} + \|v\|_1 \|T_X \Omega\|_{B^{r-1}_a} \big).\end{aligned}$$

Ceci n'est pas tout à fait l'estimation souhaitée car l'inégalité

$$\|v\|_1 \leq C\|\nabla v\|_0$$

n'est pas vraie en général. On écrit alors

$$v = \chi(D)v + \big(\mathrm{Id} - \chi(D)\big)v.$$

Comme $\|(\mathrm{Id} - \chi(D))v\|_1 \leq C\|\nabla v\|_0$ et comme $T_X v = T_X(\mathrm{Id} - \chi(D))v$, il est clair que l'on obtient l'estimation voulue pour

$$\Big\|\sum_q T_X R_q^{ij}\big(\mathrm{Id} - \chi(D)\big)v\Big\|_{B_a^{r-1}}.$$

Reste à estimer la partie correspondant aux basses fréquences de $v$. On a par exemple

$$T_X R(\Omega, \chi(D)\nabla v) = \sum_{q\leq 1} T_X\big(\Delta_q\Omega \cdot \widetilde{\Delta}_q\chi(D)\nabla v\big).$$

On utilise à nouveau la décomposition (A.7). Il vient

$$\begin{aligned}
&T_X\big(\Delta_q\Omega \cdot \widetilde{\Delta}_q\chi(D)\nabla v\big)\\
&\quad= \widetilde{\Delta}_q\Delta_{-1}\nabla v T_X\Delta_q\Omega + 0\\
&\qquad+ \sum_{\substack{q_1\leq q+3\\ p\in A_{q_1,q}}} \mathrm{sgn}(q_1 - q)2^{q_1}\Delta_p X^i\Delta_{i,q_1}(\nabla\Delta_{-1}\widetilde{\Delta}_q v\Delta_q\Omega)\\
&\qquad\quad+ \sum_{\substack{|q-q_1|\leq 1\\ p\in A_{q_1,q}}} \mathrm{sgn}(q_1 - q)2^{q_1}\Delta_p X^i(\Delta_{i,q_1}\Delta_q\Omega)\nabla\Delta_{-1}\widetilde{\Delta}_q v\\
&\qquad\qquad+ \sum_{\substack{q_1\leq 0\\ p\in A_{q_1,q}}} \mathrm{sgn}(q_1 - q)2^{q_1}\Delta_p X^i\Delta_{i,q_1}(\nabla\Delta_{-1}\widetilde{\Delta}_q v)\Delta_q\Omega.
\end{aligned}$$

Il est clair maintenant que $T_X R(\Omega, \chi(D)\nabla v)$ vérifie l'estimation souhaitée. On procède de manière analogue pour $T_X R({}^t\nabla\chi(D)v, \Omega)$. □

Le lemme suivant donne une estimation pour un commutateur, utilisée pour prouver (4.8).

LEMME A.3. — *Soient* $a \in [1, +\infty]$, $r \in ]0, 1[$, $v \in L^\infty([0,T]; \mathrm{Lip})$ *à divergence nulle, et* $\phi \in L^\infty([0,T]; B^r_a)$ *telle que*

$$(\partial_t + v \cdot \nabla)\phi = 0.$$

*Soit* $u \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ *telle que* $T_\phi u \in L^\infty([0,T]; B^r_a)$. *Alors il existe une constante* $C$ *ne dépendant que de* $r$ *et* $d$ *et telle que*

$$\big\|[\partial_t + v \cdot \nabla, T_\phi]u\big\|_{B^r_a} \leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}\big(\|u\|_{L^\infty}\|\phi\|_{B^r_a} + \|T_\phi u\|_{B^r_a}\big).$$

*Preuve.* — En exploitant $\partial_t + v \cdot \nabla\phi = 0$, on montre que

$$\begin{aligned}(\text{A.9}) \quad [\partial_t + v \cdot \nabla, T_\phi]u = [T_{v^j}, T_\phi]\partial_j u + T_{v^j} T_{\partial_j \phi} u - T_{v^j \partial_j \phi} u \\ - T'_{\partial_j T_\phi u} v^j - T_\phi T_{\partial_j u} v^j - T_\phi \partial_j R(v^j, u).\end{aligned}$$

D'après les lemmes 5.2 et 5.3 de [D2], on a

$$\big\|[T_{v^j}, T_\phi]\partial_j u\big\|_{B^r_a} + \|T_{v^j} T_{\partial_j \phi} u - T_{v^j \partial_j \phi} u\|_{B^r_a} \leq C\|v\|_{\mathrm{Lip}}\|\phi\|_{B^r_a}\|u\|_{L^\infty}.$$

Le lemme 2.4 donne $\|T'_{\partial_j T_\phi u} v^j\|_{B^r_a} \leq C\|v\|_1\|T_\phi u\|_{B^r_a}$.

*Estimation de* $\|T_\phi T_{\partial_j u} v^j\|_{B^r_a}$. — On a

$$T_\phi T_{\partial_j u} v^j = \sum_q T_\phi S_{q-1}\partial_j u \Delta_q v^j.$$

Comme le terme général de cette série est à fréquences dans des couronnes dyadiques, il suffit d'estimer $\|T_\phi S_{q-1}\partial_j u \Delta_q v^j\|_{L^a}$ de manière adéquate. Dans les calculs qui suivent, on note $\mathcal{R}$ tout terme satisfaisant

$$\|\mathcal{R}\|_{L^a} \leq C 2^{-qr}\|v\|_{\mathrm{Lip}}\big(\|\phi\|_{B^r_a}\|u\|_{L^\infty} + \|T_\phi u\|_{B^r_a}\big).$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
&T_\phi S_{q-1}\partial_j u \Delta_q v^j \\
&\quad = S_{q-1}\phi S_{q-1}\partial_j u \Delta_q v^j \\
&\qquad\qquad + \sum_{|p-q|\leq 3} (S_{p-1} - S_{q-1})\phi \Delta_p(S_{q-1}\partial_j u \Delta_q v^j), \\
&\quad = \Delta_q v^j \Big(T_\phi S_{q-1}\partial_j u + \sum_{p\leq q-1} (S_{q-1} - S_{p-1})\phi \Delta_p S_{q-1}\partial_j u\Big) + \mathcal{R}, \\
&\quad = \Delta_q v^j \big(S_{q-1}(T_\phi \partial_j u) + [T_\phi, S_{q-1}]\partial_j u\big) + \mathcal{R}, \\
&\quad = \mathcal{R}.
\end{aligned}$$

*Estimation de* $\|T_\phi \partial_j R(v^j,u)\|_{B^r_a}$. — On a

$$T_\phi \partial_j R(v^j,u) = \sum_q T_\phi \Delta_q v^j \widetilde{\Delta}_q \partial_j u.$$

Le terme général de cette série est seulement à fréquences dans des boules dyadiques. Cependant, comme on cherche à estimer la somme dans un espace de Besov à indice positif, il suffit encore, en vertu du lemme 2.3, d'estimer $\|T_\phi \Delta_q v^j \widetilde{\Delta}_q \partial_j u\|_{L^a}$ de manière adéquate.

On applique à nouveau la formule de paradérivation du type (A.7) :

$$\begin{aligned} T_\phi \partial_j (\Delta_q v^j \widetilde{\Delta}_q u) &= \widetilde{\Delta}_q u T_\phi \partial_j \Delta_q v^j + \Delta_q v^j T_\phi \partial_j \widetilde{\Delta}_q u \\ &\quad + \sum_{\substack{q_1 \le q+3 \\ p \in A_{q_1,q}}} 2^{q_1} \operatorname{sgn}(q_1 - q) \Delta_p \phi \Delta_{j,q_1} (\Delta_q v^j \widetilde{\Delta}_q u) \\ &\quad - \sum_{\substack{|q_1 - q| \le 2 \\ p \in A_{q_1,q}}} 2^{q_1} \operatorname{sgn}(q_1 - q) \Delta_p \phi \big(\widetilde{\Delta}_q u \Delta_{j,q_1} \Delta_q v^j + \Delta_q v^j \Delta_{j,q_1} \widetilde{\Delta}_q u\big). \end{aligned}$$

Il vient donc, compte tenu de $\operatorname{div} v = 0$,

$$\begin{aligned} T_\phi \partial_j (\Delta_q v^j \widetilde{\Delta}_q u) &= \Delta_q v^j T_\phi \partial_j \widetilde{\Delta}_q u + \mathcal{R}, \\ &= \Delta_q v^j \big([T_\phi, \widetilde{\Delta}_q] \partial_j u + \widetilde{\Delta}_q T_\phi \partial_j u\big) + \mathcal{R}, \\ &= \mathcal{R}. \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\big\|[\partial_t + v\cdot\nabla, T_\phi]u\big\|_{B^r_a} \le C \|v\|_{\mathrm{Lip}} \big(\|u\|_{L^\infty} \|\phi\|_{B^r_a} + \|T_\phi u\|_{B^r_a}\big). \tag{A.10}$$

Ce n'est pas tout à fait l'estimation voulue. En traitant à part les basses fréquences, on peut remplacer $\|v\|_{\mathrm{Lip}}$ par $\|\nabla v\|_{L^\infty}$.

Soit $\chi \in C_0^\infty(B(0,\frac12))$. On pose

$$v = z + w \quad \text{avec} \quad w = \chi(D) v.$$

On écrit à nouveau la décomposition (A.9) en dédoublant chaque terme selon les hautes et basses fréquences de $v$. Comme certains des termes de basses fréquences sont nuls, on trouve

$$\begin{aligned} [\partial_t + v\cdot\nabla, T_\phi]u = \big(T_{w^j} \partial_j T_\phi u - T_\phi w^j \partial_j u - T_{w^j \partial_j \phi} u\big) \\ + \big([T_{z^j}, T_\phi] \partial_j u + T_{z^j} T_{\partial_j \phi} u - T_{z^j \partial_j \phi} u \\ - T'_{\partial_j T_\phi u} z^j - T_\phi T_{\partial_j u} z^j - T_\phi \partial_j R(z^j, u)\big). \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\|z\|_{\mathrm{Lip}} \leq C(\|(1-\chi)(D)v\|_{L^\infty} + \|(1-\chi)(D)v\|_1 \leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}$$

et en appliquant (A.10), on constate que les hautes fréquences de $v$ vérifient l'estimation souhaitée.

Pour les termes de basses fréquences, on écrit

$$\begin{aligned}
T_{w^j\partial_j\phi}u &= \sum_q S_{q-1}(w^j S_{q+1}\partial_j\phi)\Delta_q u \\
&= \sum_q w^j S_{q-1}\partial_j\phi\Delta_q u + \sum_q \Delta_q u[S_{q-1}, w^j]S_{q+1}\partial_j\phi \\
&= w^j T_{\partial_j\phi}u + \sum_q \Delta_q u \int \tilde{h}(y)\big(w^j(x-2^{-(q-1)}y) - w^j(x)\big) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad S_{q+1}\partial_j\phi(x-2^{-(q-1)}y)\,\mathrm{d}y \\
&= w^j T_{\partial_j\phi}u + \mathcal{R},
\end{aligned}$$

où $\mathcal{R}$ désigne un terme vérifiant l'estimation voulue. On a aussi,

$$\begin{aligned}
T_{w^j}\partial_j T_\phi u &= \sum_{|p-q|\leq 3} S_{q-1}w^j\partial_j\Delta_q(S_{p-1}\phi\Delta_p u), \\
&= w^j\partial_j(T_\phi u) + \sum_{|p-q|\leq 3}(S_{q-1}-S_{p-1})w^j\partial_j\Delta_q(S_{p-1}\phi\Delta_p u).
\end{aligned}$$

On remarque alors que

$$S_{p-1}\phi\Delta_p u = \Delta_p T_\phi u + [T_\phi,\Delta_p]u + \Delta_{p-2}\phi\Delta_p\Delta_{p-1}u - \Delta_{p-1}\phi\Delta_p\Delta_{p+1}u.$$

Le lemme 2.2 et (2.9) assurent donc que

$$\|S_{p-1}\phi\Delta_p u\|_{L^a} \leq 2^{-pr}\big(\|T_\phi u\|_{B^r_a} + \|\phi\|_{B^r_a}\|u\|_0\big).$$

Finalement, on a donc $T_{w^j}\partial_j T_\phi u = w^j\partial_j(T_\phi u) + \mathcal{R}$.

Pour $T_\phi w^j\partial_j u$, on écrit

$$\begin{aligned}
T_\phi w^j\partial_j u &= \sum S_{p-1}\phi\Delta_p(w^j\partial_j u) \\
&= w^j T_\phi\partial_j u + \sum_{|p-q|\leq 2}(S_{p-1}-S_{q-1})\phi\Delta_p(w^j\partial_j\Delta_q u) \\
&= w^j T_\phi\partial_j u + 0 + \sum_{|p-q|\leq 2}(S_{p-1}-S_{q-1})\phi[\Delta_p, w^j]\Delta_q\partial_j u \\
&= w^j T_\phi\partial_j u + \sum_{|p-q|\leq 2}(S_{p-1}-S_{q-1})\phi \\
&\qquad\qquad \int h(y)\big(w^j(x-2^{-p}y) - w^j(x)\big) \\
&\qquad\qquad\qquad \Delta_q\partial_j u(x-2^{-p}y)\,\mathrm{d}y \\
&= w^j T_\phi\partial_j u + \mathcal{R}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$T_{w^j}\partial_j T_\phi u - T_\phi w^j \partial_j u - T_{w^j \partial_j \phi} u$$
$$= w^j \partial_j T_\phi u - w^j T_\phi \partial_j u - w^j T_{\partial_j \phi} u + \mathcal{R} = \mathcal{R}. \quad \square$$

Dans le lemme suivant, on établit que l'espace $B^r_{a,\Sigma}$ contient une large classe de fonctions ayant une discontinuité sur $\Sigma$.

LEMME A.4. — *Soient $\Sigma$ une hypersurface compacte de classe $B^{1+r}_a$ (avec $a \in ]d, +\infty]$ et $r \in ]d/a, 1[$) et $U$ l'ouvert borné de frontière $\Sigma$. Alors pour toute fonction $u \in B^r_a$, on a $u 1_U \in B^r_{a,\Sigma}$.*

*Preuve.* — On se donne une équation $(f = 0)$ définissant $\Sigma$ et un voisinage $V$ de $\Sigma$ sur lequel $|\nabla f| > c > 0$. Soit $\chi$ une troncature $C^\infty$ valant 0 près de $\Sigma$ et 1 au voisinage de $\mathbb{R}^d \backslash V$. On pose

$$Z_\lambda = e_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge e_{\lambda_{d-2}} \wedge \nabla f$$

pour $\lambda \in \Lambda^d_{d-2}$, $Z_i = \chi \partial_i$ et $Z_0 = \nabla f$.

Soit $X$ un champ de vecteurs de $B^r_a$ tangent à $\Sigma$. La décomposition (5.2) appliquée à $(1-\chi)X$ prouve l'existence de fonctions $a_i$ et $\beta_\lambda$ de classe $B^r_a$ et telles que

$$X = \sum_{i=0}^{d} a_i Z_i + \sum_{\lambda \in \Lambda^d_{d-2}} \beta_\lambda Z_\lambda.$$

La tangence se traduit par $a_{0|\Sigma} \equiv 0$.

Comme $B^r_a$ est une algèbre, on a $u a_0 Z_0 \in B^r_a$. Admettons provisoirement le lemme suivant :

LEMME A.5. — *Soient $a \in ]1, +\infty[$, $s \in ]1/a, 1[$ et $U$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ à frontière de classe $C^1$. Alors toute fonction $f \in B^s_a(\mathbb{R}^d)$ à trace nulle sur $\partial U$ vérifie $1_U f \in B^s_a(\mathbb{R}^d)$.*

Dans notre cas, $B^{1+r}_a \hookrightarrow C^1$, donc on peut appliquer le lemme A.5. On en déduit que $a_0 Z_0 u 1_U \in B^r_a$.

On a par ailleurs pour $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $\lambda \in \Lambda^d_{d-2}$,

$$\operatorname{div}(a_i u 1_U Z_i) = Z_i(x, D)(a_i u 1_U) + a_i u 1_U \operatorname{div} Z_i,$$
$$\operatorname{div}(b_\lambda u 1_U Z_\lambda) = Z_\lambda(x, D)(a_\lambda u 1_U).$$

Il suffit donc de prouver l'appartenance de $Z_i(x, D)(a_i u 1_U)$ et celle de $Z_\lambda(x, D)(a_\lambda u 1_U)$ à $B^{r-1}_a$ pour obtenir $\operatorname{div} X u \in B^{r-1}_a$. Ceci résulte du lemme suivant que nous admettons pour l'instant.

LEMME A.6. — *Soient $r \in ]0,1[$ et $a \in [1,+\infty]$. On se donne $u \in B^r_a \cap L^\infty$, $v \in L^\infty$, $X$ un champ de vecteurs à coefficients et divergence dans $L^\infty \cap B^r_a$. On suppose en outre que $X(x,D)v$ est dans $B^{r-1}_a$. Alors on a $X(x,D)uv \in B^{r-1}_a$ et l'estimation*

$$\big\|X(x,D)uv\big\|_{B^{r-1}_a} \leq C\big\{\|v\|_{L^\infty}(\|X\|_{L^\infty}\|u\|_{B^r_a} + \|u\|_{L^\infty}\widetilde{\|}X\|_{B^r_a}) + \|u\|_{L^\infty}\|X(x,D)v\|_{B^{r-1}_a}\big\}.$$

Avec les hypothèses du lemme A.4, les fonctions et les champs considérés sont bornés. De plus $Z_i(x,D)1_U = 0$ et $Z_\lambda(x,D)1_U = 0$, d'où la conclusion. ☐

*Preuve du lemme A.5.* — Supposons d'abord que $U = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+_*$. D'après [T, prop. 3.3.2], l'application $g \mapsto 1_U g$ est alors continue de $B^{s-1}_a$ dans $B^{s-1}_a$.

Soit maintenant $h \in B^s_a$ s'annulant sur l'axe $\{x_d = 0\}$. Pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$, on a $\partial_i(1_U h) = 1_U \partial_i h$. Donc, d'après ce qui précède, $\partial_i(1_U h)$ appartient à $B^{s-1}_a$. Comme par ailleurs il est clair que $1_U h \in L^a$ puisque $h \in L^a$, on en déduit, en utilisant la décomposition (5.4), que $1_U h$ appartient à $B^s_a$.

Lorsque $U$ est un ouvert borné de classe $C^1$, on peut se ramener au cas précédent à l'aide d'une partition de l'unité (voir [T] page 191 pour un exemple d'une telle partition). Tout revient finalement à appliquer le résultat du cas $U = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+_*$ à un nombre fini de fonctions du type $\phi f \circ \psi$ avec $\phi \in C^\infty_0$, $f \in B^s_a$ et $\psi \in C^1 \cap \mathrm{Lip}$. Grâce au lemme 2.1, ces fonctions sont dans $B^s_a$, d'où la conclusion.

*Preuve du lemme A.6.* — On écrit la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} X(x,D)uv &= X(x,D)T_u v + X(x,D)T'_v u,\\ &= T_X T_u v + T_{\partial_i T_u v} X^i + \partial_i R(T_u v, X^i)\\ &\qquad - R(T_u v, \operatorname{div} X) + T_X T'_u v + T_{\partial_i T'_v u} X^i\\ &\qquad\qquad + \partial_i R(X^i, T'_v u) - R(\operatorname{div} X, T'_v u). \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.4, on a

$$\|T_u v\|_0 \leq C\|u\|_{L^\infty}\|v\|_0 \quad \text{et} \quad \|T'_v u\|_{B^r_a} \leq C\|v\|_{L^\infty}\|u\|_{B^r_a}.$$

En appliquant encore ce lemme, on vérifie que les sept derniers termes satisfont l'estimation voulue.

Pour traiter le premier terme, on utilise l'inégalité (A.4). On obtient

$$\|T_X T_u v\|_{B^r_a} \leq C\big\{\|X\|_{B^r_a}\|u\|_{L^\infty}\|v\|_0 + \|v\|_0\|T_X u\|_{B^{r-1}_a} \\ + \|u\|_{L^\infty}\|T_X v\|_{B^{r-1}_a}\big\}.$$

Il est clair que $\|T_X u\|_{B^{r-1}_a} \leq C\|X\|_{L^\infty}\|u\|_{B^r_a}$. Les inégalités (2.12) et (2.14) permettent alors de conclure. □

## BIBLIOGRAPHIE

[A] ALINHAC (S.). — *Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non linéaires*, Ann. Sci. École Normale Sup., t. **21**, 1988, p. 91–133.

[B] BONY (J.-M.). — *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. Sci. École Normale Sup., t. **14**, 1981, p. 209–246.

[Ch1] CHEMIN (J.-Y.). — *Fluides parfaits incompressibles*, Astérisque **230**, 1995.

[Ch2] CHEMIN (J.-Y.). — *A remark on the inviscid limit for two-dimensionnal incompressible fluid*, Comm. Partial Diff. Equ., t. **21**, 1996, p. 1771–1779.

[Ch3] CHEMIN (J.-Y.). — *Calcul paradifférentiel précisé et application à des équations aux dérivées partielles non semi-linéaires*, Duke Math. J., t. **56**, 1988, p. 431–469.

[D1] DANCHIN (R.). — *Poches de tourbillon visqueuses*, J. Math. Pures Appl., t. **76**, 1997, p. 609–647.

[D2] DANCHIN (R.). — *Évolution temporelle d'une poche de tourbillon singulière*, Comm. Partial Diff. Equ., t. **22**, 1997, p. 685–721.

[F] FRIEDMAN (A.). — *Partial differential equations of parabolic type.* — Prentice-Hall, 1964.

[GSR] GAMBLIN (P.), SAINT-RAYMOND (X.). — *On three-dimensional vortex patches*, Bull. Soc. Math. France, t. **123**, 1995, p. 375–424.

[GR] GÉRARD (P.), RAUCH (J.). — *Propagation de la régularité locale de solutions d'équations hyperboliques non linéaires*, Ann. Inst. Fourier, t. **37-3**, 1987, p. 65–84.

[KP1] KATO (T.), PONCE (G.). — *Well-Posedness of the Euler and Navier-Stokes Equations in the Lebesgue Spaces $L^p_s(\mathbb{R}^2)$*, Rev. Matemática Iberoamericana, t. **2**, 1986, p. 73–88.

[KP2] KATO (T.), PONCE (G.). — *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math., t. **41**, 1988, p. 891–907.

[Se] SERFATI (P.). — *Étude mathématique de flammes infiniment minces en combustion. Résultats de structure et de régularité pour l'équation d'Euler incompressible.* — Thèse de l'Université de Paris 6, 1992.

[St] STEIN (E.). — *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals.* — Princeton University Press, 1993.

[T] TRIEBEL (H.). — *Theory of function spaces.* — Birkhäuser, 1983.

[Ya] YAMAZAKI (M.). — *A quasi-homogeneous version of paradifferential operators, I. Boundedness on spaces of Besov type*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., t. **33**, 1986, p. 131–174.

[Yu] YUDOVITCH (V.). — *Non stationary flows of an ideal incompressible fluid*, Zurnal vychislitel'noj matematiki i matematiceskoj fiziki, t. **3**, 1963, p. 1032–1066.