BULLETIN DE LA S. M. F.

NICOLAS DUPONT

Un diviseur de zéro induisant un élément d'homotopie central

Bulletin de la S. M. F., tome 125, nº 3 (1997), p. 337-344

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_3_337_0>

Bull. Soc. math. France,
125, 1997, p. 337–344.

UN DIVISEUR DE ZÉRO INDUISANT UN ÉLÉMENT D'HOMOTOPIE CENTRAL

PAR NICOLAS DUPONT (*)

RÉSUMÉ. — Soit H une algèbre graduée commutative (a.g.c.) telle que son algèbre de Lie d'homotopie contienne un élément central de degré 2. Nous montrons par un exemple que ceci n'implique pas que H soit isomorphe à $A/(\Omega)$, où A est une autre a.g.c. et Ω un élément décomposable non diviseur de 0 dans A. Ceci répond par la négative à la « version rationnelle » d'une question d'algèbre locale d'Avramov.

ABSTRACT. — Let H be a commutative graded algebra (c.g.a.) such that its homotopy Lie algebra contains a degree 2 central element. We construct an example showing that this does not imply that H is isomorphic to $A/(\Omega)$ where A is another c.g.a. and Ω a decomposable element which is not a zero divisor in A. This answer negatively to the "rational version" of a local algebra question by Avramov.

1. Introduction

L'a.g.c. de cohomologie rationnelle $H^*(E;\mathbb{Q})$ d'un espace topologique connexe de type fini E est « presque » un anneau local. Ne manquent que la stricte commutativité et le fait de considérer les seuls idéaux homogènes pour la graduation. À une telle a.g.c. H est associée une algèbre de Lie d'homotopie rationnelle $L^*(H)$, celle de l'espace dont le type d'homotopie rationnelle ne dépend que de H. Il était alors tentant de construire, pour tout anneau local R, une algèbre de Lie « d'homotopie » $L^*(R)$, puis d'en faire l'étude en s'inspirant notamment de résultats d'homotopie rationnelle connus.

Cette construction s'est faite en plusieurs étapes. Il est prouvé dans [7] que si k est le corps résiduel de R, alors $\mathrm{Tor}_*^R(k,k)$ est une k-algèbre de Hopf à puissances divisées. Notons $\mathrm{car}(k)$ la caractéristique de k.

(*) Texte reçu le 13 décembre 1996, accepté le 18 mars 1997.
N. DUPONT, Université des Sciences et Technologies de Lille, U.F.R. de Mathématiques, 59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX (France). Email : dupont@gat.citilille.fr.
Classification AMS : 55 P 62, 18 G 10

D'après [9] (car$(k)=0$), [1] (car$(k)\neq 2$) et [10] (car$(k)=2$), le dual de $\mathrm{Tor}_*^R(k,k)$, $\mathrm{Ext}_R^*(k,k)$, est toujours l'algèbre enveloppante d'une unique (à isomorphisme près) k-algèbre de Lie graduée $L^*(R)=L^{\geq 1}(R)$.

L'étude de $L^*(R)$ occupe aujourd'hui une place importante en algèbre locale. Parmi les résultats connus, citons par exemple que si R n'est pas une intersection complète, alors

- pour tout $n\geq 1$, $\dim L^n(R)>0$ (voir [5]);
- la suite $(\dim L^n(R))$ est à croissance exponentielle (voir [4]).

Soit m l'idéal maximal de R. Dans [3, 4.3], Avramov a proposé le problème suivant : supposons que $L^2(R)$ contienne un élément central; est-il vrai qu'alors R est isomorphe à $A/(\Omega)$ où A est un autre anneau local et Ω un élément de m^2 ne divisant pas 0 dans A ?

Dans [3] et [8], il est montré que la réponse est positive pour certaines classes d'anneaux locaux.

Nous nous intéressons ici à la « version rationnelle » de cette question, qui découle de [4] en remplaçant un anneau local par une a.g.c. sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels et un élément de m^2 par un élément décomposable.

Le but de cet article est de donner un exemple montrant qu'alors la réponse est négative.

Avant cela, nous allons rappeler comment l'algèbre de Lie d'homotopie $L^*(H)$ peut être construite par l'intermédiaire du modèle minimal de H. Cette notion utilise le procédé « d'adjonction de variables » de Tate [11], et est développée pour les a.d.g. dans [6].

Nous rappellerons aussi comment certains générateurs du modèle minimal de H, les « variables spéciales » d'André [2], correspondant aux éléments de Gottlieb pour les a.d.g., induisent des éléments centraux de $L^*(H)$.

2. Modèle minimal, variable spéciale

Avant de rappeler cette construction, fixons quelques notations. Nous allons travailler simultanément avec deux degrés.

- Le premier, noté supérieurement, est le degré « topologique ». On supposera toujours que $H=H^{\geq 0}$ avec $H^0\cong\mathbb{Q}$.
- Le second degré, noté inférieurement, est celui qui donnera, après dualisation, l'algèbre de Lie $L^*(H)$.

Soit $X=\bigoplus\limits_{n\geq 0} X_n$ un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué inférieurement.

Le symbole $|\,.\,|$ désigne le degré d'un élément homogène.

On note ΛX l'a.g.c. sur $\mathbb{Q}$, libre, engendrée par X, *i.e.* la $\mathbb{Q}$-algèbre graduée associative libre engendrée par X, divisée par l'idéal engendré par les éléments de la forme $ab - (-1)^{|a|\cdot|b|}ba$. En particulier, le carré d'un élément de degré impair est nul.

Une différentielle de degré -1 pour ΛX est une dérivation δ de carré nul telle que $\delta(X_i) \subset (\Lambda X)_{i-1}$ pour tout $i \geq 0$. L'algèbre différentielle $(\Lambda X, \delta)$ est appelée une a.d.g.c. *libre.* Elle est munie d'une graduation par la longueur des mots, $\Lambda X = \bigoplus_{i \geq 0} \Lambda^i X$. Lorsque de plus, pour tout $i \geq 0$, $\delta(X_i) \subset \Lambda^{\geq 2} X$, on dit que $(\Lambda X, \delta)$ est une a.d.g.c. libre *minimale.*

Les a.g.c. H admettent une présentation $H = \Lambda(x_1, ..., x_n)/(P_1, ..., P_r)$ où les P_i sont des sommes de monômes de longueur ≥ 2. En munissant H de la différentielle nulle et du second degré 0, elle devient une a.d.g.c. Un modèle minimal de H est une a.d.g.c. libre minimale $(\Lambda X, \delta)$ telle qu'il existe un quasi-isomorphisme (un morphisme induisant un isomorphisme en homologie) d'a.d.g.c.

$$\varphi : (\Lambda X, \delta) \xrightarrow{\cong} H.$$

Pour le construire, on procède de la façon suivante (voir [6]). Les espaces vectoriels X_0 et X_1 admettent respectivement pour base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\{y_1, \ldots, y_r\}$, avec $\delta(y_i) = P_i$ pour tout $i \leq r$. Le morphisme φ est l'identité sur X_0 et il est nul sur X_1. En particulier,

$$\varphi : \big(\Lambda(X_0 \oplus X_1), \delta\big) \longrightarrow H$$

est surjectif en homologie. Chaque espace X_i, pour $i \geq 2$, est alors construit pour « tuer » (l'arme étant la différentielle) un système de cycles de $(\Lambda X)_{i-1}$ dont les classes forment un système minimal de générateurs de $H_{i-1}(\Lambda X_{\leq i-1})$ en tant que $H_0(\Lambda X_{\leq i-1})$-module. Le morphisme φ vérifie $\varphi(X_i) = 0$ pour tout $i \geq 2$. C'est bien un quasi-isomorphisme puisque

$$H_*(\Lambda X, \delta) \cong H_0(\Lambda X, \delta) \cong H.$$

De plus, ce modèle de H est minimal par construction et il est unique à isomorphisme près. En outre, X possède un premier degré, $X = \bigoplus_{i \geq 1} X^i$, pour lequel φ est de degré 0 et δ de degré $+1$.

Soit sX_* la suspension de X_*. C'est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué inférieurement défini par $(sX)_n = X_{n-1}$. L'algèbre de Lie d'homotopie $L^*(H) = L^{\geq 1}(H)$ de A est le dual de sX_*, le crochet étant défini en suspendant puis en dualisant la partie quadratique de la différentielle, $\delta_2 : X \to \Lambda^2 X$, qui augmente de 1 la longueur des mots (voir [8] pour plus de détails). En particulier, et c'est ce qui va nous intéresser ici, l'élément $\overline{sy_i}$ de $L^2(A)$ est central lorsque la composée

$$X \xrightarrow{\delta_2} \Lambda^2(X) \xrightarrow{p} y_i \cdot X$$

est nulle.

Lorsque y_i est une variable spéciale d'André, *i.e.* lorsque pour tout z de X_2 tel que $\delta(z) = \sum_{j=1}^{j=r} Q_j y_j$, le polynôme Q_i est un bord, il est bien connu que $\overline{sy}_i$ est central. Pour la commodité du lecteur, nous rappelons la preuve de ce résultat, essentiel pour la suite. Soit $\varphi : (\Lambda X, \delta) \xrightarrow{\cong} H$ le modèle minimal de H tel qu'il vient d'être construit.

2.1. LEMME. — *Si y_i est une variable spéciale, alors la composée*

$$X \xrightarrow{\delta_2} \Lambda^2(X) \overset{p}{\twoheadrightarrow} y_i \cdot X$$

est nulle, donc $\overline{sy}_i$ est central dans $L^*(A)$.

2.2. *Preuve.* — Définissons une dérivation

$$\theta : \Lambda(X_0 \oplus X_1) \longrightarrow \Lambda(X_0 \oplus X_1)$$

par $\theta(X_0) = 0$, $\theta(y_i) = 1$ et $\theta(y_j) = 0$ pour $j \neq i$. Montrons qu'elle se prolonge en une dérivation $\theta : \Lambda X \to \Lambda X$ vérifiant les conditions suivantes.

- θ est de degré -1 ;
- $\delta\theta = \theta\delta$;
- $\theta(X_{\geq 2}) \subset \Lambda^{\geq 1} X$.

On raisonne par récurrence. Pour $z \in X_2$, on a $\delta(z) = \sum_{j=1}^{j=r} Q_j y_j$; on pose $\theta(z) = \alpha_i$ où $\alpha_i \in (\Lambda X)_1$ est tel que $\delta(\alpha_i) = Q_i$. Les conditions sont bien satisfaites. Supposons que θ soit prolongée jusque X_n, pour $n \geq 2$. Soit $t \in X_{n+1}$: alors $\theta\delta(t)$ est défini et appartient à $(\Lambda X)_{n-1}$. Donc $\delta\theta\delta(t) = \theta\delta\delta(t) = 0$. Ainsi $\theta\delta(t)$ est un cycle de degré ≥ 1. C'est donc le bord d'un élément α de $(\Lambda^{\geq 1} X)_n$ et l'on pose $\theta(t) = \alpha$, ce qui achève le pas récurrent.

Supposons maintenant que $p\delta_2(x) = y_i x'$, avec $x, x' \in X$. Posons :

$$\delta(x) = y_i x' + \beta + \gamma \quad \text{avec } \beta \in \Lambda^2 X \text{ et } \gamma \in \Lambda^{\geq 3} X.$$

Alors

$$\theta\delta(x) = x' - y_i\theta(x') + \theta(\beta) + \theta(\gamma) = \delta\theta(x).$$

Puisque δ est décomposable et θ est une dérivation, $\delta\theta(x)$ et $\theta(\gamma)$ appartiennent à $\Lambda^{\geq 2} X$. De plus, β ne contient pas de monôme divisible par y_i et donc $\theta(\beta)$ est aussi décomposable. On en déduit que x' est un multiple de y_i et donc $y_i x' = 0$ puisque y_i est de degré 1. $\square$

3. Exemple

Rappelons qu'il s'agit de construire une a.g.c. H telle que $L^2(H)$ contienne un élément central mais telle que H ne soit pas isomorphe au quotient d'une autre a.g.c. A par un idéal engendré par un élément décomposable qui ne soit pas un diviseur de 0 dans A.

Notre exemple est le suivant.

$$H = \Lambda(a,b,c,d,e)/(ab, a^2c + d^3, b^2d + e^3, d^2e^2, c^2, cd, ce)$$

où $|a| = 20$, $|b| = 16$, $|c| = 26$, $|d| = 22$ et $|e| = 18$.

Il est facile de vérifier que H est bien une a.g.c. Le choix des degrés, qui peut paraître étrange, est justifié par le fait que tous les générateurs mais aussi toutes les relations ont des degrés différents, ce qui limite les possibilités d'isomorphisme.

Soit maintenant $(\Lambda(X_0 \oplus X_1 \oplus X_2), \delta)$ le début du modèle minimal de H. On note $\{x, y, z, t, u, v, w\}$ une base de X_1 avec

$$\delta(x) = ab, \qquad \delta(y) = a^2c + d^3, \quad \delta(z) = b^2d + e^3,$$
$$\delta(t) = d^2e^2, \quad \delta(u) = c^2, \quad \delta(v) = cd, \quad \delta(w) = ce.$$

Alors X_2 contient clairement le sous-espace vectoriel $\langle r\rangle$ avec

$$\delta(r) = abcx - b^2y + d^2z - et.$$

Nous allons maintenant montrer que x est une variable spéciale. D'autre part, le fait que x^2 soit nul interdit d'éliminer (après isomorphisme) $abcx$ de l'image de la différentielle. Ce sera le point clé pour nous permettre de conclure.

3.1. Lemme. — *Soit s un élément de X_2 tel que $\delta(s) = Px + \alpha$, où $\alpha \in \Lambda(X_0) \otimes X_1$ ne contient pas de monôme divisible par x. Alors, quitte à ajouter un élément décomposable à s, P est un bord.*

3.2. *Preuve.* — On a $Pab + \delta(\alpha) = 0$. En particulier, $\delta(\alpha)$ est divisible par ab. Mais, quitte à ajouter un élément décomposable à s, on peut supposer que α ne contient pas de monôme divisible par ab.

Posons

$$\alpha = (Q_1b + Q_2)y + (P_1a + P_2)z + R_1t + R_2u + R_3v + R_4w$$

où ni P_1 ni Q_2 ne contient un monôme divisible par b, et ni Q_1 ni P_2 ne contient un monôme divisible par a. On obtient alors l'égalité suivante :

$$(P + Q_1ac + P_1bd)ab + Q_1bd^3 + Q_2(a^2c + d^3)$$
$$+ P_1ae^3 + P_2(b^2d + e^3) + R_1d^2e^2 + R_2c^2 + R_3cd + R_4ce = 0.$$

On obtient donc les égalités suivantes :

$$
\begin{gathered}
P + Q_1 ac + P_1 bd = 0, \\
Q_1 bd^3 + Q_2(a^2c + d^3) + P_1 ae^3 + P_2(b^2d + e^3) \\
\qquad + R_1 d^2e^2 + R_2 c^2 + R_3 cd + R_4 ce = 0.
\end{gathered}
$$

Cette dernière égalité montre que Q_1 doit appartenir à l'idéal engendré par $(a^2c, b, e^3, e^2, c^2, c, ce)$ donc à l'idéal engendré par (b, c, e^2), et que P_1 doit appartenir à l'idéal engendré par $(ac, d^3, d^2e^2, c^2, cd, c)$ donc à l'idéal engendré par (d^3, d^2e^2, c).

Mais alors $Q_1 ac + P_1 bd = -P$ est bien un bord. $\square$

Il nous reste à prouver le résultat suivant.

3.3 Lemme. — *L'a.g.c. H n'est pas isomorphe (comme a.g.c.) à $A/(\Omega)$ où A est une autre a.g.c. et Ω un élément décomposable qui ne divise pas 0 dans A.*

3.4. *Preuve.*—Supposons que ce soit le cas. Soit $\big(\Lambda(X_0 \oplus X_1 \oplus X_{\geq 2}), \delta\big)$ le modèle minimal de H. Il n'est défini qu'à isomorphisme près mais l'espace vectoriel gradué des générateurs est unique. Donc un modèle minimal de A ne peut être que de la forme

$$\big(\Lambda(X_0 \oplus Y_1 \oplus X_{\geq 2}), \delta'\big)$$

et un modèle minimal de $A/(\Omega)$ de la forme

$$\big(\Lambda(X_0 \oplus Y_1 \oplus \langle x_1 \rangle \oplus X_{\geq 2}), \delta'\big)$$

avec $\delta'(x_1) = \Omega$, $X_1 = Y_1 \oplus \langle x_1 \rangle$ et $\delta'(X_{\geq 2}) \subset \Lambda(X_0 \oplus Y_1 \oplus X_{\geq 2})$.

Du lemme classique de relèvement, on déduit l'existence d'un isomorphisme

$$\theta : \big(\Lambda(X_0 \oplus X_1 \oplus X_{\geq 2}), \delta\big) \xrightarrow{\cong} \big(\Lambda(X_0 \oplus Y_1 \oplus \langle x_1 \rangle \oplus X_{\geq 2}), \delta'\big).$$

Le choix du premier degré des générateurs de X_0 et de X_1 (tous différents) montre que, modulo des multiplications par des rationnels, la restriction de θ à X_0 est l'identité, et la restriction de la partie linéaire de θ à X_1 est aussi l'identité.

Rappelons que X_2 contient $\langle r \rangle$ avec

$$\delta(r) = abcx - b^2y + d^2z - et.$$

De plus, X_2 contient aussi $\langle i, j\rangle$ avec

$$\delta(i) = du - cv, \quad \delta(j) = eu - cw.$$

La commutation de θ aux différentielles et le fait que $\delta'(X_{\geq 2})$ est contenu dans $\Lambda(X_0 \oplus Y_1 \oplus X_{\geq 2})$ montre que si $\theta\delta(x) = \alpha x_1 + \beta$, alors α est un δ'-bord. Clairement, aucun élément contenant un monôme c, d, e, b^2 ou d^2 n'est un δ'-bord.

On ne peut donc qu'avoir $\langle x\rangle = \langle x_1\rangle$. Mais dans ce cas, il faut qu'un élément de la forme $(abc + b^2\alpha + d^2\beta + e\gamma)x_1$ soit un δ'-bord, ce qui est impossible car pour des raisons de degré, $\delta'(x_1) = ab$ et $|x_1|$ est impair. $\square$

4. Remarques et questions

1) On voit facilement que l'ajout des générateurs u, v et w dans X_1 est nécessaire pour notre propos. Si l'on supprime par exemple w, alors $e^2(cax - by) + bdt$ est un cycle sans être un bord duquel il est impossible « d'extraire » le monôme contenant x, c'est-à-dire que x n'est plus une variable spéciale.

2) Il semble difficile de généraliser la preuve du lemme 3.3. En effet, remarquons que les idéaux I et J respectivement engendrés par $(ab, ab^2 + c^2, cd)$ et (ab, c^2, cd) dans $\Lambda(a, b, c, d)$ sont les mêmes. Donc en particulier $\Lambda(a, b, c, d)/I = \Lambda(a, b, c, d)/J$. Cependant ab est un diviseur de zéro dans $\Lambda(a, b, c, d)/(ab^2 + c^2, cd)$ car $bd(ab) = d(ab^2 + c^2) - c(cd)$, mais ab ne l'est pas dans $\Lambda(a, b, c, d)/(c^2, cd)$.

3) Existe-t-il un tel exemple d'une a.g.c. H qui soit de plus de dimension finie ? Nous soupçonnons que non.

4) Existe-t-il une a.g.c. H telle que $L^2(H)$ contienne un élément central ne correspondant pas à une variable spéciale ? Nous pensons là encore que non.

5) Peut-on utiliser le même genre d'idées pour apporter une réponse au problème d'Avramov dans le cas local ? Bien sûr la situation est alors plus complexe car un anneau local n'est pas toujours une algèbre sur son corps résiduel, et même si c'est le cas, il n'existe pas de premier degré pour limiter les possibilités d'isomorphisme. Nous pensons cependant que cela est possible.

BIBLIOGRAPHIE

[1] André (M.). — *Hopf algebras with divided powers*, J. Algebra, t. **18**, 1971, p. 19–50.

[2] André (M.). — *Le caractère additif des déviations des anneaux locaux*, Comment. Math. Helvetici, t. **57**, 1982, p. 648–675.

[3] Avramov (L.L.). — *Homological asymtotics of modules over local rings*, Commutative algebra, Proceedings of a microprogram held June 15–July 2, ed. M. Hochters, C. Huneke and J.D. Sally, Springer-Verlag, 1989, p. 33–62.

[4] Avramov (L.L.). — *Local algebra and rational homotopy*, Homotopie algébrique et algèbre locale, journées S.M.F., éd. J.-M. Lemaire et J.-C. Thomas, Astérisque 113–114, Société Mathématique de France, 1984, p. 15–43.

[5] Halperin (S.). — *The non-vanishing of the deviations of a local ring*, Comment. Math. Helvetici, t. **62**, 1987, p. 646–653.

[6] Halperin (S.) and Stasheff (J.). — *Obstructions to homotopy equivalences*, Adv. in Math., t. **32**, 1979, p. 233–279.

[7] Levin (G.). — *Homology of local rings*, Ph.D. Thesis, Univ. of Chicago, 1965.

[8] Löfwall (C.). — *Central elements and deformations of local rings*, J. Pure and Applied Algebra, t. **91**, 1994, p. 183–192.

[9] Milnor (J.) and Moore (J.C.). — *On the structure of Hopf algebras*, Annals Math., t. **81**, 1965, p. 211–264.

[10] Sjödin (G.). — *Hopf algebras and derivations*, J. Algebra, t. **64**, 1980, p. 218–229.

[11] Tate (J.). — *Homology of noetherian rings and local rings*, Illinois J. Math., t. **1**, 1957, p. 14–27.