BULLETIN DE LA S. M. F.

OLIVIER BIQUARD

Twisteurs des orbites coadjointes et métriques hyper-pseudokählériennes

Bulletin de la S. M. F., tome 126, nº 1 (1998), p. 79-105

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1998__126_1_79_0>

Bull. Soc. math. France,
126, 1998, p. 79–105.

TWISTEURS DES ORBITES COADJOINTES ET MÉTRIQUES HYPER-PSEUDOKÄHLÉRIENNES

PAR OLIVIER BIQUARD

RÉSUMÉ. — Soit G un groupe de Lie compact semisimple. Les orbites coadjointes de $G^{\mathbb{C}}$ ont des métriques hyper-kählériennes G-invariantes. Dans cet article, nous construisons leurs espaces de twisteurs et déduisons une formule pour la métrique en fonction d'une solution d'équations algébriques réelles ; par conséquent, ces métriques sont algébriques réelles. Les équations algébriques gardent un sens pour d'autres formes réelles, non compactes, G^r de $G^{\mathbb{C}}$; les solutions fournissent des métriques pseudoriemaniennes G^r-invariantes définies sur des ouverts des orbites coadjointes. Ces métriques demeurent kählériennes par rapport à trois structures complexes satisfaisant les relations de commutation des quaternions : nous les appelons hyper-pseudokählériennes.

ABSTRACT. — TWISTORS OF COADJOINT ORBITS AND HYPER-PSEUDOKÄHLER METRICS. — Let G be a compact semisimple Lie group. The coadjoint orbits of $G^{\mathbb{C}}$ have G-invariant hyper-Kähler metrics. In this paper, we give a construction of their twistor spaces and a general formula for the metric in terms of a solution of real algebraic equations ; we deduce that these metrics are real (semi-)algebraic. These algebraic equations make sense also for other real (non compact) forms G^r of $G^{\mathbb{C}}$; the solutions give rise to G^r-invariant pseudoRiemannian metrics on open subsets of coadjoint orbits. These metrics are still Kähler with respect to three complex structures satisfying the commutation relations of the quaternions : they are hyper-pseudoKähler.

Les orbites coadjointes d'un groupe de Lie semi-simple complexe possèdent une structure symplectique canonique, donnée par la forme de Kirillov-Kostant-Souriau. Ces variétés holomorphes-symplectiques admettent des métriques hyper-kählériennes, invariantes sous une forme compacte du groupe, par le travail de Kronheimer [14], [15], généralisé à toutes les orbites par [13] et [1] ; la dernière référence contient aussi la construction de métriques hyper-kählériennes sur des variétés dérivées, comme les cotangents des espaces de drapeaux généralisés. Le procédé général est abstrait : on exhibe l'orbite comme un quotient hyper-kählérien de

(*) Texte reçu le 7 juillet 1997, accepté le 18 mars 1998.

O. BIQUARD, CMAT, UMR 7640 du CNRS, École Polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX (France). E-mail : biquard@math.polytechnique.fr.

Classification AMS : 53C25, 17B99.

Mots clés : hyperkähler metrics, coadjoint orbits, twistor spaces.

dimension infinie, ce qui ne donne pas de renseignement très précis sur la métrique.

Dans certains cas, on sait obtenir les orbites par quotient hyper-kählérien de dimension finie : les orbites de $S\ell_n\mathbb{C}$ [16] et les orbites nilpotentes des groupes classiques [12] ; si une telle présentation donne à nouveau peu de renseignements précis sur la métrique, elle indique que l'on doit l'obtenir en résolvant les équations du quotient hyper-kählérien, qui sont polynômiales. En particulier, les métriques ainsi obtenues sont algébriques réelles (ou plus précisément semi-algébriques, et même Nash, voir [5], où sont traités les orbites nilpotentes minimales).

Cet article part d'une question que m'a posée Ranee Brylinski : est-ce que les métriques hyper-kählériennes de toutes les orbites nilpotentes (pas seulement celles des groupes classiques) sont algébriques réelles ? La question est en fait valable pour toutes les orbites coadjointes. Pour les cotangents des espaces hermitiens-symétriques et les orbites complexifiées d'orbites hermitiennes-symétriques, ainsi que pour certaines orbites nilpotentes obtenues comme limite des précédentes, la réponse est positive grâce aux formules explicites obtenues dans [3], [4].

Ici, nous traitons le cas général. L'idée est de passer par l'espace des twisteurs. La considération de la construction twistorielle montre immédiatement que les métriques doivent être analytiques réelles. Pour obtenir l'algébricité, il faut une description plus explicite, que nous réalisons.

Une motivation importante a été la construction de l'espace des twisteurs de l'espace des modules des fibrés de Higgs par Simpson [18], construction qu'il attribue à Deligne. Or les espaces de modules d'équations de Nahm, qui fournissent les métriques hyper-kählériennes sur les orbites, sont des exemples particuliers d'espaces de modules de fibrés de Higgs, munis de certaines singularités supplémentaires.

Notre construction est différente (voir section 2) : elle est basée sur une SO_3-symétrie des équations de Nahm, qui permet de décrire toutes les structures complexes de la métrique hyper-kählérienne, à partir de certains espaces de modules d'une *équation complexe* issue des équations de Nahm. Nous expliquons le lien avec la construction de Deligne-Simpson à la fin de la deuxième section.

On obtient ainsi, dans la troisième section, une description très concrète (théorème 4) de l'espace des twisteurs, avec la forme symplectique le long des fibres et la structure réelle. Les sections réelles sont des polynômes de degré 2, dont un coefficient est inconnu. Deux cas intéressants sont explicités particulièrement : les cotangents d'espaces de drapeaux généralisés, et les orbites nilpotentes, pour lesquelles l'espace des twisteurs est très simple, car toutes les structures complexes sont équivalentes. Pour ces dernières orbites, Ranee Brylinski m'a indiqué avoir une construction similaire. Dans le cas des espaces cotangents d'orbites compactes, Burns [6] avait construit une métrique hyper-kählérienne dans un voisinage de la section nulle par des méthodes twistorielles.

Dans la quatrième section, on examine la construction twistorielle inverse. A posteriori, le seul rôle des équations de Nahm est de construire le coefficient inconnu fournissant les sections réelles; la métrique a une formulation très simple (théorème 7) en fonction de ce coefficient, obtenu par résolution d'équations algébriques (les solutions sont isolées, mais pas nécessairement uniques, donc il y a un choix qui explique le caractère semi-algébrique); on a donc une construction générale, algébrique, de ces métriques et on déduit (théorème 11) que *les métriques hyper-kählériennes des orbites coadjointes sont (semi-) algébriques réelles.*

Enfin, l'approche algébrique a le mérite de faire apparaître de nouvelles métriques, quand on substitue une autre forme réelle G^r de $G^{\mathbb{C}}$ au groupe compact G : l'espace des twisteurs explicite construit précédemment a formellement toujours un sens, mais on ne dispose plus de la famille de sections réelles fournies par les équations de Nahm. Nous interprétons ces espaces comme correspondant à des métriques G^r-invariantes définies sur des ouverts d'orbites coadjointes contenant une G^r-orbite; ces métriques sont pseudoriemanniennes (non définies positives en général), mais toujours kählériennes (ou plutôt pseudokählériennes) par rapport à trois structures complexes vérifiant les relations de commutation des quaternions : c'est-à-dire *hyper-pseudokählériennes.* Elles sont encore algébriques réelles : les équations qui les déterminent sont analogues aux équations obtenues pour les métriques hyper-kählériennes G-invariantes; cela permet de donner quelques exemples explicites.

Deux travaux récents sont liés à cet article : dans [17], Santa-Cruz a indépendamment étudié une forme de twisteurs pour les orbites coadjointes; dans [11], Joyce a obtenu, à partir de sa construction d'une «géométrie algébrique hyper-complexe», des équations algébriques pour les métriques hyper-kählériennes des orbites coadjointes, qui semblent équivalentes à celles produites ici *via* les twisteurs.

1. Équations de Nahm et équation complexe

Nous rappelons la construction des métriques hyper-kählériennes sur les orbites coadjointes; comme indiqué plus haut, l'idée de base est dûe à Kronheimer, mais nous basons notre présentation sur [1]. Soit G un groupe de Lie compact connexe semi-simple, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

1.1. Équations de Nahm. — On regarde le système d'équations suivant, portant sur des fonctions $T_i : \mathbb{R}_- \to \mathfrak{g}$:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}s} + [T_0, T_1] = -[T_2, T_3], \\ \dfrac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}s} + [T_0, T_2] = -[T_3, T_1], \\ \dfrac{\mathrm{d}T_3}{\mathrm{d}s} + [T_0, T_3] = -[T_1, T_2]\,; \end{cases}$$

ces équations sont exactement les équations d'antiautodualité pour la G-connexion

$$\nabla = \mathrm{d} + T_0 \,\mathrm{d}s + \sum_1^3 T_i \,\mathrm{d}\theta^i$$

sur le cylindre $\mathbb{R}_- \times (\mathbb{S}^1)^3$ (mais on regarde uniquement les solutions invariantes sous l'action du tore $(\mathbb{S}^1)^3$). Le groupe de jauge des applications $g : \mathbb{R}_- \to G$ agit sur les solutions par

$$g(T_0, T_1, T_2, T_3) = \Big(\mathrm{Ad}(g) T_0 - \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s} g^{-1}, \mathrm{Ad}(g) T_1, \mathrm{Ad}(g) T_2, \mathrm{Ad}(g) T_3 \Big).$$

1.2. Exemples de solutions. — Fixons une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ et un triplet $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ d'éléments de $\mathfrak{h}$; donnons-nous aussi un triplet $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ dans le centralisateur $\mathfrak{c}_\tau$ des τ_i, tel que σ soit une représentation de $\mathfrak{su}_2$ dans $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire $[\sigma_i, \sigma_j] = -2\sigma_k$ si (ijk) est une permutation circulaire de (123). Alors on a une solution particulière du système (1), donnée par la formule

$$(2) \qquad \nabla_0 = \mathrm{d} + \sum_1^3 \Big(\tau_i - \frac{\sigma_i}{2(s-1)} \Big) \mathrm{d}\theta^i.$$

1.3. Espace des modules hyper-kählérien. — En fait, toutes les solutions de (1) sont asymptotes à ce modèle quand s tend vers $-\infty$, à un terme en $O(1/|s|^{1+\epsilon})$ près. Étant donnés τ et σ comme dans l'exemple, on considère l'espace des modules $\mathcal{M}(\tau, \sigma)$ des solutions de (1) qui sont asymptotes à ∇_0, modulo le groupe de jauge des transformations $g : \mathbb{R}_- \to G$ qui préservent le comportement asymptotique en $-\infty$ et qui vérifient la condition au bord $g(0) = 1$.

De manière plus précise, $\mathcal{M}(\tau, \sigma)$ est construit comme quotient de dimension infinie : on pose, pour ϵ assez petit,

$$\Omega^1_{\nabla_0} = \big\{ a = (a_0, a_1, a_2, a_3)\,;\ |a| = O(|s|^{-1-\epsilon}),\ |\nabla_0 a| = O(|s|^{-2-\epsilon}) \big\},$$

ce qui permet de définir

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} = \{\nabla_0 + a\,;\ a \in \Omega^1_{\nabla_0}\},\\
&\mathcal{G} = \{g : \mathbb{R}_- \to G\,;\ g(0) = 1,\ (\nabla_0 g)g^{-1} \in \Omega^1_{\nabla_0}\}.
\end{aligned}$$

L'espace des modules est alors

$$\mathcal{M}(\tau,\sigma) = \{\text{solutions de (1) dans } \mathcal{A}\}/\mathcal{G}.$$

C'est en fait un quotient hyper-kählérien de dimension infinie : si on fixe un produit scalaire invariant $\langle .\,,.\rangle$ sur $\mathfrak{g}$, l'espace affine $\mathcal{A}$ est muni d'une métrique

$$\langle \dot a, \dot b\rangle = \int_{\mathbb{R}_-} \big\langle \dot a(s), \dot b(s)\big\rangle\, \mathrm{d}s \tag{3}$$

et de trois structures complexes I, J et K, données par

$$\begin{cases}
I(\dot a_0, \dot a_1, \dot a_2, \dot a_3) = (-\dot a_1, \dot a_0, -\dot a_3, \dot a_2),\\
J(\dot a_0, \dot a_1, \dot a_2, \dot a_3) = (-\dot a_2, \dot a_3, \dot a_0, -\dot a_1),\\
K(\dot a_0, \dot a_1, \dot a_2, \dot a_3) = (-\dot a_3, -\dot a_2, \dot a_1, \dot a_0);
\end{cases} \tag{4}$$

l'espace $\mathcal{A}$ est ainsi hyper-kählérien. En un point $[\nabla] \in \mathcal{M}(\tau,\sigma)$, l'espace tangent à $\mathcal{M}(\tau,\sigma)$ s'identifie à l'espace des $\dot a \in \Omega^1_{\nabla_0}$, tels que

$$\nabla^*(\dot a) = \nabla^*(I\dot a) = \nabla^*(J\dot a) = \nabla^*(K\dot a) = 0\,;$$

la structure hyper-kählérienne de $\mathcal{A}$ descend à $\mathcal{M}(\tau,\sigma)$.

1.4. L'équation complexe. — Une variété hyper-kählérienne

$$(X, g, I, J, K)$$

induit une structure holomorphe-symplectique $(X, I, \omega^c = \omega_J + i\omega_K)$. Dans le cas des espaces de modules de solutions des équations de Nahm, la structure holomorphe-symplectique sous-jacente peut être décrite simplement à partir des espaces de modules des solutions d'une équation complexe.

Si l'on regarde les fonctions v et φ à valeurs dans $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, données par

$$v = \tfrac12(T_0 + iT_1) \quad\text{et}\quad \phi = \tfrac12(T_2 + iT_3),$$

alors les deux dernières équations du système (1) s'écrivent comme l'*équation complexe*

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} + [v, \phi] = 0. \tag{5}$$

Cette équation est invariante sous un groupe de jauge plus gros, à savoir les transformations complexes $g : \mathbb{R}_- \to G^{\mathbb{C}}$ agissant par

$$g(v, \phi) = \Big(\mathrm{Ad}(g)v - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}g^{-1}, \mathrm{Ad}(g)\phi\Big).$$

On écrit $U = i\tau_1$ et $V = \tau_2 + i\tau_3$, de sorte que (U, V) est un couple à valeurs dans la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. D'autre part, étant donnée la représentation σ de $\mathfrak{su}_2$, on pose

$$H = i\sigma_1, \quad X = \tfrac{1}{2}(-\sigma_2 + i\sigma_3), \quad Y = \tfrac{1}{2}(\sigma_2 + i\sigma_3),$$

de sorte que $\rho = (H, X, Y)$ est une représentation de $\mathfrak{sl}_2$ (c'est-à-dire $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$ et $[X, Y] = H$). Pour les éléments de $\mathcal{M}(\tau, \sigma)$, on a le comportement asymptotique

$$v \sim \frac{1}{2}\Big(U - \frac{H}{2s}\Big), \quad \phi \sim \frac{1}{2}\Big(V - \frac{Y}{s}\Big). \tag{6}$$

1.5. Espace des modules holomorphe-symplectique. — On peut considérer l'espace des modules des solutions de l'équation complexe

$$\mathcal{M}^{\mathbb{C}}(U, V; \rho) = \big\{\text{solutions de (5) dans } \mathcal{A}\big\}/\mathcal{G}^{\mathbb{C}}, \tag{7}$$

où $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ est défini de manière similaire à $\mathcal{G}$, mais avec des transformations à valeurs dans $G^{\mathbb{C}}$. L'espace des modules $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}(U, V, \rho)$ est muni d'une structure holomorphe-symplectique naturelle,

$$\omega^c\big((\dot v_1, \dot\phi_1), (\dot v_2, \dot\phi_2)\big) = 4\int \langle \dot v_1, \dot\phi_2\rangle^c - \langle \dot v_2, \dot\phi_1\rangle^c. \tag{8}$$

Le théorème le plus important dans la théorie est le suivant. Son origine remonte au travail de Donaldson [7] sur les monopoles.

Théorème. — *La flèche naturelle $\mathcal{M}(\tau, \sigma) \to \mathcal{M}^{\mathbb{C}}(U, V; \rho)$ est un isomorphisme de variétés holomorphes-symplectiques.*

L'intérêt de ce théorème réside dans le fait qu'il est tout à fait possible d'expliciter concrètement la variété holomorphe-symplectique $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}(U, V; \rho)$; nous le ferons dans la section 3, dans un cadre légèrement plus général que dans [1], en supprimant l'hypothèse que H et U soient autoadjoints.

Nous utilisons cette généralisation dans le lemme très simple suivant.

LEMME 1. — *Fixons U, V et $\rho = (H, X, Y)$. Soit une constante $c \in \mathbb{C}$, alors :*

1) *l'application $(v, \phi) \mapsto (v+c\phi, \phi)$ fournit un isomorphisme de variétés holomorphes-symplectiques*

$$\mathcal{M}^{\mathbb{C}}(U, V; \rho) \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathbb{C}}\big(U + cV, V; \mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{cY})\rho\big) ;$$

2) *l'application $(v, \phi) \mapsto (v, c\phi)$ fournit un isomorphisme de variétés holomorphes-symplectiques*

$$\big(\mathcal{M}^{\mathbb{C}}(U, V; \rho), I, c\omega^c\big) \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathbb{C}}(U, cV; \rho'),$$

où $\rho' = (H, c^{-1}X, cY) = \mathrm{Ad}(\exp(-\frac{1}{2}cH))\rho$.

Démonstration. — La première application proposée préserve l'équation complexe (5) ; comme $\mathrm{Ad}(\exp(cY))H = H + 2cY$, c'est clairement un isomorphisme holomorphe entre les espaces indiqués ; enfin, compte tenu de la formule (8), les structures symplectiques sont préservées. La seconde partie est aussi facile. $\square$

2. Action de SO_3 et twisteurs

2.1. Variétés des twisteurs. — Soit $(\mathcal{M}, g, I, J, K)$ une variété hyperkählérienne, de dimension complexe $2n$. La variété $\mathcal{M}$ admet une 2-sphère de structures complexes,

$$I_w = xI + yJ + zK, \quad w = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3.$$

On identifiera donc $I = (1, 0, 0)$, $J = (0, 1, 0)$ et $K = (0, 0, 1)$.

Construction twistorielle. — Décrivons l'espace $\mathcal{T}$ des twisteurs de $\mathcal{M}$ (voir par exemple [10], [8]). Comme variété topologique, c'est un produit $\mathcal{M} \times \mathbb{S}^2$. Notons I_0 la structure complexe de $\mathbb{S}^2 = \mathbb{CP}^1$. Si on pose, pour $X \in T_m\mathcal{M}$ et $Y \in T_w\mathbb{S}^2$,

$$I(X, Y) = (I_w X, I_0 Y),$$

on obtient une structure complexe sur $\mathcal{T}$, qui apparaît alors munie d'une projection holomorphe $\pi : \mathcal{T} \to \mathbb{S}^2$, dont la fibre F au-dessus de w est $(\mathcal{M}, I_w)$. L'espace $\mathcal{T}$ est muni d'une structure réelle (involution antiholomorphe) $\tau(m,w) = (m,-w)$. Si $w = u(I)$ pour $u \in \mathrm{SO}_3$, alors la fibre $(\mathcal{M}, I_w)$ admet une structure symplectique-holomorphe

$$\omega^c = \omega_{u(J)} + i\omega_{u(K)} ;$$

l'élément u de SO_3 n'est déterminé par $w \in \mathbb{S}^2 = \mathrm{SO}_3 / \mathbb{S}^1$ qu'à l'action près de $\mathbb{S}^1$, si bien que sur $\mathcal{T}$, on ne retrouve qu'une forme symplectique dans la direction des fibres, tordue par le fibré tangent $\mathcal{O}(2)$ de $\mathbb{CP}^1$: donc ω^c est une section holomorphe de $\Lambda^2 T_F^* \otimes \mathcal{O}(2)$, invariante sous τ. Enfin, l'identification (non holomorphe) $\mathcal{T} = \mathcal{M} \times \mathbb{S}^2$ fournit une famille, paramétrée par $\mathcal{M}$, de sections holomorphes réelles $w \mapsto (m,w)$ de π, chacune avec fibré normal $\mathbb{C}^{2n} \otimes \mathcal{O}(1)$.

Réciproquement, pour une variété $\mathcal{T}$ munie de toutes ces données, l'espace des paramètres de la famille de sections réelles est une variété hyper-kählérienne.

Recollement via la structure réelle. — Identifions $\mathbb{S}^2$ privé d'un point à $\mathbb{C}$ par la projection stéréographique. L'application antipodale s'écrit alors $\lambda \mapsto -1/\bar{\lambda}$. Notons $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ la restriction de $\mathcal{T}$ au-dessus de $\mathbb{C}$. La structure réelle τ de $\mathcal{T} \to \mathbb{S}^2$ couvre l'application antipodale en préservant toutes les structures, si bien que la donnée de l'espace des twisteurs $\mathcal{T}$ est équivalente à la donnée de $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ et de la structure réelle $\tau : \mathcal{T}_{|\mathbb{C}^*} \mapsto \mathcal{T}_{|\mathbb{C}^*}$ couvrant l'application antipodale $\lambda \mapsto -1/\bar{\lambda}$, et préservant toutes les structures ; en notant $\overline{\mathcal{T}_{\mathbb{C}}}$ l'espace $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ muni de la structure complexe opposée, la structure réelle apparaît alors comme un isomorphisme (holomorphe)

$$\tau : \mathcal{T}_{\mathbb{C}^*} \longrightarrow \overline{\mathcal{T}_{\mathbb{C}^*}} \tag{9}$$

qui permet de récupérer $\mathcal{T}$ en recollant $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ et $\overline{\mathcal{T}_{\mathbb{C}}}$ au-dessus de $\mathbb{C}^*$.

2.2. Action de SO_3 sur les solutions des équations de Nahm. Une propriété intéressante des équations de Nahm est que les solutions admettent l'action d'un élément $u \in \mathrm{SO}_3$ par

$$T_0 \longmapsto T_0, \quad (T_1, T_2, T_3) \longmapsto u(T_1, T_2, T_3).$$

On obtient ainsi un difféomorphisme

$$u : \mathcal{M}(\tau, \sigma) \longrightarrow \mathcal{M}\big(u(\tau), u(\sigma)\big).$$

Ce difféomorphisme échange les structures complexes de la manière suivante : soit $w \in \mathbb{S}^2$, alors u est holomorphe comme application

$$u : \big(\mathcal{M}(\tau,\sigma), I_w\big) \longmapsto \big(\mathcal{M}(u(\tau), u(\sigma)), I_{u(w)}\big). \tag{10}$$

Il est à noter que cette propriété détermine le choix de J, *a priori* arbitraire, fait dans la formule (4).

2.3. Construction de l'espace des twisteurs. — Nous allons utiliser cette action de SO(3) pour construire directement l'espace des twisteurs de $\mathcal{M}(\tau,\sigma)$.

Formules utiles. — Écrivons des formules pour la projection stéréographique de la sphère $\mathbb{S}^2$, privée du pôle nord $(-1,0,0)$, sur le plan complexe $\mathbb{C}$:

$$\lambda = a+ib \in \mathbb{C} \mapsto \Big(x = \frac{1-|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2},\ y = \frac{2a}{1+|\lambda|^2},\ z = \frac{2b}{1+|\lambda|^2}\Big) \in \mathbb{S}^2. \tag{11}$$

Si $\lambda = a+ib \in \mathbb{C}$ on peut faire le choix suivant de $u \in \mathrm{SO}_3$ envoyant 0 sur λ, en posant

$$u^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2} & \dfrac{2a}{1+|\lambda|^2} & \dfrac{2b}{1+|\lambda|^2} \\ 0 & \dfrac{-b}{|\lambda|} & \dfrac{a}{|\lambda|} \\ \dfrac{2|\lambda|}{1+|\lambda|^2} & -\dfrac{1-|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2}\dfrac{a}{|\lambda|} & -\dfrac{1-|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2}\dfrac{b}{|\lambda|} \end{pmatrix}; \tag{12}$$

ce choix correspond à une section *unitaire* ξ de $T\mathbb{CP}^1$ au-dessus de $\mathbb{C}^*$, que l'on peut écrire concrètement, dans la trivialisation $T\mathbb{CP}^1{}_{|\mathbb{C}} = \mathbb{C}\times\mathbb{C}$, comme

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{|\lambda|}\big(1+|\lambda|^2\big)\frac{\partial}{\partial\lambda}\cdot \tag{13}$$

Fibres de l'espace des twisteurs. — Compte tenu de cette trivialisation de $\mathcal{O}(2)$ sur $\mathbb{C}^*$, la fibre $\mathcal{T}_\lambda$ de $\mathcal{T}$ au-dessus de λ est

$$\mathcal{T}_\lambda = \big(\mathcal{M}(\tau,\sigma), I_\lambda, \omega^c_\lambda\big) = \big(\mathcal{M}(u^{-1}(\tau), u^{-1}(\sigma)), I, \omega^c\big); \tag{14}$$

au lieu de faire le calcul uniquement sur les valeurs asymptotiques τ et σ, posons-le directement pour $(T'_1,T'_2,T'_3) = u^{-1}(T_1,T_2,T_3)$, donc

$$\begin{aligned} T'_2 + iT'_3 &= \frac{2|\lambda|}{1+|\lambda|^2}iT_1 + \frac{1}{|\lambda|}\Big(\Big(-b - i\frac{1-|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2}a\Big)T_2 + \Big(a - i\frac{1-|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2}b\Big)T_3\Big) \\ &= \frac{2|\lambda|}{1+|\lambda|^2}iT_1 + \frac{1}{|\lambda|(1+|\lambda|^2)}\big(-i\bar\lambda(T_2+iT_3) - |\lambda|^2 i\lambda(-T_2+iT_3)\big) \\ &= \frac{|\lambda|}{1+|\lambda|^2}\Big(2iT_1 + \frac{T_2+iT_3}{i\lambda} - i\lambda(T_2+iT_3)^*\Big); \end{aligned}$$

en termes de $v = \frac{1}{2}(T_0 + iT_1)$ et $\phi = \frac{1}{2}(T_2 + iT_3)$, on obtient

$$\phi' = \frac{|\lambda|}{1+|\lambda|^2}\Big(v + v^* + \frac{\phi}{i\lambda} - i\lambda\phi^*\Big), \tag{15}$$

et on calcule de manière similaire,

$$v' + |\lambda|\phi' = v - i\lambda\phi^*. \tag{16}$$

Ainsi, d'après (14), $\mathcal{T}_\lambda$ s'identifie comme variété holomorphe-symplectique (la section ξ de $\mathcal{O}(2)$ ayant été fixée) à l'espace des modules $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}(U', V'; \rho')$, où $(U', V'; \rho')$ s'exprime en fonction de $(U, V; \rho)$ par les formules (15) et (16).

Par la première partie du lemme 1, on peut se débarrasser du terme en ϕ' dans la formule (16) pour v' sans changer la structure holomorphe-symplectique, donc regarder l'espace des modules des solutions (v'', ϕ'') de l'équation complexe, avec

$$v'' = v - i\lambda\phi^*, \quad \phi'' = \frac{|\lambda|}{1+|\lambda|^2}\Big(v + v^* + \frac{\phi}{i\lambda} - i\lambda\phi^*\Big).$$

Finalement, il est plus commode de raisonner par rapport à la section *holomorphe*

$$\xi_0(\lambda) = -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}$$

de $\mathcal{O}(2)$ au-dessus de $\mathbb{C}$; cela revient à multiplier la forme symplectique par $\xi/\xi_0 = (1 + |\lambda|^2)i\lambda/|\lambda|$, ce qu'on obtient, d'après la seconde partie du lemme 1, en considérant l'espace des modules complexes des solutions (v''', ϕ'''), données par

$$v''' = v'', \quad \phi''' = \big(1 + |\lambda|^2\big)\frac{i\lambda}{|\lambda|}\phi'',$$

c'est-à-dire

$$v''' = v - i\lambda\phi^*, \quad \phi''' = \phi + i\lambda(v + v^*) + \lambda^2\phi^*.$$

L'intérêt de cette écriture est que le couple (v''', ϕ''') dépend maintenant de manière holomorphe de λ, ce qui signifie que la collection des espaces de modules correspondant donne la structure complexe, non seulement de chaque fibre $\mathcal{T}_\lambda$, mais aussi de l'espace total $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$.

Description de l'espace des twisteurs. — Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant. Pour simplifier les formules, nous remplaçons $-i\lambda$ par λ dans ce qui suit.

THÉORÈME 2. — *L'espace des twisteurs $\mathcal{T}_\mathbb{C}$ de $\mathcal{M}(\tau,\sigma)$ peut se décrire de la manière suivante :*

1) *comme variété complexe,* $\mathcal{T}_\mathbb{C} = \coprod_{\lambda\in\mathbb{C}} \mathcal{M}^\mathbb{C}(U_\lambda, V_\lambda; \rho_\lambda)$, *avec*

$$U_\lambda = U + \lambda V^*, \quad V_\lambda = V - \lambda(U+U^*) - \lambda^2 V^*,$$
$$\rho_\lambda = \mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{-\lambda X})\rho\,;$$

la dernière égalité se traduit par

$$H_\lambda = H + 2\lambda X, \quad Y_\lambda = Y - \lambda H - \lambda^2 X;$$

2) *la section standard* $\xi(\lambda) = -\frac{1}{2}\partial/\partial\lambda$ *de* $T\mathbb{CP}^1 = \mathcal{O}(2)$ *sur* $\mathbb{C}$ *ayant été fixée, la structure symplectique suivant les fibres est exactement la structure symplectique des* $\mathcal{M}^\mathbb{C}(U_\lambda, V_\lambda; \rho_\lambda)$;

3) *la structure réelle est*

$$\tau\big((\lambda, v, \phi)\big) = \Big(-\frac{1}{\bar\lambda}, -v^* - \frac{\phi^*}{\bar\lambda}, -\frac{\phi^*}{\bar\lambda^2}\Big);$$

4) *la famille de sections réelles est donnée par*

$$\lambda \longmapsto \big(\lambda\,, v + \lambda\phi^*,\, \phi - \lambda(v+v^*) - \lambda^2\phi^*\big)$$

pour toute solution $(v,\phi) \in \mathcal{M}(\tau,\sigma)$ *des équations de Nahm* (1).

En réalité, ces données définissent complètement $\mathcal{T}$.

Démonstration. — Les espaces de modules $\mathcal{M}^\mathbb{C}(U_\lambda, V_\lambda; \rho_\lambda)$ se rassemblent bien pour former une variété complexe : il s'agit d'être capable de faire la construction quotient (7) en famille; cela est possible car les espaces $\mathcal{A}$ et les groupes de jauge complexes $\mathcal{G}^\mathbb{C}$ pour chaque λ restent les mêmes, à l'action près de $\mathrm{Ad}(\exp(-\lambda X))$: la construction quotient est alors C^∞ par rapport aux paramètres, et même holomorphe puisque ceux-ci sont holomorphes par rapport à λ. Le fait que l'espace $\mathcal{T}_\mathbb{C}$, avec sa forme symplectique suivant les fibres, soit bien l'espace des twisteurs découle directement de la construction que nous avons faite, qui donne aussi les sections réelles; ces sections réelles fournissent un produit $\mathcal{T}_\mathbb{C} = \mathbb{C} \times \mathcal{M}(\tau,\sigma)$, dans lequel la structure réelle est $\lambda \mapsto -1/\bar\lambda$: on vérifie ainsi aisément la formule annoncée pour τ. Enfin, la forme symplectique suivant les fibres vérifie $\tau^*\omega^c = \bar\lambda^{-2}\,\bar\omega^c$; quand on recolle les espaces $\mathcal{T}_\mathbb{C}$ et $\overline{\mathcal{T}_\mathbb{C}}$ au-dessus de $\mathbb{C}^*$ *via* τ (voir (9)), toutes les structures se recollent bien, et la forme symplectique prend ses valeurs dans $\mathcal{O}(2)$. $\square$

2.4. Comparaison avec la construction de Deligne-Simpson. — Indiquons maintenant le lien avec la construction de Deligne-Simpson [18] de l'espace des twisteurs de l'espace des modules des fibrés de Higgs.

Équations de Nahm et fibrés de Higgs. — Si $z = r\exp(i\theta)$ est la coordonnée complexe sur $\mathbb{C}$, et $s = \ln r$, alors (voir [1]) une solution (v,ϕ) des équations de Nahm (1) donne un fibré de Higgs $(\bar\partial^E,\varphi)$, invariant par rotation sur le disque unité privé de l'origine (avec singularité à l'origine)

$$\bar\partial^E = \bar\partial + v\frac{\mathrm{d}\bar z}{\bar z}, \quad \varphi = \phi\frac{\mathrm{d}z}{z},$$

qui vérifie l'équation d'antiautodualité $F(\bar\partial^E) + [\varphi,\varphi^*] = 0$.

Construction de Deligne-Simpson. — La construction de Deligne-Simpson pour l'espace des twisteurs de l'espace des modules des fibrés de Higgs est la suivante : pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la fibre $\mathcal{T}_\lambda$ est l'espace des λ-connexions, c'est-à-dire des opérateurs $\nabla : \mathcal{O}(E) \to \mathcal{O}(\Omega^1\otimes E)$ vérifiant

$$\nabla(fs) = \lambda\mathrm{d}f\otimes s + f\nabla s\,;$$

pour $\lambda = 0$ on retrouve les fibrés de Higgs. Si $\lambda \neq 0$, l'espace $\mathcal{T}_\lambda$ s'identifie à un espace de connexions en associant à ∇ la connexion $\nabla^{0,1} + \lambda^{-1}\nabla^{1,0}$; les espaces $\mathcal{T}_\lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ont ainsi tous la même structure complexe.

Rapport entre les deux constructions. — Maintenant, notre construction peut être interprétée dans le formalisme des λ-connexions : nos espaces de solutions de l'équation complexe (λ,v,ϕ) fournissent en effet des λ-connexions en posant $v' = v$, $\phi' = \phi + \lambda v$ et

$$\nabla = \bar\partial + \lambda\partial + v'\frac{\mathrm{d}\bar z}{\bar z} + \phi'\frac{\mathrm{d}z}{z}\,;$$

à partir d'une solution $(v,\phi) \in \mathcal{M}(\tau,\sigma)$, on a la section réelle $v'_\lambda = v + \lambda\phi^*$ et $\phi'_\lambda = \phi - \lambda v^*$ qui pour chaque λ donne une λ-connexion, avec une singularité à l'origine qui dépend de λ.

Un ingrédient absent de la construction de Deligne-Simpson est la présence de structures à la singularité, que nous avons incorporées dans notre construction. Une conséquence est que les diverses structures complexes des $\mathcal{T}_\lambda$, pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, ne sont plus équivalentes en général.

Enfin, remarquons que la combinaison de la construction faite dans ce papier, qui traite les singularités à l'origine, avec la construction de Deligne-Simpson, donne certainement une construction des twisteurs de l'espace des modules des fibrés de Higgs avec singularités logarithmiques au-dessus d'un diviseur lisse, étudié dans [2].

3. Twisteurs explicites

Nous donnons à présent une description concrète de l'espace des twisteurs $\mathcal{T}$ de $\mathcal{M}(\tau,\sigma)$.

3.1. Structure de $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}(U,V;\rho)$. — Fixons toujours une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$, des éléments $U,V\in\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ et une représentation $\rho=(H,X,Y)$ de $\mathfrak{sl}_2$ dans le centralisateur $\mathfrak{c}_{U,V}$ de U et V. Nous allons énoncer sans démonstration des résultats qui sont une généralisation immédiate de [1] au cas où U et H ne sont plus nécessairement autoadjoints.

Décomposons U en $U=U^-+U^+\in\mathfrak{h}\oplus i\mathfrak{h}$; nous décomposons $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\oplus_\ell\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\ell$ suivant les valeurs propres (réelles) de $\operatorname{ad}(U^+)$ et définissons les sous-algèbres nilpotente et parabolique

$$\mathfrak{n}_U=\bigoplus_{\ell<0}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\ell,\quad \mathfrak{p}_U=\bigoplus_{\ell\le 0}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\ell\ ;$$

on notera P_U le sous-groupe parabolique, d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_U$; soit L le sous-groupe d'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{c}_Y\oplus\mathfrak{n}_U)\cap\mathfrak{c}_V$; si $g=g(0)$ est un élément de $G^{\mathbb{C}}$, prolongé sur $\mathbb{R}_-$ de sorte que $g(s)=1$ pour $s\le -1$, et $n\in\mathfrak{n}_U$, alors

$$(v,\phi)=g\Big(\frac12\Big(U-\frac{H}{2(s-1)}\Big),\frac12\Big(V-\frac{Y}{s-1}\Big)+\operatorname{Ad}\Big(\mathrm{e}^{-Us+\frac12 H\ln|s-1|}\Big)\frac{n}{2}\Big)$$

est un élément de $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}(U,V;\rho)$; en fait, tout élément de $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}(U,V;\rho)$ se réalise ainsi, de sorte qu'on obtient un isomorphisme

$$\mathcal{M}^{\mathbb{C}}(U,V;\rho)=G^{\mathbb{C}}\times_L(V+Y+\mathfrak{n}_U\cap\mathfrak{c}_V). \tag{17}$$

L'application

$$G^{\mathbb{C}}\times_L(V+Y+\mathfrak{n}_U\cap\mathfrak{c}_V)\longrightarrow\mathfrak{g}^{\mathbb{C}},$$

qui à $(g,V+Y+n)$ associe $\operatorname{Ad}(g^{-1})(V+Y+n)$, n'est autre, au niveau des solutions, que $(v,\phi)\mapsto 2\phi(0)$; la structure symplectique est invariante sous l'action naturelle de $G^{\mathbb{C}}$ et est décrite en $g=1$ par la formule

$$\omega^c\big((\dot g_1,\dot n_1),(\dot g_2,\dot n_2)\big)=-\big\langle 2\phi(0),[\dot g_1,\dot g_2]\big\rangle^c+\big\langle\dot n_1,\dot g_2\big\rangle^c-\big\langle\dot n_2,\dot g_1\big\rangle^c. \tag{18}$$

Dans le cas *régulier*, c'est-à-dire quand $\mathfrak{c}_U\supset\mathfrak{c}_V$, alors $\mathfrak{n}_U\cap\mathfrak{c}_V=0$, donc l'application $(v,\phi)\mapsto 2\phi(0)$ identifie $\mathcal{M}(U,V;\rho)$ à l'orbite $\mathcal{O}(V+Y)$ de $V+Y$, avec la forme symplectique $-\langle 2\phi(0),[\dot g_1,\dot g_2]\rangle^c$, à savoir la forme de Kirillov-Kostant-Souriau.

Enfin, le lemme suivant donne une description de $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}(U,V;\rho)$ comme feuille symplectique des structures de Poisson canoniques sur $G^{\mathbb{C}}\times_P\mathfrak{p}$, introduites dans [1]. Sa démonstration est immédiate.

LEMME 3. — *Si P est un sous-groupe parabolique, dont l'algèbre de Lie vérifie $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{c}_V = \mathfrak{p}_U \cap \mathfrak{c}_V$, et si $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}$ est l'algèbre de Lie nilpotente correspondante, alors*

$$G^{\mathbb{C}} \times_L (V + Y + \mathfrak{n}_U \cap \mathfrak{c}_V) = G^{\mathbb{C}} \times_P (\mathcal{O}_P(V+Y) + \mathfrak{n}),$$

où $\mathcal{O}_P$ désigne l'orbite sous P. ▯

3.2. Description de l'espace des twisteurs. — Ces résultats nous permettent de donner une description de l'espace des twisteurs $\mathcal{T}$ de $\mathcal{M}(\tau, \sigma)$. Définissons l'ouvert des points réguliers,

$$\mathbb{C}^{reg} = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ \mathfrak{c}_{U_\lambda^+} \supset \mathfrak{c}_{V_\lambda}\} = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ \mathfrak{c}_{U_\lambda} \supset \mathfrak{c}_{V_\lambda}\},$$

où la seconde égalité est facile à déduire des formules du théorème 2 ; cet ouvert est constitué de $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points.

La démonstration du théorème suivant est immédiate à partir du théorème 2 et de ce qui précède.

THÉORÈME 4. — *Reprenons les notations du théorème* 2.

(a) *Au-dessus de $\lambda \in \mathbb{C}$, la fibre $\mathcal{T}_\lambda$ est*

$$G^{\mathbb{C}} \times_{P_{U_\lambda}} \big(\mathcal{O}_{P_{U_\lambda}}(V_\lambda + Y_\lambda) + \mathfrak{n}_{U_\lambda}\big),$$

avec forme symplectique donnée par la formule (18).

(b) *Au-dessus de $\mathbb{C}^{\mathrm{reg}}$:*

1) *la fibre $\mathcal{T}_\lambda$ est l'orbite de $V_\lambda + Y_\lambda$ avec la forme de Kirillov-Kostant-Souriau ;*

2) *la structure réelle est*

$$\tau(\lambda, A) = \Big(-\frac{1}{\bar\lambda}, -\frac{A^*}{\bar\lambda^2}\Big)\ ; \tag{19}$$

3) *si 0 est régulier, alors les sections réelles, paramétrées par $A \in \mathcal{O}(V+Y)$, sont données par*

$$\lambda \longmapsto A - 2\lambda i T_1(0) - \lambda^2 A^*,$$

où $T_1(0)$ est la valeur en 0 de la solution des équations de Nahm dans $\mathcal{M}(\tau, \sigma)$ telle que $(T_2 + iT_3)(0) = A$.

(c) *La correspondance entre les descriptions* (a) *et* (b) *est donnée par*

$$(g, A) \longmapsto \mathrm{Ad}(g^{-1})A.$$

La signification du théorème est claire : quand l'orbite de $V_\lambda + Y_\lambda$ est de dimension maximale, elle fournit la fibre $\mathcal{T}_\lambda$, sinon on la remplace par une variété symplectique de la bonne dimension ; par exemple, dans le cas semi-simple ($\sigma = 0$ donc $Y_\lambda = 0$), la fibre exceptionnelle s'identifie à une fibration au-dessus de l'orbite de V_λ, avec fibre

$$T^*\big(\mathrm{Stab}(V_\lambda)/\,\mathrm{Stab}(V_\lambda) \cap P_{U_\lambda}\big).$$

D'autre part, il est important de noter que, dans le résultat, les équations de Nahm n'interviennent que comme moyen de produire les sections réelles.

Enfin, dans la description (a), on peut, localement, éviter la dépendance par rapport à λ du sous-groupe parabolique P_{U_λ}, en appliquant le lemme 3. Ainsi, de la formule

$$U_\lambda^+ = \frac{1}{2}(U_\lambda + U_\lambda^*) = \frac{1+|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2} U + \frac{1}{2(1-|\lambda|^2)}(\lambda V_\lambda^* + \bar\lambda V_\lambda),$$

on déduit que, sur le disque $\Delta = \{|\lambda| \le 1\}$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\lambda &= G^{\mathbb{C}} \times_{P_U} \big(\mathcal{O}_{P_U}(V_\lambda + Y_\lambda) + \mathfrak{n}_U\big) \\ &= G^{\mathbb{C}} \times_{P_U} \big(\mathcal{O}_{\mathrm{Stab}(U^+)}(V_\lambda + Y_\lambda) + \mathfrak{n}_U\big) ; \end{aligned} \tag{20}$$

cette formulation clarifie le fait que la famille des $\mathcal{T}_\lambda$ est lisse par rapport à λ, puisque $\mathrm{Stab}(U^+, V_\lambda) = \mathrm{Stab}(U, V)$ ne varie pas et les Y_λ sont tous conjugués sous $\mathrm{Stab}(U, V)$.

3.3. Deux exemples. — Nous explicitons deux exemples intéressants.

Orbites nilpotentes. — Le cas des orbites nilpotentes est particulièrement simple, puisqu'il correspond à $\tau = 0$, donc tous les points sont réguliers. On en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5. — *L'espace des twisteurs $\mathcal{T}$ d'une orbite nilpotente $\mathcal{O}$ est entièrement décrit par :*

1) *l'espace des twisteurs $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ au-dessus de $\mathbb{C}$ est un produit $\mathbb{C} \times \mathcal{O}$;*

2) *la forme symplectique le long des fibres est la forme de Kirillov-Kostant-Souriau ;*

3) *la structure réelle est*

$$\tau(\lambda, A) = \Big(-\frac{1}{\bar\lambda}, -\frac{A^*}{\bar\lambda^2} \Big) ;$$

4) *les sections réelles sont*

$$\lambda \longmapsto A - 2\lambda i T_1(0) - \lambda^2 A^*,$$

où $T_1(0)$ *est la valeur en* 0 *de la solution* $(T_1(s), T_2(s), T_3(s))$ *des équations de Nahm, convergeant vers* 0 *quand* s *tend vers* $-\infty$, *et telle que* $(T_2 + iT_3)(0) = A$.

Cotangents des espaces de drapeaux. — Si on fait $\sigma = 0$ et $\tau_2 = \tau_3 = 0$, alors $U = i\tau_1$ et $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}(U, V; 0) = T^*(G^{\mathbb{C}}/P_U)$ est le cotangent d'un espace de drapeaux généralisés ; dans ce cas $U_\lambda = U$ et $V_\lambda = -2\lambda U$, si bien que la description (20) reste valable sur $\mathbb{C}$ tout entier. Notons qu'alors $\mathcal{O}_{P_U}(U) + \mathfrak{n}_U = U + \mathfrak{n}_U$. On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 6. — *Soit* $U = i\tau_1$ *et* $P = P_U$, *alors l'espace des twisteurs du cotangent de l'espace des drapeaux,* $T^*(G^{\mathbb{C}}/P)$, *est décrit par :*

1) *pour* $\lambda \in \mathbb{C}$, *on a* $\mathcal{T}_\lambda = G^{\mathbb{C}} \times_P (-2\lambda U + \mathfrak{n})$, *avec forme symplectique donnée par* (18) ;

2) *au-dessus de* $\mathbb{C}^*$, *on a* $\mathcal{T}_{\mathbb{C}^*} = (\mathbb{C}^* \times \mathcal{O}(U), -2\lambda\omega^c_{\mathcal{O}(U)})$, *avec structure réelle donnée par*

$$\tau(\lambda, A) = \Big(-\frac{1}{\bar\lambda}, -\frac{A^*}{\bar\lambda^2} \Big).$$

L'élément U tel que $P = P_U$ paramètre toutes les métriques obtenues. L'espace des twisteurs est une orbite coadjointe pour tous les $\lambda \neq 0$, et dégénère sur l'espace des drapeaux $T^*(G^{\mathbb{C}}/P)$ en 0.

4. Construction twistorielle inverse

Étant donné un espace de modules $\mathcal{M}(\tau, \sigma)$ des équations de Nahm, donnant une métrique hyper-kählérienne sur une orbite coadjointe $\mathcal{O}$, l'espace des twisteurs est entièrement codé dans la donnée de l'application

$$A \in \mathcal{O} \longrightarrow T(A) \in i\mathfrak{g}, \tag{21}$$

où $T(A) = iT_1(0)$ et (T_1, T_2, T_3) est la solution des équations de Nahm dans $\mathcal{M}(\tau, \sigma)$ telle que $(T_2 + iT_3)(0) = A$.

Bien que cela ne nous soit pas absolument nécessaire, il a paru intéressant d'expliciter la formule fournie par la construction twistorielle inverse. On montre ensuite l'algébricité réelle des métriques hyper-kählériennes.

4.1. Formule pour la métrique. — Soit une section réelle

$$\sigma_A(\lambda) = A - 2\lambda T(A) - \lambda^2 A^*.$$

L'espace tangent à l'espace des sections de $\mathcal{T}$, à savoir $H^0(\mathbb{CP}^1, \sigma_A^* T_F)$, est engendré par les $\sigma_{\dot{A}}(\lambda) = \dot{A} - 2\lambda \mathrm{d}T(\dot{A}) - \lambda^2 \dot{A}^*$. Nous définissons

$$\sigma_{\dot{A}}^0 = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\dot{A}} + i\sigma_{i\dot{A}}) = -2\lambda\bar{\partial}T(\dot{A}) - \lambda^2 \dot{A}^*,$$
$$\sigma_{\dot{A}}^\infty = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\dot{A}} - i\sigma_{i\dot{A}}) = \dot{A} - 2\lambda\partial T(\dot{A});$$

on a ainsi décomposé

$$\sigma_{\dot{A}} = \sigma_{\dot{A}}^0 + \sigma_{\dot{A}}^\infty, \tag{22}$$

avec $\sigma_{\dot{A}}^0$ s'annulant en 0 et $\sigma_{\dot{A}}^\infty$ en ∞.

Rappelons que $\sigma_A^* T_F \approx \mathbb{C}^{2n} \otimes \mathcal{O}(1)$, donc

$$H^0(\mathbb{CP}^1, \sigma_A^* T_F) \approx H^0\big(\mathbb{CP}^1, \sigma_A^* T_F(-1)\big) \otimes H^0\big(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(1)\big) \tag{23}$$

et que la métrique s'obtient comme le produit $\omega^c \otimes w$, où ω^c est la forme symplectique le long des fibres, à valeurs dans $\mathcal{O}(2)$, et w le wronskien sur $H^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(1))$.

Décomposons suivant (23) :

$$\sigma_{\dot{A}}^0(\lambda) = \Big((-2\lambda\bar{\partial}T(\dot{A}) - \lambda^2 \dot{A}^*) \otimes \frac{(\mathrm{d}\lambda)^{1/2}}{\lambda}\Big) \otimes \lambda\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big)^{1/2},$$
$$\sigma_{\dot{A}}^\infty(\lambda) = \Big((\dot{A} - 2\lambda\partial T(\dot{A})) \otimes (\mathrm{d}\lambda)^{1/2}\Big) \otimes \Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big)^{1/2};$$

en $\lambda = 0$, la forme symplectique suivant la fibre est $\omega^c \otimes (-\frac{1}{2})\partial/\partial\lambda$, donc on déduit, en calculant en $\lambda = 0$,

$$g(\dot{A}, \dot{A}) = 2\omega^c(\bar{\partial}T(\dot{A}), \dot{A}).$$

En calculant plutôt en $\lambda = \infty$, on montrerait que g est bien réelle. On a donc démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 7. — *La métrique hyper-kählérienne de l'orbite $\mathcal{O}$ s'écrit*

$$g(\dot{A}, \dot{A}) = 2\omega^c\big(\bar{\partial}T(\dot{A}), \dot{A}\big),$$

où ω^c est la forme symplectique de $\mathcal{O}$ est $T : \mathcal{O} \to i\mathfrak{g}$ est défini en (21). □

Certains choix de constantes dans la construction peuvent être jugés arbitraires, et il n'est pas évident que la constante 2 dans la formule ci-dessous soit exactement la bonne. Heureusement, on peut parfois vérifier plus directement la formule : plaçons-nous dans le cas semi-simple $\sigma = 0$, et supposons $\tau_1 = \tau_3 = 0$; alors on une action de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathcal{M}(\tau,\sigma)$, donnée par

$$\big((T_1 + iT_3), T_2\big) \longmapsto \big(e^{i\theta}(T_1 + iT_3), T_1\big) ;$$

l'action infinitésimale sur $(T_2+iT_3)(0)$ est justement donnée par $iT_1(0)=T$, et on obtient, d'après (10),

$$\omega_I = \mathcal{L}_T \omega_K = \mathcal{L}_T \Im \omega^c,$$

d'où on retrouve la formule du théorème ; en fait, l'action préserve ω_J et l'application moment fournit un potentiel pour ω_I (voir [10], [9]).

Dans le cas général, T n'est plus un champ de vecteurs et il n'est pas évident *a priori* que $\bar\partial T$ soit tangent à l'orbite.

4.2. Sections réelles et algébricité. — Nous commençons par revenir sur la description des sections réelles aux points singuliers. Examinons le cas où $\lambda = 0$, par exemple, n'est pas un point régulier. Compte tenu de (20), pour une section réelle

$$A - 2\lambda T - \lambda^2 A^* \in \mathcal{O}(V_\lambda + Y_\lambda),$$

il doit exister $g_\lambda \in G^{\mathbb{C}}$ et $n_\lambda \in \mathfrak{n}_U$, tels que

$$A - 2\lambda T - \lambda^2 A^* = \mathrm{Ad}(g_\lambda^{-1})(V_\lambda + Y_\lambda + n_\lambda).$$

En particulier, en $\lambda = 0$, l'élément $A \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ est conjugué à $V + Y + n_0$, et, d'après (17), on peut choisir $n_0 \in \mathfrak{n}_U \cap \mathfrak{c}_V$, de sorte que la partie semi-simple de A est conjuguée à V et la partie nilpotente à $Y + n_0$.

La question que nous voulons résoudre est la suivante : si, réciproquement, on a

$$\sigma(\lambda) = A - \lambda(T + T^*) - \lambda^2 A^* \in \mathcal{O}(V_\lambda + Y_\lambda)$$

pour $\lambda \neq 0$ proche de 0, à quelle condition σ se prolonge-t-elle au-dessus de 0 en une section de l'espace des twisteurs ?

Extension de sections. — Pour simplifier le problème, nous nous restreignons ici au cas semi-simple (donc $Y_\lambda = 0$).

LEMME 8. — *Si $n \in \mathfrak{n}_U$ est régulier, alors* $\{\dot g \in \mathfrak{g}, [\dot g, n] \in \mathfrak{n}_U\} \subset \mathfrak{c}_U$.

Démonstration. — Décomposons $\dot g$ en $\dot g = \dot g_+ + \dot g_0 + \dot g_-$, avec $\dot g_\pm \in \mathfrak{n}_{\pm U}$, $\dot g_0 \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{c}_U$ et $\dot g_- = -(\dot g_+)^*$; de $[\dot g + \dot g_0, n] \in \mathfrak{n}_U$, on déduit que la composante sur $\mathfrak{c}_U + \mathfrak{n}_{-U}$ de $[n, \dot g_-]$ est nulle, ce qui se traduit, pour tout $X \in \mathfrak{p}_U$, par

$$0 = \big\langle X, [n, \dot g_-]\big\rangle = \big\langle [X, n], \dot g_-\big\rangle ;$$

par régularité de n, on déduit que $\dot g_- = 0$ donc $\dot g_+ = 0$ et $\dot g \in \mathfrak{c}_U$. □

LEMME 9. — *Si A est conjugué à $V+n$, avec n régulier dans $\mathfrak{n}_U$, alors $\sigma(\lambda) = A - \lambda(T+T^*) - \lambda^2 A^* \in \mathcal{O}(V_\lambda + Y_\lambda)$ se prolonge au-dessus de 0 en une section de $\mathcal{T}$.*

Démonstration. — Notons B un sous-groupe de Borel associé à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, tel que $B \subset P_U$; un $\lambda \neq 0$ suffisamment petit est régulier, donc il existe $g_\lambda \in G$, $b_\lambda \in B \cap \mathrm{Stab}(U)$ et $n_\lambda \in \mathfrak{n}_U$, tels que

$$A - \lambda(T+T^*) - \lambda^2 A^* = \mathrm{Ad}(g_\lambda^{-1})(b_\lambda(V_\lambda) + n_\lambda)\,;$$

pour une limite g_0 de g_λ en 0, on obtient une limite $V_0 + n_0$ de $b_\lambda(V_\lambda) + n_\lambda$, conjuguée à A, donc V_0 est dans l'orbite de V et n_0 est régulier dans $\mathfrak{n}_U$; si A^{nil} est la partie nilpotente de A, l'égalité $A^{\mathrm{nil}} = \mathrm{Ad}(g_0^{-1})(n_0)$ détermine, compte tenu du lemme 8, la classe $[g_0]$ de g_0 dans $G/G\cap\mathrm{Stab}(U) = G^{\mathbb{C}}/P_U$ modulo un ensemble discret : donc l'application

$$\lambda \longmapsto [g_\lambda] \in G^{\mathbb{C}}/P_U,$$

étant holomorphe, doit avoir un prolongement en 0. On en déduit facilement le lemme. $\square$

Algébricité. — Nous pouvons maintenant déduire le résultat qui nous intéresse. Notons que nous considérons les orbites comme données dans $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ par un ensemble d'équations, et éventuellement (pour la partie nilpotente) d'inéquations, algébriques : d'où leur structure semi-algébrique.

LEMME 10. — *Pour une orbite semi-simple, la fonction $A \mapsto T(A) \in i\mathfrak{g}$ est semi-algébrique réelle.*

Démonstration. — L'élément $T(A)$ vérifie

$$A - 2\lambda T(A) - \lambda^2 A^* \in \begin{cases} \mathcal{O}(V_\lambda) & \text{pour } \lambda \text{ régulier,} \\ \mathcal{O}(V_\lambda + \mathfrak{n}_{U_\lambda}) & \text{pour } \lambda \text{ non régulier,} \end{cases} \tag{24}$$

qui sont des équations algébriques (réelles) sur $T(A)$ (en fait, il n'est pas difficile de voir que la seconde est une conséquence de la première) ; la solution n'est pas unique (par exemple, quand $U = 0$, si $T(A)$ est solution, alors $-T(A)$ est aussi solution, ce qui correspond à résoudre les équations de Nahm vers $+\infty$ plutôt que vers $-\infty$) ; cependant, si A est générique, la solution donnée par $T(A)$ est certainement isolée : en effet, toute autre solution proche de (24), par le lemme 9, s'étend en une section réelle de $\mathcal{T}$, mais la construction twistorielle nous dit alors qu'elle ne peut différer de la solution initiale ; il y a donc un ouvert dense sur lequel les équations algébriques (24) déterminent T. $\square$

THÉORÈME 11. — *Les métriques hyper-kählériennes des orbites coadjointes, obtenues comme espaces de modules $\mathcal{M}(\tau,\sigma)$, sont (semi-) algébriques réelles.*

Démonstration. — D'après le théorème 7, il suffit de montrer que la fonction T est une fonction semi-algébrique réelle de l'élément de l'orbite. Le lemme 10 montre justement cela pour les orbites semi-simples. Pour les orbites nilpotentes, le corollaire 5 montre que tous les points λ sont réguliers, si bien que l'algébricité de T est immédiate; pour les autres orbites, on peut adapter les lemmes précédents pour prendre en compte la partie nilpotente, mais il y a aussi un raisonnement par densité : la collection des orbites semi-simples (on peut même se contenter des orbites semi-simples régulières) est dense dans $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ et les fonctions T des autres orbites (dont on connaît *a priori* l'existence) s'obtiennent en fait comme limite des fonctions T des orbites semisimples. $\square$

4.3. Un exemple. — Nous donnons un exemple simple illustrant la puissance de la construction twistorielle. Regardons l'orbite coadjointe de $S\ell(n=p+q,\mathbb{C})$ donnée par l'élément

$$V=\begin{pmatrix}\lambda_1\,\mathbf{1}_p & 0\\ 0 & \lambda_2\,\mathbf{1}_q\end{pmatrix};$$

prenons par exemple les $\lambda_j\in i\mathbb{R}$ et considérons la métrique hyper-kählérienne à paramètre $U=0$; on va élucider la fonction $T\in i\mathfrak{g}$, qui est un vrai champ de vecteurs sur l'orbite.

Si Y est dans l'orbite de V, alors $T=T(Y)$ doit vérifier, pour λ générique,

$$Y-2\lambda T-\lambda^2Y^*\in\mathcal{O}(V-\lambda^2V^*),$$

ce qui s'écrit

$$\big(Y-2\lambda T-\lambda^2Y^*-(1+\lambda^2)\lambda_1\big)\big(Y-2\lambda T-\lambda^2Y^*-(1+\lambda^2)\lambda_2\big)=0\,;$$

en développant, on trouve l'équation $(Y-\lambda_1)(Y-\lambda_2)=0$, qui traduit le fait que Y est dans l'orbite de V, et les équations

$$(Y-\lambda_1)T+T(Y-\lambda_2)=0,$$
$$4T^2=(Y-\lambda_1)(Y-\lambda_2)^*+(Y-\lambda_1)^*(Y-\lambda_2);$$

en notant $Y^+=\frac{1}{2}(Y+Y^*)$ et $Y^-=\frac{1}{2}(Y-Y^*)$, on peut les réécrire

$$(Y-\lambda_1)T+T(Y-\lambda_2)=0,\quad T^2=(Y^+)^2\,;$$

ainsi T a la propriété remarquable d'anticommuter à Y^+ et d'avoir le même carré; comme Y est toujours conjugué sous le groupe compact à un élément de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{1}_p & \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_p)\, \mathbf{0}_{p,q-p} \\ 0 & \lambda_2 \mathbf{1}_q \end{pmatrix},$$

un calcul explicite est facile. On peut alors retrouver facilement tous les éléments de la métrique, en particulier le potentiel calculé dans [4], à savoir, si on pose $\lambda = n\lambda_1/iq = -n\lambda_2/ip$,

$$\rho = n \sum_i \sqrt{|\lambda|^2 + |a_i|^2}. \tag{25}$$

Par rapport au quotient hyper-kählérien (lorsqu'il existe), la construction twistorielle offre l'avantage de prendre en compte toutes les symétries de la situation; elle fournit ici un objet géométrique important, à savoir l'action de $\mathbb{S}^1$ sur l'orbite.

Regardons à présent le cas plus général d'une orbite semisimple régulière de $S\ell(n, \mathbb{C})$, constituée des matrices de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; pour simplifier, supposons ces valeurs propres imaginaires pures, $\lambda_i \in i\mathbb{R}$; l'orbite est définie par l'équation $\varpi(Y) = 0$, où $\varpi(x) = \Pi(x - \lambda_i)$; alors, pour le paramètre $U = 0$, le champ de vecteurs T est déterminé par les équations

$$(\forall\lambda) \quad \varpi\Big(\frac{Y - 2\lambda T - \lambda^2 Y^*}{1 + \lambda^2}\Big) = 0$$

qui sont d'ordre n, donc beaucoup plus difficiles à résoudre.

5. Métriques hyper-pseudokählériennes

L'observation sur laquelle est basée cette section est la suivante : si on remplace l'involution $A \mapsto -A^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ par une autre involution, définissant une autre forme réelle, alors le théorème 4 construit encore un espace de twisteurs, codant des métriques pseudoriemanniennes.

DÉFINITION. — Une métrique *hyper-pseudokählérienne* est la donnée de (g, I, J, K), où g est une métrique pseudoriemannienne (non dégénérée), I, J, K des structures complexes vérifiant $IJK = -1$, telles que g soit kählérienne par rapport à chacune de ces structures.

Une telle métrique demeure Ricci-plate.

Pour clarifier la discussion à venir, nous nous limiterons au cas semisimple.

5.1. Extension de la construction twistorielle. — Soit $\mathfrak{g}^r$ une forme réelle de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, donnée par une involution σ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^r \oplus i\mathfrak{g}^r$; soit $\mathfrak{h}^r \subset \mathfrak{g}^r$ l'algèbre de Lie d'un tore maximal de G^r ; pour une certaine forme réelle compacte $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ et une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, on a

$$\mathfrak{h}^r = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^r.$$

Fixons $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in \mathfrak{h}^r$ et $U = i\tau_1, V = \tau_2 + i\tau_3$; posons, de manière similaire au théorème 2,

$$U_\lambda = U - \lambda\sigma(V), \quad V_\lambda = V - 2\lambda U + \lambda^2\sigma(V);$$

de manière parallèle au théorème 4, nous pouvons définir un espace

$$\mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{CP}^1,$$

muni d'une structure réelle τ et d'une forme symplectique le long des fibres, à valeurs dans $\mathcal{O}(2)$, tel que pour $\lambda \in \mathbb{C}$ régulier, on ait :

1) $\mathcal{T}_\lambda = \mathcal{O}(V_\lambda)$ avec la forme de Kirillov-Kostant-Souriau ;

2) $\tau(\lambda, A) = (-1/\bar{\lambda}, \sigma(A)/\bar{\lambda}^2)$;

nous disposons de plus d'une section réelle évidente

$$\lambda \longmapsto V_\lambda; \tag{26}$$

enfin, toute la structure est invariante sous l'action de G^r ; nous avons donc formellement défini un espace de twisteurs, à l'exception de la présence d'une famille de sections réelles.

THÉORÈME 12. — *Il y a un voisinage G^r-invariant de la section standard* (26) *dans $\mathcal{T}$ qui est l'espace des twisteurs d'une variété hyper-pseudokählérienne.*

La structure holomorphe-symplectique sous-jacente de cette variété est :

1) *un ouvert de l'orbite de $\tau_2 + i\tau_3$ si (τ_2, τ_3) sont réguliers ;*

2) *un voisinage de la section nulle de $T^*\mathcal{O}^{G^r}(\tau_1)$ si $\tau_2 = \tau_3 = 0$.*

Ces variétés admettent donc des métriques hyper-pseudokählériennes G^r-invariantes.

Démonstration. — Il y a deux méthodes pour démontrer ce théorème :

1) on dispose d'une famille de sections donnée par l'action de G^r sur la section (26), de dimension réelle $2n$ (c'est une orbite de G^r) ; on peut montrer que ces sections ont pour fibré normal $\mathcal{O}(1) \otimes \mathbb{C}^{2n}$, et déduire que la famille peut être (localement) complétée en une famille de sections réelles de dimension réelle $4n$;

2) dans le cas où le groupe G^r est compact, nous avons construit l'espace des twisteurs à partir des équations de Nahm; dans le cas général, le processus est exactement le même, à la différence que nous ne savons résoudre les équations de Nahm que dans un voisinage de la solution standard : nous présentons cette résolution à la section 5.3, après avoir examiné quelques exemples dans la section suivante. ▯

Les métriques sont obtenues à partir de l'espace des twisteurs par la résolution d'équations algébriques similaires, et sont donc algébriques réelles.

5.2. Exemples. — Le problème algébrique qui consiste à trouver des formules explicites est le même pour les métriques G ou G^r-invariantes. Nous illustrons ce principe en donnant quelques exemples explicites, avec des formules analogues à celles connues pour les métriques G-invariantes, dans des cas où les métriques construites par le théorème 12 sont accessibles par d'autres méthodes.

Grassmanniennes. — Revenons tout d'abord sur l'exemple 4.3. Soit $n = r + s = p + q$. Considérons le groupe $\mathrm{SU}(r, s)$ et l'élément (en posant à nouveau $\lambda_1 = i\lambda q/n \in i\mathbb{R}$)

$$V = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{1}_p & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathbf{1}_q \end{pmatrix};$$

notons $\mathcal{O}$ l'orbite de V sous $\mathrm{SU}(r, s)$ et $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}$ son orbite sous $S\ell(n, \mathbb{C})$; supposons par exemple $r \leq p \leq q$: il n'est pas difficile d'adapter la démonstration de [4] pour montrer que la formule

$$\rho\begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{1}_p & \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_p) \ \mathbf{0}_{p,q-p} \\ 0 & \lambda_2 \mathbf{1}_q \end{pmatrix}$$
$$= n\Big(\sum_1^r \sqrt{|\lambda|^2 - |a_i|^2} + \sum_{r+1}^p \sqrt{|\lambda|^2 + |a_i|^2} \Big)$$

définit une fonction $\mathrm{SU}(r, s)$-invariante dans un voisinage de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}$, qui est le potentiel d'une métrique hyper-pseudokählérienne.

Sa signature est facile à déterminer : la structure J rend holomorphe l'orbite $\mathcal{O}$ (qui est simplement la grassmannienne des p-plans de signature $(r, p - r)$ dans $\mathbb{C}^{r,s}$), et la métrique pseudokählérienne de cette orbite a pour signature $(q(p - r), qr)$; en utilisant la structure complexe I, on voit alors immédiatement que la signature de la métrique g est $(2q(p - r), 2qr)$.

En particulier, si $p = r$, l'orbite $\mathcal{O}$ est un espace hermitien-symétrique de type non compact et la métrique obtenue est hyper-kählérienne, mais n'existe que dans un voisinage de l'orbite de $\mathrm{SU}(r,s)$. Cette métrique peut être obtenue par quotient hyper-kählérien à partir d'un espace hyper-pseudokählérien plat (comme ci-après pour les espaces de drapeaux) : on voit ainsi que, même pour l'étude des métriques hyper-kählériennes, il est utile de considérer des métriques hyper-pseudokählériennes, puisque les premières peuvent parfois s'obtenir par quotient à partir des secondes.

De la même manière, en suivant [3], on peut donner des formules explicites pour les cotangents des mêmes orbites de $\mathrm{SU}(r,s)$. Dans le cas où cette orbite est un espace hermitien-symétrique (de type non compact), on obtient les métriques hyper-kählériennes sur un voisinage de la section nulle déjà décrites dans [3].

Espaces de drapeaux. — On peut aussi construire d'autres exemples moins explicites par quotient. En effet, si V est un espace vectoriel, muni d'une métrique hermitienne de signature (r,s), alors $V \times V^*$ a une structure hyper-pseudokählérienne plate de signature $(2r,2s)$; si un groupe agit sur V, on peut faire l'analogue du quotient hyper-kählérien. Par exemple, de manière similaire à la construction d'espaces de drapeaux par quotient [16], on peut prendre le quotient de

$$\begin{aligned} V = \mathrm{Hom}(\mathbb{C},\mathbb{C}^2) \times \cdots \times \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{r-1},\mathbb{C}^r) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^{r,1}) \\ \times \cdots \times \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{r,s-1},\mathbb{C}^{r,s}) \end{aligned}$$

par le groupe

$$U(1) \times \cdots \times U(r) \times U(r,1) \times \cdots U(r,s-1)\,;$$

le quotient symplectique de V par ce groupe est l'espace des drapeaux de type

$$\big((1,0),\dots,(r,0),(r,1),\dots,(r,s)\big)$$

dans $\mathbb{C}^{r,s}$ et le quotient de $V \times V^*$ donne une métrique hyper-pseudokählérienne sur un ouvert du cotangent.

5.3. Équations de Nahm à valeurs dans $\mathfrak{g}^r$. — Il nous a paru intéressant d'expliquer le lien avec les équations de Nahm. On peut regarder les équations (1), mais avec les T_i à valeurs dans $\mathfrak{g}^r$; le groupe de jauge est alors constitué de transformations à valeurs dans G^r ; soit $\mathcal{M}$ l'espace des modules des solutions des équations avec, quand s tend vers $-\infty$,

$$T_i(s) = \tau_i + O\big(|s|^{-1-\epsilon}\big);$$

la métrique (3) doit être définie en utilisant la forme de Killing (qui est G^r-invariante) et n'est donc plus nécessairement positive. Notons $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$

l'espace des modules de l'équation complexe défini en 1.5. On dispose toujours d'une flèche évidente

$$\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathbb{C}}.$$

Rappelons qu'étant donné un élément (v, ϕ) de $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$, donc vérifiant les deux dernières équations du système (1), on cherche l'élément de $\mathcal{M}$ correspondant en trouvant une transformation de jauge complexe g telle que $(v', \phi') = g(v, \phi)$ soit élément de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire vérifie de plus la première équation du système (1) :

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(v' - \sigma(v')\big) - \big[v', \sigma(v')\big] - \big[\phi', \sigma(\phi')\big] = 0\,; \tag{27}$$

l'équation porte en réalité sur $h = \sigma(g)^{-1}g \in G^{\mathbb{C}}/G^r$ et correspond [7] à trouver certaines trajectoires dans $G^{\mathbb{C}}/G^r$ d'une particule soumise à un potentiel; dans le cas où le groupe G^r est compact, la métrique de $G^{\mathbb{C}}/G^r$ est riemannienne complète et le potentiel positif ou nul, ce qui permet la résolution; dans le cas général, $G^{\mathbb{C}}/G^r$ est pseudoriemannien et le potentiel n'a pas de signe particulier, si bien qu'il est difficile de dire quand le problème a une solution.

Cependant, on a le lemme suivant.

LEMME 13. — *Au voisinage de la solution standard (τ_1, τ_2, τ_3), l'application π est un difféomorphisme local, préservant les structures holomorphes-symplectiques.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que pour une variation infinitésimale $(\dot{v}, \dot{\phi})$ de la solution standard $(\frac{1}{2}i\tau_1, \frac{1}{2}(\tau_2 + i\tau_3))$, on peut trouver g résolvant l'équation (27); cherchons $g = \exp(\dot{u})$ avec $\dot{u}$ à valeurs dans $i\mathfrak{g}^r$, alors l'action infinitésimale de g est par

$$\Big(\big[\dot{u}, \tfrac{1}{2}i\tau_1\big] - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{u}}{\mathrm{d}s}, \big[\dot{u}, \tfrac{1}{2}(\tau_2 + i\tau_3)\big]\Big)$$

et l'équation (27) devient

$$-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}s^2} - \sum_1^3 \big[\tau_i, [\tau_i, u]\big] = \text{termes en } \dot{v} \text{ et } \dot{\phi}\,;$$

comme les τ_i sont dans une sous-algèbre de Cartan d'une forme réelle compacte, l'opérateur $-\sum_1^3 \mathrm{ad}(\tau_i)^2$ est positif ou nul et l'équation a une solution unique si on impose la condition au bord $\dot{u}(0) = 0$ (ce type de laplacien est étudié dans la démonstration de la proposition 3.2 de [1]). Le reste de l'énoncé du théorème est alors facile. □

Comme les espaces de modules de l'équation complexe $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ sont les mêmes que dans le cas compact, on les identifie, suivant les cas, à des orbites coadjointes ou des espaces cotangents. On déduit alors bien le théorème 12 du lemme précédent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Biquard (O.). — *Sur les équations de Nahm et la structure de Poisson des algèbres de Lie semi-simples complexes*, Math. Ann., t. **304**, 1996, p. 253–276.

[2] Biquard (O.). — *Fibrés de Higgs et connexions intégrables : le cas logarithmique (diviseur lisse)*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., t. **30**, 1997, p. 41–96.

[3] Biquard (O.), Gauduchon (P.). — Hyperkähler metrics on cotangent bundles of hermitian symmetric spaces, in *Geometry and Physics*, J. Andersen, J. Dupont, H. Pedersen, A. Swann éd., Lect. Notes Pure Appl. Math. **184**, Marcel Dekker, 1996, p. 287–298.

[4] Biquard (O.), Gauduchon (P.). — *La métrique hyperkählérienne des orbites coadjointes de type symétrique d'un groupe de Lie semi-simple complexe*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **323**, 1996, p. 1259–1264.

[5] Brylinski (R.), Kostant (B.). — *Transverse polarizations of minimal nilpotent orbits and geometric quantization*, Preprint, 1996.

[6] Burns (D.). — Some examples of the twistor construction, in *Contributions to several complex variables, Hon. W. Stoll*, A. Howard, P.M. Wong éd., Aspects Math. E9, Vieweg, 1986, p. 51–67.

[7] Donaldson (S.). — *Nahm's equations and the classification of monopoles*, Commun. Math. Phys., t. **96**, 1984, p. 387–407.

[8] Hitchin (N.J.). — *Hyper-Kähler manifolds*, Séminaire Bourbaki, exp. n° 748, Astérisque, t. **206**, 1992, p. 137–166.

[9] Hitchin (N.J.). — *Integrable systems in Riemannian geometry*, Preprint, 1996.

[10] Hitchin (N.J.), Karlhede (A.), Lindstrøm (U.), Roček (M.). — *Hyperkähler metrics and supersymmetry*, Commun. Math. Phys., t. **108**, 1987, p. 535–589.

[11] Joyce (D.). — *Hypercomplex algebraic geometry*, Preprint.

[12] KOBAK (P.Z.), SWANN (A.). — *Classical nilpotent orbits as hyperkähler quotients*, Int. J. Math., t. **7**, 1996, p. 93–210.

[13] KOVALEV (A.G.). — *Nahm's equations and complex adjoint orbits*, Q.J. Math., Oxf. II. Ser., t. **47**, 1996, p. 41–58.

[14] KRONHEIMER (P.B.). — *A hyper-Kählerian structure on coadjoint orbits of a semisimple complex group*, J. Lond. Math. Soc., t. **42**, 1990, p. 193–208.

[15] KRONHEIMER (P.B.). — *Instantons and the geometry of the nilpotent variety*, J. Differ. Geom., t. **32**, 1990, p. 473–490.

[16] NAKAJIMA (H.). — *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J., t. **76**, 1994, p. 365–416.

[17] SANTA-CRUZ (S.). — *Twistor geometry for hyperkähler metrics on complex adjoint orbits*, Ann. Global Anal. Geom., t. **15**, 1997, p. 361–377.

[18] SIMPSON (C.). — The Hodge filtration on nonabelian cohomology, in *Algebraic geometry*, Santa Cruz 1995, Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, t. **62**, 1997, p. 217–281.