BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-YVES BOYER
MICHEL HICKEL

Une généralisation de la loi de transformation pour les résidus

Bulletin de la S. M. F., tome 125, n° 3 (1997), p. 315-335
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_3_315_0>

Bull. Soc. math. France,
125, 1997, p. 315–335.

UNE GÉNÉRALISATION DE LA LOI DE TRANSFORMATION POUR LES RÉSIDUS

PAR JEAN-YVES BOYER ET MICHEL HICKEL (*)

RÉSUMÉ. — Cet article prouve comment, dans le cadre analytique des résidus, les représentations intégrales du type Bochner-Martinelli permettent d'obtenir une preuve complète d'une généralisation de la loi de transformation. On montre ensuite comment, dans une théorie très générale due à J. Lipman, ce résultat peut s'étendre sans le recours à des outils analytiques.

ABSTRACT. — This paper shows that integral representations of Bochner-Martinelli type is a way to achieve a complete proof of an generalized transformation formula for multidimensional complex residues. Then, without any use of analytic tools we extend this result in the algebraic residue formalism due to J. Lipman.

1. Introduction

Soient $\mathbf{R} = \mathcal{O}_n$ l'anneau des germes en 0 des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^n$, et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une suite de $\mathcal{O}_n$ qui admet 0 pour zéro isolé. Pour tout $h \in \mathcal{O}_n$ on définit le résidu de h, par rapport au germe de f en 0, par

$$\mathrm{Res}_{(f,0)}(h) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_f} \frac{h(z)\,\mathrm{d}z}{f_1(z)\cdots f_n(z)}, \tag{1.1}$$

les nombres r et ϵ_i étant des réels strictement positifs suffisament petits; Γ_f désigne le tube

$$\Gamma_f = \{\zeta \in B(0,r) : |f_i(\zeta)| = \epsilon_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

orienté par la condition $\mathrm{d}(\arg f_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}(\arg f_n) > 0$.

(*) Texte reçu le 20 juin 1996, accepté le 30 juin 1997.
J.-Y. BOYER et M. HICKEL, Laboratoire de Mathématiques Pures, Université Bordeaux Sciences, 33405 Talence (France).
Email : boyer@math.u-bordeaux.fr et hickel@math.u-bordeaux.fr
Classification AMS : 32 A 27, 14 F 10.

Lorsque $\mathbf{R} = \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ est une suite de $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ qui définit une variété non vide et finie de $\mathbb{C}^n$, on définit pour tout $h \in \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ le résidu global de h par rapport à f par :

$$\operatorname{Res}_f(h) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{C}^n \\ f(\alpha)=0}} \operatorname{Res}_{(f,\alpha)}(h). \tag{1.2}$$

Plus généralement, soient $\mathbf{A}$ un anneau commutatif, $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre commutative et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une suite de $\mathbf{R}$ quasi-régulière (*cf.* [Ku1] ou [M]) telle que $\mathbf{P} = \mathbf{R}/(f_1 \dots f_n)$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini.

En suivant J. Lipman [L, § 3], on peut alors définir pour tout ω appartenant à $\bigwedge^n \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$, où $\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ est le $\mathbf{R}$-module des différentielles de la $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{R}$, le *résidu de ω par rapport à f* que nous noterons :

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} \omega \\ f_1, \dots, f_n \end{bmatrix}.$$

Brièvement, la définition procède comme suit : $\mathbf{P}$ étant un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, il existe une section $\mathbf{A}$-linéaire $\sigma : P \to R$ de la surjection canonique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{P}$, et l'on peut définir sur $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})$ une application trace que l'on note $\operatorname{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}$ (*cf.* [B$_1$, chap. II, § 5]). Soit $\widehat{\mathbf{R}}$ le complété f-adique de $\mathbf{R}$. La suite f étant quasi-régulière, tout élément $r \in \mathbf{R}$ admet dans $\widehat{\mathbf{R}}$ une écriture unique de la forme :

$$r = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sigma(r_\alpha) f^\alpha \quad \text{où} \quad r_\alpha \in \mathbf{P}. \tag{1.3}$$

Par conséquent, il existe des $\gamma_\alpha \in \operatorname{hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})$ uniques tels que :

$$\forall p \in \mathbf{P}, \quad r\sigma(p) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sigma\big(\gamma_\alpha(p)\big) f^\alpha. \tag{1.4}$$

On définit l'élément $r^\# \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})[[f]]$ par :

$$r^\# = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha f^\alpha. \tag{1.5}$$

Pour $\omega = r\,\mathrm{d}r_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}r_n \in \bigwedge^n \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$, soit :

$$r^\# = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha f^\alpha \quad \text{et} \quad r_j^\# = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_{j,\alpha} f^\alpha. \tag{1.6}$$

En notant ε_i le n-uplet à composantes toutes nulles sauf la i-ième qui vaut 1, on pose :

$$\frac{\partial}{\partial f_i}(r_j^{\#}) = \sum_{\alpha^j=(\alpha_1^j,\dots,\alpha_n^j)\in\mathbb{N}^n} \alpha_i^j \gamma_{j,\alpha^j} f^{\alpha^j-\varepsilon_i},$$

$$\det\Big(\frac{\partial}{\partial f_i}(r_j^{\#})\Big) = \sum_{\tau\in S_n} (-1)^{\tau} \frac{\partial}{\partial f_1}\big(r_{\tau(1)}^{\#}\big) \circ\cdots\circ \frac{\partial}{\partial f_n}\big(r_{\tau(n)}^{\#}\big)$$

et l'on considère l'élément de $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{P})$:

$$r^{\#}\det\Big(\frac{\partial}{\partial f_i}(r_j^{\#})\Big) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \delta_\alpha f^\alpha. \tag{1.7}$$

On définit, d'après J. Lipman [L, § 3], le *résidu de ω par rapport à f* par :

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\begin{bmatrix}\omega\\ f_1,\dots,f_n\end{bmatrix} &= \operatorname{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}(\delta_0)\\ &= \operatorname{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}\Big\{\gamma_0\circ\sum_{\tau\in S_n}(-1)^{\tau}\gamma_{\tau(1),\varepsilon_1}\circ\cdots\circ\gamma_{\tau(n),\varepsilon_n}\Big\}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

On peut montrer que cette définition algébrique des résidus recouvre les définitions analytiques des résidus données en (1.1) et (1.2) (*cf.* [Boy]).

La définition donnée en (1.8) respecte la loi de transformation (voir [L, (2.8)]) : soient $f = (f_1,\dots,f_n)$ et $g = (g_1,\dots,g_n)$ deux suites quasi-régulières de $\mathbf{R}$; si les $\mathbf{A}$-modules $\mathbf{R}/(f_1\dots f_n)$ et $\mathbf{R}/(g_1\dots g_n)$ sont projectifs de type fini et s'il existe une matrice $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$g = Af, \tag{1.9}$$

alors pour tout $\omega \in \wedge^n\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$, on a :

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix}\omega\\ f_1,\dots,f_n\end{bmatrix} = \operatorname{Res}\begin{bmatrix}\det(A)\,\omega\\ g_1,\dots,g_n\end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

L'utilité d'une telle « loi » est bien connue; cependant certaines démonstrations, comme celle proposée dans la preuve d'un Nullstellensatz effectif sur un corps de caractéristique quelconque dans [B-Y], ou encore, dans le cadre analytique les calculs effectués dans [E] ou [K], nécessitent d'exprimer le résidu par rapport à $(f_1^{\beta_1+1},\dots,f_n^{\beta_n+1})$ où $(\beta_1,\dots,\beta_n)$

appartient à $\mathbb{N}^n$, en fonction d'une somme de résidus par rapport à $(g_1^{\alpha_1+1}, \dots, g_n^{\alpha_n+1})$ où $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, ce que permet seulement la loi de transformation lorsque $\beta_i = 0$ pour tout i.

Lorsque $\mathbf{R} = \mathcal{O}_n$, l'article [K] d'une part, le livre [T] d'autre part proposent la formule :

$$
\begin{aligned}
(1.11) \qquad c_{i_1 \dots i_m} \int_{\Gamma_f} \frac{h \, \mathrm{d}z}{f_{i_1} \cdots f_{i_m} f^I} \\
= \sum_{j_1, \dots, j_m = 1}^{n} c_{j_1 \dots j_m} \int_{\Gamma_g} \frac{h \det A a_{j_1, i_1} \cdots a_{j_m, i_m} \, \mathrm{d}z}{g_{j_1} \cdots g_{j_m} g^I}
\end{aligned}
$$

où

$$
f^I = f_1 \cdots f_n, \quad c_{i_1 \dots i_m} = \alpha_1! \dots \alpha_n!,
$$

α_k désignant le nombre de fois où k apparaît dans la liste $(i_1, \dots, i_m)$. Cette formule, proposée dans le cas général, est uniquement démontrée dans le cas où f et g ont un Jacobien non nul en 0.

Il est présenté ci-dessous une preuve analytique complète de (1.11). En fait, cette formule peut prendre sa place dans une théorie algébrique des résidus, une démonstration en est donnée dans le paragraphe 4.

La preuve analytique, présentée dans le paragraphe 2, utilise des formules de représentations intégrales de type Bochner-Martinelli (*cf.* [A], [C] ou [Y]). L'idée de cette preuve est due à A. Yger ; elle contient par ailleurs une méthode de démonstration originale de la loi de transformation (*cf.* [Y]). On se place dans le cadre de $\mathcal{O}_n$ et des suites $f = (f_1, \dots, f_n)$ et $g = (g_1, \dots, g_n)$ régulières, mais la preuve est aussi valable dans le cadre de $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ et des suites $f = (f_1, \dots, f_n)$ et $g = (g_1, \dots, g_n)$ de $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ qui définissent une variété discrète non vide de $\mathbb{C}^n$. On peut montrer que de telles suites sont quasi-régulières (voir [Boy]).

Dans la démonstration algébrique, présentée dans le paragraphe 4, on se place dans le cadre général d'une $\mathbf{A}$-algèbre commutative $\mathbf{R}$ où $\mathbf{A}$ est un anneau commutatif, et l'on utilise le formalisme algébrique des résidus mis en place par J. Lipman (*cf.* [L]). Dans le cas particulier où l'on choisit $\mathbf{R} = \mathcal{O}_n$ ou bien $\mathbf{R} = \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ et pour éléments de $\mathbf{R}$, $X_1 = Z_1, \dots,$ $X_n = Z_n$, le théorème 4.3 fournit le théorème 2.1 du paragraphe 2.

Nous remercions vivement A. YGER pour les discussions et idées qui nous ont aidés à réaliser ce travail.

2. Une loi de transformation généralisée

THÉORÈME 2.1. — *Soient* $f = (f_1, \dots, f_n)$ *et* $g = (g_1, \dots, g_n)$ *deux suites régulières dans* $\mathcal{O}_n$ *telles que* $g = Af$ *où* $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_n)$.

Pour $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ *et* $h \in \mathcal{O}_n$ *on a :*

$$\text{(2.1.1)} \quad \operatorname{Res}_{(f_1^{\beta_1+1}, \dots, f_n^{\beta_n+1}, 0)}(h)$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\dots+\alpha_{n,1}=\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{1,n}+\dots+\alpha_{n,n}=\beta_n}} \frac{C(\beta,\alpha)}{\beta\,!} \operatorname{Res}_{\left((g_k^{\alpha_{k,1}+\dots+\alpha_{k,n}+1})_{1\le k\le n}, 0\right)} \Big(h \det A \prod_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^{\alpha_{i,j}} \Big)$$

où $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\alpha = (\alpha_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ *et* $C(\beta,\alpha)$ *est le coefficient binomial*

$$\binom{\beta_1}{\alpha_{1,1};\dots;\alpha_{n,1}} (\alpha_{1,1}+\dots+\alpha_{1,n})! \cdots \binom{\beta_n}{\alpha_{1,n};\dots;\alpha_{n,n}} (\alpha_{n,1}+\dots+\alpha_{n,n})!$$

avec $\displaystyle\binom{\beta_k}{\alpha_{1,k};\dots;\alpha_{n,k}} = \frac{\beta_k\,!}{\alpha_{1,k}!\dots\alpha_{n,k}!}$.

Preuve de 2.1. — Soit U un ouvert, contenant 0, sur lequel on peut choisir des représentants des germes des fonctions holomorphes en jeu dans le théorème. On notera de la même manière les représentants et les germes, et quitte à réduire U, on peut supposer que f et g admettent l'origine pour seul zéro. Le théorème est une conséquence de la proposition suivante, qui peut avoir un intérêt pour elle-même.

PROPOSITION 2.2. — *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^n$ *contenant* $B(0,\rho)$, W *un voisinage de* $\partial B(0,\rho)$ *inclus dans* U, $f = (f_1, \dots, f_n)$ *des fonctions holomorphes sur* U *qui admettent pour seul zéro l'origine et* s *une fonction de classe* C^1 *sur* W *qui vérifie :*

$$\langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle = \sum_{k=1}^{n} s_k(\zeta) f_k(\zeta) \neq 0 \quad \textit{pour } \zeta \in W.$$

Pour toute fonction h *holomorphe sur* U *et tout* $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, *on a :*

$$\text{(2.2.1)} \quad \operatorname{Res}_{(f_1^{\beta_1+1}, \dots, f_n^{\beta_n+1}, 0)}(h)$$

$$= \frac{(n-1+|\beta|)!\,(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\beta\,!\,(2i\pi)^n} \int_{|\zeta|=\rho} h \prod_{j=1}^{n} s_j^{\beta_j} \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_k \,\mathrm{d}s_{[k]} \wedge \mathrm{d}\zeta}{\langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}}$$

où $\mathrm{d}s_{[k]} = \bigwedge_{j\neq k} \mathrm{d}s_j$.

Le théorème est une conséquence facile de cette proposition. En effet, on choisit s défini par

$$s_k = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k}\bar{g}_j$$

pour $1 \leq k \leq n$ et $\rho > 0$ tel que $B(0,\rho) \subset U$. En notant

$$K(n,\beta) = \frac{(n-1+|\beta|)!\,(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n},$$

la proposition donne :

$$\text{(2.1.2)} \quad \beta!\,\operatorname{Res}_{(f_1^{\beta_1+1},\dots,f_n^{\beta_n+1},0)}(h)$$

$$= K(n,\beta)\int_{|\zeta|=\rho} h\prod_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{j,k}\bar{g}_j\Big)^{\beta_k}\frac{\det A\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\bar{g}_k\,\mathrm{d}\bar{g}_{[k]}\wedge\mathrm{d}\zeta}{\|g\|^{2(n+|\beta|)}}.$$

En développant, le second membre de (2.1.2) s'écrit :

$$\text{(2.1.3)} \quad K(n,\beta)\int_{|\zeta|=\rho} h\prod_{k=1}^{n}\Big\{\sum_{\alpha_{1,k}+\dots+\alpha_{n,k}=\beta_k}\binom{\beta_k}{\alpha_{1,k};\dots;\alpha_{n,k}}\prod_{j=1}^{n} a_{j,k}^{\alpha_{j,k}}\,\bar{g}_j^{\alpha_{j,k}}\Big\}$$

$$\times\frac{\det A\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\bar{g}_k\,\mathrm{d}\bar{g}_{[k]}\wedge\mathrm{d}\zeta}{\|g\|^{2(n+|\beta|)}}$$

$$= K(n,\beta)\int_{|\zeta|=\rho}\sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\dots+\alpha_{n,1}=\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_{1,n}+\dots+\alpha_{n,n}=\beta_n}}\frac{C(\beta,\alpha)}{\prod_{k=1}^{n}(\alpha_{k,1}+\dots+\alpha_{k,n})!}$$

$$\times\Big(h\det A\prod_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^{\alpha_{i,j}}\Big)\prod_{k=1}^{n}\bar{g}_k^{(\alpha_{k,1}+\dots+\alpha_{k,n})}\frac{\Omega_g}{\|g\|^{2(n+|\beta|)}}$$

où $\Omega_g = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\bar{g}_k\,\mathrm{d}\bar{g}_{[k]}\wedge\mathrm{d}\zeta$.

On peut appliquer à chaque terme de (2.1.3) la proposition 2.2 où f est remplacé par g et s par $\bar{g}$; on obtient

$$\sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\dots+\alpha_{n,1}=\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_{1,n}+\dots+\alpha_{n,n}=\beta_n}} C(\beta,\alpha)\operatorname{Res}_{((g_k^{\alpha_{k,1}+\dots+\alpha_{k,n}+1})_{1\leq k\leq n},0)}\Big(h\det A\prod_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^{\alpha_{i,j}}\Big),$$

ce qui termine la preuve du théorème. □

Remarque 2.3. — Les formulations proposées en (1.10) et (2.1.1) sont différentes mais elles contiennent les mêmes informations. En effet, dans (1.10), on peut supposer que $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_m$; on note β_k le nombre de fois qu'apparaît k dans la liste $(i_1, \ldots, i_m)$ et l'on choisit $(j_1, \ldots, j_m) \in (\mathbb{N}^*)^n$ où $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$. On peut écrire :

$$\frac{a_{j_1,i_1} \cdots a_{j_m,i_m}}{g_{j_1} \cdots g_{j_m}} = \prod_{\substack{1 \leq j \leq \beta_k \\ 1 \leq k \leq n \\ \beta_k \neq 0}} \frac{a_{\sigma_k(j),k}}{g_{\sigma_k(j)}} \tag{2.3.1}$$

où σ_k est une application de $[[1, \beta_k]]$ dans $[[1, n]]$. En notant $\alpha_{s,k}$ le nombre de fois que l'application α_k prend la valeur s, (2.3.1) s'écrit :

$$\prod_{\substack{1 \leq k,s \leq n \\ \beta_k \neq 0}} \frac{a_{s,k}^{\alpha_{s,k}}}{g_s^{\alpha_{s,k}}}.$$

Or pour $\beta_k \neq 0$, il existe $\binom{\beta_k}{\alpha_{1,k};\ldots;\alpha_{n,k}}$ applications de $[[1, \beta_k]]$ dans $[[1, n]]$ qui prennent $\alpha_{s,k}$ fois la valeur s, et donc dans (1.10) on a

$$\binom{\beta_1}{\alpha_{1,1}; \ldots ; \alpha_{n,1}} \cdots \binom{\beta_n}{\alpha_{1,n}; \ldots ; \alpha_{n,n}}$$

termes identiques à

$$\int_{\Gamma_g} \frac{h \det A \, a_{j_1,i_1} \cdots a_{j_m,i_m} \, \mathrm{d}z}{g_{j_1} \cdots g_{j_m} g^I}.$$

D'autre part, $c_{j_1 \ldots\, j_m} = (\alpha_{1,1} + \cdots + \alpha_{1,n})! \ldots (\alpha_{n,1} + \cdots + \alpha_{n,n})!$ et $c_{i_1 \ldots\, i_m} = \beta\,!$ ce qui prouve que (1.10) peut s'écrire comme (2.1.1). ☐

Preuve de la proposition 2.2. — Dans un premier temps, on prouve que (2.2.1) ne dépend pas de la section s choisie ; puis la preuve est faite lorsque f a un Jacobien qui ne s'annule pas sur U et enfin pour f quelconque.

Soient $0 < \rho_1 < \rho$ tel que $\partial B(0, \rho) \subset W$ et $\mathcal{X}$ une fonction de classe C^1 sur U qui prend la valeur 0 sur un voisinage de $\partial B(0, \rho_1)$ et 1 sur un voisinage de $\partial B(0, \rho)$; on pose pour $\zeta \in U - \{0\}$:

$$\tilde{s}(\zeta) = \mathcal{X}(\zeta) \frac{s(\zeta)}{\langle s(\zeta), f(\zeta) \rangle} + \big(1 - \mathcal{X}(\zeta)\big) \frac{\bar{f}(\zeta)}{\langle \bar{f}(\zeta), f(\zeta) \rangle} \tag{2.2.2}$$

où $\big\langle s(\zeta), f(\zeta) \big\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} s_k(\zeta) f_k(\zeta)$.

On a $\langle \tilde{s}(\zeta), f(\zeta)\rangle = 1$; donc $\bar{\partial}\tilde{s} = \bigwedge_{k=1}^{n} \bar{\partial}\tilde{s}_k = 0$.

En particulier, on obtient

$$\mathrm{d}\Big(\prod_{j=1}^{n} \tilde{s}_j^{\beta_j} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \tilde{s}_k^{\beta_k}\,\mathrm{d}\tilde{s}_{[k]} \wedge \mathrm{d}\zeta\Big) = \bar{\partial}\Big(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big(\prod_{j\neq k} \tilde{s}_j^{\beta_j}\Big)\tilde{s}_k^{\beta_k+1}\,\mathrm{d}\tilde{s}_{[k]}\wedge \mathrm{d}\zeta\Big) = 0,$$

ce qui prouve que la forme

$$h\Omega_{\tilde{s}} := h\prod_{j=1}^{n} \tilde{s}_j^{\beta_j} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \tilde{s}_k^{\beta_k}\,\mathrm{d}\tilde{s}_{[k]} \wedge \mathrm{d}\zeta$$

est fermée sur $U - \{0\}$. En utilisant le théorème de Stokes, on a

$$\int_{|\zeta|=\rho} h\,\Omega_{\tilde{s}} = \int_{|\zeta|=\rho_1} h\,\Omega_{\tilde{s}}$$

c'est-à-dire :

$$\int_{|\zeta|=\rho} h\prod_{j=1}^{n} s_j^{\beta_j}\, \frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} s_k\,\mathrm{d}s_{[k]}\wedge \mathrm{d}\zeta}{\langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}} = \int_{|\zeta|=\rho_1} h\prod_{j=1}^{n} \bar{f}_j^{\beta_j}\, \frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \bar{f}_k\,\mathrm{d}\bar{f}_{[k]}\wedge \mathrm{d}\zeta}{\langle \bar{f}(\zeta), f(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}}.$$

Ceci prouve que la valeur de l'intégrale ne dépend pas de la section s.

Pour démontrer la proposition dans le cas où f a un Jacobien qui ne s'annule pas sur U, on considère f comme un système de coordonnées sur U.

D'une part, d'après la formule de Cauchy, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{(f_1^{\beta_1+1},\dots,f_n^{\beta_n+1},0)}(h) &= \frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{\Gamma f} \frac{h(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{f_1^{\beta_1+1}\cdots f_n^{\beta_n+1}}\\ &= \frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{\Gamma f} \frac{\big(h/\det \frac{\partial f}{\partial \zeta}\big)}{f_1^{\beta_1+1}\cdots f_n^{\beta_n+1}}\,\mathrm{d}f\\ &= \frac{1}{\beta\,!}\,\frac{\partial^{|\beta|}\big(h/\det\frac{\partial f}{\partial\zeta}\big)}{\partial f^{\beta}}(0).\end{aligned}$$

D'autre part, d'après les formules de Bochner-Martinelli — ou celle de Leray — (*cf.* [A], [Y] ou [C, p. 181]), pour $f_0 \in \mathbb{C}^n$ proche de 0, on a :

$$\Big(\frac{h}{\det \partial f/\partial \zeta}\Big)(f_0) = \frac{(n-1)!\,(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \times \int_{|\zeta|=\rho} \Big(\frac{h}{\det \partial f/\partial \zeta}\Big) \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_k \, \mathrm{d}s_{[k]} \wedge \mathrm{d}f}{\langle s(\zeta), f(\zeta) - f_0\rangle^n}.$$

En dérivant par rapport à f_0 l'intégrale ci-dessus, on obtient

$$\frac{\partial^{|\beta|}\big(\frac{h}{\det \partial f/\partial \zeta}\big)}{\partial f^\beta}(0) = K(n,\beta) \int_{|\zeta|=\rho} \Big(\frac{h}{\det \partial f/\partial \zeta}\Big) \times \prod_{j=1}^{n} s_j^{\beta_j} \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_k \, \mathrm{d}s_{[k]} \wedge \mathrm{d}f}{\langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}}$$

ce qui, dans ce cas, prouve la proposition.

Dans le cas où f est quelconque, pour ϵ générique, $f_\epsilon = f - \epsilon$ n'a que des zéros simples dans U, et il existe $\alpha > 0$ tel que, pour ϵ assez petit, on ait $|f_\epsilon(\zeta)| > \alpha$ sur $\partial B(0,\rho)$. En prenant pour section $\bar f$, on a :

$$\begin{aligned}
K(n,\beta) &\int_{|\zeta|=\rho} h \prod_{j=1}^{n} s_j^{\beta_j} \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_k \, \mathrm{d}s_{[k]} \wedge \mathrm{d}\zeta}{\langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}} \\
&= K(n,\beta) \int_{|\zeta|=\rho} h \prod_{j=1}^{n} \bar f_j^{\beta_j} \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \bar f_k \, \mathrm{d}\bar f_{[k]} \wedge \mathrm{d}\zeta}{\langle \bar f(\zeta), f(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} K(n,\beta) \int_{|\zeta|=\rho} h \prod_{j=1}^{n} \bar f_{\epsilon,j}^{\beta_j} \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \bar f_{\epsilon,k} \, \mathrm{d}\bar f_{\epsilon,[k]} \wedge \mathrm{d}\zeta}{\langle \bar f_\epsilon(\zeta), f_\epsilon(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}}.
\end{aligned}$$

En remplaçant dans (2.2.2) $\bar f$ par $\bar f_\epsilon$, le même calcul qui a permis de prouver que $\Omega_{\bar s}$ est fermé sur $U - \{0\}$, prouve que la forme

$$h \prod_{j=1}^{n} \bar f_{\epsilon,j}^{\beta_j} \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \bar f_{\epsilon,k} \, \mathrm{d}\bar f_{\epsilon,[k]} \wedge \mathrm{d}\zeta}{\langle \bar f_\epsilon(\zeta), f_\epsilon(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}}$$

est fermée dans $U - V(f_\epsilon)$. En notant P_ϵ les zéros de f_ϵ, le théorème de Stokes permet de remplacer

$$K(n,\beta)\int_{|\zeta|=\rho} h\prod_{j=1}^{n}\bar f_{\epsilon,j}^{\beta_j}\,\frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\bar f_{\epsilon,k}\,\mathrm{d}\bar f_{\epsilon,[k]}\wedge\mathrm{d}\zeta}{\langle\bar f_\epsilon(\zeta),f_\epsilon(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}}$$

par

$$\sum_{P_\epsilon\in V(f_\epsilon)}K(n,\beta)\int_{|P_\epsilon+\zeta|=\tau} h\prod_{j=1}^{n}\bar f_{\epsilon,j}^{\beta_j}\,\frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\bar f_{\epsilon,k}\,\mathrm{d}\bar f_{\epsilon,[k]}\wedge\mathrm{d}\zeta}{\langle\bar f_\epsilon(\zeta),f_\epsilon(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}}. \tag{2.2.3}$$

Les zéros de f_ϵ étant simples, on est pour chaque terme de (2.2.3) dans le cas précédant et (2.2.3) peut s'écrire :

$$\sum_{P_\epsilon\in V(f_\epsilon)}\mathrm{Res}_{(f_1^{\beta_1+1},\dots,f_n^{\beta_n+1},P_\epsilon)}(h).$$

D'autre part, d'après le «principe de continuité» (*cf.* [G, p. 657]), on a

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{P_\epsilon\in V(f_\epsilon)}\mathrm{Res}_{(f_1^{\beta_1+1},\dots,f_n^{\beta_n+1},P_\epsilon)}(h)=\mathrm{Res}_{(f_1^{\beta_1+1},\dots,f_n^{\beta_n+1},0)}(h)$$

ce qui termine la preuve de la proposition. □

3. Une application des techniques utilisées

Dans la preuve de la loi de transformation, comme celle écrite dans [G], on prouve par un argument algébrique immédiat que si $g = Af$, $f(P)\neq 0$ et $g(P) = 0$, P étant un zéro isolé de g, alors

$$\forall h\in\mathcal{O}_P,\quad \frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{\Gamma_{g_P}}\frac{h\det A\,\mathrm{d}z}{g_1\cdots g_n}=0 \tag{3.1}$$

où, r et ϵ_i étant des réels strictement positifs suffisament petits,

$$\Gamma_{g_P}=\{\zeta\in B(P,r):|g_i(\zeta)|=\epsilon_i,\ i=1,\dots,n\}$$

orienté par la condition $\mathrm{d}(\arg g_1)\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}(\arg g_n)>0$.

Des exemples simples montrent par contre que, dans les mêmes conditions, il est possible d'obtenir

$$\int_{\Gamma_{g_P}}\frac{h\det A\,a_{j_1,i_1}\cdots a_{j_m,i_m}\,\mathrm{d}z}{g_{j_1}\cdots g_{j_m}g^I}\neq 0.$$

Un argument analytique mis en œuvre dans la preuve de la proposition 2.2 permet d'obtenir la proposition suivante qui généralise (3.1) :

PROPOSITION 3.2. — *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ $f = (f_1, \dots, f_n)$ et $g = (g_1, \dots, g_n)$des fonctions holomorphes sur U telles que $g = Af$ où $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ est une matrice à coefficients dans $\mathcal{O}(U)$. On suppose que g admet un zéro isolé P qui n'est pas un zéro de f. Alors :*

$$\text{(3.2.1)} \quad \forall h \in \mathcal{O}(U), \quad \sum_{j_1, \dots, j_m = 1}^{n} c_{j_1 \dots j_m} \int_{\Gamma_{g_P}} \frac{h \det A \, a_{j_1, i_1} \cdots a_{j_m, i_m} \, \mathrm{d}z}{g_{j_1} \cdots g_{j_m} g^I} = 0.$$

Preuve. — Comme dans la preuve de la proposition 2.2, on choisit W un voisinage de $\partial B(P, r)$, s une fonction de classe C^1 sur W qui vérifie $\langle s(\zeta), f(\zeta) \rangle \neq 0$ pour $\zeta \in W$. Soient $\widetilde{U}$ un voisinage de $B(P, r)$, $\mathcal{X}$ une fonction de classe C^1 sur $\widetilde{U}$ qui prend la valeur 1 sur un voisinage de $\partial B(P, r)$ et zéro sur un voisinage de P. On pose pour $\zeta \in \widetilde{U}$:

$$\tilde{s}(\zeta) = \mathcal{X}(\zeta) \frac{s(\zeta)}{\langle s(\zeta), f(\zeta) \rangle} + \big(1 - \mathcal{X}(\zeta)\big) \frac{\bar{f}(\zeta)}{\langle \bar{f}(\zeta), f(\zeta) \rangle} \cdot$$

Le calcul fait dans la preuve de la proposition 2.2 montre que la forme

$$h \prod_{j=1}^{n} \tilde{s}_j^{\beta_j} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \tilde{s}_k^{\beta_k} \, \mathrm{d}\tilde{s}_{[k]} \wedge \mathrm{d}\zeta$$

est fermée sur $\widetilde{U}$, ce qui prouve que :

$$\text{(3.2.2)} \qquad \int_{|\zeta + P| = r} h \prod_{j=1}^{n} s_j^{\beta_j} \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_k \, \mathrm{d}s_{[k]} \wedge \mathrm{d}\zeta}{\langle s(\zeta), f(\zeta) \rangle^{n + |\beta|}} = 0.$$

On choisit s défini par $s_k = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} \bar{g}_k$; la formule (3.2.2) s'écrit, en utilisant le calcul fait dans la preuve du théorème 2.1,

$$\sum_{\substack{\alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{n,1} = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{1,n} + \dots + \alpha_{n,n} = \beta_n}} C(\beta, \alpha) \operatorname{Res}_{\left((g_k^{\alpha_{k,1} + \dots + \alpha_{k,n} + 1})_{1 \le k \le n}, P\right)} \Big(h \det A \prod_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^{\alpha_{i,j}}\Big) = 0,$$

soit encore :

$$\sum_{j_1, \dots, j_m = 1}^{n} c_{j_1 \dots j_m} \int_{\Gamma_{g_P}} \frac{h \det A \, a_{j_1, i_1} \cdots a_{j_m, i_m} \, \mathrm{d}z}{g_{j_1} \cdots g_{j_m} g^I} = 0. \quad \square$$

4. Une preuve algébrique de la loi de transformation généralisée

LEMME 4.1. — *Soient* $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre commutative,* $g = (f_1, \dots, f_n)$ *une suite de* $\mathbf{R}$ *quasi-régulière,* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ *une matrice,* $U_1, \dots, U_n$ *des variables algébriquement indépendantes sur* $\mathbf{R}$ *et* $V = AU$; *alors la suite* $(U_1, \dots, U_n, f_1 - V_1, \dots, f_n - V_n)$ *de* $\mathbf{R}[U]$ *est quasi-régulière.*

Preuve de 4.1. — Soient $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \in \mathbf{R}$,

$$I = (U_1, \dots, U_n, f_1 - a_{i_1}U_{i_1}, \dots, f_n - a_{i_n}U_{i_n})\mathbf{R}[U],$$

$k \in \mathbb{N}^*$ et

$$\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n, \beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta| + |\beta'| = k}} a_{\beta,\beta'} U^\beta (f - aU)^{\beta'} \in I^{k+1} \tag{4.1.1}$$

où $a_{\beta,\beta'} \in \mathbf{R}[U]$ et $(f - aU) = (f_1 - a_{i_1}U_{i_1}, \dots, f_n - a_{i_n}U_{i_n})$.

Pour montrer que la suite $(U_1, \dots, U_n, f_1 - a_{i_1}U_{i_1}, \dots, f_n - a_{i_n}U_{i_n})$ est quasi-régulière, il suffit de traiter le cas où $a_{\beta,\beta'} \in \mathbf{R}$ ce que l'on suppose maintenant. On montre par récurrence sur $|\beta|$ que $a_{\beta,\beta'}$ appartient à I.

En notant P_0 l'opérateur qui à (4.1.1), considéré comme un polynôme en U, associe son terme constant, on a :

$$P_0\Big(\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n, \beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta| + |\beta'| = k}} a_{\beta,\beta'} U^\beta (f - aU)^{\beta'}\Big) = \sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta'| = k}} a_{0,\beta'} f^{\beta'}.$$

Les éléments de I^{k+1} s'écrivent :

$$\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n, \beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta| + |\beta'| \geq k+1}} c_{\beta,\beta'} U^\beta f^{\beta'} \quad \text{où } c_{\beta,\beta'} \in \mathbf{R}. \tag{4.1.2}$$

En particulier, leur terme constant est de la forme $\sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta'| = k+1}} c_{0,\beta'} f^{\beta'}$; par conséquent :

$$\sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta'| = k}} a_{0,\beta'} f^{\beta'} = \sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta'| = k+1}} c_{0,\beta'} f^{\beta'}.$$

Cette égalité prouve que $\sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta'| = k}} a_{0,\beta'} f^{\beta'}$ appartient à J^{k+1}, où J est l'idéal

$$J = (f_1, \dots, f_n)\mathbf{R}.$$

La suite $(f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbf{R}$ étant quasi-régulière, on a $a_{0,\beta'} \in J$, en particulier $a_{0,\beta'} \in I$ pour tout β' tel que $|\beta'| = k$.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \geq 1$. On suppose prouvé par récurrence sur $|\alpha|$ que $a_{\beta,\beta'} \in I$ pour tout $(\beta, \beta') \in \mathbb{N}^{2n}$ tel que $|\beta| < |\alpha|$ et $|\beta| + |\beta'| = k$.

En notant P_α l'opérateur qui à (4.1.1), considéré comme un polynôme en U, associe le cœfficient de son terme en U^α, on a :

$$P_\alpha\Big(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n,\,\beta'\in\mathbb{N}^n\\ |\beta|+|\beta'|=k}} a_{\beta,\beta'}U^\beta(f-aU)^{\beta'}\Big) = \sum_{\substack{\beta'\in\mathbb{N}^n\\ |\alpha|+|\beta'|=k}} a_{\alpha,\beta'}U^\alpha f^{\beta'} + P_\alpha\Big(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n,\,\beta'\in\mathbb{N}^n\\ |\beta|<|\alpha|,\,|\beta|+|\beta'|=k}} a_{\beta,\beta'}U^\beta(f-aU)^{\beta'}\Big). \tag{4.1.3}$$

D'après (4.1.2), les variables $U_1, \dots, U_n$ étant algébriquement indépendantes sur $\mathbf{R}$, il existe des $c_{\alpha,\beta'} \in \mathbf{R}$ tels que :

$$P_\alpha\Big(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n,\,\beta'\in\mathbb{N}^n\\ |\beta|+|\beta'|=k}} a_{\beta,\beta'}U^\beta(f-aU)^{\beta'}\Big) = \sum_{\substack{\beta'\in\mathbb{N}^n\\ |\alpha|+|\beta'|=k+1}} c_{\alpha,\beta'}U^\alpha f^{\beta'}.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence sur (β, β') on a :

$$P_\alpha\Big(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n,\,\beta'\in\mathbb{N}^n,\\ |\beta|<|\alpha|,\,|\beta|+|\beta'|=k}} a_{\beta,\beta'}U^\beta(f-aU)^{\beta'}\Big) \in I^{k+1}.$$

Par conséquent, l'égalité (4.1.3) montre que $\sum_{\substack{\beta'\in\mathbb{N}^n\\ |\alpha|+|\beta'|=k}} a_{\alpha,\beta'}U^\alpha f^{\beta'}$ appartient à I^{k+1}. D'après (4.1.2), les variables $U_1, \dots, U_n$ étant algébriquement indépendantes, on en déduit :

$$\sum_{\substack{\beta'\in\mathbb{N}^n\\ |\alpha|+|\beta'|=k}} a_{\alpha,\beta'} f^{\beta'} \in J^{k+1-|\alpha|}.$$

La suite $(f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbf{R}$ étant quasi-régulière, $a_{\alpha,\beta'}$ appartient à J donc à I, pour tout β'. Par récurrence $a_{\beta,\beta'}$ appartient à I pour tout (β, β'), ce qui prouve que la suite $(U_1, \dots, U_n, f_1 - a_{i_1}U_{i_1}, \dots, f_n - a_{i_n}U_{i_n})$ est $\mathbf{R}[U]$ quasi-régulière.

En réitérant ce procédé, on obtient que la suite

$$\Big(U_1, \dots, U_n, g_1 - \sum_{i=1}^n a_{1,i}U_i, \dots, g_n - \sum_{i=1}^n a_{n,i}U_i\Big)$$

de $\mathbf{R}[U]$ est quasi-régulière. $\square$

LEMME 4.2. — *Soient* $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre commutative,* $(f_1, \dots, f_n)$ *une suite de* $\mathbf{R}$ *quasi-régulière telle que* $\mathbf{R}/(f_1 \dots f_n)$ *soit un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini,* $X_1, \dots, X_n$ *des éléments quelconques de* $\mathbf{R}$, $U_1, \dots, U_n$ *des variables algébriquement indépendantes sur* $\mathbf{R}$, $m_1, \dots, m_n$, $m'_1, \dots m'_n$ *des entiers et* $h = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha U^\alpha \in \mathbf{R}[U]$. *Alors*

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} \sum a_\alpha U^\alpha \,\mathrm{d}U \wedge \mathrm{d}X \\ U_1^{m_1+1}, \dots, U_n^{m_n+1}, f_1^{m'_1+1}, \dots, f_n^{m'_n+1} \end{bmatrix} = \operatorname{Res}\begin{bmatrix} a_{m_1,\dots,m_n} \,\mathrm{d}X \\ f_1^{m'_1+1}, \dots, f_n^{m'_n+1} \end{bmatrix} \tag{4.2.1}$$

et si $m_i > 0$, $r \in \mathbf{R}$, *on a :*

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} r f_i \,\mathrm{d}X \\ f_1^{m_1+1}, \dots, f_i^{m_i+1}, \dots, f_n^{m_n+1} \end{bmatrix} = \operatorname{Res}\begin{bmatrix} r \,\mathrm{d}X \\ f_1^{m_1+1}, \dots, f_i^{m_i}, \dots, f_n^{m_n+1} \end{bmatrix}. \tag{4.2.2}$$

Preuve de 4.2. — Soient $\widehat{\mathbf{R}}$ le complété I-adique de $\mathbf{R}$ où I est l'idéal de $\mathbf{R}$ engendré par $f_1, \dots, f_n$, $\mathbf{P} = \widehat{\mathbf{R}}/\widehat{I} = \mathbf{R}/I$ et $\sigma : \mathbf{P} \to \widehat{\mathbf{R}}$ une section de la projection canonique $\pi : \widehat{\mathbf{R}} \to \mathbf{P}$.

Soient $\mathbf{R}' = \mathbf{R}[U_1, \dots, U_n]$, $I' = (U_1, \dots, U_n, f_1, \dots, f_n)\mathbf{R}'$, $\widehat{\mathbf{R}}'$ le complété I'-adique de $\mathbf{R}'$, $\mathbf{P}' = \widehat{\mathbf{R}}'/\widehat{I}' = \mathbf{R}'/I' = \mathbf{R}/I = \mathbf{P}$ et $\sigma' : \mathbf{P} \to \widehat{\mathbf{R}}'$ une section de la projection canonique $\pi' : \widehat{\mathbf{R}}' \to \mathbf{P}$.

D'après la propriété universelle du séparé complété, l'injection canonique i de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}'$ induit une application injective $\bar{\imath}$ de $\widehat{\mathbf{R}}$ dans $\widehat{\mathbf{R}}'$ et par conséquent on peut choisir $\sigma' = \bar{\imath} \circ \sigma$.

Pour $r \in \mathbf{R}$ identifié par l'injection canonique à un élément de $\widehat{\mathbf{R}}$, on note

$$r^{\#} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} r_\alpha f^\alpha$$

l'élément de $\operatorname{Hom}_A(\mathbf{P}, \mathbf{P})[[f]]$ qui vérifie :

$$\forall p \in \mathbf{P}, \quad \sigma(p) r = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sigma\big(r_\alpha(p)\big) f^\alpha.$$

On a alors

$$\bar{\imath} \circ \sigma(p) r = \bar{\imath} \circ \Big(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sigma\big(r_\alpha(p)\big) f^\alpha \Big)$$

et par conséquent

$$\sigma'(p)r = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \sigma'\big(r_\alpha(p)\big) f^\alpha.$$

Ceci nous permet d'identifier les écritures de $r^\#$ et $\overline{\imath}(r)^\#$. D'autre part, si l'on note

$$r^\# \det\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial f_i} X_j^\#\Big)\Big) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \delta_\alpha f^\alpha,$$

on a :

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} r\,\mathrm{d}X \\ f_1^{m_1'+1},\dots,f_n^{m_n'+1}\end{bmatrix} = \operatorname{Tr}_{P/A}(\delta_{m_1',\dots,m_n'}).$$

Soit $\beta\in\mathbb{N}^n$; pour tout $p\in\mathbf{P}$, on a $\sigma(p)rU^\beta = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \sigma(r_\alpha(p) f^\alpha U^\beta$ et donc

$$(rU^\beta)^\# = U^\beta r^\#,\quad (rU^\beta)^\# \det\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial f_i} X_j^\#\Big)\Big) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \delta_\alpha U^\beta f^\alpha.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\begin{bmatrix} r\,\mathrm{d}X \\ f_1^{m_1'+1},\dots,f_n^{m_n'+1}\end{bmatrix} &= \operatorname{Tr}_{P/A}(\delta_{m_1',\dots,m_n'}) \\ &= \operatorname{Res}\begin{bmatrix} rU^\beta\,\mathrm{d}U\wedge\mathrm{d}X \\ U_1^{\beta_1+1},\dots,U_n^{\beta_n+1}, f_1^{m_1'+1},\dots,f_n^{m_n'+1}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

et si $\beta\neq(\beta_1',\dots,\beta_n')$,

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} rU^\beta\,\mathrm{d}U\wedge\mathrm{d}X \\ U_1^{\beta_1'+1},\dots,U_n^{\beta_n'+1}, f_1^{m_1'+1},\dots,f_n^{m_n'+1}\end{bmatrix} = 0,$$

ce qui montre l'égalité (4.2.1) :

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} \sum a_\alpha U^\alpha\,\mathrm{d}U\wedge\mathrm{d}X \\ U_1^{m_1+1},\dots,U_n^{m_n+1}, f_1^{m_1'+1},\dots,f_n^{m_n'+1}\end{bmatrix} = \operatorname{Res}\begin{bmatrix} a_{m_1,\dots,m_n}\,\mathrm{d}X \\ f_1^{m_1'+1},\dots,f_n^{m_n'+1}\end{bmatrix}.$$

Pour montrer égalité (4.2.2), on a

$$(rf_i)^\# \det\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial f_i} X_j^\#\Big)\Big) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \delta_\alpha f^\alpha f_i,$$

d'où :

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} r f_i \,\mathrm{d}X \\ f_1^{m_1+1},\dots,f_n^{m_n+1}\end{bmatrix} = \operatorname{Tr}_{P/A}(\delta_{m_1,\dots,m_i-1,\dots,m_n}) = \operatorname{Res}\begin{bmatrix} r \,\mathrm{d}X \\ f_1^{m_1+1},\dots,f_i^{m_i},\dots,f_n^{m_n+1}\end{bmatrix},$$

ce qui termine la preuve du lemme 4.2. □

THÉORÈME 4.3. — *Soient* $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre commutative, deux suites de* $\mathbf{R}$ *quasi-régulières* $f=(f_1,\dots,f_n)$ *et* $g=(g_1,\dots,g_n)$ *telles que d'une part* $g=Af$ *où* $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ *et d'autre part que les* $\mathbf{A}$*-modules* $\mathbf{R}/(f_1\dots f_n)$ *et* $\mathbf{R}/(g_1\dots g_n)$ *soient projectifs de type fini. Pour tous entiers* $\beta_1,\dots,\beta_n$ *et des éléments quelconques* $h, X_1,\dots,X_n$ *de* $\mathbf{R}$, *on a :*

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} h \,\mathrm{d}X \\ f_1^{\beta_1+1},\dots,f_n^{\beta_n+1}\end{bmatrix} = \sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{n,1}=\beta_1\\ \vdots \\ \alpha_{1,n}+\cdots+\alpha_{n,n}=\beta_n}} \frac{C(\beta,\alpha)}{\beta!}\operatorname{Res}\begin{bmatrix} h \det A \prod_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^{\alpha_{i,j}} \,\mathrm{d}X \\ (g_k^{\alpha_{k,1}+\cdots+\alpha_{k,n}+1})_{1\le k\le n}\end{bmatrix}. \tag{4.3.1}$$

Preuve du théorème 4.3. — Soient $U_1,\dots,U_n$ des variables algébriquement indépendantes sur $\mathbf{R}$ et $V=AU$; d'après le lemme 4.1, les suites de $\mathbf{R}[U]$

$$(U_1,\dots,U_n,f_1-U_1,\dots,f_n-U_n),$$

$$(U_1,\dots,U_n,g_1-V_1,\dots,g_n-V_n)$$

sont quasi-régulières. Par conséquent, les suites

$$(U_1^{\beta_1+1},\dots,U_n^{\beta_n+1},f_1-U_1,\dots,f_n-U_n),$$

$$(U_1^{\beta_1+1},\dots,U_n^{\beta_n+1},g_1-V_1,\dots,g_n-V_n)$$

sont aussi quasi-régulières (voir [L, (3.2.c)]). Les modules :

$$\mathbf{R}[U]/(U_1^{\beta_1+1},\dots,U_n^{\beta_n+1},f_1-U_1,\dots,f_n-U_n),$$

$$\mathbf{R}[U]/(U_1^{\beta_1+1},\dots,U_n^{\beta_n+1},g_1-V_1,\dots,g_n-V_n)$$

sont des $\mathbf{A}$-modules projectifs de type fini.

Soit $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R}[U])$; on a :

$$\widetilde{A} \begin{pmatrix} U_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ U_n^{\beta_n+1} \\ f_1 - U_1 \\ \vdots \\ f_n - U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ U_n^{\beta_n+1} \\ g_1 - V_1 \\ \vdots \\ g_n - V_n \end{pmatrix}.$$

Donc d'après la loi de transformation (voir [L, (2.8)]) :

$$\text{(4.3.2)} \qquad \operatorname{Res}\begin{bmatrix} h\,\mathrm{d}U \wedge \mathrm{d}X \\ U_1^{\beta_1+1}, \dots, U_n^{\beta_n+1}, f_1 - U_1, \dots, f_n - U_n \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{Res}\begin{bmatrix} h \det A\,\mathrm{d}U \wedge \mathrm{d}X \\ U_1^{\beta_1+1}, \dots, U_n^{\beta_n+1}, g_1 - V_1, \dots, g_n - V_n \end{bmatrix}.$$

On va donner une autre écriture de chaque membre de cette égalité. En utilisant

$$f_i^{\beta_i+1} = U_i^{\beta_i+1} + (f_i - U_i) \sum_{k=0}^{\beta_i} U_i^k f_i^{\beta_i-k}$$

et en notant

$$B = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\beta_1} U_1^k f_1^{\beta_1-k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum\limits_{k=0}^{\beta_n} U_n^k f_n^{\beta_n-k} \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ U_n^{\beta_n+1} \\ f_1 - U_1 \\ \vdots \\ f_n - U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ U_n^{\beta_n+1} \\ f_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ f_n^{\beta_n+1} \end{pmatrix}$$

qui donne en appliquant la loi de transformation :

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} h\,\mathrm{d}U \wedge \mathrm{d}X \\ U_1^{\beta_1+1}, \dots, U_n^{\beta_n+1}, f_1 - U_1, \dots, f_n - U_n \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{Res}\begin{bmatrix} h\big(\prod\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=0}^{\beta_i} U_i^k f_i^{\beta_i-k}\big)\,\mathrm{d}U \wedge \mathrm{d}X \\ (U_1^{\beta_1+1}, \dots, U_n^{\beta_n+1}, f_1^{\beta_1+1}, \dots, f_n^{\beta_n+1} \end{bmatrix}.$$

Le lemme 4.2 appliqué au membre de droite donne :

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} h\,\mathrm{d}U\wedge\mathrm{d}X \\ U_1^{\beta_1+1},\dots,U_n^{\beta_n+1},f_1-U_1,\dots,f_n-U_n\end{bmatrix} = \operatorname{Res}\begin{bmatrix} h\,\mathrm{d}X \\ f_1^{\beta_1+1},\dots,f_n^{\beta_n+1}\end{bmatrix}. \tag{4.3.3}$$

Concernant le second membre de (4.3.2), on remarque que

$$\begin{cases} g_i^{|\beta|+n} = V_i^{|\beta|+n} + (g_i-V_i)\displaystyle\sum_{k=0}^{|\beta|+n-1} V_i^k g_i^{|\beta|+n-k-1}, \\ V_i^{|\beta|+n} = \Big(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}U_j\Big)^{|\beta|+n} \\ \qquad = \displaystyle\sum_{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_n}=|\beta|+n} \binom{|\beta|+n}{\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_n}} a_{i,1}^{\alpha_{i,1}}\dots a_{i,n}^{\alpha_{i,n}} \\ \qquad\qquad \times U_1^{\alpha_{i,1}}\dots U_n^{\alpha_{i,n}} \end{cases} \tag{4.3.4}$$

On a $|\beta| = \beta_1+\cdots+\beta_n$. Donc, pour chaque terme de 4.3.4, il existe un entier k tel que $\alpha_{i,k}\geq\beta_k+1$; on peut par conséquent trouver des éléments $c_{i,j}\in\mathbf{R}[U]$ tels que :

$$V_i^{|\beta|+n} = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}U_j^{\beta_j+1}.$$

On pose :

$$C = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n\big(\mathbf{R}[U]\big),$$

$$D = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{|\beta|+n-1} V_1^k g_1^{|\beta|+n-k-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \displaystyle\sum_{k=0}^{|\beta|+n-1} V_n^k g_n^{|\beta|+n-k-1}\end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ U_n^{\beta_n+1} \\ g_1-V_1 \\ \vdots \\ g_n-V_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ U_n^{\beta_n+1} \\ g_1^{|\beta|+n} \\ \vdots \\ g_n^{|\beta|+n}\end{pmatrix}$$

et en appliquant la loi de transformation :

$$\text{(4.3.5)} \qquad \operatorname{Res}\begin{bmatrix} h \det A \,\mathrm{d}U \wedge \mathrm{d}X \\ U_1^{\beta_1+1}, \dots, U_n^{\beta_n+1}, g_1 - V_1, \dots, g_n - V_n \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{Res}\begin{bmatrix} h \det A \big(\prod_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{|\beta|+n-1} V_i^k g_i^{|\beta|+n-k-1}\big) \,\mathrm{d}U \wedge \mathrm{d}X \\ U_1^{\beta_1+1}, \dots, U_n^{\beta_n+1}, g_1^{|\beta|+n}, \dots, g_n^{|\beta|+n} \end{bmatrix}.$$

Or on a :

$$V_i^k = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} U_j\Big)^k$$
$$= \sum_{\alpha_{i,1}+\dots+\alpha_{i,n}=k} \binom{k}{\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n}} a_{i,1}^{\alpha_{i,1}} \dots a_{i,n}^{\alpha_{i,n}} U_1^{\alpha_{i,1}} \dots U_n^{\alpha_{i,n}}.$$

Par conséquent :

$$\text{(4.3.6)} \quad \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{|\beta|+n-1} V_i^k g_i^{|\beta|+n-k-1}$$
$$= \sum_{\substack{0 \le k_i \le |\beta|+n-1 \\ 1 \le i \le n}} V_1^{k_1} \cdots V_n^{k_n} g_1^{|\beta|+n-k_1-1} \cdots g_n^{|\beta|+n-k_n-1}$$
$$= \sum_{\substack{0 \le k_i \le |\beta|+n-1,\ 1 \le i \le n \\ \alpha_{1,1}+\dots+\alpha_{1,n}=k_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n,1}+\dots+\alpha_{n,n}=k_n}} \prod_{i=1}^{n} \binom{\alpha_{i,1}+\dots+\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n}} \prod_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^{\alpha_{i,j}} \times \prod_{j=1}^{n} U_j^{(\alpha_{1,j}+\dots+\alpha_{n,j})} \prod_{\ell=1}^{n} g_\ell^{|\beta|+n-k_\ell-1}.$$

D'après le lemme 4.2, seul les termes de 4.3.6 tels que

$$\begin{cases} \alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{n,1} = \beta_1, \\ \quad\vdots \\ \alpha_{1,n} + \dots + \alpha_{n,n} = \beta_n, \end{cases}$$

apportent une contribution non nulle à (4.3.5). Par conséquent, on obtient :

$$\text{(4.3.7)} \quad \operatorname{Res}\begin{bmatrix} h \det A \,\mathrm{d}U \wedge \mathrm{d}X \\ U_1^{\beta_1+1}, \dots, U_n^{\beta_n+1}, g_1 - V_1, \dots, g_n - V_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{n,1}=\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{1,n}+\cdots+\alpha_{n,n}=\beta_n}} \prod_{i=1}^{n} \binom{\alpha_{i,1}+\cdots+\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,1},\ldots,\alpha_{i,n}} \operatorname{Res}\begin{bmatrix} h \det A \prod_{(i,j)} a_{i,j}^{\alpha_{i,j}} \prod_{1\le i\le n} g_i^{|\beta|+n-k_i-1}\, \mathrm{d}X \\ g_1^{|\beta|+n},\ldots,g_n^{|\beta|+n} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{n,1}=\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{1,n}+\cdots+\alpha_{n,n}=\beta_n}} \frac{C(\beta,\alpha)}{\beta!} \operatorname{Res}\begin{bmatrix} h \det A \prod_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^{\alpha_{i,j}}\, \mathrm{d}X \\ (g_k^{\alpha_{k,1}+\cdots+\alpha_{k,n}+1})_{1\le k\le n} \end{bmatrix}$$

Ceci prouve en utilisant (4.3.2), (4.3.3) et (4.3.7) le théorème 4.3. ☐

BIBLIOGRAPHIE

[A] AÏZENBERG (L.A), YUZHAKOV (A.P). — *Integral representations and residues in multidimensional complex analysis.* — Amer. Math. Soc., 1983.

[B-Y] BERENSTEIN (C.A), YGER (A). — Properness and Effective Nullstellensatz, Preprint, University of Maryland, 1996.

[B$_1$] BOURBAKI (N). — *Algèbre,* chap. 1 à 3. — Hermann, Paris, 1961.

[B$_2$] BOURBAKI (N). — *Algèbre,* chap. 1 à 4. — Hermann, Paris, 1961.

[Boy] BOYER (J.-Y). — *Résidus algébriques et résidus analytiques dans le cas des intersections complètes.* — Preprint, Université de Bordeaux I, 1996.

[C] CHABAT (B). — *Introduction à l'analyse complexe,* t. **2**, trad. française. — Éditions Mir, Moscou, 1990.

[E] ELKADI (M). — *Résidu de Grothendieck et forme de Chow,* Publ. Math., t. **38**, 1994, p. 381–393.

[G] GRIFFITHS (P), HARRIS (J). — *Principles of Algebraic Geometry.* — J. Willey & Sons, 1978.

[H] HOPKINS (G). — *An algebraic approach to Grothendieck's residue symbol,* Trans. Amer. Math. Soc., t. **275,** 2, 1983, p. 511–537.

[K] M. KYTMANOV (A). — *A transformation formula for Grothendieck residues and some of its applications*, Siberian Math. J., 1989, p. 495–499.

[Ku1] KUNZ (E). — *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry.* — Birkhäuser, Boston, 1985.

[Ku 2] KUNZ (E). — *Kähler Differentials.* — Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 1986.

[Ma] MACLANE (S). — *Homologie.* — Springler-Verlag, 1975.

[M] MATSUMURA (H). — *Commutative algebra* (2^{d} ed.). — Benjamin, Reading Mass, 1980.

[L] LIPMAN (J). — *Residues and traces of differentials forms via Hochschild homologie.* — Amer. Math. Soc., 1987.

[T] TSIKH (A). — *Multidimensionnal residues and applications, Translations of Mathematical Monograph.* — Amer. Math. Soc., 1992.

[Y] YGER (A). — *Courants, résidus et applications.* — Publ. École Doctorale de Mathématiques de Bordeaux, 1994.