BULLETIN DE LA S. M. F.

MOHAMMED BENCHAOU

Estimations de diffusion pour un opérateur de Klein-Gordon matriciel dépendant du temps

Bulletin de la S. M. F., tome 126, nº 2 (1998), p. 273-294

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1998__126_2_273_0>

Bull. Soc. math. France,
126, 1998, p. 273–294.

ESTIMATIONS DE DIFFUSION POUR UN OPÉRATEUR DE KLEIN-GORDON MATRICIEL DÉPENDANT DU TEMPS

PAR MOHAMMED BENCHAOU (*)

RÉSUMÉ. — Dans ce travail, on s'intéresse à la théorie de la diffusion pour un opérateur de Klein-Gordon matriciel 2×2 dépendant du temps, du type :

$$P = \left(\sqrt{1 - h^2 \Delta_x}\right)\mathbf{I}_2 + V(t,x) + hR(t,x)$$

sur $L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$, où $V(t,x)$ est une matrice diagonale réelle dont les valeurs propres ne sont jamais égales lorsque (t,x) décrit $\mathbb{R}^{n+1}$. On suppose également que V et R se prolongent holomorphiquement dans une bande complexe autour de $\mathbb{R}^{n+1}$, et vérifient certaines propriétés de décroissance à l'infini. Si l'on note $S = (S_{i,j})_{1 \le i,j \le 2}$ l'opérateur de diffusion associé à P, on montre alors que ses éléments antidiagonaux $S_{1,2}$ et $S_{2,1}$ ont une norme exponentiellement petite lorsque h tend vers 0_+. Plus précisément, on obtient une estimation du type $\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\Sigma/h})$, où $\Sigma > 0$ est une constante explicitement reliée au comportement de $V(t,x)$ dans le complexe.

ABSTRACT. — SCATTERING ESTIMATES FOR A TIME DEPENDANT MATRICIAL KLEIN-GORDON OPERATOR. In this paper, we study the scattering theory for a time dependent 2×2 matricial Klein-Gordon operator, of the type :

$$P = (\sqrt{1 - h^2 \Delta_x})\mathbf{I}_2 + V(t,x) + hR(t,x)$$

on $L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$, where $V(t,x)$ is a real diagonal matrix, the eigenvalues of which are never equals when (t,x) varies in $\mathbb{R}^{n+1}$. One also assumes that V and R extend

(*) Texte reçu le 17 octobre 1997, accepté le 20 janvier 1998.

M. BENCHAOU, Université Paris-Nord, Département de Mathématiques, avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse (France).

NOTE. — Cet article est tiré de la thèse de doctorat que préparait M. BENCHAOU à l'Université Paris-Nord, avant de disparaître des suites de ses blessures lors de l'attentat meurtrier du 3 décembre 1996 survenu à la gare de Port-Royal à Paris. Sa thèse, ainsi que celle de son collègue et ami Younès NAÏT SLIMANE disparu dans les mêmes conditions, a été soutenue à titre posthume à Paris-Nord le 27 juin 1997.

Classification AMS : 35 P 25, 35 P 99, 81 U 05.

Mots clés : Diffusion ; Semi-classique ; Décroissance exponentielle.

holomorphically in a complex strip around $\mathbb{R}^{n+1}$, and satisfy to some decay properties at infinity. Then, denoting $S = (S_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2}$ the scattering operator associated to P, we show that its off-diagonal coefficients $S_{1,2}$ and $S_{2,1}$ have an exponentially small norm as h tends to 0_+. More precisely, we obtain an estimate of the type $\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\Sigma/h})$, where $\Sigma > 0$ is a constant which is explicitely related to the behaviour of $V(t,x)$ in the complex domain.

1. Introduction

On s'intéresse dans ce travail à la théorie de la diffusion pour un système matriciel 2×2 d'opérateurs semi-classiques.

Ce type de systèmes matriciels interviennent notamment lorsque, pour l'étude quantique d'un ensemble de particules en interaction, on est conduit à effectuer certaines approximations faisant apparaître un petit paramètre (que l'on notera ici h). Ceci est par exemple le cas dans l'approximation de Born-Oppenheimer (où h^2 désigne alors l'inverse de la masse des noyaux), ou encore dans certains problèmes d'homogénéïsation. Dans ces situations, il est en général possible d'effectuer une réduction qui ramène l'étude de l'hamiltonien de départ à celle d'un système matriciel semi-classique : pour une justification rigoureuse de telles réductions, on pourra consulter en particulier [HeSj], [GMS], [KMSW], [KMW]. Ainsi, dans l'approximation de Born-Oppenheimer, l'opérateur ainsi obtenu est du type (*cf.* [KMSW]) :

$$-h^2\Delta_x \mathbf{I}_N + M_\lambda(x, hD_x)$$

où $\mathbf{I}_N$ désigne la matrice identité de $\mathbb{C}^N$ (N dépendant du niveau d'énergie λ étudié), x est la variable de position relative des noyaux, et $M_\lambda(x, hD_x)$ est un opérateur matriciel h-pseudodifférentiel d'ordre 0.

D'autre part, l'étude de systèmes matriciels semi-classiques a permis dans certains cas de mettre en évidence des phénomènes peu détectables (voire inexistants) dans le cas scalaire, comme par exemple l'effet tunnel microlocal dû à une lacune dans le spectre de l'hamiltonien matriciel classique sous-jacent (*cf.* [Ma], [Na1], [Ba]).

C'est dans cette optique que l'on se propose ici d'étudier l'opérateur de diffusion associé à l'hamiltonien de Klein-Gordon matriciel dépendant du temps :

$$P(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{-h^2\Delta + 1} + V_1(t,x) & hR(t,x) \\ hR(t,x) & \sqrt{-h^2\Delta + 1} + V_2(t,x) \end{pmatrix}$$

où l'on suppose que les fonctions V_1 et V_2 ne sont jamais égales, et où $P(t)$ est considéré comme une perturbation de l'opérateur P_0 obtenu en remplaçant V_1, V_2 et R par leurs limites respectives lorsque l'on fait tendre t et $|x|$ vers l'infini. Il s'avère que, sous des conditions d'analyticité sur V_1, V_2 , R, et de décroissance en temps à l'infini sur R (ainsi que des conditions en espace à l'infini sur V_1 et V_2 : *cf.* (2.3) ci-dessous), alors les techniques introduites dans [Ma] peuvent s'adapter ici pour estimer les éléments non diagonaux de l'opérateur de diffusion $S = \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} \end{pmatrix}$. Plus précisément, on obtient une estimation du type (*cf.* théorème 2.1) :

$$\|S_{1,2}\| + \|S_{2,1}\| = \mathcal{O}(e^{-\Sigma/h})$$

uniformément lorsque $h \to 0_+$, où $\Sigma > 0$ est une constante qui peut être décrite géométriquement en fonction du comportement de V_1 et V_2 dans le complexe.

Les raisons pour lesquelles on a choisi de travailler ici avec $\sqrt{-h^2\Delta + 1}$ plutôt que $-h^2\Delta$ sont surtout d'ordre technique (liées notamment à la non conservation de l'énergie par l'évolution), et peuvent en partie se justifier par un traitement relativiste de l'énergie cinétique (comme cela a été fait par exemple dans [Ge]). En tout état de cause, il paraît probable que nos arguments puissent de toute façon s'appliquer également à des systèmes d'opérateurs de Dirac.

Le plan de ce travail est le suivant : dans la section suivante, on précise les hypothèses et on énonce l'estimation principale. Ensuite (§ 3), on commence par ramener le problème à l'étude de certaines solutions de l'équation d'évolution, soumises à des conditions à l'infini en temps. Afin d'étudier le comportement de ces solutions, on introduit au paragraphe 4 des microlocalisées de ces fonctions, construites à l'aide d'une transformation de FBI. À l'aide d'estimations *a priori* à poids exponentiel, on montre dans le paragraphe 5 que ces fonctions microlocalisées décroissent exponentiellement dans une certaine région de l'espace des phases (qui en fait agit comme une barrière dans l'équation d'évolution). Cette décroissance est ensuite propagée (§ 6) dans diverses directions suivant la fonction considérée, puis améliorée (§ 7) en revenant aux estimations *a priori.* Dans le paragraphe 8, on montre comment le résultat final en résulte.

2. Hypothèses et résultat principal

On s'intéresse à la théorie de la diffusion dans $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$ pour l'opérateur dépendant du temps :

$$P(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{-h^2\Delta + 1} + V_1(t,x) & hR(t,x) \\ hR(t,x) & \sqrt{-h^2\Delta + 1} + V_2(t,x) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

où V_1, V_2 et R sont des fonctions analytiques réelles sur $\mathbb{R}^{n+1}$, qui admettent des prolongements holomorphes dans une bande complexe

$$S_a = \{(t,z) \in \mathbb{C}^{n+1} \; ; \; |\operatorname{Im} z| < a, \; |\operatorname{Im} t| < a\} \tag{2.2}$$

et vérifient :

$$\begin{cases} |V_j(t,z) - \ell_j| = \mathcal{O}(\langle z\rangle^{-\rho} + \langle t\rangle^{-\rho}), \\ |R(t,z)| = \mathcal{O}(\langle t\rangle^{-\rho}), \end{cases} \tag{2.3}$$

uniformément dans S_a, avec $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, $\rho > 1$, et $\langle z\rangle := (1 + |z|^2)^{1/2}$.

Remarquons que ces hypothèses incluent des cas où V_1 et V_2 sont indépendants du temps. Par contre, comme on le verra dans la démonstration ci-après, la décroissance en temps de R est essentielle pour pouvoir appliquer les techniques de [Ma].

Si l'on note

$$P_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{-h^2\Delta + 1} + \ell_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-h^2\Delta + 1} + \ell_2 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

on peut alors montrer comme dans le cas scalaire (par la méthode de Cook) l'existence des opérateurs d'onde

$$W_\pm = \mathrm{s} - \lim_{t \to \pm\infty} U(0,t)\,\mathrm{e}^{-itP_0/h} \tag{2.5}$$

où $U(t,s)$ est l'opérateur d'évolution associé à $P(t)$ défini par :

$$ih\partial_t U(t,s) = P(t)U(t,s) \;\; ; \;\; U(s,s) = \mathbf{I}_{\mathcal{H}}.$$

On suppose ici que $W_\pm$ sont asymptotiquement complets, c'est à dire :

$$\operatorname{Ran} W_+ = \operatorname{Ran} W_-. \tag{2.6}$$

Avec les méthodes de [Ho], on peut voir que (2.6) est satisfaite par exemple si, dans (2.3), on remplace $\langle t\rangle^{-\rho}$ et $\langle z\rangle^{-\rho}$ par $\langle t\rangle^{-\rho}\langle z\rangle^{-\rho}$.

On définit ensuite l'opérateur de diffusion par :

$$S = W_+^* W_- \tag{2.7}$$

qui est un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}$, et peut s'écrire sous la forme :

$$S = \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

où les $S_{j,k}$ sont des opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Dans ce travail, on cherche à obtenir des estimations sur les normes de $S_{1,2}$ et $S_{2,1}$, en précisant leur comportement lorsque le paramètre semi-classique $h>0$ tend vers 0. L'hypothèse géométrique essentielle que l'on fait est la suivante (hypothèse de séparation) :

$$\Gamma_0 := \inf_{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}} V_1(t,x) - \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}} V_2(t,x) > 0. \tag{2.9}$$

Notons qu'il s'agit là d'une hypothèse plus forte que l'hypothèse de gap habituelle. Voir néanmoins le paragraphe 9 concernant le cas où l'on suppose seulement que $\inf(V_1 - V_2) > 0$.

Pour $\lambda \in\,]-\inf\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} V_1, -\sup\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} V_2[$, on définit :

$$\kappa(\lambda) = \sup\Big\{\kappa \in\,]0,a[\,;\ \inf_{\substack{|\operatorname{Im} z|<\kappa\\ |\operatorname{Im} t|<\kappa}} \big|(\lambda+V_1(t,z))(\lambda+V_2(t,z))\big| > 0\Big\}. \tag{21.0}$$

Il est alors facile de voir que la condition de séparation (2.9) entraîne que $\kappa(\lambda)>0$ sur $]-\inf_{\mathbb{R}^{n+1}} V_1, -\sup_{\mathbb{R}^{n+1}} V_2[$. On pose :

$$\Sigma_0 = \int_{-\inf V_1}^{-\sup V_2} \kappa(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{2.11}$$

qui est donc une constante strictement positive. Notre résultat est alors :

THÉORÈME 2.1. — *On suppose que l'on a* (2.3), (2.6) *et* (2.9). *Alors, pour tout* $\varepsilon>0$ *on a :*

$$\|S_{1,2}\| + \|S_{2,1}\| = \mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{-(\Sigma_0-\varepsilon)/h}\big) \tag{2.12}$$

uniformément par rapport à $h>0$ *assez petit.*

3. Réduction du problème

Il s'agit d'estimer les quantités :

$$A(\varphi_0^-,\varphi_0^+) := \Big\langle S\begin{pmatrix}\varphi_0^-\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \varphi_0^+\end{pmatrix}\Big\rangle_{\mathcal{H}} \tag{3.1}$$

et

$$A'(\varphi_0^-,\varphi_0^+) := \Big\langle S\begin{pmatrix}0\\ \varphi_0^-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi_0^+\\ 0\end{pmatrix}\Big\rangle_{\mathcal{H}} \tag{3.2}$$

uniformément par rapport à h et par rapport à $\varphi_0^{\pm} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\|\varphi_0^{\pm}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$. Par densité, on peut même en fait supposer que $\varphi_0^{\pm}$ appartient à $H^1(\mathbb{R}^n)$.

On va se contenter d'écrire la preuve pour $A(\varphi_0^-, \varphi_0^+)$, celle pour $A'(\varphi_0^-, \varphi_0^+)$ étant similaire. Remarquons d'abord que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$A(\varphi_0^-, \varphi_0^+) = \Big\langle W_-\begin{pmatrix}\varphi_0^- \\ 0\end{pmatrix}, W_+\begin{pmatrix}0 \\ \varphi_0^+\end{pmatrix}\Big\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \varphi^-(t), \varphi^+(t)\rangle_{\mathcal{H}} \tag{3.3}$$

avec :

$$\varphi^-(t) = U(t,0)W_-\begin{pmatrix}\varphi_0^- \\ 0\end{pmatrix}, \quad \varphi^+(t) = U(t,0)W_+\begin{pmatrix}0 \\ \varphi_0^+\end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

En particulier, $\varphi^{\pm}(t) = \varphi^{\pm}(t,x;h) \in C^1(\mathbb{R}\ ;\ L^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^0(\mathbb{R}\ ;\ H^1(\mathbb{R}^n))$ et sont solutions de

$$(hD_t + P)\varphi^{\pm} = 0. \tag{3.5}$$

De plus, si pour $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ on note

$$\Pi_j \psi = \psi_j\ , \tag{3.6}$$

il est facile de voir en utilisant (2.5) que l'on a par construction :

$$\big\|\Pi_2 \varphi^-(t)\big\| \longrightarrow 0 \quad (t \to -\infty) \tag{3.7}$$

et

$$\big\|\Pi_1 \varphi^+(t)\big\| \longrightarrow 0 \quad (t \to +\infty). \tag{3.8}$$

L'idée de la preuve sera d'exploiter (3.5) associé aux conditions (3.7) et (3.8), pour en déduire des propriétés de localisation microlocale de $\varphi^-(t)$ et $\varphi^+(t)$ par rapport aux variables (t,x). De ces propriétés, il s'en suivra que $\varphi^-(t)$ et $\varphi^+(t)$ ne vivent pas dans les mêmes régions de l'espace des phases de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ (ou plutôt de l'espace $T^*\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\xi^n$, où $T^*\mathbb{R}_t$ désigne le cotangent de $\mathbb{R}_t$ et ξ la variable duale de x), ce qui entraînera que leur produit scalaire est exponentiellement petit. Signalons qu'un tel procédé a déjà été employé dans [Ma] pour l'étude de certaines probabilités de transition en théorie adiabatique, et que notre preuve suit un raisonnement assez analogue à celui de [Ma]. Les difficultés supplémentaires que l'on rencontre ici proviennent surtout du fait que l'on doit travailler dans un espace de dimension $n+2$, alors que dans [Ma] tout se passe dans le cotangent de $\mathbb{R}_t$, c'est-à-dire en dimension 2.

4. Microlocalisation

Soit $\mu > 0$ (que l'on fixera ensuite assez petit). Pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x)$, $(t, \tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $h > 0$, on pose :

$$(4.1) \quad Gu(t,\tau,\xi;h) = \frac{(2\mu)^{\frac{1}{4}}}{(2\pi h)^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}}} \int_{\mathbb{R}_{t'} \times \mathbb{R}^n_x} \mathrm{e}^{i\frac{(t-t')\tau}{h} - \mu\frac{(t-t')^2}{2h} - i\frac{x\xi}{h}} u(t',x)\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}x.$$

Il s'agit donc en fait de la transformée de Fourier de u par rapport à x, composée par une transformation de F.B.I. par rapport à t (on renvoie à [Sj1] pour plus de détails concernant les transformations de F.B.I.). D'autre part, le coefficient qui précède l'intégrale a été calculé de telle sorte que pour $u \in L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x)$, on a :

$$(4.2) \qquad \|Gu\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+2})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

Du fait que la quantité $\langle \varphi^-(t), \varphi^+(t)\rangle_{\mathcal{H}}$ est constante par rapport à t, on peut alors voir comme dans [Ma, Lemme 4.4], que l'on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(4.3) \quad \big\langle \varphi^-(t), \varphi^+(t)\big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle G\varphi^-(t,\tau,\xi), G\varphi^+(t,\tau,\xi)\big\rangle_{L^2(\mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}^n_\xi) \oplus L^2(\mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}^n_\xi)}.$$

De plus, d'après (3.5), les fonctions

$$(4.4) \qquad \psi^\pm = G\varphi^\pm$$

sont solutions de

$$(4.5) \qquad (hD_t + Q)\psi^\pm = 0$$

avec

$$(4.6) \quad Q = \begin{pmatrix} \langle\xi\rangle + V_1(t - hD_\tau, -hD_\xi) & hR(t - hD_\tau, -hD_\xi) \\ hR(t - hD_\tau, -hD_\xi) & \langle\xi\rangle + V_2(t - hD_\tau, -hD_\xi) \end{pmatrix}.$$

Avec des notations évidentes, ces fonctions vérifient également :

LEMME 4.1. — *On a :*

$$\big\|\Pi_2\psi^-(t,\tau,\xi)\big\|_{L^2(\mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}^n_\xi)} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } t \to -\infty,$$

$$\big\|\Pi_1\psi^+(t,\tau,\xi)\big\|_{L^2(\mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}^n_\xi)} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } t \to +\infty.$$

Preuve. — Du fait que $\Pi_j\psi^\pm = G\Pi_j\varphi^\pm$ $(j = 1, 2)$, un calcul direct donne :

$$\|\Pi_j\psi^\pm\|^2_{L^2(\mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}^n_\xi)} = \Big(\frac{\mu}{2\pi h}\Big)^{\frac{1}{2}} \int \mathrm{e}^{-\mu(t-t')^2/2h} \|\Pi_j\varphi^\pm\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,\mathrm{d}t'$$

d'où l'on déduit facilement le résultat en coupant l'intégrale en deux parties (suivant que $|t - t'| \le \frac{1}{2}\langle t\rangle$ ou $|t - t'| \ge \frac{1}{2}\langle t\rangle$) et en utilisant (3.7) et (3.8). $\square$

5. Estimations microlocales à poids exponentiel

On adopte maintenant la stratégie de [Ma], dont l'idée est d'exploiter certaines inégalités *a priori* à poids exponentiels (dont le principe était déjà présent dans [Sj2]), pour en tirer des résultats de décroissance sur $G\varphi^{\pm}$. Posons

$$u^{\pm} = \langle t\rangle^{-\rho/2}\varphi^{\pm} \tag{5.1}$$

ainsi que

$$v^{\pm} = Gu^{\pm} = \langle t - hD_{\tau}\rangle^{-\rho/2}\psi^{\pm} \tag{5.2}$$

où pour des raison d'analyticité on travaille ici plutôt avec :

$$\langle t\rangle = (1 + a + t^2)^{1/2}.$$

Soit aussi $g = g(\tau, \xi) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$ bornée telle que $\sup|\partial_{\xi} g| < a$ et $\sup|\partial_{\tau} g| < a$. Dans cette section, on va chercher à préciser g pour avoir des estimations sur $\mathrm{e}^{g/h}\psi^{\pm}$.

Tout d'abord, d'après [Ma, lemme 2.2], on voit que pour tout u dans $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$, on a :

$$\big\|\mathrm{e}^{g(\tau,\xi)/h}(hD_t - \tau + \mu\partial_{\tau} g)Gu\big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+2})} = \mathcal{O}(h)\|\,\mathrm{e}^{g/h}Gu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+2})}. \tag{53.}$$

D'autre part, grâce aux hypothèses faites sur V_1, V_2 et R, on voit que l'opérateur

$$Q_g := \mathrm{e}^{g/h}Q\,\mathrm{e}^{-g/h} = Q_g(t, \tau, \xi, hD_{\tau}, hD_{\xi}) \tag{5.4}$$

est un opérateur h-pseudodifférentiel de symbole principal :

$$\begin{aligned} &q_g^0(t, \tau, \xi, \tau^*, \xi^*) \\ &\quad = \begin{pmatrix} \langle\xi\rangle + V_1(t - \tau^* - i\partial_{\tau} g, -\xi^* - i\partial_{\xi} g) & 0 \\ 0 & \langle\xi\rangle + V_2(t - \tau^* - i\partial_{\tau} g, -\xi^* - i\partial_{\xi} g) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.5}$$

On se donne maintenant $\varepsilon > 0$ assez petit, et on suppose que g vérifie en outre :

$$\begin{cases} \operatorname{Supp}\nabla g \subset \big\{\tau + \langle\xi\rangle \in [-\inf V_1 + 2\varepsilon, -\sup V_2 - 2\varepsilon]\big\}, \\ \big|\partial_{\xi} g(\tau, \xi)\big| \le \big(\kappa(\tau + \langle\xi\rangle) - 2\varepsilon\big)_+, \\ \big|\partial_{\tau} g(\tau, \xi)\big| \le \big(\kappa(\tau + \langle\xi\rangle) - 2\varepsilon\big)_+, \end{cases} \tag{5.6}$$

où l'on a posé

$$\kappa(\lambda) = 0 \quad \text{si} \quad \lambda \notin \,]-\inf V_1, -\sup V_2[.$$

Du fait que κ est continue sur $]-\inf V_1, -\sup V_2[$ (*cf.* [Ma, § 3]), on peut alors fixer $\mu > 0$ assez petit (en fonction uniquement des valeurs de ε et a) de telle sorte que :

$$(5.7)\quad \begin{cases} \operatorname{Supp} \nabla g \subset \{\tau + \langle\xi\rangle - \mu\partial_\tau g \in [-\inf V_1 + \varepsilon, -\sup V_2 - \varepsilon]\}, \\ |\partial_\xi g(\tau,\xi)| \le \big(\kappa(\tau + \langle\xi\rangle - \mu\partial_\tau g) - \varepsilon\big)_+, \\ |\partial_\tau g(\tau,\xi)| \le \big(\kappa(\tau + \langle\xi\rangle - \mu\partial_\tau g) - \varepsilon\big)_+. \end{cases}$$

Si pour $j = 1, 2$, on pose

$$v_j^\pm = \Pi_j v^\pm$$

(où $v^\pm$ est définie en (5.2)), on a alors :

PROPOSITION 5.1. — *Pour ε, g et μ vérifiant* (5.6) *et* (5.7), *il existe $C = C(g,\varepsilon,\mu) > 0$ telle que :*

$$(5.8)\quad \|e^{g/h} v_1^\pm\|_{L^2} \le Ch\|e^{g/h} v_2^\pm\|_{L^2} + C e^{g_+/h} \|v_1^\pm\|_{L^2(\tau+\langle\xi\rangle \le -\inf V_1 + 2\varepsilon)},$$

$$(5.9)\quad \|e^{g/h} v_2^\pm\|_{L^2} \le Ch\|e^{g/h} v_1^\pm\|_{L^2} + C e^{g_-/h} \|v_2^\pm\|_{L^2(\tau+\langle\xi\rangle \ge -\sup V_2 - 2\varepsilon)},$$

où

$$g_+ = g_{|\{\tau+\langle\xi\rangle \le -\inf V_1 + 2\varepsilon\}}, \qquad g_- = g_{|\{\tau+\langle\xi\rangle \ge -\sup V_2 - 2\varepsilon\}}$$

(*qui sont constantes d'après* (5.6)).

Preuve. — D'après (4.5), les fonctions $v^\pm$ vérifient l'équation :

$$(5.10)\quad (hD_t + Q + R_1)v^\pm = 0$$

avec

$$R_1 = \big[\langle t - hD_\tau\rangle^{-\rho/2}, hD_t + Q\big]\langle t - hD_\tau\rangle^{\rho/2} = ih\rho(t - hD_\tau)\langle t - hD_\tau\rangle^{-1}.$$

En particulier,

$$(5.11)\quad \|e^{g/h} R_1 e^{-g/h} v^\pm\| = \mathcal{O}\big(h\|e^{-g/h} v^\pm\|\big)$$

uniformément pour h assez petit.

Notant

$$Q_g^0 = \mathrm{Op}_h^W(q_g^0)$$

et utilisant (5.10), (5.3) et le fait que $(Q_g - Q_g^0) = \mathcal{O}(h)$ uniformément, on obtient :

$$\big\|(hD_t + Q_g^0)\,\mathrm{e}^{g/h}v^{\pm}\big\| = \mathcal{O}(h)\big\|\,\mathrm{e}^{g/h}v^{\pm}\big\| \tag{5.12}$$

d'où, à l'aide de (5.3) :

$$\begin{aligned}\big\|(\tau - \mu\partial_\tau g + \langle\xi\rangle + B_j^g)\,\mathrm{e}^{g/h}v_j^{\pm}\big\|^2 \\ = \mathcal{O}(h)\big\|\,\mathrm{e}^{g/h}v_j^{\pm}\big\|^2 + \mathcal{O}(h^2)\big\|\,\mathrm{e}^{g/h}v^{\pm}\big\|^2\end{aligned} \tag{5.13}$$

$(j = 1, 2)$, où l'on a posé :

$$B_j^g = B_j^g(t, \tau, \xi, hD_\tau, hD_\xi) := \mathrm{e}^{g/h}V_j(t - hD_\tau, -hD_\xi)\,\mathrm{e}^{-g/h} \tag{5.14}$$

qui est donc un opérateur h-pseudodifférentiel uniformément borné, de symbole principal $V_j(t - \tau^* - i\partial_\tau g, -\xi^* - i\partial_\xi g)$.

Maintenant, grâce aux conditions (5.6)–(5.7) et à la définition de κ, on voit qu'il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que pour $\tau + \langle\xi\rangle$ dans $[-\inf V_1 + \varepsilon, -\sup V_2 - \varepsilon]$ et $(t, \tau^*, \xi^*) \in \mathbb{R}^{n+2}$, on a :

$$\big|\tau - \mu\partial_\tau g + \langle\xi\rangle + V_j(t - \tau^* - i\partial_\tau g, -\xi^* - i\partial_\xi g)\big| \geq \frac{1}{C_\varepsilon} \quad (j = 1, 2). \tag{5.15}$$

D'autre part, si $\tau + \langle\xi\rangle \geq -\sup V_2 - \varepsilon$, alors

$$\begin{aligned}\tau - \mu\partial_\tau g + \langle\xi\rangle + V_1(t - \tau^* - i\partial_\tau g, -\xi^* - i\partial_\xi g) \\ = \tau + \langle\xi\rangle + V_1(t - \tau^*, -\xi^*) \geq \tfrac{1}{2}\Gamma_0 - \varepsilon.\end{aligned} \tag{5.16}$$

De même, si $\tau + \langle\xi\rangle \leq -\inf V_1 + \varepsilon$, alors

$$\begin{aligned}\tau - \mu\partial_\tau g + \langle\xi\rangle + V_2(t - \tau^* - i\partial_\tau g, -\xi^* - i\partial_\xi g) \\ = \tau + \langle\xi\rangle + V_2(t - \tau^*, -\xi^*) \leq -\tfrac{1}{2}\Gamma_0 + \varepsilon.\end{aligned} \tag{5.17}$$

Soit $\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\operatorname{Supp}\chi_1 \subset\,]-\inf V_1 + \varepsilon, +\infty[,$$
$$\chi_1 = 1 \quad \text{sur} \quad]-\inf V_1 + 2\varepsilon, +\infty[.$$

Soit également $\chi_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\operatorname{Supp}\chi_2 \subset\,]-\infty, -\sup V_2 - \varepsilon[,$$
$$\chi_2 = 1 \text{ sur }]-\infty, -\sup V_2 - 2\varepsilon[.$$

À l'aide du calcul h-pseudodifférentiel, on peut alors facilement déduire de (5.15)–(5.17) l'existence d'une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$, on a :

$$\big\|(\tau - \mu\partial_\tau g + \langle\xi\rangle + B_j^g)\widetilde{\chi}_j v\big\| \geq \frac{1}{C_1}\|\widetilde{\chi}_j v\| \quad (j = 1, 2), \tag{5.18}$$

où l'on a noté
$$\widetilde{\chi}_j = \chi_j(\tau + \langle\xi\rangle).$$

En écrivant $v = \widetilde{\chi}_j v + (1 - \widetilde{\chi}_j)v$, on remarque aussi (puisque $\tau + \langle\xi\rangle$ reste borné sur le support de $\widetilde{\chi}_j(1 - \widetilde{\chi}_j)$) que l'on a :

$$\begin{aligned}&\big\|(\tau - \mu\partial_\tau g + \langle\xi\rangle + B_j^g)v\big\|^2\\ &\qquad \geq \big\|(\tau - \mu\partial_\tau g + \langle\xi\rangle + B_j^g)\widetilde{\chi}_j v\big\|^2 - \mathcal{O}\big(\|\widetilde{\chi}_j v\| \cdot \|(1 - \widetilde{\chi}_j)v\|\big).\end{aligned}$$

À l'aide de (5.18), on en déduit :

$$\|\widetilde{\chi}_j v\|^2 = \mathcal{O}\big(\|(\tau - \mu\partial_\tau g + \langle\xi\rangle + B_j^g)v\|^2 + \|(1 - \widetilde{\chi}_j)v^\pm\|^2\big). \tag{5.19}$$

Par un argument de densité, appliquant (5.19) à $v = \mathrm{e}^{g/h}v_j^\pm$ et utilisant (5.13), on obtient donc :

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{\chi}_j \,\mathrm{e}^{g/h}v_j^\pm\|^2\\ &\quad = \mathcal{O}\big(h\|\mathrm{e}^{g/h}v_j^\pm\|^2 + h^2\|\mathrm{e}^{g/h}v^\pm\|^2 + \|(1 - \widetilde{\chi}_j)\,\mathrm{e}^{g/h}v_j^\pm\|^2\big)\end{aligned} \tag{5.20}$$

et par suite, en prenant h assez petit :

$$\|\mathrm{e}^{g/h}v_j^\pm\|^2 = \mathcal{O}\big(h^2\|\mathrm{e}^{g/h}v^\pm\|^2 + \|(1 - \widetilde{\chi}_j)\,\mathrm{e}^{g/h}v_j^\pm\|^2\big). \tag{5.21}$$

Du fait que

$$\operatorname{Supp}(1 - \widetilde{\chi}_1) \subset \big\{\tau + \langle\xi\rangle \leq -\inf V_1 + 2\varepsilon\big\},$$
$$\operatorname{Supp}(1 - \widetilde{\chi}_2) \subset \big\{\tau + \langle\xi\rangle \geq -\sup V_2 - 2\varepsilon\big\},$$

la proposition résulte facilement de (5.21). $\square$

Une conséquence immédiate de la proposition 5.1 est :

COROLLAIRE 5.1. — *Soit* $g = g(\tau, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ *telle que*

$$|\partial_\xi g| \le \big(\kappa(\tau + \langle\xi\rangle) - 2\varepsilon\big)_+, \quad |\partial_\tau g| \le \big(\kappa(\tau + \langle\xi\rangle) - 2\varepsilon\big)_+,$$

$$\operatorname{Supp} g \subset \big\{\tau + \langle\xi\rangle \in [-\inf V_1 + 2\varepsilon, -\sup V_2 - 2\varepsilon]\big\}.$$

Alors, pour $j = 1, 2$ *on a :*

$$\| \mathrm{e}^{g/h} v_j^\pm \|_{L^2} = \mathcal{O}(1)$$

uniformément par rapport à $h > 0$ *assez petit et* $\varphi_0^\pm \in H^1(\mathbb{R}^n)$ *normalisés dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

En fait, retournant à la formule (4.5), il n'est pas difficile de déduire de ce corollaire, comme dans [Ma, § 3], que sous les mêmes conditions, on a pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$:

$$\big\|\langle\tau\rangle^{-k-\ell-1}\langle\xi\rangle\langle t\rangle^{-\rho/2}\,\mathrm{e}^{g/h}(hD_t)^k(hD_\tau)^\ell\psi_j^\pm\| = \mathcal{O}(1).$$

Considérons alors la fonction g_1 définie par :

$$g_1(\tau, \xi) = f_1\big(\tau + \langle\xi\rangle\big) \tag{5.22}$$

avec

$$f_1(\lambda) = \operatorname{Min}\Big\{\int_{-\inf V_1}^{\lambda} \kappa(s)\,\mathrm{d}s, \int_{\lambda}^{-\sup V_2} \kappa(s)\,\mathrm{d}s\Big\}\mathbf{1}_{[-\inf V_1, -\sup V_2]}(\lambda). \tag{5.23}$$

Du fait que pour presque tout (τ, ξ), on a

$$|\partial_\xi g_1| \le \big|f_1'(\tau + \langle\xi\rangle)\big| \le \kappa(\tau + \langle\xi\rangle),$$
$$|\partial_\tau g_1| = \big|f_1'(\tau + \langle\xi\rangle)\big| \le \kappa(\tau + \langle\xi\rangle),$$

on voit que, $\varepsilon > 0$ étant donné, on peut alors trouver $g \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tel que $\sup|g - g_1| \le \varepsilon$ et les conditions du corollaire 5.1 soient satisfaites. On en déduit :

COROLLAIRE 5.2. — *Avec* g_1 *défini en* (5.22), *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\mu > 0$ *arbitrairement petit tel que, pour tout* $k, \ell \in \mathbb{N}$:

$$\big\|\mathrm{e}^{g_1/h}\langle t\rangle^{-\rho/2}\psi_j^\pm\| + \big\|\langle\tau\rangle^{-k-\ell-1}\langle\xi\rangle\langle t\rangle^{-\rho/2}\,\mathrm{e}^{g_1/h}(hD_t)^k(hD_\tau)^\ell\psi_j^\pm\| = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{\varepsilon/h})$$

uniformément par rapport à $h > 0$ *assez petit et* $\varphi_0^\pm \in H^1(\mathbb{R}^n)$ *normalisés dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

6. Propagation des estimations

Reprenant maintenant la stratégie adoptée dans [Ma], on va en déduire des propriétés de décroissance exponentielle de v_j^- (resp. v_j^+) dans la région $\{\tau + \langle\xi\rangle \in [-\inf V_1, +\infty[\}$ (resp. $\{\tau + \langle\xi\rangle \in]-\infty, -\sup V_2]\}$).

Soit $\lambda_1 \in]-\inf V_1, -\sup V_2[$ le point où la fonction f_1 définie en (5.23) atteint son maximum. En particulier on aura alors :

$$f_1(\lambda_1) = \tfrac{1}{2}\Sigma_0. \tag{6.1}$$

Soit également $\delta > 0$ assez petit et $\chi_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \chi_0 = 1 \text{ sur }]-\infty, \lambda_1], \\ \chi_0 = 0 \text{ sur } [\lambda_1 + 2\delta, +\infty[, \\ \chi_0' \leq 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Posons $\chi(\tau, \xi) = \chi_0(\tau + \langle\xi\rangle)$. On a alors :

$$(hD_t + Q)\chi\psi^\pm = [\chi, Q]\psi^\pm. \tag{6.3}$$

On commence par montrer :

LEMME 6.1. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, si $\mu > 0$ et $\delta > 0$ sont choisis suffisamment petits, on aura :*

$$\left\|\langle t\rangle^{\rho/2}[\chi, Q]\psi^\pm\right\| = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-(\Sigma_1 - \varepsilon)/h})$$

avec $\Sigma_1 = \frac{1}{2}\Sigma_0$.

Preuve. — Du fait que

$$[\chi, Q] = \begin{pmatrix} [\chi, V_1(t - hD_\tau, -hD_\xi) - \ell_1] & h[\chi, R(t - hD_\tau, -hD_\xi)] \\ h[\chi, R(t - hD_\tau, -hD_\xi)] & [\chi, V_2(t - hD_\tau, -hD_\xi) - \ell_2] \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

il suffit d'examiner :

$$w(t, \tau, \xi) := \langle t\rangle^{\rho/2}\big[\chi, R(t - hD_\tau, -hD_\xi)\big]\psi_j^\pm.$$

Écrivant :

$$w(t, \tau, \xi) = \frac{1}{(2\pi h)^{n+1}} \int \mathrm{e}^{i(\xi - \xi')\xi^*/h + i(\tau - \tau')\tau^*/h} \langle t\rangle^\rho \big(\chi(\tau, \xi) - \chi(\tau', \xi')\big)$$
$$\times R(t - \tau^*, -\xi^*) w_j^\pm(t, \tau', \xi')\,\mathrm{d}\xi'\,\mathrm{d}\xi^*\,\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\tau^*$$

(où $w_j^{\pm} := \langle t\rangle^{-\rho/2}\psi_j^{\pm} \in L^2(\mathbb{R}^{n+2})$), et en effectuant dans cette intégrale le changement de contour d'intégration :

$$\mathbb{R}^n \ni \xi^* \longmapsto \xi^* + ia'\frac{\xi-\xi'}{|\xi-\xi'|},$$
$$\mathbb{R} \ni \tau^* \longmapsto \tau^* + ia'\frac{\tau-\tau'}{|\tau-\tau'|},$$

avec $0 < a' < a$, on obtient :

$$\begin{aligned}(6.5)\quad w(t,\tau,\xi) = \frac{1}{(2\pi h)^{n+1}}\int & \mathrm{e}^{i\frac{(\xi-\xi')\xi^*}{h}+i\frac{(\tau-\tau')\tau^*}{h}-\frac{a'|\xi-\xi'|}{h}-\frac{a'|\tau-\tau'|}{h}}\\ &\times\big(\chi(\tau,\xi)-\chi(\tau',\xi')\big)\\ &\times R\Big(\tau^*+ia'\frac{\tau-\tau'}{|\tau-\tau'|},-\xi^*-ia'\frac{\xi-\xi'}{|\xi-\xi'|}\Big)\\ &\qquad w_j^{\pm}(t,\tau',\xi')\,\mathrm{d}\xi'\,\mathrm{d}\xi^*\,\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\tau^*\end{aligned}$$

où en fait l'intégration se fait sur $\{\chi(\tau,\xi)\neq\chi(\tau',\xi')\}$.

Or, du fait des propriétés (6.2), il est facile de voir que si $\chi(\tau,\xi)\neq\chi(\tau',\xi')$, alors :

$$(6.6)\qquad \big|\tau+\langle\xi\rangle-(\tau'+\langle\xi'\rangle)\big| \geq \big|\tau'+\langle\xi'\rangle-\lambda_1\big|-2\delta$$

(il suffit pour cela de distinguer suivant que $|\tau'+\langle\xi'\rangle-\lambda_1|\leq 2\delta$ ou $\geq 2\delta$).

De plus, puisque $|\kappa(\lambda)|\leq a$, on a par construction :

$$(6.7)\qquad g_1(\tau,\xi)\geq\big(\tfrac12\Sigma_0-a\,|\tau+\langle\xi\rangle-\lambda_1|\big)_+$$

et donc d'après (6.6), en prenant a' suffisamment proche de a, on aura sur $\{\chi(\tau,\xi)\neq\chi(\tau',\xi')\}$:

$$\begin{aligned}(6.8)\quad a'|\xi-\xi'|+a'|\tau-\tau'| &\geq a'\big|\tau+\langle\xi\rangle-(\tau'+\langle\xi'\rangle)\big|\\ &\geq \tfrac12\Sigma_0-g_1(\tau',\xi')-(3+2a)\delta.\end{aligned}$$

Insérant alors dans l'intégrale (6.5) une troncature du type $\chi_1(\tau^*/\langle t\rangle)$ qui vaut 1 dans $\{|\tau^*|\leq\frac14\langle t\rangle\}$ et 0 dans $\{|\tau^*|\geq\frac12\langle t\rangle\}$, on obtient

$$w(t,\tau,\xi)=w_1(t,\tau,\xi)+w_2(t,\tau,\xi)$$

avec $|\tau^*|\leq\frac12\langle t\rangle$ sur le support de l'intégrande de w_1 et $|\tau^*|\geq\frac14\langle t\rangle$ sur celui de l'intégrande de w_2.

Utilisant ensuite (2.3), on voit que le symbole qui apparaît dans w_1 est uniformément borné et supporté dans $\{\chi(\tau,\xi) \neq \chi(\tau',\xi')\}$. À l'aide du théorème de Calderon-Vaillancourt et de (6.8), on en déduit :

$$\big\|w_1(t,\tau,\xi)\big\| = \mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{-(\Sigma_1-(3a+2)\delta)/h}\|\,\mathrm{e}^{g_1/h}w_j^{\pm}\|\big)$$

et donc, d'après le corollaire 5.2, si l'on choisit δ assez petit :

$$\big\|w_1(t,\tau,\xi)\big\| = \mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{-(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\big). \tag{6.9}$$

Considérant maintenant w_2, on effectue $[\rho]+1$ intégrations par parties dans la variable τ', ce qui fait apparaître $[\rho]+1$ puissances négatives de $|\tau^*|$. Puisque $|\tau^*| \geq \frac{1}{4}\langle t\rangle$ sur le domaine d'intégration, le nouveau symbole devient également uniformément borné, et on en déduit comme précédemment :

$$\big\|w_2(t,\tau,\xi)\big\| = \mathcal{O}\Big(\sum_{k\leq 1+[\rho]} \mathrm{e}^{-(\Sigma_1-(3a+2)\delta)/h}\|\,\mathrm{e}^{g_1/h}\partial_\tau^k w_j^{\pm}\|\Big)$$

d'où d'après le corollaire 5.2, et en prenant δ assez petit :

$$\big\|w_2(t,\tau,\xi)\big\| = \mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{-(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\big) \tag{6.10}$$

ce qui termine la preuve du lemme. $\square$

Revenons maintenant à (6.3). D'après le lemme précédent, si $\varepsilon > 0$ est donné et si μ et δ sont choisis assez petits, on a donc :

$$\big\|\langle t\rangle^{\rho/2}(hD_t+Q)\chi\psi^{\pm}\big\| = \mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{-(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\big). \tag{6.11}$$

On se propose maintenant de déduire de (6.11) que l'on a :

Proposition 6.1. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, si $\mu > 0$ est choisi assez petit, alors :*

$$\big\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\psi^{\pm}\big\|_{L^2(\pm(\tau+\langle\xi\rangle)\leq\pm\lambda_1)} = \mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{-(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\big)$$

uniformément par rapport à $h > 0$ assez petit et $\varphi_0^{\pm} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\|\varphi_0^{\pm}\|_{L^2} = 1$.

Preuve. — On va traiter seulement le cas de ψ^+, celui de ψ^- se faisant de manière similaire, en remplaçant $\chi_0(\lambda)$ par $1-\chi_0(\lambda+2\delta)$.

Utilisant le fait que

$$hD_tG = (\tau + i\mu hD_\tau)G \tag{6.12}$$

on obtient :

$$(\tau + Q)\chi\psi^+ = -i\mu\chi hD_\tau\psi^+ + (hD_t + Q)\chi\psi^+$$

et donc, en prenant la deuxième composante :

$$\begin{aligned}(6.13)\quad &\big(\tau + \langle\xi\rangle + V_2(t - hD_\tau, -hD_\xi)\big)\chi\psi_2^+ \\ &\quad = -i\mu\chi hD_\tau\psi_2^+ - hR(t - hD_\tau, -hD_\xi)\chi\psi_1^+ \\ &\qquad\qquad + \big((hD_t + Q)\chi\psi^+\big)_2.\end{aligned}$$

On va d'abord en déduire :

LEMME 6.2. — *On a :*

$$(6.14)\qquad \big\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_2^+\big\| = \mathcal{O}\big(h\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_1^+\| + \mathrm{e}^{-(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\big)$$

uniformément pour h assez petit.

Preuve du lemme. — Utilisant (6.11), on déduit en particulier de (6.13) :

$$\begin{aligned}(6.15)\quad &\big\|\langle t\rangle^{-\rho/2}(\tau + \langle\xi\rangle + V_2(t - hD_\tau, -hD_\xi))\chi\psi_2^+\big\| \\ &\quad = \mathcal{O}\big(\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi hD_\tau\psi_2^+\| + h\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_1^+\| + \mathrm{e}^{-(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\big).\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le fait que $hD_\tau G = \dfrac{i}{\mu}(\tau - hD_t)G$ (propriété qui est d'ailleurs à la base des estimations microlocales à poids exponentiel, *cf.* [Na2]), il est très facile de voir que :

$$(6.16)\qquad \big\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi hD_\tau\psi_2^+\big\| = \mathcal{O}\big(\sqrt{h}\big)\big\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_2^+\big\|.$$

D'autre part, on a par construction :

$$\big(\tau + \langle\xi\rangle + V_2(t - hD_\tau, -hD_\xi)\big)\chi(\tau,\xi) \le (\lambda_1 + 2\delta + \sup V_2)\chi(\tau,\xi)$$

et donc, du fait que $\lambda_1 < -\sup V_2$, et quitte à diminuer un peu δ :

$$\begin{aligned}(6.17)\quad &\big\|\langle t\rangle^{-\rho/2}(\tau + \langle\xi\rangle + V_2(t - hD_\tau, -hD_\xi))\chi\psi_2^+\big\| \\ &\qquad\qquad \ge \big(|\lambda_1 + \sup V_2| - 2\delta\big)\big\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_2^+\big\|.\end{aligned}$$

On déduit de (6.15)–(6.17) que pour δ assez petit, on a :

$$\big\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_2^+\big\| = \mathcal{O}\big(\sqrt{h}\,\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_2^+\| + h\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_1^+\| + \mathrm{e}^{-(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\big)$$

et donc pour h assez petit :

$$(6.18)\qquad \big\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_2^+\big\| = \mathcal{O}\big(h\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_1^+\| + e^{-(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\big).$$

d'où le lemme. $\square$

En prenant maintenant la première composante de (6.3) on trouve :

$$\begin{aligned}\big(hD_t + \langle\xi\rangle + V_1(t - hD_\tau, -hD_\xi)\big)\chi\psi_1^+ \\ = -hR(t - hD_\tau, -hD_\xi)\chi\psi_2^+ + \big([\chi, Q]\psi^+\big)_1\end{aligned}$$

et donc en utilisant le lemme 6.1 ainsi que l'hypothèse (2.3) sur R :

$$\begin{aligned}\|\langle t\rangle^{\rho/2}(hD_t + \langle\xi\rangle + V_1(t - hD_\tau, -hD_\xi))\chi\psi_1^+\| \\ = \mathcal{O}\big(h\|\langle t\rangle^{\rho/2}\langle t - hD_\tau\rangle^{-\rho}\chi\psi_2^+\| + \mathrm{e}^{-(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\big).\end{aligned} \tag{6.20}$$

Comme dans la fin de la preuve du lemme 6.1 (c'est-à-dire en séparant à l'aide d'une troncature les zones $\{|\tau^*| \le \frac{1}{2}\langle t\rangle\}$ et $\{|\tau^*| \ge \frac{1}{4}\langle t\rangle\}$), on voit que l'on a aussi :

$$\begin{aligned}\|\langle t\rangle^{\rho/2}\langle t - hD_\tau\rangle^{-\rho}\chi\psi_2^+\| &= \mathcal{O}\Big(\sum_{k\le 1+[\rho]} \|\langle t\rangle^{-\rho/2}(hD_\tau)^k\chi\psi_2^+\|\Big) \\ &= \mathcal{O}\Big(\sum_{k\le 1+[\rho]} \|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi(hD_\tau)^k\psi_2^+\| \\ &\qquad + \mathrm{e}^{-(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\Big)\end{aligned}$$

puis, en utilisant à nouveau le fait que $hD_\tau G = \dfrac{i}{\mu}(\tau - hD_t)G$, on obtient par des intégrations par parties :

$$\sum_{k\le 1+[\rho]} \|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi(hD_\tau)^k\psi_2^+\| = \mathcal{O}\big(\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_2^+\| + \mathrm{e}^{-(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\big).$$

Insérant ceci dans (6.20) et utilisant (6.18), on obtient donc :

$$\begin{aligned}\|\langle t\rangle^{\rho/2}(hD_t + \langle\xi\rangle + V_1(t - hD_\tau, -hD_\xi))\chi\psi_1^+\| \\ = \mathcal{O}\big(h^2\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_1^+\| + \mathrm{e}^{-(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\big).\end{aligned} \tag{6.21}$$

On écrit ensuite, utilisant le fait que $\langle\xi\rangle + V_1(-hD_\xi)$ est auto-adjoint :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\|\chi\psi_1^+\|^2_{L^2(\mathbb{R}_\tau\times\mathbb{R}^n_\xi)} \\ &\quad = -\frac{2}{h}\,\mathrm{Im}\big\langle(hD_t + \langle\xi\rangle + V_1(t - hD_\tau, -hD_\xi))\chi\psi_1^+, \chi\psi_1^+\big\rangle_{L^2(\mathbb{R}_\tau\times\mathbb{R}^n_\xi)},\end{aligned}$$

d'où, en intégrant de t_1 à $+\infty$ (avec $t_1 \in \mathbb{R}$ arbitraire), et en utilisant le lemme 4.1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(6.22)\quad \|\chi\psi_1^+(t_1,\tau,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_\tau\times\mathbb{R}^n_\xi)} \\ \leq \frac{2}{h}\big\|\langle t\rangle^{\rho/2}(hD_t+\langle\xi\rangle+V_1(t-hD_\tau,-hD_\xi))\chi\psi_1^+\big\|\cdot\big\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_1^+\big\|$$

(où les normes sans indice sont celles dans $L^2(\mathbb{R}^{n+2})$). D'après (6.21), on a donc

$$(6.23)\quad \big\|\chi\psi_1^+(t_1,\tau,\xi)\big\|^2_{L^2(\mathbb{R}_\tau\times\mathbb{R}^n_\xi)} = \mathcal{O}\big(h\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_1^+\| \\ + \mathrm{e}^{-(\Sigma_1-2\varepsilon)/h}\big)\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_1^+\|.$$

Multipliant à nouveau par $\langle t_1\rangle^{-\rho}$ et intégrant sur $\mathbb{R}$ par rapport à t_1, on en déduit finalement :

$$\big\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_1^+\big\|^2 = \mathcal{O}\big(h\|\langle t\rangle^{-\rho/2}/\chi\psi_1^+\| + e^{-(\Sigma_1-2\varepsilon)/h}\big)\big\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_1^+\big\|$$

et donc, pour h assez petit :

$$(6.24)\quad \big\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\chi\psi_1^+\big\| = \mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{-(\Sigma_1-2\varepsilon)/h}\big).$$

Utilisant le lemme 6.2, ainsi qu'un argument analogue pour ψ^-, la proposition 6.1 en découle. □

7. Amélioration des estimations

Dans ce paragraphe, on va à nouveau utiliser la proposition 5.1, mais avec l'information supplémentaire donnée par la proposition 6.1. Pour cela, on introduit un nouveau poids exponentiel défini de la manière suivante : on pose

$$(7.1)\quad g_2^+(\tau,\xi) = f_2^+(\tau+\langle\xi\rangle)$$

avec

$$(7.2)\quad f_2^+(\lambda) = \mathbf{1}_{]-\infty,-\inf V_1]}(\lambda)\Sigma_1 \\ + \mathbf{1}_{[-\inf V_1,\lambda_1]}(\lambda)\,\mathrm{Min}\Big\{\Sigma_1+\int_{-\inf V_1}^{\lambda}\kappa(s)\,\mathrm{d}s\;;\;\Sigma_1+\int_{\lambda}^{\lambda_1}\kappa(s)\,\mathrm{d}s\Big\} \\ + \mathbf{1}_{[\lambda_1,-\sup V_2]}(\lambda)f_1(\lambda).$$

En particulier, f_2^+ est continue sur $\mathbb{R}$, et atteint son maximum en un point $\lambda_2^+ \in \,]-\inf V_1, \lambda_1[$ tel que :

$$\Sigma_2 := f_2^+(\lambda_2^+) = \tfrac{3}{4}\Sigma_0. \tag{7.3}$$

De plus, g_2^+ peut être approchée en norme L^∞ par une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ vérifiant (5.6) (avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit) ainsi que :

$$g_+ (= g_{|\{\tau+\langle\xi\rangle \leq -\inf V_1 + 2\varepsilon\}}) = \Sigma_1 - \delta \tag{7.4}$$

où $\delta > 0$ est également arbitrairement petit.

Alors, appliquant la proposition 5.1 avec cette nouvelle fonction g et utilisant la proposition 6.1, on obtient pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\|\mathrm{e}^{g_2^+/h} v^+\| = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{\varepsilon/h}). \tag{7.5}$$

De manière symétrique, on définit aussi $g_2^-(\tau,\xi) = f_2^-(\tau + \langle\xi\rangle)$ avec :

$$\begin{aligned} f_2^-(\lambda) = {} & \mathbf{1}_{[-\sup V_2, +\infty[}(\lambda)\Sigma_1 \\ & + \mathbf{1}_{[\lambda_1, -\sup V_2]}(\lambda) \operatorname{Min}\Big\{\Sigma_1 + \int_\lambda^{-\sup V_2} \kappa(s)\,\mathrm{d}s \;;\; \Sigma_1 + \int_{\lambda_1}^{\lambda} \kappa(s)\,\mathrm{d}s\Big\} \\ & + \mathbf{1}_{[-\inf V_1, \lambda_1]}(\lambda) f_1(\lambda) \end{aligned} \tag{7.6}$$

qui atteint son maximum en un point $\lambda_2^- \in [\lambda_1, -\sup V_2]$ vérifiant aussi :

$$f_2^-(\lambda_2^-) = \tfrac{3}{4}\Sigma_0 = \Sigma_2. \tag{7.7}$$

On obtient alors de la même manière :

$$\|\mathrm{e}^{g_2^-/h} v^-\| = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{\varepsilon/h}). \tag{7.8}$$

Ces estimations peuvent ensuite se propager comme dans le paragraphe 6, et permettent de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\psi^+\|_{L^2(\tau+\langle\xi\rangle \leq \lambda_2^+)} = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-(\Sigma_2-\varepsilon)/h}),$$

$$\|\langle t\rangle^{-\rho/2}\psi^-\|_{L^2(\tau+\langle\xi\rangle \geq \lambda_2^-)} = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-(\Sigma_2-\varepsilon)/h}).$$

Itérant cette procédure, on définit ainsi une suite de fonctions continues $g_j^\pm(\tau,\xi)$ et deux suites de nombres λ_j^+ décroissante et λ_j^- croissante ($j \geq 2$) vérifiant :

$$\begin{cases} g_j^+ + g_j^- = \Sigma_0 & \text{sur } [\lambda_j^+, \lambda_j^-], \\ g_j^+ \geq \Sigma_{j-1} := \sum_{k=1}^{j-1} 2^{-k}\Sigma_0 & \text{sur }]-\infty, \lambda_j^+], \\ g_j^- \geq \Sigma_{j-1} & \text{sur } [\lambda_j^-, +\infty[, \end{cases} \tag{7.9}$$

et telles que pour tout $j \geq 2$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mu = \mu(j, \varepsilon) > 0$ tel que :

$$\|\langle t\rangle^{-\rho/2} \mathrm{e}^{g_j^{\pm}/h} \psi^{\pm}\| = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{\varepsilon/h}) \tag{7.10}$$

uniformément par rapport à $h > 0$ assez petit, et $\varphi_0^{\pm} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\|\varphi_0\|_{L^2} = 1$.

8. Fin de la preuve du théorème 2.1

Revenant maintenant à (3.3), et utilisant (4.3) et le fait que la quantité

$$\big\langle \psi^-(t, \,.\,), \psi^+(t, \,.\,)\big\rangle_{L^2(\mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}_\xi^n)}$$

ne dépend pas de t, on voit que :

$$A(\varphi_0^-, \varphi_0^+) = \frac{\big\langle \langle t\rangle^{-\rho/2}\psi^-, \langle t\rangle^{-\rho/2}\psi^+\big\rangle}{\int \langle t\rangle^{-\rho}\,\mathrm{d}t} \tag{8.1}$$

et donc, d'après (7.10) et (7.9) :

$$A(\varphi_0^-, \varphi_0^+) = \mathcal{O}(e^{-(\Sigma_j - \varepsilon)/h}). \tag{8.2}$$

Du fait que Σ_j tend vers Σ_0 lorsque j tend vers $+\infty$, le résultat final s'en déduit en choisissant j assez grand. $\square$

9. Une généralisation

Lorsque l'hypothèse (2.9) est remplacée par l'hypothèse plus générale

$$\inf_{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}} \big(V_1(t,x) - V_2(t,x)\big) > 0, \tag{9.1}$$

alors la démonstration précédente ne s'applique plus telle quelle. Cependant, les techniques utilisées peuvent se généraliser à condition de remplacer la transformation G par la transformation de FBI globale dans les variables (t, x) suivante :

$$Tu(t, x, \tau, \xi) = C \int \mathrm{e}^{i[(t-s)\tau + (x-y)\xi]/h - \mu[(t-s)^2 + (x-y)^2]/2h} u(s, y)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y$$

avec $C = 2^{-(n+1)/2}(\pi h)^{-3(n+1)/4}$. On obtient encore dans ce cas un résultat de décroissance exponentielle, mais le taux obtenu ne peut plus se décrire de manière aussi explicite que dans le théorème 2.1.

En fait, si on essaie de suivre à nouveau la preuve de la proposition 5.1, en tenant aussi compte du fait que dans les estimations à poids exponentiel, hD_τ et hD_ξ contribuent respectivement comme $\mu^{-1}\partial_t g$ et $\mu^{-1}\partial_x g$ modulo une erreur d'ordre relatif $\mathcal{O}(\sqrt{h})$ (*cf.* [Na2]), on se rend compte que la condition essentielle (analogue de (5.6)) que doit satisfaire la fonction g (qui cette fois dépendra de (t,x,τ,ξ)), devient alors :

$$\operatorname{Supp}\nabla g \subset \big\{|\tau + \langle\xi\rangle + \tfrac{1}{2}[V_1(t,x) + V_2(t,x)]| < \tfrac{1}{2}\inf(V_1 - V_2) - \varepsilon\big\},$$
$$\big|\tau + i\mu\tilde{\partial}_1 g + \langle\xi + i\mu\tilde{\partial}_2 g\rangle + V_j(t - \tilde{\partial}_1 g, x - \tilde{\partial}_2 g)\big| \geq \frac{1}{C_\varepsilon} \text{ sur } \operatorname{Supp}\nabla g,$$

où l'on a noté :

$$\tilde{\partial}_1 = \frac{1}{\mu}\partial_t + i\partial_\tau, \quad \tilde{\partial}_2 = \frac{1}{\mu}\partial_x + i\partial_\xi.$$

Si l'on pose

$$\mathcal{A}^\pm(\mu,\varepsilon) = \Big\{g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n+2})\ ;\ g \text{ vérifie (9.2) et}$$
$$\operatorname{Supp} g \subset \big\{\pm\big(\tau+\langle\xi\rangle+\tfrac{1}{2}[V_1(x)+V_2(x)]\big) \leq \tfrac{1}{2}\inf(V_1-V_2)\big\}\Big\},$$

alors l'estimation du théorème 2.1 devient dans ce cas : pour tout $\delta > 0$,

$$\|S_{1,2}\| + \|S_{2,1}\| = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-(\widetilde{\Sigma}_0-\delta)/h}) \tag{9.3}$$

uniformément par rapport à $h > 0$ assez petit, avec :

$$\widetilde{\Sigma}_0 = \sup_{\mu,\varepsilon>0}\ \sup_{g^\pm\in\mathcal{A}^\pm(\mu,\varepsilon)}\ \inf_{\mathbb{R}^{2n+2}}(g^- + g^+).$$

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] BAKLOUTI (H.). — *Asympotique des largeurs de résonances pour un modèle d'effet tunnel microlocal*, Thèse Université Paris 13, 1995.

[Ge] GÉRARD (C.). — *The Mourre Estimate for Regular Dispersive Systems*, Preprint École Polytechnique de Palaiseau, 1990.

[GMS] Gérard (C.), Martinez (A.), Sjöstrand (J.). — *A Mathematical Approach to the Effective Hamiltonian in Perturbed Periodic Problems*, Comm. Math. Phys., t. **142**, n° 2, 1991.

[HeSj] Helffer (B.), Sjöstrand (J.). — *On diamagnetism and de Haas-van Alphen effect*, Ann. Inst. H. Poincaré, t. **52**, n° 4, 1990.

[Ho] Howland (J.). — *Stationary scattering theory for time-dependant Hamiltonians*, Math. Ann., t. **207**, 1974.

[KMW] Klein (M.), Martinez (A.), Wang (X.P.). — *On the Born-Oppenheimer Approximation of Wave Operators*, Comm. Math. Phys., t. **152**, 1993.

[KMSW] Klein (M.), Martinez (A.), Seiler (R.), Wang (X.P.). — *On the Born-Oppenheimer Expansion for Polyatomic Molecules*, Comm. Math. Phys., t. **143**, 1992.

[Ma] Martinez (A.). — *Precise Exponential Estimates in Adiabatic Theory*, J. Math. Phys., t. **35** (8), 1994, p. 3889–3915.

[Na1] Nakamura (S.). — *On an Example of Phase-Space Tunneling*, Ann. Inst. H. Poincaré, t. **63**, n° 2, 1995.

[Na2] Nakamura (S.). — *On Martinez'Method of Phase Space Tunneling*, Rev. Math. Phys., t. **7** , n° 3, 1995, p. 431–441.

[ReSi] Reed (M.), Simon (B.). — *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic Press, 1972.

[Ro] Robert (D.). — *Autour de l'approximation semi-classique*. — Birkhäuser, 1987.

[Sj1] Sjöstrand (J.). — *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque, t. **95**, 1982.

[Sj2] Sjöstrand (J.). — *Geometric bounds on the density of resonances for semiclassical problems*, Duke Mathematical Journal, t. **60** (1), 1990, p. 1–57.