BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-MARC DELORT

# Sur le temps d'existence pour l'équation de Klein-Gordon semi-linéaire en dimension 1

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 125, nº 2 (1997), p. 269-311

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_2_269_0>

*Bull. Soc. math. France,*
125, 1997, p. 269–311.

# SUR LE TEMPS D'EXISTENCE POUR L'ÉQUATION DE KLEIN-GORDON SEMI-LINÉAIRE EN DIMENSION 1

PAR

JEAN-MARC DELORT (*)

RÉSUMÉ. — De nombreux travaux ont été consacrés à la minoration du temps d'existence de solutions de l'équation de Klein-Gordon nonlinéaire, à données petites, régulières, *suffisamment décroissantes* à l'infini. Le but de cet article est d'étudier ce problème, en dimension 1 d'espace, lorsque les données sont *faiblement décroissantes* à l'infini – ce qui interdit l'utilisation des techniques classiques dans de telles questions – de taille $\epsilon \ll 1$. On obtient, pour des nonlinéarités compatibles à l'équation, une minoration du temps d'existence (presque) de l'ordre de $\epsilon^{-4}$. La méthode utilisée repose sur l'exploitation de la courbure de la variété caractéristique de l'opérateur au travers d'estimations d'ellipticité 2-microlocale.

ABSTRACT. — Lower bounds for the existence time of solutions to the nonlinear Klein-Gordon equation with small, smooth, Cauchy data are known when these data decay rapidly enough at infinity. The aim of this paper is to study that problem, in one space dimension, for *weakly decaying* Cauchy data, of size $\epsilon$. The main result asserts that if the nonlinearity is a combination of null forms, the existence time is (almost) larger than $\epsilon^{-4}$. The weak decay of the data prevents one from using classical methods employed to treat such kind of problems. Instead, we exploit the curvature of the characteristic variety of the equation, through the use of 2-microlocal ellipticity.

## 0. Introduction

Notons $u$ une fonction sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, muni de coordonnées $(t, x)$ et $u'$ (resp. $u''$) les dérivées d'ordre 1 (resp. 2) de $u$ par rapport à toutes les variables. Considérons l'équation de Klein-Gordon nonlinéaire

$$\square u + u = F(u, u', u'') \tag{0.0.1}$$

(*) Texte reçu le 26 novembre 1996, accepté le 18 mars 1997.
J.-M. DELORT, Laboratoire Analyse Géométrie et Applications, URA CNRS 742, Institut Galilée, Université Paris-Nord, Avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse CEDEX (France).Email : delort@math.iniv-paris13.fr.

Classification AMS : 35 L 70.

dans laquelle $F$ est une fonction régulière, nulle à l'ordre 2 en 0, linéaire en $u''$ et $\Box$ l'opérateur de d'Alembert $\partial_t^2 - \Delta_x$.

Lorsque $d \geq 3$, Klainerman [9] et Shatah [14] ont prouvé l'existence d'une solution régulière définie pour tout temps à l'équation (0.0.1), lorsque les données de Cauchy sont assez régulières, assez décroissantes à l'infini, et assez petites. Hörmander, dans sa monographie [6], a précisé les estimations obtenues par Klainerman, et a démontré que pour des données $C^\infty$ à support compact de taille $\epsilon$, l'équation (0.0.1) admet en dimension 2 (resp. 1) une solution sur un intervalle de temps $[-T_\epsilon, T_\epsilon]$ avec $\liminf_{\epsilon\to 0}(\epsilon \log T_\epsilon) = +\infty$ (resp. $\liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon\sqrt{T_\epsilon} = +\infty$). Il a en outre conjecturé qu'en dimension 2, la solution existe globalement. Ce dernier résultat a d'abord été prouvé pour des nonlinéarités particulières par Georgiev-Popivanov [5], puis, pour toute nonlinéarité vérifiant une « condition nulle convenable » par Kosecki [11]. Dans le cas de nonlinéarités arbitraires, une preuve reposant sur l'utilisation de techniques d'algèbres de Lie a été proposée par Simon et Taflin [15]. Enfin, Ozawa, Tsutaya et Tsutsumi [13] ont donné de ce résultat général une démonstration purement analytique.

Dans le cas de la dimension 1, Hörmander pose également la question du temps d'existence de la solution, en suggérant que celui-ci pourrait être minoré par $Ce^{c/\epsilon^2}$, voire infini pour certaines nonlinéarités. Yordanov [16] a récemment construit un exemple simple montrant que, pour certaines nonlinéarités cubiques, il existe des données $C^\infty$ à support compact donnant lieu à une solution dont le temps d'existence ne peut être supérieur à $\mathrm{e}^{c/\epsilon^2}$. Dans le cas semi-linéaire, la minoration du temps d'existence en $C\mathrm{e}^{c/\epsilon^2}$ conjecturée par Hörmander a été récemment prouvée par Moriyama, Tonegawa et Tsutsumi [12].

Nous nous proposons, dans cet article, de revenir sur cette question, en dimension 1, dans le cas de l'équation de Klein-Gordon *semi-linéaire*, et pour des données de Cauchy *faiblement décroissantes à l'infini* (*i.e.* dont le comportement à l'infini est celui d'une fonction $L^2$). Plus précisément, nous allons démontrer, pour des nonlinéarités vérifiant la propriété de compatibilité isolée par Kosecki [11], et pour de telles données de Cauchy, que la solution existe sur un intervalle de temps (presque) de l'ordre de $\epsilon^{-4}$.

Les estimations classiques utilisées pour l'étude du temps d'existence de la solution d'une équation des ondes ou de Klein-Gordon nonlinéaire reposent sur l'obtention d'inégalités d'énergie pour la fonction considérée, et pour ses dérivées par les « champs de Klainerman » associés à l'équation. Dans le problème qui nous occupe ici, le champ à faire intervenir est la rotation hyperbolique $t\partial_x + x\partial_t$. Or, un tel champ n'est pas utilisable sans hypothèses de décroissance à l'infini des données plus fortes que celles que nous considérons ici. Dans le cadre dans lequel nous nous plaçons, toute amélioration du temps d'existence ne peut donc résulter que de l'utilisation de la seule courbure de la variété caractéristique de l'équation. Pour ces raisons, nous abandonnons les méthodes reposant sur l'utilisation de l'inégalité d'énergie, et nous inspirons des techniques récemment développées par Bourgain [3], pour la résolution de l'équation de Schrödinger périodique, et par Klainerman-Machedon [10], pour l'étude de solutions locales à l'équation des ondes semi-linéaire à données peu régulières (*cf.* également les travaux de Kenig-Ponce-Vega [7], [8] consacrés à l'équation de Korteweg-de-Vries). Les méthodes utilisées par Bourgain et Klainerman-Machedon consistent en effet à rechercher la solution dans des espaces $H^{s,s'}$ de distributions tempérées $u$, dont la transformée de Fourier vérifie

$$(1+\xi^2+\tau^2)^{s/2}(1+\sigma(\tau,\xi)^2)^{s'/2}\hat{u}\in L^2$$

où $\sigma$ est une équation homogène de degré 1 (dans le cas de l'équation des ondes) de la variété caractéristique. En d'autres termes, il s'agit de résoudre l'équation considérée dans des espaces de Sobolev 2-microlocaux, associés à l'involutive donnée par la variété caractéristique, espaces analogues à ceux construits par Bony [2] dans le cas d'une lagrangienne. L'intérêt de tels espaces réside dans le fait qu'ils reflètent les propriétés de courbure de la variété caractéristique. Une subtile méthode d'orthogonalité $L^2$ permet à Bourgain [3], dans le cas de l'équation de Schrödinger périodique, et à Klainerman-Machedon [10], pour l'équation des ondes, d'exploiter ce fait, pour montrer qu'une nonlinéarité quadratique convenable applique un espace $H^{s,s'}$ dans un autre espace de la même forme. De plus, la résolution de l'équation linéaire renvoie ce deuxième espace dans le premier, lorsque les indices $s$ et $s'$ sont convenablement choisis. Cela permet d'obtenir les théorèmes d'existence par un simple point fixe.

Nous utilisons ici le même type de méthode. Plus précisément, nous ramenons par changement d'échelle notre problème à un problème d'existence locale à données peu régulières, utilisant un artifice qui nous a été signalé par G. Lebeau dans le cas de l'équation des ondes nonlinéaire, et nous résolvons ce problème dans des espaces analogues à ceux de Bourgain et Klainerman-Machedon. La différence principale avec les travaux de ces auteurs, réside dans le fait que la courbure de la variété caractéristique de l'équation de Klein-Gordon tend vers 0 lorsque la fréquence tend vers l'infini. En conséquence, les estimations nonlinéaires que nous obtenons dégénèrent pour les grandes fréquences. Néanmoins, les hypothèses de régularité sur les données initiales, ainsi que la structure particulière des nonlinéarités, permettent de compenser cette perte et d'établir l'existence par un théorème de point fixe.

Signalons en conclusion que des estimations de solutions de l'équation de Klein-Gordon linéaire en dimension deux ont été obtenues par Fang-Grillakis [4], par des méthodes voisines de celles de [10].

NOTATION. — Dans l'ensemble de l'article, nous désignerons par $\|\cdot\|$ la norme $L^2$.

## 1. L'équation de Klein-Gordon à données petites

### 1.1. Énoncé du théorème.

Notons $(t,x)$ les coordonnées de $\mathbb{R}^2$. Si $(t,x)\mapsto U(t,x)$ est une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, on notera

$$U(t,x)=\big(u_1(t,x),\dots,u_m(t,x)\big).$$

Il s'agit d'étudier l'équation de Klein-Gordon semi-linéaire

$$\begin{cases} \Box U+U=F(U,\partial_t U,\partial_x U),\\ U_{|t=0}=\epsilon U_0,\\ \partial_t U_{|t=0}=\epsilon U_1, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

où $F$ est un polynôme en ses arguments, $U_0,U_1$ des fonctions données sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, et $\epsilon>0$ un petit paramètre.

On supposera que la nonlinéarité $F$ vérifie une condition nulle de la forme suivante : notons

- $q_1(T,X;T',X')$ la forme bilinéaire symétrique $TT'-XX'$;
- $q_2(T,X;T',X')$ la forme bilinéaire antisymétrique $TX'-T'X$.

Nous ferons alors sur $F$ l'hypothèse de structure suivante

$$\begin{aligned} F(U,\partial_t U,\partial_x U) &= G_0(U)+\sum_{1\le i\le j\le m} G^1_{ij}(U)q_1(\partial_t u_i,\partial_x u_i;\partial_t u_j,\partial_x u_j)\\ &\qquad +\sum_{1\le i<j\le m} G^2_{ij}(U)q_2(\partial_t u_i,\partial_x u_i;\partial_t u_j,\partial_x u_j) \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

où $G_0,G^1_{ij},G^2_{ij}$ sont des polynômes en $U$, $G_0$ étant nul à l'ordre 2 en $U=0$. En d'autres termes, nous supposons donc que $F$ est combinaison linéaire de formes vérifiant les conditions isolées par Kosecki dans [11].

On se propose de prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1.1. — *Soit $N \geq 3$ un entier fixé. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout couple $(U_0, U_1)$ dans la boule unité du produit des espaces de Sobolev $H^N(\mathbb{R}) \times H^{N-1}(\mathbb{R})$, le problème* (1.1.1) *admette, pour tout $\epsilon \in \,]0,1[$, une unique solution*

$$U \in C^0(\,]-T_\epsilon, T_\epsilon[\,, H^N(\mathbb{R})) \cap C^1(\,]-T_\epsilon, T_\epsilon[\,, H^{N-1}(\mathbb{R}))$$

*dont le temps d'existence vérifie $T_\epsilon > c\epsilon^{-4}|\log \epsilon|^{-6}$.*

Remarquons que lorsqu'on considère un problème scalaire avec une nonlinéarité ne dépendant pas des dérivées de la fonction, on dispose d'un meilleur résultat :

THÉORÈME 1.1.2. — *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $C^\infty$, nulle à l'ordre 2 en 0. Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in \,]0, \epsilon_0[$ et pour toutes fonctions $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans la boule unité de $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, le problème*

$$\begin{cases} \Box u + u = f(u), \\ u_{|t=0} = \epsilon u_0, \\ \partial_t u_{|t=0} = \epsilon u_1, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

*admette une unique solution $u \in C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R})) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}))$.*

*Démonstration.* — Comme $H^1(\mathbb{R})$ est une algèbre, l'existence d'une solution locale en temps au problème (1.1.3) est claire. Si l'on pose

$$E(u,t) = \frac{1}{2} \int \left((\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 + u^2\right) \mathrm{d}x - \int g\big(u(t,x)\big) \,\mathrm{d}x \tag{1.1.4}$$

où $g(u)$ vérifie $g' = f$ et $g(0) = 0$, on constate que pour tout $t$ dans l'intervalle d'existence de la solution locale

$$E(u,t) = E(u,0) \quad \text{et} \quad \big|E(u,0)\big| \leq C\epsilon^2$$

avec une constante $C$ indépendante de $u_0, u_1$. Comme il existe $C_1 > 0$ avec $\int |g(u(t,x))| \,\mathrm{d}x \leq C_1 \|u(t,.)\|_{H^1}^3$, on a :

$$\frac{1}{2}\left(\big\|\partial_t u(t,.)\big\|_{L^2}^2 + \big\|u(t,.)\big\|_{H^1}^2\right) - C_1 \big\|u(t,.)\big\|_{H^1}^3 \leq C\epsilon^2. \tag{1.1.5}$$

L'hypothèse $\|\partial_t u(0,.)\|_{L^2}^2 + \|u(0,.)\|_{H^1}^2 \leq \epsilon^2$ entraîne alors, pour $\epsilon$ assez petit, l'existence de $C' > 0$ tel que $\|\partial_t u(t,.)\|_{L^2} + \|u(t,.)\|_{H^1} \leq C'\epsilon$ pour tout $t$ dans le domaine d'existence de la solution locale. L'existence globale en découle immédiatement. $\square$

Bien entendu, la même preuve s'applique dans le cas d'un système, lorsque la nonlinéarité $F(U)$ est indépendante des dérivées, et s'écrit de plus sous la forme $\nabla_U G(U)$ pour un potentiel scalaire $G$.

La preuve du théorème 1.1.1, pour laquelle on ne peut faire appel à aucune quantité conservée, va reposer sur une réduction à un résultat d'existence locale.

### 1.2. Réduction à un théorème d'existence locale.

Notons $h$ un paramètre réel strictement positif. Si $U$ est solution du système (1.1.1), posons

$$U^h(t,x) = U(t/h, x/h), \quad U_j^h(x) = U_j(x/h), \quad j = 0, 1.$$

On a alors :

$$\begin{cases} \square U^h + h^{-2}U^h = h^{-2}F(U^h, h\partial_t U^h, h\partial_x U^h), \\ U^h{}_{|t=0} = \epsilon U_0^h, \\ \partial_t U^h{}_{|t=0} = \epsilon h^{-1} U_1^h. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

DÉFINITION 1.2.1. — *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$. On dit qu'une famille de fonctions $(U^h)_{h\in]0,1/2[}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$ (ou de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est dans l'espace $H_N^s(\mathbb{R})$ si $U^h$ est dans $L^2$ pour tout $h$ fixé, et vérifie*

$$\begin{aligned} &\|(U^h)_h\|_{H_N^s}^2 \\ &\quad = \sup_{h\in]0,1/2[} \Big( \int \big|\widehat{U}^h(\xi)\big|^2 \big(1 + h|\xi|\big)^{2N} \mathrm{d}\xi \, h^{-2s} |\log h|^3 \Big) < +\infty. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Nous désignerons dans toute la suite par :

- $\Delta_0$ le multiplicateur de Fourier $\mathbb{1}_{\{|\xi|<1\}}$ ;
- $\Delta_j$ le multiplicateur de Fourier $\mathbb{1}_{\{2^{j-1}<|\xi|<2^j\}}$ pour $j \in \mathbb{N}^*$.

Alors, $(U^h)_h$ est dans $H_N^s$ si et seulement si $U^h$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ pour tout $h$ fixé, et s'il existe une suite $(c_j(h))_j$ dans la boule unité de $\ell^2(\mathbb{N})$, et une constante $C > 0$ avec, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\|\Delta_j U^h\| \leq C c_j(h) h^s |\log h|^{-\frac{3}{2}} (1 + 2^j h)^{-N}. \tag{1.2.3}$$

La meilleure constante dans (1.2.3) est une norme sur $H_N^s$ équivalente à (1.2.2).

Remarquons que $\Delta_j U_0^h$ vérifie

$$\|\Delta_j U_0^h\| \leq C c_j(h) \|U_0\|_{H^N} h^{1/2} (1 + 2^j h)^{-N}$$

pour une constante universelle $C > 0$ et une suite $(c_j(h))_j$ dans la boule unité de $\ell^2(\mathbb{N})$. Si on lie $\epsilon$ et $h$ par la relation $\epsilon = \alpha h^{1/4}|\log h|^{-3/2}$, on voit donc que $(U^h|_{t=0})_h$ est dans $H_N^{3/4}$, sa norme dans cet espace étant majorée par $C\alpha\|U_0\|_N$ pour une constante universelle $C$.

De même, $(\partial_t U^h|_{t=0})_h$ est dans l'espace $H_{N-1}^{-1/4}$.

Nous allons prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 1.2.2. — *Soit $N$ un entier supérieur ou égal à 3. Il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour toutes familles $(V^h)_{h\in]0,1/2[}$, $(W^h)_{h\in]0,1/2[}$ éléments de $H_N^{3/4}$ et $H_{N-1}^{-1/4}$ respectivement, de normes dans ces espaces majorées par $\delta$, le système*

$$\begin{cases} \Box U^h + h^{-2}U^h = h^{-2}F(U^h, h\partial_t U^h, h\partial_x U^h), \\ U^h|_{t=0} = V^h, \\ \partial_t U^h|_{t=0} = W^h, \end{cases} \tag{1.2.4}$$

*admette une solution* $(U^h)_h \in C^0([-1,1], H_N^{3/4}) \cap C^1([-1,1], H_{N-1}^{-1/4})$.

Le théorème précédent entraîne immédiatement le théorème 1.1.1 : la solution qu'il fournit lorsque

$$V^h = \alpha h^{1/4}|\log h|^{-3/2}U_0^h, \quad W^h = \alpha h^{-3/4}|\log h|^{-3/2}U_1^h,$$

avec $\alpha$ assez petit devant $\delta$, donne par changement d'échelle une solution $U$ au problème (1.1.1), définie sur un intervalle de temps de longueur supérieure ou égale à $h^{-1} \sim c\epsilon^{-4}|\log\epsilon|^{-6}$.

Le théorème 1.2.2 sera obtenu en considérant (1.2.4) comme un problème d'existence locale à données peu régulières, que l'on résoudra par une méthode inspirée de celle utilisée par Bourgain pour étudier l'équation de Schrödinger périodique dans [3], et de celle permettant à Klainerman et Machedon de construire des solutions à données peu régulières pour l'équation des ondes semi-linéaire dans [10].

Introduisons les espaces qui nous seront utiles. Pour $j, k \in \mathbb{N}$, posons :

$$\Phi_{jk}^{\pm}(\tau,\xi) = \mathbb{1}_{\{\pm\tau>0\}}\mathbb{1}_{\{2^{j-1}<|\xi|<2^j\}}\mathbb{1}_{\{2^{k-1}<|\tau\mp\sqrt{h^{-2}+\xi^2}|<2^k\}} \tag{1.2.5}$$

si $j > 0, k > 0$,

$$\Phi_{0k}^{\pm}(\tau,\xi) = \mathbb{1}_{\{\pm\tau>0\}}\mathbb{1}_{\{|\xi|<1\}}\mathbb{1}_{\{2^{k-1}<|\tau\mp\sqrt{h^{-2}+\xi^2}|<2^k\}} \tag{1.2.6}$$

si $k > 0$,

$$\Phi_{j0}^{\pm}(\tau,\xi) = \mathbb{1}_{\{\pm\tau>0\}}\mathbb{1}_{\{2^{j-1}<|\xi|<2^j\}}\mathbb{1}_{\{|\tau\mp\sqrt{h^{-2}+\xi^2}|<1\}} \tag{1.2.7}$$

si $j > 0$ et

(1.2.8) $$\Phi^{\pm}_{00}(\tau,\xi) = \mathbb{1}_{\{\pm\tau>0\}}\mathbb{1}_{\{|\xi|<1\}}\mathbb{1}_{\{|\tau\mp\sqrt{h^{-2}+\xi^2}|<1\}},$$

de telle manière que

$$1 = \sum_{j,k\geq 0} \Phi^{+}_{jk}(\tau,\xi) + \sum_{j,k\geq 0} \Phi^{-}_{jk}(\tau,\xi).$$

Pour $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$, posons :

(1.2.9) $$\Delta^{\pm}_{jk}u = \mathcal{F}^{-1}\big(\Phi^{\pm}_{jk}(\tau,\xi)\hat{u}(\tau,\xi)\big).$$

DÉFINITION 1.2.3. — *Soient $s \in \mathbb{R}$, $s' \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$. On dit qu'une famille $(u^h)_{h\in]0,1/2[}$ de fonctions $L^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{R}^m$) est dans $H^{s,s'}_N(\mathbb{R}^2)$ s'il existe $C > 0$, une suite $(c_{jk}(h))_{jk}$ vérifiant*

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}|c_{jk}(h)|\Big)^2 \leq 1$$

*telles que l'on ait pour tous $j, k$*

(1.2.10) $$\|\Delta^{\pm}_{jk}u^h\| \leq Cc_{jk}(h)h^s|\log h|^{-3/2}2^{-ks'}(1+2^jh+2^kh)^{-N}.$$

*La meilleure constante $C \geq 0$ dans l'estimation précédente définit la norme sur $H^{s,s'}_N$.*

Dans la suite, $s$ sera le plus souvent égal à $\frac{3}{4}$ et pour abréger les notations, on posera alors

(1.2.11) $$\hbar^{3/4} = h^{3/4}|\log h|^{-3/2}$$

et nous omettrons de noter explicitement la dépendance de $u$ en $h$.

Nous utiliserons également la notation suivante : si $j$ et $j'$ sont deux entiers naturels, nous écrirons

$$j \ll j' \text{ si } j \leq j'-2 \quad\text{et}\quad j\sim j' \text{ si } |j-j'|\leq 3.$$

Alors, si une expression $\Delta_{j''}(\Delta_j u\Delta_{j'}v)$ n'est pas identiquement nulle, on a soit $j' \ll j$ et $j \sim j''$, soit $j \ll j'$ et $j' \sim j''$, soit $j\sim j'$ et $j''-5 \leq j$, ces cas correspondant à chacun des termes dans la décomposition de Bony [1] de $uv$ en paraproduits et reste.

La principale étape dans la preuve du théorème 1.2.2 réside en l'obtention de majorations convenables pour le produit de deux éléments de $H^{\frac{3}{4},\frac{1}{2}}_N$.

## 2. Inégalités nonlinéaires

### 2.1. Estimations de produits.

Le but de ce paragraphe est d'obtenir des majorations de la norme $L^2$ de produits de la forme $(\Delta^{\pm}_{jk}u)(\Delta^{\pm}_{j'k'}v)$. Nous allons exploiter la courbure de la variété caractéristique de l'équation de Klein-Gordon pour obtenir des estimations meilleures que celles données par une majoration brutale, en utilisant une méthode inspirée de celle de Bourgain [3]. Toutefois, comme la courbure de cette variété $\tau^2 = \xi^2 + 1$ tend vers 0 lorsque la fréquence $\xi$ tend vers l'infini, le gain va présenter une dégénérescence pour les grandes valeurs de $\xi$.

Si $J = (j, j', j'') \in \mathbb{N}^3$, $K = (k, k', k'') \in \mathbb{N}^3$ et $E = (e, e', e'') \in \{+, -\}^3$, notons :

$$A(J,K,E) = \Big\{(\tau,\xi,\tau',\xi')\,;\ (\tau,\xi) \in \operatorname{Supp}\Phi^{e''}_{j''k''},\quad (\tau',\xi') \in \operatorname{Supp}\Phi^{e'}_{j'k'}, (\tau-\tau',\xi-\xi') \in \operatorname{Supp}\Phi^{e}_{jk}\Big\}. \tag{2.1.1}$$

Soit $b(\tau,\xi;\tau',\xi')$ une fonction localement bornée sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Si $u$ et $v$ sont deux fonctions à spectre compact, définissons $B(u,v)$ par

$$\widehat{B(u,v)} = \int \hat{u}(\tau-\tau',\xi-\xi')\,\hat{v}(\tau',\xi')\,b(\tau,\xi;\tau',\xi')\,\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\xi'$$

et commençons par prouver la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1.1. — *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous indices $J = (j, j', j'')$, $K = (k, k', k'')$ dans $\mathbb{N}^3$, vérifiant $k' \le k \le k''$, et toutes fonctions $u, v$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ on ait :*

$$\begin{aligned}\big\|\Delta^{\pm}_{j''k''}\big(B((\Delta^{+}_{jk}u),(\Delta^{+}_{j'k'}v))\big)\big\| &\le C2^{k'/2}\inf\big(2^{\tilde{\jmath}/2}, h^{-1/4}2^{k/4}(1+2^{\tilde{\jmath}}h)^{3/4}\big)\\ &\qquad \times \|\Delta^{+}_{jk}u\|\cdot\|\Delta^{+}_{j'k'}v\|\cdot\|b\|_{L^\infty(A(J,K,E))}\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

*où $\tilde{\jmath} = \min(j, j', j'')$ et $E = (+,+,\pm)$.*

On notera simplement $A^{\pm}$ l'ensemble $A(J,K,E)$ intervenant dans (2.1.2) dans le cours de la preuve. Remarquons d'abord que l'estimation

$$\begin{aligned}\big\|\Delta^{\pm}_{j''k''}\big(B((\Delta^{+}_{jk}u),(\Delta^{+}_{j'k'}v))\big)\big\| \\ \le C2^{(k'+\tilde{\jmath})/2}\|\Delta^{+}_{jk}u\|\cdot\|\Delta^{+}_{j'k'}v\|\cdot\|b\|_{L^\infty(A^{\pm})}\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

est claire.

En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned}&\Big|\mathcal{F}\big[\Delta^{\pm}_{j''k''}\big(B((\Delta^{+}_{jk}u),(\Delta^{+}_{j'k'}v))\big)\big](\tau,\xi)\Big|\\
&\quad\le\Big(\int\big|\widehat{\Delta^{+}_{jk}u}\,(\tau-\tau',\xi-\xi')\big|^{2}\cdot\big|\widehat{\Delta^{+}_{j'k'}v}\,(\tau',\xi')\big|^{2}\cdot|b|^{2}\,\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\xi'\Big)^{1/2}\\
&\qquad\qquad\times\Big(\int\Phi^{+}_{jk}(\tau-\tau',\xi-\xi')\,\Phi^{+}_{j'k'}(\tau',\xi')\,\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\xi'\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

d'où (2.1.3) lorsque $\tilde{\jmath}=j$ ou $\tilde{\jmath}=j'$.

Lorsque $j''\ll j$ et $j''\ll j'$, il suffit d'estimer le membre de gauche de (2.1.3) par

$$\begin{aligned}&2^{j''/2}\sup_{\xi}\Big\|\int|b|\cdot\big|\widehat{\Delta^{+}_{jk}u}\,(\tau-\tau',\xi-\xi')\big|\cdot\big|\widehat{\Delta^{+}_{j'k'}v}\,(\tau',\xi')\big|\,\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\xi'\Big\|_{L^{2}(\mathrm{d}\tau)}\\
&\quad\le 2^{j''/2}\sup_{\xi}\Big\|\Big(\int\big|\widehat{\Delta^{+}_{jk}u}\,(\tau-\tau',\xi-\xi')\big|^{2}\Phi^{+}_{j'k'}(\tau',\xi')\,\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\xi'\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^{2}(\mathrm{d}\tau)}\\
&\qquad\qquad\times\|\Delta^{+}_{j'k'}v\|\cdot\|b\|_{L^{\infty}(A^{\pm})}\end{aligned}$$

pour obtenir encore la majoration cherchée.

Il nous suffit donc d'établir (2.1.2) lorsqu'on remplace dans le membre de droite la borne inférieure par son second argument. On peut en outre supposer $j''>0$. Considérons la fonction

$$F(\xi,\xi')=\sqrt{h^{-2}+(\xi-\xi')^{2}}+\sqrt{h^{-2}+\xi'^{2}}\tag{2.1.4}$$

définie sur $\mathbb{R}^2$ et établissons le lemme suivant :

LEMME 2.1.2. — *Il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $h\in\,]0,1[$*

$$\Big|\frac{\partial F}{\partial\xi'}(\xi,\xi')\Big|\ge\frac{ch|\xi-\xi'|}{1+h|\xi-\xi'|}\tag{2.1.5}$$

*si $\xi$ et $\xi'$ sont de signe contraire,*

$$\Big|\frac{\partial F}{\partial\xi'}(\xi,\xi')\Big|\ge\frac{ch|\xi|}{1+h|\xi|}\big(1+h\inf(|\xi'|,|\xi-\xi'|)\big)^{-2}\tag{2.1.6}$$

*si $0<\xi'/\xi<1$ et $|\xi'-\frac12\xi|>\frac{1}{100}|\xi|$,*

$$\Big|\frac{\partial F}{\partial\xi'}(\xi,\xi')\Big|\ge\frac{ch|\xi'|}{1+h|\xi'|}\tag{2.1.7}$$

*si $\xi$ et $\xi'$ sont de même signe et $|\xi'|\ge|\xi|$.*

*Dans tous les cas, lorsque* $|\xi' - \frac{1}{2}\xi| > \frac{1}{100}|\xi|$, *on a donc :*

$$\left|\frac{\partial F}{\partial \xi'}(\xi,\xi')\right| \geq \frac{ch\sup(|\xi|,|\xi'|,|\xi-\xi'|)}{1+h\sup(|\xi|,|\xi'|,|\xi-\xi'|)} \times \big(1+h\inf(|\xi|,|\xi'|,|\xi-\xi'|)\big)^{-2}. \tag{2.1.8}$$

*Démonstration.* — On peut se limiter au cas $\xi \neq 0$ et $\xi' \neq 0$. Posons alors $\sigma = 1/h|\xi|$ et $\xi' = \frac{1}{2}\xi - \theta\xi$. La dérivée à étudier s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \xi'}(\xi,\xi') &= -\frac{\xi-\xi'}{\sqrt{h^{-2}+(\xi-\xi')^2}} + \frac{\xi'}{\sqrt{h^{-2}+\xi'^2}} \\ &= -\frac{\xi}{|\xi|}\left[\frac{\frac{1}{2}+\theta}{\big(\sigma^2+(\frac{1}{2}+\theta)^2\big)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{2}-\theta}{\big(\sigma^2+(\frac{1}{2}-\theta)^2\big)^{\frac{1}{2}}}\right].\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Lorsque $\xi$ et $\xi'$ sont de signe contraire, $\theta > \frac{1}{2}$ et

$$\left|\frac{\partial F}{\partial \xi'}(\xi,\xi')\right| \geq \frac{\frac{1}{2}+\theta}{(\sigma^2+(\frac{1}{2}+\theta)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

d'où (2.1.5).

Supposons $\frac{1}{2} > \theta > \frac{1}{100}$. On a alors :

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial F}{\partial \xi'}(\xi,\xi')\right| \\ &\geq \Big(1+\frac{\sigma^2}{(\frac{1}{2}+\theta)^2}\Big)^{-1/2} - \Big(1+\frac{\sigma^2}{(\frac{1}{2}-\theta)^2}\Big)^{-1/2} \\ &= \frac{2\theta\sigma^2}{(\frac{1}{2}-\theta)^2(\frac{1}{2}+\theta)^2}\Big(1+\frac{\sigma^2}{(\frac{1}{2}+\theta)^2}\Big)^{-1/2}\Big(1+\frac{\sigma^2}{(\frac{1}{2}-\theta)^2}\Big)^{-1/2} \\ &\qquad \times \bigg(\Big(1+\frac{\sigma^2}{(\frac{1}{2}+\theta)^2}\Big)^{1/2} + \Big(1+\frac{\sigma^2}{(\frac{1}{2}-\theta)^2}\Big)^{1/2}\bigg)^{-1} \\ &\geq \frac{\theta\sigma^2}{\frac{1}{2}+\theta}\Big(\big(\tfrac{1}{2}+\theta)^2+\sigma^2\Big)^{-1/2}\Big(\big(\tfrac{1}{2}-\theta\big)^2+\sigma^2\Big)^{-1}.\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

On obtient donc

$$\left|\frac{\partial F}{\partial \xi'}(\xi,\xi')\right| \geq \frac{ch|\xi|}{(1+h|\xi'|)^2}\frac{1}{1+h|\xi-\xi'|},$$

ce qui donne (2.1.6) puisque

$$|\xi-\xi'| = |\xi|\cdot\bigl|\tfrac{1}{2}+\theta\bigr| \le |\xi| \quad \text{et} \quad |\xi'| = |\xi|\cdot\bigl|\tfrac{1}{2}-\theta\bigr| \le |\xi-\xi'|.$$

Le cas $-\frac{1}{2} < \theta < -\frac{1}{100}$ se traite de même.

Enfin, si $\theta < -\frac{1}{2}$, on a

$$\Bigl|\frac{\partial F}{\partial \xi'}(\xi,\xi')\Bigr| \ge \frac{\frac{1}{2}-\theta}{(\sigma^2+(\frac{1}{2}-\theta)^2)^{1/2}},$$

d'où (2.1.7). $\square$

Lorsque $\xi'$ est proche de $\frac{1}{2}\xi$, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.1.3. — *Il existe $c > 0$ tel que pour tous $\eta, \eta'$ de même signe vérifiant $|\eta| \le \frac{1}{100}|\xi|$ et $|\eta'| \le \frac{1}{100}|\xi|$ on ait :*

$$\bigl|F(\xi,\tfrac{1}{2}\xi+\eta) - F(\xi,\tfrac{1}{2}\xi+\eta')\bigr| \ge \frac{ch}{(1+h|\xi|)^3}|\eta^2-\eta'^2|. \tag{2.1.11}$$

*Démonstration.* — Posons $\eta = -\theta\xi$, $\eta' = -\theta'\xi$ avec $\theta, \theta'$ de même signe et $|\theta| \le \frac{1}{100}$, $|\theta'| \le \frac{1}{100}$. On peut toujours supposer $\xi \ne 0$ et $0 \le \theta' \le \theta$. On a alors

$$F(\xi,\tfrac{1}{2}\xi+\eta) - F(\xi,\tfrac{1}{2}\xi+\eta') = \int_{\theta'}^{\theta} \frac{\partial}{\partial r}\bigl[F(\xi,\tfrac{1}{2}\xi-r\xi)\bigr]\,\mathrm{d}r,$$

$$F(\xi,\tfrac{1}{2}\xi-r\xi) = |\xi|\Bigl(\bigl(\sigma^2+(\tfrac{1}{2}-r)^2\bigr)^{1/2} + \bigl(\sigma^2+(\tfrac{1}{2}+r)^2\bigr)^{1/2}\Bigr)$$

où $\sigma = 1/h|\xi|$. On a donc, en utilisant (2.1.10)

$$\begin{aligned} &F(\xi,\tfrac{1}{2}\xi+\eta) - F(\xi,\tfrac{1}{2}\xi+\eta') \\ &\qquad = |\xi|\int_{\theta'}^{\theta}\Bigl(\frac{\frac{1}{2}+r}{(\sigma^2+(\frac{1}{2}+r)^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{2}-r}{(\sigma^2+(\frac{1}{2}-r)^2)^{\frac{1}{2}}}\Bigr)\mathrm{d}r \\ &\qquad \ge \frac{c|\xi|\sigma^2}{(1+\sigma^2)^{3/2}}\int_{\theta'}^{\theta} r\,\mathrm{d}r \ge \frac{ch}{(1+h|\xi|)^3}(\eta^2-\eta'^2). \quad \square \end{aligned}$$

Pour prouver la proposition 2.1.1, écrivons

$$\mathcal{F}\bigl[\Delta^{\pm}_{j''k''}\bigl(B((\Delta^{+}_{jk}u),(\Delta^{+}_{j'k'}v))\bigr)\bigr](\tau,\xi) = \widehat{W}_1(\tau,\xi) + \widehat{W}_2(\tau,\xi)$$

avec

$$\begin{aligned} \widehat{W}_1(\tau,\xi) = \int_{|\frac{1}{2}\xi-\xi'|>|\frac{1}{100}\xi|} & b\,\widehat{\Delta^{+}_{jk}u}\,(\tau-\tau',\xi-\xi') \\ & \times\widehat{\Delta^{+}_{j'k'}v}\,(\tau',\xi')\,\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\xi'\,\Phi^{\pm}_{j''k''}(\tau,\xi) \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

et prouvons :

LEMME 2.1.4. — *Il existe une constante universelle $C > 0$ telle que*

$$\|W_1\| \leq C \inf\big(2^{\tilde{\jmath}/2}, 2^{k/4}h^{-1/4}(1+2^{\tilde{\jmath}}h)^{3/4}\big)2^{k'/2} \times \|\Delta^+_{j'k'}v\| \cdot \|\Delta^+_{jk}u\| \cdot \|b\|_{L^\infty(A^\pm)}. \tag{2.1.13}$$

*Démonstration.* — Notons $\chi$ la fonction caractéristique de l'intervalle $]0,1[$, désignons par $\hat{\jmath}$ l'indice $\max(j,j',j'')$ et posons :

$$L = \frac{16}{c}2^k\frac{1+h\,2^{\hat{\jmath}}}{h\,2^{\hat{\jmath}}}(1+h\,2^{\tilde{\jmath}})^2$$

où $c$ est la constante de (2.1.8). Décomposons

$$\widehat{W}_1(\tau,\xi) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}}(\widehat{w}_\ell^- + \widehat{w}_\ell^+)\,\Phi^\pm_{j''k''}(\tau,\xi)$$

avec

$$\widehat{w}_\ell^\pm(\tau,\xi) = \int_{\pm(\xi'-\frac12\xi)>\frac{1}{100}|\xi|} b\,\widehat{\Delta^+_{jk}u}(\tau-\tau',\xi-\xi') \times\widehat{\Delta^+_{j'k'}v}(\tau',\xi')\chi\Big(\frac{\xi'}{L}-\ell\Big)\,\mathrm{d}\xi'\,\mathrm{d}\tau'.$$

Montrons que $\widehat{w}_\ell^+\Phi^\pm_{j''k''}$ (resp. $\widehat{w}_\ell^-\Phi^\pm_{j''k''}$) est orthogonal à $\widehat{w}_{\ell'}^+\Phi^\pm_{j''k''}$ (resp. $\widehat{w}_{\ell'}^-\Phi^\pm_{j''k''}$) si $|\ell-\ell'|\geq 2$. Si $(\tau,\xi)$ est dans l'intersection des supports de $\widehat{w}_\ell^+$ et $\widehat{w}_{\ell'}^+$, il existe $(\tau'_p,\xi'_p)\in\operatorname{Supp}\Phi^+_{j'k'}$ avec $\xi'_p > \frac12\xi + \frac{1}{100}|\xi|$ pour $p=1,2$ et $0<\xi'_1/L-\ell<1$, $0<\xi'_2/L-\ell'<1$, tels que l'on ait $(\tau-\tau'_p,\xi-\xi'_p)\in\operatorname{Supp}\Phi^+_{jk}$ pour $p=1,2$. On a alors

$$\begin{aligned} F(\xi,\xi'_1) - F(\xi,\xi'_2) &= \sqrt{h^{-2}+(\xi-\xi'_1)^2} - (\tau-\tau'_1) + \sqrt{h^{-2}+\xi'^2_1} - \tau'_1 \\ &\quad + (\tau-\tau'_2) - \sqrt{h^{-2}+(\xi-\xi'_2)^2} + \tau'_2 - \sqrt{h^{-2}+\xi'^2_2} \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

d'où, puisque $k'\leq k$, $|F(\xi,\xi'_1)-F(\xi,\xi'_2)|\leq 4\times 2^k$.

D'après (2.1.8), $\partial F/\partial\xi'(\xi,\xi')$ ne s'annule pas lorsque $\xi'$ décrit l'intervalle $[\xi'_1,\xi'_2]$ et par conséquent

$$\big|F(\xi,\xi'_1)-F(\xi,\xi'_2)\big| \geq \frac{c}{2}\frac{h\,2^{\hat{\jmath}}}{1+h\,2^{\hat{\jmath}}}(1+h\,2^{\tilde{\jmath}})^{-2}|\xi'_1-\xi'_2|$$

puisque $|\xi|$ est de l'ordre de $2^{j''}$. Comme $|\ell-\ell'|\geq 2$, on a $|\xi'_1-\xi'_2|\geq L$ et le choix qui a été fait de $L$ entraîne une contradiction.

On démontre de même l'orthogonalité de $\widehat{w}_\ell^- \Phi^\pm_{j''k''}$ et $\widehat{w}_{\ell'}^- \Phi^\pm_{j''k''}$ et on a donc

$$\Big\| \sum_\ell \widehat{w}_\ell^+ \Phi^\pm_{j''k''} \Big\|^2 \leq 5 \sum_\ell \big\| \widehat{w}_\ell^+ \Phi^\pm_{j''k''} \big\|^2 \tag{2.1.15}$$

et l'inégalité analogue pour $\widehat{w}_\ell^-$. Or,

$$\begin{aligned} \|\widehat{w}_\ell^\pm\| &\leq \|\widehat{\Delta^+_{jk} u}\| \cdot \Big\| \widehat{\Delta^+_{j'k'} v}\, \chi\Big(\frac{\xi'}{L} - \ell\Big) \Big\|_{L^1(\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}\xi')} \|b\|_{L^\infty(A^\pm)} \\ &\leq 2^{k'/2} L^{1/2} \|\widehat{\Delta^+_{jk} u}\| \cdot \Big\| \widehat{\Delta^+_{j'k'} v}\, \chi\Big(\frac{\xi'}{L} - \ell\Big) \Big\| \cdot \|b\|_{L^\infty(A^\pm)}. \end{aligned}$$

Reportant dans (2.1.15) et sommant on obtient

$$\Big\| \sum_\ell \widehat{w}_\ell^+ \Phi^\pm_{j''k''} \Big\| \leq C 2^{k'/2} L^{1/2} \|\Delta^+_{jk} u\| \cdot \|\Delta^+_{j'k'} v\| \cdot \|b\|_{L^\infty(A^\pm)}$$

et l'inégalité analogue pour $\widehat{w}_\ell^-$. On a donc

$$\begin{aligned} \|W_1\| \leq C 2^{(k+k')/2} & \frac{(1 + h\, 2^{\hat{\jmath}})^{1/2}}{(h\, 2^{\hat{\jmath}})^{1/2}} (1 + h\, 2^{\tilde{\jmath}}) \\ & \times \|\Delta^+_{jk} u\| \cdot \|\Delta^+_{j'k'} v\| \cdot \|b\|_{L^\infty(A^\pm)} \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

et comme en (2.1.3)

$$\|W_1\| \leq C 2^{(\tilde{\jmath}+k')/2} \|\Delta^+_{jk} u\| \cdot \|\Delta^+_{j'k'} v\| \cdot \|b\|_{L^\infty(A^\pm)}. \tag{2.1.17}$$

Si $2^{\tilde{\jmath}/2} \leq 2^{k/4} h^{-1/4} (1 + 2^{\tilde{\jmath}} h)^{3/4}$, (2.1.17) entraîne (2.1.13).

Dans le cas contraire, on majore $2^{k/2}(1 + h^{-1} 2^{-\hat{\jmath}})^{1/2} (1 + h\, 2^{\tilde{\jmath}})$ dans la formule (2.1.16) par

$$2^{k/4} h^{-1/4} (2^{\tilde{\jmath}} h)^{1/2} \Big(1 + \frac{1}{h\, 2^{\hat{\jmath}}}\Big)^{1/2} (1 + h\, 2^{\tilde{\jmath}})^{1/4} \leq 2^{k/4} h^{-1/4} (1 + 2^{\tilde{\jmath}} h)^{3/4}$$

d'où (2.1.13). $\square$

Estimons maintenent $W_2$ :

LEMME 2.1.5. — *Il existe une constante universelle $C > 0$ telle que :*

$$\|W_2\| \leq C 2^{k/4} h^{-1/4} (1 + 2^j h)^{3/4} 2^{k'/2} \times \|\Delta^+_{jk} u\| \cdot \|\Delta^+_{j'k'} v\| \cdot \|b\|_{L^\infty(A^\pm)} \mathbb{1}_{\{|j-j''|\leq 3, |j'-j''|\leq 3\}}. \tag{2.1.18}$$

*Démonstration.* — Écrivons

$$\begin{aligned}\widehat{W}_2(\tau,\xi) &= \Phi^\pm_{j''k''}(\tau,\xi) \int_{|\eta|<\frac{1}{100}|\xi|} b\widehat{\Delta^+_{jk} u}\big(\tau-\tau', \tfrac{1}{2}\xi - \eta\big) \\ &\qquad \times \widehat{\Delta^+_{j'k'} v}\big(\tau', \tfrac{1}{2}\xi + \eta\big)\, \mathrm{d}\tau'\, \mathrm{d}\eta \\ &= \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \Phi^\pm_{j''k''}(\tau,\xi)\big(\widehat{w}^+_\ell(\tau,\xi) + \widehat{w}^-_\ell(\tau,\xi)\big)\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

avec

$$\widehat{w}^\pm_\ell(\tau,\xi) = \int_{|\eta|<\frac{1}{100}|\xi|} b\widehat{\Delta^+_{jk} u}\big(\tau-\tau', \tfrac{1}{2}\xi-\eta\big) \times \widehat{\Delta^+_{j'k'} v}\big(\tau', \tfrac{1}{2}\xi+\eta\big)\, \mathbb{1}_{\{\sqrt{\ell}L<\pm\eta<\sqrt{\ell+1}L\}}\, \mathrm{d}\tau'\, \mathrm{d}\eta \tag{2.1.20}$$

$L$ désignant la quantité

$$L = \frac{4}{\sqrt{c}}\, 2^{k/2} h^{-1/2} (1 + 2^{j''} h)^{3/2},$$

où $c$ est la constante de (2.1.11).

Montrons que $\widehat{w}^+_\ell \Phi^\pm_{j''k''}$ est orthogonal à $\widehat{w}^+_{\ell'} \Phi^\pm_{j''k''}$ lorsque $|\ell - \ell'| \geq 2$. Si $(\tau, \xi)$ appartient à $\operatorname{Supp} \Phi^\pm_{j''k''} \cap \operatorname{Supp} \widehat{w}^+_\ell \cap \operatorname{Supp} \widehat{w}^-_{\ell'}$, il existe $(\tau'_p, \eta_p)$ avec $(\tau'_p, \frac{1}{2}\xi + \eta_p) \in \operatorname{Supp} \Phi^+_{j'k'}$, $(\tau - \tau'_p, \frac{1}{2}\xi - \eta_p) \in \operatorname{Supp} \Phi^+_{jk}$ pour $p = 1, 2$,

$$\sqrt{\ell}\, L < \eta_1 < \sqrt{\ell+1}\, L, \quad \sqrt{\ell'}\, L < \eta_2 < \sqrt{\ell'+1}\, L.$$

En écrivant la relation (2.1.14) avec $\xi'_1 = \frac{1}{2}\xi + \eta_1$ et $\xi'_2 = \frac{1}{2}\xi + \eta_2$, on obtient :

$$\big|F(\xi, \tfrac{1}{2}\xi + \eta_1) - F(\xi, \tfrac{1}{2}\xi + \eta_2)\big| \leq 4 \cdot 2^k.$$

D'après le lemme 2.1.3, le membre de gauche de cette inégalité se minore en valeur absolue par

$$\frac{ch}{(1+h|\xi|)^3}|\eta_1^2 - \eta_2^2| \geq \frac{ch}{(1+2^{j''}h)^3} L^2.$$

Le choix de $L$ entraîne une contradiction. On a donc :

$$\Big\|\sum_\ell \widehat{w}_\ell^+\Phi^\pm_{j''k''}\Big\|^2 \leq 5\sum_\ell \big\|\widehat{w}_\ell^+\Phi^\pm_{j''k''}\big\|^2. \tag{2.1.21}$$

Si l'on pose $f = \widehat{\Delta^+_{jk}u}$ et $g = \widehat{\Delta^+_{j'k'}v}$, on écrit alors :

$$\begin{aligned}|\widehat{w}_\ell^+(\tau,\xi)| &\leq \int_{|\eta|<\frac{1}{100}|\xi|} |b|\cdot\big|f(\tau-\tau',\tfrac12\xi-\eta)\big| \\ &\qquad\qquad \times \big|g(\tau',\tfrac12\xi+\eta)\big|\,\mathbb{1}_{\{\sqrt{\ell}L<\eta<\sqrt{\ell+1}L\}}\,\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\eta \\ &\leq \Big(\int_{|\eta|<\frac{1}{100}|\xi|} |b|^2\cdot\big|f(\tau-\tau',\tfrac12\xi-\eta)\big|^2\cdot \\ &\qquad\qquad \times \big|g(\tau',\tfrac12\xi+\eta)\big|^2\,\mathbb{1}_{\{\sqrt{\ell}L<\eta<\sqrt{\ell+1}L\}}\,\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\eta\Big)^{1/2} \\ &\qquad\qquad \times\Big(\frac{2^{k'}L}{\sqrt{\ell+1}}\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Majorant le dernier facteur par $2^{k'/2}L^{1/2}$, on obtient d'après (2.1.21) :

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_\ell \widehat{w}_\ell^+\Phi^\pm_{j''k''}\Big\|^2 &\leq C\,2^{k'}L\int\big|f(\tau-\tau',\tfrac12\xi-\eta)\big|^2 \\ &\qquad \times\big|g(\tau',\tfrac12\xi+\eta)\big|^2\,\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\|b\|^2_{L^\infty(A^\pm)}.\end{aligned} \tag{2.1.22}$$

L'estimation du membre de gauche de (2.1.22) par le membre de droite de (2.1.18) au carré en résulte, compte tenu de la valeur de $L$, et du fait que $|j-j''|\leq 3$, $|j'-j''|\leq 3$ d'après l'expression même (2.1.19). On traite de même la contribution des termes en $\widehat{w}_\ell^-$. Le lemme est démontré. $\square$

La proposition 2.1.1 résulte des lemmes 2.1.4 et 2.1.5. Nous allons établir un second résultat du même type :

PROPOSITION 2.1.6. — *Il existe une constante $C>0$ telle que pour tous indices $J=(j,j',j'')$, $K=(k,k',k'')$ dans $\mathbb{N}^3$, vérifiant $k'\leq k\leq k''$, et toutes fonctions $u,v$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ on ait, avec $E=(+,-,\pm)$,*

$$\begin{aligned}&\big\|\Delta^\pm_{j''k''}\big(B((\Delta^+_{jk}u),(\Delta^-_{j'k'}v))\big)\big\| \\ &\qquad\leq C\,2^{k'/2}\inf\big(2^{\bar{\jmath}/2},h^{-1/4}2^{k/4}(1+h\inf(2^j,2^{j'}))^{3/4}\big) \\ &\qquad\qquad\times\|\Delta^+_{jk}u\|\cdot\|\Delta^-_{j'k'}v\|\cdot\|b\|_{L^\infty(A(J,K,E))}.\end{aligned} \tag{2.1.23}$$

On notera que, dans l'estimation précédente, le facteur de perte dû à l'annulation de la courbure de la variété caractéristique lorsque $\xi$ tend vers l'infini, $(1 + h\inf(2^j, 2^{j'}))^{3/4}$, est plus grand que dans l'estimation (2.1.2) (pour $j'' \ll j$ et $j'' \ll j'$). C'est l'hypothèse de structure sur les non-linéarités que nous allons considérer qui permettra de compenser ce comportement.

Dans toute la preuve de la proposition, nous noterons $A^{\pm} = A(J, K, E)$ pour le choix d'indices $E$ de l'énoncé. Nous utiliserons :

LEMME 2.1.7. — *Soit $G(\xi, \xi')$ la fonction $\sqrt{h^{-2} + (\xi - \xi')^2} - \sqrt{h^{-2} + \xi'^2}$. Il existe $C > 0$ telle que pour tout $h \in ]0, 1[$, on ait :*

$$\left|\frac{\partial G}{\partial \xi'}(\xi, \xi')\right| \geq \frac{ch|\xi|}{1 + h|\xi| + h|\xi'|}(1 + h|\xi'|)^{-2} \tag{2.1.24}$$

*si $\xi$ et $\xi'$ sont de signe contraire,*

$$\left|\frac{\partial G}{\partial \xi'}(\xi, \xi')\right| \geq \frac{ch|\xi|}{1 + h|\xi|} \tag{2.1.25}$$

*si $\xi$ et $\xi'$ sont de même signe et $|\xi'| < |\xi|$,*

$$\left|\frac{\partial G}{\partial \xi'}(\xi, \xi')\right| \geq \frac{ch|\xi|}{1 + h|\xi| + h|\xi - \xi'|}(1 + h|\xi - \xi'|)^{-2} \tag{2.1.26}$$

*si $\xi$ et $\xi'$ sont de même signe et $|\xi'| \geq |\xi|$. On a donc dans tous les cas*

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial G}{\partial \xi'}(\xi, \xi')\right| \geq{}& \frac{ch|\xi|}{1 + h\sup(|\xi|, |\xi'|, |\xi - \xi'|)} \\ &\times \big(1 + h\inf(|\xi'|, |\xi - \xi'|)\big)^{-2}.\end{aligned} \tag{2.1.27}$$

*Démonstration.* — On a

$$\frac{\partial G}{\partial \xi'} = -\frac{\xi - \xi'}{\sqrt{h^{-2} + (\xi - \xi')^2}} - \frac{\xi'}{\sqrt{h^{-2} + \xi'^2}}.$$

Il est clair que le troisième cas (2.1.26) se déduit du premier en remplaçant $\xi'$ par $\xi - \xi'$ et que l'on peut se réduire au cas $\xi \neq 0$, $\xi' \neq 0$.

Supposons d'abord $\xi'/\xi < 0$ et $|\xi'| \leq |\xi|$. Posant $u = \xi'/\xi \in [-1, 0[$ et $\sigma = 1/h|\xi|$, on obtient puisque $u < 0$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi'} = -\frac{\xi}{|\xi|}\left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{(1-u)^2}\right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{\sigma^2}{u^2}\right)^{-1/2}\right] \tag{2.1.28}$$

d'où
$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial G}{\partial\xi'}\Big| &\ge \frac{\sigma^2}{2}\frac{1-2u}{u^2(1-u)^2}\Big(1+\frac{\sigma^2}{(1-u)^2}\Big)^{-1/2}\Big(1+\frac{\sigma^2}{u^2}\Big)^{-1}\\ &\ge \frac{1}{8}\,\frac{\sigma^2}{\sigma^2+u^2}\,\frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}} \ge \frac{c}{(1+h|\xi'|)^2}\,\frac{h|\xi|}{1+h|\xi|}\end{aligned}$$
d'où (2.1.24) lorsque $|\xi'|\le|\xi|$. Si $|\xi'|\ge|\xi|$, on pose $u=\xi/\xi'\in[-1,0[$ et on écrit
$$\frac{\partial G}{\partial\xi'} = -\frac{\xi'}{|\xi'|}\Big[\frac{u-1}{\sqrt{\sigma^2+(1-u)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}}\Big]$$
où $\sigma$ désigne $\sigma=1/h|\xi'|$. On a donc
$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial G}{\partial\xi'}\Big| &\ge \Big(1+\frac{\sigma^2}{(1-u)^2}\Big)^{-1/2} - (1+\sigma^2)^{-1/2}\\ &\ge \frac{\sigma^2}{2}\,\frac{u^2-2u}{(1-u)^2}\,\frac{1}{(1+\sigma^2)^{3/2}}\\ &\ge c|u|\frac{\sigma^2}{(1+\sigma^2)^{3/2}} \ge \frac{ch|\xi|}{(1+h|\xi'|)^3}\end{aligned}$$
d'où (2.1.24). L'inégalité (2.1.25) résulte immédiatement de l'expression de $\partial G/\partial\xi'$. $\square$

LEMME 2.1.8. — *Sous les hypothèses de la proposition* 2.1.6, *pour* $j''\ge 1$,
$$\begin{aligned}\big\|\Delta^{\pm}_{j''k''}\big(B((\Delta^{+}_{jk}u),(\Delta^{-}_{j'k'}v))\big)\big\| &\le C\,2^{(k+k')/2}\Big(\frac{1+h\,2^{\hat{\jmath}}}{h\,2^{j''}}\Big)^{1/2}\big(1+h\inf(2^j,2^{j'})\big)\\ &\quad\times\|\Delta^{+}_{jk}u\|\cdot\|\Delta^{-}_{j'k'}v\|\cdot\|b\|_{L^\infty(A^\pm)}.\end{aligned}\tag{2.1.29}$$

*Démonstration.* — La preuve est analogue à celle du lemme 2.1.4. La transformée de Fourier de la quantité à estimer s'écrit
$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\Phi^{\pm}_{j''k''}(\tau,\xi)\widehat{w}_\ell(\tau,\xi)$$
avec
$$\widehat{w}_\ell(\tau,\xi) = \int \widehat{b\Delta^{+}_{jk}u}\,(\tau-\tau',\xi-\xi')\,\widehat{\Delta^{-}_{j'k'}v}\,(\tau',\xi')\,\chi\Big(\frac{\xi'}{L}-\ell\Big)\,\mathrm{d}\xi'\,\mathrm{d}\tau'$$
où $\chi=\mathbb{1}_{]0,1[}$ et $L=C((1+h\,2^{\hat{\jmath}})/h\,2^{j''})(1+h\inf(2^j,2^{j'}))^2 2^k$, $C$ désignant une constante assez grande devant l'inverse de celle intervenant dans la formule (2.1.27). Si $\ell$ et $\ell'$ vérifient $|\ell-\ell'|\ge 2$ et si $(\tau,\xi)$ est dans

$\operatorname{Supp}\Phi^{\pm}_{j''k''} \cap \operatorname{Supp}\widehat{w}_{\ell} \cap \operatorname{Supp}\widehat{w}_{\ell'}$, il existe $(\tau'_p, \xi'_p) \in \operatorname{Supp}\Phi^{-}_{j'k'}$ pour $p = 1, 2$, avec $(\tau-\tau'_p, \xi-\xi'_p) \in \operatorname{Supp}\Phi^{+}_{jk}$ pour $p = 1, 2$ et $\ell L \leq \xi'_1 \leq (\ell+1)L$, $\ell' L \leq \xi'_2 \leq (\ell'+1)L$. Écrivons alors

$$\begin{aligned}(2.1.30)\quad & G(\xi,\xi'_1) - G(\xi,\xi'_2) \\ &= \sqrt{h^{-2} + (\xi-\xi'_1)^2} - (\tau-\tau'_1) - \Big(\sqrt{h^{-2}+\xi'^2_1} + \tau'_1\Big) \\ &\quad - \Big(\sqrt{h^{-2}+(\xi-\xi'_2)^2} - (\tau-\tau'_2)\Big) + \sqrt{h^{-2}+\xi'^2_2} + \tau'_2.\end{aligned}$$

On a alors $|G(\xi,\xi'_1) - G(\xi,\xi'_2)| \leq 4\cdot 2^k$ et d'après l'inégalité (2.1.27),

$$\big|G(\xi,\xi'_1) - G(\xi,\xi'_2)\big| \geq c\frac{h\,2^{j''}}{1+h\,2^{j}}\big(1 + h\inf(2^j, 2^{j'})\big)^{-2} L.$$

On en déduit que $\Phi^{\pm}_{j''k''}\widehat{w}_{\ell}$ et $\Phi^{\pm}_{j''k''}\widehat{w}_{\ell'}$ sont orthogonaux. L'inégalité (2.1.29) en résulte comme dans la preuve du lemme 2.1.4. □

*Démonstration de la proposition 2.1.6.* Si le membre de gauche de (2.1.23) est non nul, on a soit $j \ll j' \sim j''$, soit $j' \ll j \sim j''$, soit $j'' - 5 \leq j \sim j'$. Dans le premier cas, (2.1.29) entraîne que le membre de gauche de (2.1.23) se majore par

$$\begin{aligned}(2.1.31)\quad & C\,2^{k'/2}\inf\Big[2^{j/2}, 2^{k/2}\Big(1+\frac{1}{h\,2^{j''}}\Big)^{1/2}(1+h\,2^j)\Big] \\ &\qquad\qquad \|\Delta^{+}_{jk}u\|\cdot\|\Delta^{-}_{j'k'}v\|\cdot\|b\|_{L^\infty(A^\pm)} \\ &\leq C' 2^{k'/2}\inf\Big[2^{j/2}, 2^{k/2}\frac{(1+h\,2^j)^{3/2}}{(h\,2^j)^{1/2}}\Big] \\ &\qquad\qquad \|\Delta^{+}_{jk}u\|\cdot\|\Delta^{-}_{j'k'}v\|\cdot\|b\|_{L^\infty(A^\pm)}.\end{aligned}$$

On en déduit l'estimation cherchée en distinguant les cas

$$2^{j/2} \leq 2^{k/4}h^{-1/4}(1+2^j h)^{3/4} \quad\text{et}\quad 2^{j/2} \geq 2^{k/4}h^{-1/4}(1+2^j h)^{3/4}.$$

Le cas $j' \ll j \sim j''$ se traite de même.

Si $j'' - 5 \leq j \sim j'$, la majoration (2.1.29) donne

$$C\,2^{k'/2}\inf\Big[2^{j''/2}, 2^{k/2}\frac{(1+h\,2^j)^{3/2}}{(h\,2^{j''})^{1/2}}\Big]\|\Delta^{+}_{jk}u\|\cdot\|\Delta^{-}_{j'k'}v\|\cdot\|b\|_{L^\infty(A^\pm)}.$$

La conclusion s'obtient en distinguant encore les cas

$$2^{j''/2} \leq 2^{k/4}h^{-1/4}(1+2^j h)^{3/4} \quad \text{et} \quad 2^{j''/2} \geq 2^{k/4}h^{-1/4}(1+2^j h)^{3/4}.$$

Nous allons déduire des propositions 2.1.1 et 2.1.6 une inégalité valable pour tout triplet $(k,k',k'')$.

Si $(j,j',j''),(k,k',k'')$ sont des éléments de $\mathbb{N}^3$ et si $(e,e',e'')$ est dans $\{+,-\}^3$, nous noterons $(j_1,j_2,j_3),(k_1,k_2,k_3),(e_1,e_2,e_3)$ les images de chacun de ces triplets par une même permutation du groupe symétrique telle que $k_3 = \max(k,k',k'')$. Nous nous proposons de prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1.9. — *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous triplets $J = (j,j',j'')$, $K = (k,k',k'')$, $E = (e,e',e'')$ comme précédemment, et toutes fonctions $u,v \in L^2(\mathbb{R}^2)$ on ait :*

(i) *Si $k_3 = k''$ et $e_1 \neq e_2$ ou bien $k_3 \neq k''$ et $e_1 = e_2$ on a :*

$$\begin{aligned}(2.1.32)\quad & \big\|\Delta^{e''}_{j''k''}\big(B((\Delta^{e}_{jk}u),(\Delta^{e'}_{j'k'}v))\big)\big\| \\ &\leq C\inf\big(2^{\tilde{\jmath}/2}, h^{-1/4}2^{\sup(k_1,k_2)/4}(1+h\inf(2^{j_1},2^{j_2}))^{3/4}\big) \\ &\qquad \times 2^{\inf(k_1,k_2)/2}\|\Delta^{e'}_{j'k'}v\|\cdot\|\Delta^{e}_{jk}u\|\cdot\|b\|_{L^\infty(A(J,K,E))}.\end{aligned}$$

(ii) *Dans les autres cas, on a :*

$$\begin{aligned}(2.1.33)\quad & \big\|\Delta^{e''}_{j''k''}\big(B((\Delta^{e}_{jk}u),(\Delta^{e'}_{j'k'}v))\big)\big\| \\ &\leq C\inf\big(2^{\tilde{\jmath}/2}, h^{-1/4}2^{\sup(k_1,k_2)/4}(1+h\,2^{\tilde{\jmath}})^{3/4}\big) \\ &\qquad \times 2^{\inf(k_1,k_2)/2}\|\Delta^{e'}_{j'k'}v\|\cdot\|\Delta^{e}_{jk}u\|\cdot\|b\|_{L^\infty(A(J,K,E))}.\end{aligned}$$

*Démonstration.* — Notons $\langle\ ,\ \rangle$ le crochet de dualité sur $L^2$ donné par

$$\langle f,g\rangle = \int f(t,x)\,\overline{g(t,x)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \hat{f}(\tau,\xi)\,\overline{\hat{g}(\tau,\xi)}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi.$$

Comme $\overline{\Delta^{\pm}_{jk}u} = \Delta^{\mp}_{jk}\bar{u}$, il résulte des propositions 2.1.1 et 2.1.6 respectivement que lorsque $k' \leq k \leq k''$

$$\begin{aligned}(2.1.34)\quad & \big\|\Delta^{e''}_{j''k''}\big(B((\Delta^{\pm}_{jk}u),(\Delta^{\pm}_{j'k'}v))\big)\big\| \\ &\leq C\,2^{k'/2}\inf\big(2^{\tilde{\jmath}/2}, h^{-1/4}2^{k/4}(1+2^{\tilde{\jmath}}h)^{3/4}\big) \\ &\qquad \|\Delta^{\pm}_{jk}u\|\cdot\|\Delta^{\pm}_{j'k'}v\|\cdot\|b\|_{L^\infty(A(J,K,E))},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2.1.35)\quad & \big\|\Delta^{e''}_{j''k''}\big(B((\Delta^{\pm}_{jk}u),(\Delta^{\mp}_{j'k'}v))\big)\big\| \\ &\leq C\,2^{k'/2}\inf\big(2^{\tilde{\jmath}/2}, h^{-1/4}2^{k/4}(1+h\inf(2^{j},2^{j'}))^{3/4}\big) \\ &\qquad \times\|\Delta^{\pm}_{jk}u\|\cdot\|\Delta^{\mp}_{j'k'}v\|\cdot\|b\|_{L^\infty(A(J,K,E))},\end{aligned}$$

où $e''$ vaut indifféremment $+$ ou $-$. Les assertions (i) et (ii) dans le cas $k_3 = k''$ en résultent.

Supposons $k_3 = k$, $k' \le k''$ et écrivons, en désignant par $\widetilde{B}$ l'opérateur associé à une fonction $\tilde{b}$, de la même forme que $b$,

$$\begin{aligned}
&\big\|\Delta^{e''}_{j''k''}\big(B((\Delta^{e}_{jk}u),(\Delta^{e'}_{j'k'}v))\big)\big\| \\
&\quad = \sup_{\|\varphi\|\le 1} \big|\big\langle \Delta^{e''}_{j''k''}(B((\Delta^{e}_{jk}u),(\Delta^{e'}_{j'k'}v))),\varphi\big\rangle\big| \\
&\quad \le \sup_{\|\varphi\|\le 1} \big|\big\langle \Delta^{e}_{jk}u, \Delta^{e}_{jk}(\widetilde{B}((\Delta^{-e'}_{j'k'}\bar{v}),(\Delta^{e''}_{j''k''}\varphi)))\big\rangle\big| \\
&\quad \le \sup_{\|\varphi\|\le 1} \|\Delta^{e}_{jk}u\|\cdot\big\|\Delta^{e}_{jk}\big(\widetilde{B}((\Delta^{-e'}_{j'k'}\bar{v}),(\Delta^{e''}_{j''k''}\varphi))\big)\big\|.
\end{aligned}$$

Si $e' = e''$, on applique alors l'inégalité (2.1.35) (dans laquelle on échange $j$ et $j''$, $k$ et $k''$) pour obtenir (2.1.32), et si $e' \ne e''$ on applique (2.1.34) (dans laquelle on échange $j$ et $j''$, $k$ et $k''$) pour obtenir (2.1.33).

On traite de même le cas $k_3 = k, k'' \le k'$. Le cas $k_3 = k'$ se traite de manière similaire. Le théorème est donc démontré. $\square$

### 2.3. Estimations de nonlinéarités compatibles.

Définissons les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ :

$$\text{(2.2.1)}\qquad \begin{cases} b_0(\tau,\xi,\tau',\xi') = h^{-2},\\ b_1(\tau,\xi,\tau',\xi') = (\tau-\tau')\tau' - (\xi-\xi')\xi',\\ b_2(\tau,\xi,\tau',\xi') = (\tau-\tau')\xi' - (\xi-\xi')\tau' = \tau\xi' - \xi\tau'.\end{cases}$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que sur l'ensemble $A(J,K,E)$ défini en (2.1.1), on ait, pour $p = 0,1,2$ :

$$\text{(2.2.2)}\qquad \big|b_p(\tau,\xi,\tau',\xi')\big| \le \frac{C}{h^2}(1+2^{j}h+2^{k}h)(1+2^{j'}h+2^{k'}h).$$

La forme particulière des fonctions $b_0, b_1, b_2$ permet d'améliorer cette estimation. Nous utiliserons les notations définies avant l'énoncé du théorème 2.1.9 et, lorsque $k_3 \ne k''$, nous noterons $k_0$ l'unique élément de $\{k_1,k_2\} - \{k''\}$ et $j_0$ l'indice correspondant.

Proposition 2.2.1. — *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous triplets d'indices $J, K, E$ tels que $k_3 \ne k''$ et $e_1 = e_2$, tout $(\tau,\xi,\tau',\xi') \in A(J,K,E)$, tout $p = 0,1,2$ on ait :*

$$\begin{aligned}
\text{(2.2.3)}\quad &\big|b_p(\tau,\xi,\tau',\xi')\big| \\
&\le \frac{C}{h^2}\Big[2^{k_1}h(1+2^{j_2}h+2^{k_2}h) + 2^{k_2}h(1+2^{j_1}h+2^{k_1}h) \\
&\qquad + 2^{k_0}h(1+2^{j_0}h+2^{k_0}h) + (1+2^{\tilde{j}}h)(1+2^{j_3}h)\Big].
\end{aligned}$$

*Démonstration.* — Considérons d'abord le cas $k_3 = k$. On a alors

$$\{e_1, e_2\} = \{e', e''\}, \quad k_0 = k', \quad j_0 = j'.$$

Pour estimer $b_1$, écrivons puisque $e' = e'' = \pm$

$$\begin{aligned}(2.2.4)\ & b_1(\tau, \xi, \tau', \xi') \\ & = \tau\tau' - \xi\xi' - (\tau'^2 - \xi'^2) \\ & = \big(\tau \mp \sqrt{h^{-2} + \xi^2}\big)\,\tau' \pm \sqrt{h^{-2} + \xi^2}\,\big(\tau' \mp \sqrt{h^{-2} + \xi'^2}\big) \\ & \qquad - \big(\tau'^2 - \xi'^2 - h^{-2}\big) + \big(\sqrt{h^{-2} + \xi^2}\sqrt{h^{-2} + \xi'^2} - \xi\xi' - h^{-2}\big).\end{aligned}$$

La somme des trois premiers termes se majore par la somme des trois premiers termes du membre de droite de (2.2.3). Le dernier terme de (2.2.4) s'estime par $h^{-2} + 2h^{-2}(1 + 2^{j''}h)(1 + 2^{j'}h)$, donc par

$$C(1 + 2^{\tilde{j}}h)(1 + 2^{j}h)/h^2$$

lorsque $j' \ll j \sim j''$ ou $j'' - 5 \leq j \sim j'$.

Il faut donc seulement examiner le cas $j \ll j' \sim j''$. Alors $\xi$ et $\xi'$ sont de même signe et la valeur absolue du dernier terme de (2.2.4) vaut

$$\begin{aligned}& h^{-2}(\xi - \xi')^2\big(\sqrt{h^{-2} + \xi^2}\sqrt{h^{-2} + \xi'^2} + \xi\xi' + h^{-2}\big)^{-1} \\ & \qquad \leq C\,2^{2j}(1 + h^2 2^{2j''})^{-1/2}(1 + h^2 2^{2j'})^{-1/2} \leq \frac{C}{h^2}\end{aligned}$$

puisque $j \ll j' \sim j''$. Pour estimer $b_2$, écrivons

$$\begin{aligned}(2.2.5)\quad b_2(\tau, \xi, \tau', \xi') &= \big(\tau \mp \sqrt{h^{-2} + \xi^2}\,\big)\xi' - \xi\big(\tau' \mp \sqrt{h^{-2} + \xi'^2}\,\big) \\ & \qquad \pm \xi'\sqrt{h^{-2} + \xi^2} \mp \xi\sqrt{h^{-2} + \xi'^2}.\end{aligned}$$

La somme des deux premiers termes se majore par $2^{k''+j'} + 2^{k'+j''}$ et la somme des deux derniers par $2h^{-2}(1+2^{j'}h)(1+2^{j''}h)$. Cela donne (2.2.3) lorsque $j' \ll j \sim j''$ ou $j'' - 5 \leq j \sim j'$.

Dans le cas $j \ll j' \sim j''$, $\xi$ et $\xi'$ sont de même signe, et la somme des deux derniers termes de (2.2.5) s'écrit

$$\pm\big(\big(\sqrt{h^{-2} + \xi^2} - |\xi|\big)\xi' - \xi\big(\sqrt{h^{-2} + \xi'^2} - |\xi'|\big)\big),$$

quantité qui se majore en valeur absolue, puisque $j' \sim j''$, par

$$h^{-2}\frac{|\xi'|}{\sqrt{h^{-2} + \xi^2}} + h^{-2}\frac{|\xi|}{\sqrt{h^{-2} + \xi'^2}} \leq \frac{C}{h^2}.$$

Les majorations de $b_1, b_2$ dans le cas $k_3 = k'$ s'obtiennent de même en remplaçant dans les arguments précédents $\xi'$ par $\xi - \xi'$, $\tau'$ par $\tau - \tau'$. $\square$

REMARQUE. — Les nonlinéarités considérées en (1.1.2) sont les seules pour lesquelles l'inégalité (2.2.3) peut avoir lieu. Considérons en effet une expression de la forme

$$A(\partial_t u)(\partial_t v) + B(\partial_x u)(\partial_x v) + D(\partial_t u)(\partial_x v) + D'(\partial_x u)(\partial_t v).$$

La forme quadratique associée s'écrit alors

$$A(\tau - \tau')\tau' + B(\xi - \xi')\xi' + D(\tau - \tau')\xi' + D'(\xi - \xi')\tau'. \tag{2.2.6}$$

Prenons $\tau = \sqrt{h^{-2} + \xi^2}$ et $\tau' = \sqrt{h^{-2} + \xi'^2}$. Avec les notations de l'énoncé de la proposition 2.2.1, on aura donc $k' = k'' = 0, k_3 = k$. Nous supposerons de plus $j \ll j' \sim j''$, *i.e.* $|\xi - \xi'|$ petit devant $|\xi|$ et $|\xi'|$. On doit alors, pour que (2.2.3) soit satisfait, majorer la valeur absolue de (2.2.6) par

$$\frac{C}{h}\big(1 + h|\xi| + h|\xi'|\big) + \frac{C}{h^2}\big(1 + h|\xi - \xi'|\big)^2. \tag{2.2.7}$$

Posons $\lambda = \frac{1}{2}(\xi - \xi')$, $\gamma = \frac{1}{2}(\xi + \xi')$ et supposons que, $h$ étant fixé, $\lambda$ tend vers $\pm\infty$, $\gamma$ vers $\pm\infty$ et $\lambda^2/\gamma$ vers 0. On a alors

$$\xi' \sim \gamma, \quad \tau' \sim |\gamma|, \quad \xi - \xi' \sim 2\lambda, \quad \tau - \tau' \sim 2\lambda\gamma/|\gamma|,$$

d'où un équivalent de (2.2.6) avec $2\lambda\gamma(A + B) + 2\lambda|\gamma|(D + D')$. La valeur absolue de cette quantité doit être majorée pour $|\lambda|, |\gamma|$ assez grands par (2.2.7), qui est lui-même équivalent à $C(|\gamma| + 4\lambda^2)$. Cela n'est possible que si $A + B = 0$ et $D + D' = 0$.

On constate de même que des nonlinéarités en $(\partial_t u)v$ ou en $(\partial_x u)v$ sont exclues.

Notons $B(u, v)$ l'une quelconque des expressions suivantes, lorsque $u$ et $v$ sont des fonctions sur $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} B(u,v) = h^{-2}uv, \\ B(u,v) = (\partial_t u)(\partial_t v) - (\partial_x u)(\partial_x v), \\ B(u,v) = (\partial_t u)(\partial_x v) - (\partial_x u)(\partial_t v). \end{cases} \tag{2.2.8}$$

THÉORÈME 2.2.2. — *Soient $(u^h)_{h\in]0,1/2[}$ et $(v^h)_{h\in]0,1/2[}$ deux éléments de $H_N^{\frac{3}{4},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$ avec $N \geq 3$. Alors $(B(u^h, v^h))_h$ est dans $H_{N-1}^{-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}}$ et la forme bilinéaire $B$ est continue de $H_N^{\frac{3}{4},\frac{1}{2}} \times H_N^{\frac{3}{4},\frac{1}{2}}$ à valeurs dans $H_{N-1}^{-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}}$.*

Établissons d'abord deux lemmes utiles dans la preuve du théorème.

LEMME 2.2.3. — *Il existe une constante $c>0$ telle que pour tout triplet d'indices $J,K,E$ tels que $\Delta^{e''}_{j''k''}((\Delta^{e'}_{j'k'}v)(\Delta^{e}_{jk}u))$ ne soit pas identiquement nul, on ait*

$$2^{\sup(k,k',k'')} \geq \frac{c}{h}\big(1+h\inf(2^{j},2^{j'},2^{j''})\big)^{-1}. \tag{2.2.9}$$

*En outre, lorsque $k_3 \geq k_1+3$ et $k_3 \geq k_2+3$, on a, pour une constante universelle $C$*

$$2^{k_3} \leq \frac{C}{h}\big(1+h\sup(2^{j},2^{j'})\big). \tag{2.2.10}$$

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que si $e=e'$, l'expression considérée est identiquement nulle sauf si $e''=e=e'$ (pour des raisons de support de la transformée de Fourier). Par symétrie, les seuls cas à envisager sont donc ceux où

$$(e,e',e'')=(+,+,+) \quad \text{ou} \quad (e,e',e'')=(+,-,+).$$

Si $(\tau,\xi)$ est dans le support de la transformée de Fourier de

$$\Delta^{e''}_{j''k''}\big((\Delta^{e'}_{j'k'}v)(\Delta^{e}_{jk}u)\big),$$

il existe $(\tau',\xi')$ avec $(\tau,\xi,\tau',\xi')\in A(J,K,E)$ et on écrit alors, lorsque $(e,e',e'')=(+,\pm,+)$

$$\begin{aligned}\tau-\sqrt{h^{-2}+\xi^2}&\\ -\big(\tau-\tau'-\sqrt{h^{-2}+(\xi-\xi')^2}\big)&-\big(\tau'\mp\sqrt{h^{-2}+\xi'^2}\big)\\ &=\sqrt{h^{-2}+(\xi-\xi')^2}\pm\sqrt{h^{-2}+\xi'^2}-\sqrt{h^{-2}+\xi^2}.\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe $C>0$ tel que pour tous réels $\eta,\eta'$ avec $|\eta|\geq|\eta'|$

$$\begin{aligned}\sqrt{h^{-2}+\eta^2}+\sqrt{h^{-2}+\eta'^2}&-\sqrt{h^{-2}+(\eta+\eta')^2}\\ &\geq\frac{c}{h}\big(1+h\inf(|\eta|,|\eta'|,|\eta+\eta'|)\big)^{-1}.\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Or, le membre de gauche se minore par

$$\frac{ch}{(1+h^2|\eta|^2)^{1/2}}\Big[h^{-2}+2\big(\sqrt{h^{-2}+\eta^2}\sqrt{h^{-2}+\eta'^2}-\eta\eta'\big)\Big] \tag{2.2.13}$$

donc par

$$\frac{2c}{h}\big[(1+h^2\eta'^2)^{1/2}-h|\eta'|\big]\geq\frac{c}{h}(1+h^2\eta'^2)^{-1/2}.$$

L'inégalité (2.2.12) en résulte si $|\eta+\eta'|\geq\frac{1}{2}|\eta'|$. Si $|\eta+\eta'|\leq\frac{1}{2}|\eta'|$, alors $\eta$ et $\eta'$ sont de signe contraire et (2.2.13) se minore par $2ch^{-1}(1+h^2\eta'^2)^{1/2}$ qui est meilleur que la minoration cherchée.

L'inégalité (2.2.10) s'obtient en remarquant que l'hypothèse permet de minorer la valeur absolue du membre de gauche de (2.2.11) par $2^{k_3}/4$. □

Nous utiliserons également le lemme suivant :

LEMME 2.2.4. — *Soit $\rho > 0$ et soient $(c_j)_j$ et $(c'_j)_j$ deux suites de $\ell^2(\mathbb{N})$. Définissons une nouvelle suite $(c''_j)_j$ par*

$$c''_{j''} = \sum_{j,j'} \big(1 + h \inf(2^j, 2^{j'})\big)^{-\rho} c_j c'_{j'} \tag{2.2.14}$$

*où la sommation se fait par rapport aux indices $j, j'$ vérifiant soit $j \ll j' \sim j''$, soit $j' \ll j \sim j''$, soit $j'' - 5 \leq j \sim j'$. Alors $(c''_{j''})_{j''}$ est dans $\ell^2$ et il existe une constante $C > 0$ telle que pour toutes telles suites*

$$\|(c''_{j''})_{j''}\|_{\ell^2} \leq C |\log h|^{1/2} \, \|(c_j)_j\|_{\ell^2} \, \|(c'_{j'})_{j'}\|_{\ell^2}. \tag{2.2.15}$$

*Démonstration du théorème 2.2.2.* — Écrivons, en supprimant les exposants $h$

$$u = \sum_{j,k} (\Delta^+_{jk} u + \Delta^-_{jk} u), \quad v = \sum_{j',k'} (\Delta^+_{j'k'} v + \Delta^-_{j'k'} v).$$

Pour estimer $\Delta^{\pm}_{j''k''}(B(u,v))$ on doit donc étudier chacune des quantités

$$\sum_{j,j'} \sum_{k,k'} \Delta^{e''}_{j''k''} \big(B(\Delta^e_{jk} u, \Delta^{e'}_{j'k'} v)\big) \tag{2.2.16}$$

où $e, e', e''$ décrivent tous trois $\{+,-\}$ et montrer que (2.2.16) se majore par

$$\begin{aligned} C h^{-1/4} |\log h|^{-3/2} 2^{k''/2} (1 + 2^{j''} h + 2^{k''} h)^{-N+1} \\ \times c_{j''k''} \|u\|_{H_N^{\frac34,\frac12}} \cdot \|v\|_{H_N^{\frac34,\frac12}} \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

avec $\sum_{j''} \big(\sum_{k''} |c_{j''k''}|\big)^2 \leq 1$.

Nous allons obtenir cette estimation en distinguant les cas $k_3 = k''$, $k_3 = k$ et $k_3 = k'$.

*α) Estimation de*

$$\sum_{j,j'} \sum_{\substack{k,k' \\ k \leq k'' \\ k' \leq k''}} \big\|\Delta^{e''}_{j''k''} \big(B(\Delta^e_{jk} u, \Delta^{e'}_{j'k'} v)\big)\big\|. \tag{2.2.18}$$

D'après les inégalités (2.1.32) et (2.1.33) du théorème 2.1.9, et l'inégalité (2.2.2), il existe $C > 0$ avec

$$\begin{aligned}(2.2.19)\quad &\big\|\Delta^{e''}_{j''k''}\big(B(\Delta^{e}_{jk}u, \Delta^{e'}_{j'k'}v)\big)\big\|\\ &\leq \frac{C}{h^2}\inf\big(2^{\tilde{\jmath}/2}, h^{-1/4}2^{\sup(k,k')/4}(1+h\inf(2^j,2^{j'}))^{3/4}\big)\\ &\quad\times 2^{\inf(k,k')/2}(1+2^jh+2^kh)(1+2^{j'}h+2^{k'}h)\\ &\quad\times \|\Delta^{e}_{jk}u\|\cdot\|\Delta^{e'}_{j'k'}v\|\end{aligned}$$

lorsque $k \leq k''$ et $k' \leq k''$. Majorant la première borne inférieure par son second argument, et utilisant (1.2.10) avec $s = \frac{3}{4}$, on majore le membre de gauche de (2.2.19) par

$$\begin{aligned}(2.2.20)\quad &C(\hbar^{3/4})^2h^{-9/4}\big(1+h\inf(2^j,2^{j'})\big)^{3/4}\\ &\times(1+2^jh+2^kh)^{-N+1}(1+2^{j'}h+2^{k'}h)^{-N+1}\\ &\times c_{jk}(h)c'_{j'k'}(h)\,\|u\|_{H_N^{\frac34,\frac12}}\cdot\|v\|_{H_N^{\frac34,\frac12}}\end{aligned}$$

avec $\sum_j\big(\sum_k|c_{jk}|\big)^2 \leq 1$ et $\sum_{j'}\big(\sum_{k'}|c'_{j'k'}|\big)^2 \leq 1$. On majore donc (2.2.18) par

$$\begin{aligned}(2.2.21)\quad &C(\hbar^{3/4})^2h^{-7/4}2^{k''/2}(1+2^{j''}h+2^{k''}h)^{-N+1}\\ &\times d_{j''k''}\|u\|_{H_N^{\frac34,\frac12}}\cdot\|v\|_{H_N^{\frac34,\frac12}}\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}(2.2.22)\quad d_{j''k''} = \sum_{j,j'}\sum_{\substack{k,k'\\ k\leq k''\\ k'\leq k''}} &2^{-k''/2}h^{-1/2}\\ &\times(1+2^{j''}h+2^{k''}h)^{N-1}\\ &\times\big(1+h\inf(2^j,2^{j'})\big)^{3/4}\\ &\times(1+2^jh+2^kh)^{-N+1}\\ &\times(1+2^{j'}h+2^{k'}h)^{-N+1}\\ &\times c_{jk}\,c'_{j'k'}\Theta(J,K,h)\end{aligned}$$

où $J = (j,j',j'')$, $K = (k,k',k'')$ et $\Theta(J,K,h)$ est bornée et, d'après le lemme 2.2.3, nulle si $2^{k''}h < c(1+h\,2^{\tilde{\jmath}})^{-1}$ ou si $k'' \geq k+3$ et $k'' \geq k'+3$ et $2^{k''}h > C(1+h\sup(2^j,2^{j'}))$. Elle est de plus supportée dans $j \ll j' \sim j''$ ou $j' \ll j \sim j''$ ou $j''-5 \leq j \sim j'$.

Remarquons que l'on a toujours l'inégalité (sur le support de $\Theta$, et pour $k \leq k''$, $k' \leq k''$)

$$\begin{aligned}(2.2.23)\qquad &(1+2^j h+2^k h)^{-N+1}(1+2^{j'}h+2^{k'}h)^{-N+1}\\ &\leq C(1+2^{j''}h+2^{k''}h)^{-N+1}\big(1+h\inf(2^j,2^{j'})\big)^{-N+1}.\end{aligned}$$

En effet, si $k'' \geq j''$ cette inégalité est trivialement vraie lorsque $k > k''-3$ ou $k' > k''-3$. Dans le cas contraire, l'inégalité $2^{k''}h \leq C(1+h\sup(2^j,2^{j'}))$ entraîne également (2.2.23) pour $k'' \geq j''$. Enfin, si $j'' \geq k''$ l'inégalité résulte du fait que l'on a toujours $j \geq j''-5$ ou $j' \geq j''-5$. On majore donc $\sum_{k''} d_{j''k''}$ par

$$\begin{aligned}(2.2.24)\qquad C\sum_{j,j'}\sum_{k,k',k''} 2^{-k''/2}h^{-1/2}\big(1+h\inf(2^j,2^{j'})\big)^{-N+7/4}&\\ \times c_{jk}\,c'_{j'k'}\Theta(J,K,h).&\end{aligned}$$

Utilisant que $2^{k''} \geq \frac{c}{h}(1+h\,2^{\tilde{\jmath}})^{-1}$ sur le support de $\Theta$, la somme en $k, k', k''$ dans (2.2.24) se majore par

$$(2.2.25)\qquad C\sum_{j,j'}\big(1+h\inf(2^j,2^{j'})\big)^{-N+9/4}c_j c'_{j'}$$

où $(c_j)_j, (c'_{j'})_{j'}$ sont dans la boule unité de $\ell^2$, et où la somme porte sur $j \ll j' \sim j''$ ou $j' \ll j \sim j''$ ou $j''-5 \leq j \sim j'$. D'après (2.2.15), (2.2.25) se majore par $C|\log h|^{1/2}c''_{j''}$ pour une nouvelle suite $(c''_{j''})_{j''}$ dans la boule unité de $\ell^2$. Par conséquent, (2.2.21) s'estime par (2.2.17).

*$\beta$) Estimation, dans le cas $e' \neq e''$, de*

$$(2.2.26)\qquad \sum_{j,j'}\sum_{\substack{k,k'\\ k'\leq k\\ k''\leq k}} \big\|\Delta^{e''}_{j''k''}\big(B(\Delta^{e}_{jk}u,\Delta^{e'}_{j'k'}v)\big)\big\|.$$

On est dans le cas (ii) du théorème 2.1.9 et d'après (2.1.33), (2.2.2), le terme général de (2.2.26) se majore par

$$\begin{aligned}(2.2.27)\qquad C(\hbar^{3/4})^2h^{-7/4}2^{k''/2}(1+2^{j''}h+2^{k''}h)^{-N+1}&\\ \times d_{j''k''}\|u\|_{H_N^{\frac34,\frac12}}\cdot\|v\|_{H_N^{\frac34,\frac12}}&\end{aligned}$$

avec

$$
\begin{aligned}
(2.2.28)\quad d_{j''k''} = \sum_{j,j'} \sum_{\substack{k,k'\\ k'\leq k\\ k''\leq k}} & 2^{-k/2}h^{-1/2}\big(1+2^{j''}h+2^{k''}h\big)^{N-1}\\
& \times (1+2^{\tilde{\jmath}}h)^{3/4}\big(1+2^{j}h+2^{k}h\big)^{-N+1}\\
& \times \big(1+2^{j'}h+2^{k'}h\big)^{-N+1}\\
& \times c_{jk}\, c'_{j'k'}\Theta(J,K,h)
\end{aligned}
$$

où $\Theta$ est d'après le lemme 2.2.3 une fonction nulle si $2^k h < c(1+2^{\tilde{\jmath}}h)^{-1}$ et de plus supportée dans $j \ll j' \sim j''$ ou $j' \ll j \sim j''$ ou $j''-5 \leq j \sim j'$. Remarquons que l'inégalité (2.2.23) est vraie pour les valeurs des indices intervenant dans (2.2.28). On l'a déjà vu si $j'' \geq k''$ et c'est immédiat si $k'' \geq j''$ (puisqu'ici $k \geq k''$). Par conséquent $\sum_{k''} d_{j''k''}$ se majore par

$$
(2.2.29)\qquad \sum_{j,j'} \sum_{\substack{k,k',k''\\ k''\leq k}} 2^{-k/2}h^{-1/2}\big(1+h\inf(2^j,2^{j'})\big)^{-N+\frac{7}{4}} c_{jk}\, c'_{j'k'}\Theta.
$$

Alors,

$$
\sum_{\substack{k''\\ k''\leq k}} 2^{-k/2}\Theta \leq (k+1)2^{-k/2}\Theta \leq C|\log h|\, h^{1/2}(1+2^{\tilde{\jmath}}h)^{1/2}
$$

puisque $2^k h \geq c(1+2^{\tilde{\jmath}}h)^{-1}$ sur le support de $\Theta$. Dans (2.2.29), la somme en $k,k',k''$ s'estime donc par

$$
C|\log h| \sum_{j,j'} \big(1+h\inf(2^j,2^{j'})\big)^{-N+\frac{9}{4}} c_j c_{j'}
$$

avec $(c_j)_j, (c'_{j'})_{j'}$ dans $\ell^2$, la sommation se faisant pour $j \ll j' \sim j''$ ou $j' \ll j \sim j''$ ou $j''-5 \leq j \sim j'$. Le lemme 2.2.4 permet de conclure.

$\gamma$) *Estimation, dans le cas $e'=e''$, de*

$$
(2.2.30)\qquad \sum_{j,j'} \sum_{\substack{k,k'\\ k'\leq k\\ k''\leq k}} \big\|\Delta^{e''}_{j''k''}\big(B(\Delta^{e}_{jk}u, \Delta^{e'}_{j'k'}v)\big)\big\|
$$

La proposition 2.2.1 s'applique avec $\{k_1,k_2\}=\{k',k''\}$, $k_0=k'$ et donne, lorsque $(\tau,\xi,\tau',\xi')$ appartient à $A(J,K,E)$,

$$
\begin{aligned}
(2.2.31)\qquad \big|b_p(\tau,\xi,\tau',\xi')\big| \leq \frac{C}{h} & 2^{\sup(k',k'')}\big(1+2^{j'}h+2^{k'}h+2^{j''}h+2^{k''}h\big)\\
& + \frac{C}{h^2}(1+2^{\tilde{\jmath}}h)(1+2^{j}h).
\end{aligned}
$$

Pour évaluer la contribution du premier terme du membre de droite de (2.2.31), utilisons l'inégalité (2.1.32) du théorème 2.1.9 en retenant seulement le $2^{\tilde{\jmath}/2}$ dans la borne inférieure.

On obtient une contribution au terme général de (2.2.30) majorée par

$$\begin{aligned}\frac{C}{h}2^{\sup(k',k'')}(1+2^{j'}h+2^{k'}h+2^{j''}h+2^{k''}h)\\ \times 2^{(\tilde{\jmath}+\inf(k',k''))/2}\|\Delta^{e'}_{j'k'}v\|\cdot\|\Delta^{e}_{jk}u\|.\end{aligned}\tag{2.2.32}$$

On estime alors la contribution à la somme (2.2.30) par

$$(\hbar^{3/4})^2h^{-3/2}(1+2^{j''}h+2^{k''}h)^{-N+1}2^{k''/2}d_{j''k''}\|u\|_{H_N^{\frac{3}{4},\frac{1}{2}}}\cdot\|v\|_{H_N^{\frac{3}{4},\frac{1}{2}}}$$

avec

$$\begin{aligned}d_{j''k''}=\sum_{j,j'}\sum_{\substack{k,k'\\ k'\le k\\ k''\le k}}&2^{\tilde{\jmath}/2}\sqrt{h}\,2^{(\sup(k',k'')-k)/2}\\ &\times(1+2^{j'}h+2^{k'}h+2^{j''}h+2^{k''}h)\\ &\quad\times(1+2^{j''}h+2^{k''}h)^{N-1}\\ &\quad\quad\times(1+2^{j}h+2^{k}h)^{-N}\\ &\quad\quad\quad\times(1+2^{j'}h+2^{k'}h)^{-N}\\ &\quad\quad\quad\quad\times c_{jk}\,c'_{j'k'}\Theta(J,K,h)\end{aligned}\tag{2.2.33}$$

avec la même fonction $\Theta$ que dans (2.2.28).

Comme on a l'inégalité

$$\begin{aligned}(1+2^{j''}h+2^{k''}h)^{N-1}&(1+2^{j}h+2^{k}h)^{-N}(1+2^{j'}h+2^{k'}h)^{-N}\\ &\le\big(1+h\inf(2^j,2^{j'})+h\inf(2^k,2^{k'})\big)^{-N+1}\\ &\quad\times(1+2^{j}h+2^{k}h)^{-1}(1+2^{j'}h+2^{k'}h)^{-1}\end{aligned}$$

sur le support de $\Theta$ et pour $k\ge k''$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{k''}d_{j''k''}\le\sum_{j,j'}\sum_{\substack{k,k',k''\\ k'\le k,\,k''\le k}}&2^{\tilde{\jmath}/2}\sqrt{h}\,2^{(\sup(k',k'')-k)/2}\\ &\times\big(1+h\inf(2^j,2^{j'})\big)^{-N+2}\\ &\quad\times(1+h\,2^{k'})^{-1}\Theta\,c_{jk}\,c'_{j'k'}.\end{aligned}$$

La somme en $k,k',k''$ se majore alors par

$$C|\log h|\sum_{j,j'}(2^{\tilde{\jmath}}h)^{1/2}\big(1+h\inf(2^j,2^{j'})\big)^{-N+2}c_j\,c'_{j'}$$

pour des suites $(c_j)_j, (c'_{j'})_{j'}$ dans $\ell^2$, et une sommation sur $j \ll j' \sim j''$ ou $j' \ll j \sim j''$ ou $j'' - 5 \leq j \sim j'$. Cette dernière quantité s'estime par $C|\log h| c''_{j''}$ pour une suite $(c''_{j''})_{j''}$ dans la boule unité de $\ell^2$. On obtient une estimation meilleure que (2.2.17).

Pour estimer la contribution du second terme du membre de droite de (2.2.31) au terme général de (2.2.30), écrivons, en utilisant (2.1.32), que celle-ci s'estime par

$$\begin{aligned}(2.2.34)\qquad & \frac{C}{h^2}(1+2^{\tilde{j}}h)(1+2^{j}h)2^{(k'+k'')/2}h^{-1/4} \\ & \qquad \times \big(1+h\inf(2^{j'},2^{j''})\big)^{3/4}\|\Delta^{e'}_{j'k'}v\| \cdot \|\Delta^{e}_{jk}u\|.\end{aligned}$$

La contribution à (2.2.30) est donc majorée par

$$(2.2.35)\qquad C(\hbar^{3/4})^2 h^{-7/4}\big(1+2^{j''}h+2^{k''}h\big)^{-N+1}2^{k''/2}\,d_{j''k''}$$

avec

$$\begin{aligned}(2.2.36)\qquad d_{j''k''} = \sum_{j,j'}\sum_{\substack{k,k'\\ k'\leq k\\ k''\leq k}} & h^{-1/2}2^{-k/2}(1+2^{\tilde{j}}h)(1+2^{j}h) \\ & \times \big(1+h\inf(2^{j'},2^{j''})\big)^{3/4} \\ & \times \big(1+2^{j''}h+2^{k''}h\big)^{N-1} \\ & \times \big(1+2^{j}h+2^{k}h\big)^{-N} \\ & \times \big(1+2^{j'}h+2^{k'}h\big)^{-N} \\ & \times \Theta(J,K,h)\,c_{jk}\,c'_{j'k'}\end{aligned}$$

avec la même fonction $\Theta$ que dans (2.2.28).

Or, l'inégalité (2.2.23) est satisfaite pour les indices intervenant dans la sommation. Par conséquent, on majore $d_{j'',k''}$ par

$$\begin{aligned}(2.2.37)\quad C\sum_{j,j'}\sum_{\substack{k,k'\\ k'\leq k\\ k''\leq k}} & h^{-1/2}2^{-k/2}\big(1+h\inf(2^{j'},2^{j''})\big)^{3/4}(1+2^{\tilde{j}}h) \\ & \times (1+2^{j'}h)^{-1}\big(1+h\inf(2^{j},2^{j'})\big)^{-N+1}\Theta\,c_{jk}\,c'_{j'k'}.\end{aligned}$$

On majore cette expression par

$$C\sum_{j,j'}\sum_{\substack{k,k'\\ k'\leq k\\ k''\leq k}} h^{-1/2}2^{-k/2}\big(1+h\inf(2^{j},2^{j'})\big)^{-N+\frac{7}{4}}\Theta\,c_{jk}\,c'_{j'k'}.$$

La norme $\ell^1$ en $k''$ de cette expression s'estime par (2.2.29) et on conclut donc comme dans le cas $\beta$).

L'étude de la somme

$$\sum_{\substack{k,k'\\ k\le k'\\ k''\le k'}} \big\| \Delta^{e''}_{j''k''}\big(B(\Delta^{e}_{jk}u, \Delta^{e'}_{j'k'}v)\big)\big\|$$

se déduisant des cas $\beta$) et $\gamma$) par permutation des indices, le théorème 2.2.2 est démontré.

## 3. Existence locale à données peu régulières

Le but de cette dernière partie est de prouver le théorème d'existence locale 1.2.2. Pour cela, nous devons compléter les estimations de la section 2.2 par celles faisant l'objet de la section suivante.

### 3.1. Produits de facteurs de régularité différente.

Nous allons prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1.1. — *Soit $N$ un entier naturel vérifiant $N \ge 3$. Alors le produit $(u,v) \mapsto uv$ est continu de $H^{-\frac14,-\frac12}_{N-1} \times H^{\frac34,\frac12}_{N}$ dans $H^{-\frac14,-\frac12}_{N-1}$.*

En décomposant

$$u = \sum_{jk} (\Delta^{+}_{jk}u + \Delta^{-}_{jk}u), \qquad v = \sum_{j'k'} (\Delta^{+}_{j'k'}u + \Delta^{-}_{j'k'}v),$$

on constate qu'il suffit d'obtenir pour $e, e', e'' \in \{+,-\}$ une inégalité de la forme :

$$\begin{aligned}(3.1.1)\quad \sum_{j,j'}\sum_{k,k'} \big\| \Delta^{e''}_{j''k''}\big((\Delta^{e}_{jk}u), (\Delta^{e'}_{j'k'}v)\big)\big\| &\le Ch^{-1/4}|\log h|^{-3/2}\, 2^{k''/2}(1+2^{j''}h+2^{k''}h)^{-N+1}\\ &\qquad\times c''_{j''k''}\|u\|_{H^{-\frac14,-\frac12}_{N-1}} \cdot \|v\|_{H^{\frac34,\frac12}_{N}}\end{aligned}$$

pour une suite $(c''_{j''k''})_{j''k''}$ vérifiant $\sum_{j''}\big(\sum_{k''}|c''_{j''k''}|\big)^2 \le 1$.

Comme le membre de gauche de (3.1.1) est nul si $e = e'$ et $e'' \ne e$, il nous suffit, compte tenu des symétries, d'envisager les trois cas $(e,e',e'') = (+,+,+)$ ou $(+,-,+)$ ou $(-,+,+)$. Nous utiliserons :

LEMME 3.1.2. — *Soit $(e, e', e'')$ l'un des choix de signes précédents et soit $A(J, K, E)$ l'ensemble défini en (2.1.1). Il existe $C > 0$ telle que si $A(J, K, E) \neq \emptyset$ et $k_3 \geq k_1 + 3$, $k_3 \geq k_2 + 3$,*

$$2^{k_3} \leq \frac{C}{h}\big(1 + h\sup(2^j, 2^{j'})\big). \tag{3.1.2}$$

*De plus, il existe $N_0$ et $C > 0$ tels que si $k \geq k' + N_0$, $k \geq k'' + N_0$ et $A(J, K, E) \neq \emptyset$ on ait*

$$2^k \leq \frac{C}{h}(1 + h\,2^{j'}). \tag{3.1.3}$$

*Démonstration.* — L'inégalité (3.1.2) a déjà été prouvée dans le lemme 2.2.3. Pour prouver (3.1.3), remarquons que lorsque $(e, e', e'') = (+, +, +)$ ou $(+, -, +)$, l'égalité (2.2.11), l'hypothèse $k \geq \sup(k', k'') + 3$ et l'inégalité de Minkowski entraînent

$$\tfrac{1}{4}2^k \leq |\xi'| + (h^{-2} + \xi'^2)^{1/2} \tag{3.1.4}$$

d'où (3.1.3) dans ces deux cas. Lorsque $(e, e', e'') = (-, +, +)$, écrivons

$$\begin{aligned} &\tau - \sqrt{h^{-2} + \xi^2} - \big(\tau - \tau' + \sqrt{h^{-2} + (\xi - \xi')^2}\big) - \big(\tau' - \sqrt{h^{-2} + \xi'^2}\big) \\ &\qquad = -\sqrt{h^{-2} + (\xi - \xi')^2} + \sqrt{h^{-2} + \xi'^2} - \sqrt{h^{-2} + \xi^2}. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

L'hypothèse et l'inégalité de Minkowski entraînent

$$2^k\big(\tfrac{1}{2} - 2^{1-N_0}\big) \leq \inf\big[h^{-1}\sqrt{1 + h^2\xi^2} + |\xi|, h^{-1}\sqrt{1 + h^2(\xi - \xi')^2} + |\xi - \xi'|\big]$$

d'où

$$2^k \leq \frac{C}{h}\big(1 + h\inf(2^{j''}, 2^j)\big). \tag{3.1.6}$$

L'inégalité (3.1.3) en découle si $j \ll j' \sim j''$ ou $j'' - 5 \leq j \sim j'$ ou $2^{j''}h \leq 1$. Il suffit donc de voir que si $N_0$ est fixé assez grand, le cas $j' \ll j \sim j''$ et $2^{j''}h \geq 1$ ne peut pas se produire. Écrivons en effet

$$\begin{aligned} \tau - \tau' &= \tau - \sqrt{h^{-2} + \xi^2} - \big(\tau' - \sqrt{h^{-2} + \xi'^2}\big) \\ &\qquad\qquad + \sqrt{h^{-2} + \xi^2} - \sqrt{h^{-2} + \xi'^2} \\ &\geq -2^{k''} - 2^{k'} + \frac{h(\xi - \xi')(\xi + \xi')}{(1 + h^2\xi^2)^{1/2} + (1 + h^2\xi'^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Puisque $j' \ll j \sim j''$ et $2^{j''}h \geq 1$, le dernier terme se minore par $ch^{-1}(1 + h|\xi|)$ d'où

$$\tau - \tau' \geq -2 \cdot 2^{k-N_0} + ch^{-1}\big(1 + h|\xi|\big).$$

Or, par (3.1.6), on a $2^k h \leq C(1 + h\,2^{j''}) \leq C'(1 + h|\xi|)$ donc $\tau - \tau' > 0$ si $N_0$ a été fixé assez grand. Mais $(\tau - \tau', \xi - \xi') \in \operatorname{Supp} \Phi_{jk}^-$ entraîne $\tau - \tau' < 0$, d'où une contradiction. $\square$

*Démonstration du théorème 3.1.1.* — Notons $(e, e', e'')$ l'un des triplets $(+,+,+)$, $(+,-,+)$, ou $(-,+,+)$.

*α) Estimation de la somme*

$$\sum_{j,j'} \sum_{\substack{k,k' \\ k \leq k''+N_0}} \big\| \Delta_{j''k''}^{e''}\big((\Delta_{jk}^{e} u), (\Delta_{j'k'}^{e'} v)\big) \big\|. \tag{3.1.7}$$

D'après le théorème 2.1.9 dans lequel on retient dans la borne inférieure l'argument $2^{\tilde{\jmath}/2}$, le terme général de (3.1.7) s'estime par

$$\begin{aligned} &C\, 2^{(\tilde{\jmath}+k')/2} \hbar^{3/4} h^{-1} 2^{k/2} \big(1 + 2^j h + 2^k h\big)^{-N+1} \\ &\quad \times c_{jk} \|u\|_{H_{N-1}^{-\frac14,-\frac12}} \hbar^{3/4} 2^{-k'/2} \big(1 + 2^{j'} h + 2^{k'} h\big)^{-N} c'_{j'k'} \|v\|_{H_N^{\frac34,\frac12}}. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Alors (3.1.7) se majore par

$$\begin{aligned} &C h^{-1/4} |\log h|^{-3/2} 2^{k''/2} \big(1 + 2^{j''} h + 2^{k''} h\big)^{-N+1} \\ &\qquad \times d_{j''k''} \|u\|_{H_{N-1}^{-\frac14,-\frac12}} \cdot \|v\|_{H_N^{\frac34,\frac12}} \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

avec

$$\begin{aligned} d_{j''k''} = \sum_{j,j'} \sum_{\substack{k,k' \\ k \leq k''+N_0}} \; &\hbar^{3/4} 2^{(k-k''+\tilde{\jmath})/2} \big(1 + 2^{j''} h + 2^{k''} h\big)^{N-1} \\ &\times \big(1 + 2^j h + 2^k h\big)^{-N+1} \\ &\times \big(1 + 2^{j'} h + 2^{k'} h\big)^{-N} c_{jk}\, c'_{j'k'} \Theta \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

où la fonction $\Theta$ est supportée dans $j \ll j' \sim j''$ ou $j' \ll j \sim j''$ ou $j'' - 5 \leq j \sim j'$ et peut, d'après (3.1.2), être supposée nulle si on a

$k'' \geq k+3$ et $k'' \geq k'+3$ et $2^{k''}h > C(1+h\sup(2^j, 2^{j'}))$. Sur le support de $\Theta$ on a alors

$$(3.1.11)\quad \big(1+2^{j''}h+2^{k''}h\big)^{N-1}\big(1+2^jh+2^kh\big)^{-N+1}\big(1+2^{j'}h+2^{k'}h\big)^{-N} \leq C\big(1+h\inf(2^j,2^{j'})\big)^{-N+1}\big(1+2^{j'}h+2^{k'}h\big)^{-1}.$$

On majore donc $d_{j''k''}$ par

$$C\sum_{j,j'}\sum_{\substack{k,k'\\ k\leq k''+N_0}} \hbar^{3/4}2^{(k-k''+\tilde{\jmath})/2}\big(1+h\inf(2^j,2^{j'})\big)^{-N+1}c_{jk}\,c'_{j'k'}\Theta.$$

Si l'on somme d'abord en $k''$, puis en $k, k'$, on obtient :

$$\sum_{k''} d_{j''k''} \leq C\hbar^{3/4}\sum_{j,j'} 2^{\tilde{\jmath}/2}\big(1+h\inf(2^j,2^{j'})\big)^{-N+1}c_j\,c'_{j'}$$

où la somme est étendue à $j \ll j' \sim j''$ ou $j' \ll j \sim j''$ ou $j''-5 \leq j \sim j'$ et où $(c_j)_j, (c'_{j'})_{j'}$ sont dans la boule unité de $\ell^2$. Cette dernière quantité se majore par $Cc''_{j''}$ avec $(c''_{j''})_{j''}$ dans la boule unité de $\ell^2$.

$\beta$) *Estimation de la somme*

$$(3.1.12)\qquad \sum_{j,j'}\sum_{\substack{k,k'\\ k''+N_0\leq k\leq k'}} \big\|\Delta^{e''}_{j''k''}\big((\Delta^e_{jk}u),(\Delta^{e'}_{j'k'}v)\big)\big\|.$$

Utilisant toujours le théorème 2.1.9, on majore (3.1.12) par (3.1.9), $d_{j''k''}$ étant ici donné par

$$(3.1.13)\quad d_{j''k''} = \sum_{j,j'}\sum_{\substack{k,k'\\ k''+N_0\leq k\leq k'}} \hbar^{3/4}2^{(k-k'+\tilde{\jmath})/2}\big(1+2^{j''}h+2^{k''}h\big)^{N-1} \times\big(1+2^jh+2^kh\big)^{-N+1} \times\big(1+2^{j'}h+2^{k'}h\big)^{-N}c_{jk}\,c'_{j'k'}$$

la sommation en $j, j'$ se faisant pour $j \ll j' \sim j''$ ou $j' \ll j \sim j''$ ou $j''-5 \leq j \sim j'$. Pour les valeurs des indices intervenant dans (3.1.13), l'inégalité (3.1.11) est trivialement satisfaite d'où une majoration de $\sum_{k''} d_{j'',k''}$ par

$$(3.1.14)\quad C\sum_{j,j'}\sum_{\substack{k,k',k''\\ k''+N_0\leq k\leq k'}} \hbar^{3/4}2^{(k-k'+\tilde{\jmath})/2}\big(1+h\inf(2^j,2^{j'})\big)^{-N+1} \times(1+2^{k'}h)^{-1}c_{jk}\,c'_{j'k'}.$$

Or,

$$\sum_{\substack{k'' \\ k''\leq k'}} (1+2^{k'}h)^{-1} \leq (k'+1)(1+2^{k'}h)^{-1} \leq C|\log h|$$

d'où une majoration de (3.1.14) par

$$C\hbar^{3/4}|\log h| \sum_{j,j'} 2^{\tilde{j}/2}\big(1+h\inf(2^j,2^{j'})\big)^{-N+1} c_j\, c'_{j'}$$

qui se majore — compte tenu du domaine de sommation des indices — par $Cc''_{j''}$ avec $(c''_{j''})_{j''}$ dans la boule unité de $\ell^2$.

$\gamma$) *Estimation de la somme*

$$\sum_{j,j'} \sum_{\substack{k,k' \\ k\geq k''+N_0 \\ k\geq k'}} \big\|\Delta^{e''}_{j''k''}\big((\Delta^e_{jk}u),(\Delta^{e'}_{j'k'}v)\big)\big\|. \tag{3.1.15}$$

Appliquons le théorème 2.1.9 avec $k_3 = k$. Le terme général de (3.1.15) se majore par

$$\begin{aligned}&2^{(k'+k'')/2}h^{-1/4}\big(1+h\inf(2^{j'},2^{j''})\big)^{3/4}\hbar^{3/4}h^{-1}2^{k/2}\big(1+2^jh+2^kh\big)^{-N+1}\\ &\qquad\times \hbar^{3/4}2^{-k'/2}\big(1+2^{j'}h+2^{k'}h\big)^{-N} c_{jk}c'_{j'k'}\|u\|_{H_{N-1}^{-\frac14,-\frac12}}\cdot\|v\|_{H_N^{\frac34,\frac12}}\end{aligned}$$

d'où une estimation de (3.1.15) par (3.1.9) avec ici

$$\begin{aligned} d_{j''k''} = \sum_{j,j'} \sum_{\substack{k,k' \\ k\geq k''+N_0 \\ k\geq k'}} & \hbar^{3/4}h^{-1/4}2^{k/2}\big(1+h\inf(2^{j'},2^{j''})\big)^{3/4}\\ &\times \big(1+2^{j''}h+2^{k''}h\big)^{N-1}\\ &\quad\times\big(1+2^jh+2^kh\big)^{-N+1}\\ &\qquad\times\big(1+2^{j'}h+2^{k'}h\big)^{-N}\\ &\qquad\quad\times c_{jk}\,c'_{j'k'}\Theta(J,K,h)\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

la fonction $\Theta$ étant supportée dans $j \ll j' \sim j''$ ou $j' \ll j \sim j''$ ou $j''-5 \leq j \sim j'$ et, d'après le lemme 3.1.2, étant nulle si on a à la fois $k' \leq k-N_0$ et $k'' \leq k-N_0$ et $2^kh > C(1+2^{j'}h)$. Par conséquent, sur le support de la sommation dans (3.1.16), on aura

$$(1+2^{j'}h+2^{k'}h) \geq c(1+2^{j'}h+2^kh)$$

d'où, sur ce même ensemble d'indices :

$$\begin{aligned}(1+2^{j''}h+2^{k''}h)^{N-1}&(1+2^{j}h+2^{k}h)^{-N+1}(1+2^{j'}h+2^{k'}h)^{-N}\\ &\leq C\big(1+h\inf(2^{j},2^{j'})+2^{k}h\big)^{-N+1}(1+2^{j'}h)^{-1}.\end{aligned}$$

On majore alors $\sum_{k''} d_{j''k''}$ par

$$\begin{aligned}(3.1.17)\quad \sum_{j,j'}\sum_{\substack{k,k',k''\\ k\geq k''+N_0\\ k\geq k'}} &\hbar^{3/4}h^{-1/4}\big(1+h\inf(2^{j'},2^{j''})\big)^{3/4}(1+2^{j'}h)^{-1}\\ &\times 2^{k/2}\big(1+h\inf(2^{j},2^{j'})+2^{k}h\big)^{-N+1}\\ &\times c_{jk}\,c'_{j'k'}\Theta.\end{aligned}$$

Or on a

$$\sum_{\substack{k''\\ k''\leq k}} 2^{k/2}(1+2^{k}h)^{-1}\leq Ch^{-1/2}|\log h|$$

d'où une majoration de (3.1.17) par

$$(3.1.18)\qquad C\sum_{j,j'}|\log h|^{-1/2}\big(1+h\inf(2^{j},2^{j'})\big)^{-N+2}c_j\,c'_{j'}$$

avec $(c_j)_j$ et $(c_{j'})_{j'}$ dans la boule unité de $\ell^2$. Il suffit d'appliquer le lemme 2.2.4 pour conclure.

### 3.2. Démonstration du théorème 1.2.2.

Pour prouver le théorème 1.2.2 à partir des estimations obtenues dans les paragraphes 2.2 et 3.1, il nous reste à établir quelques propriétés de la solution de l'équation de Klein-Gordon linéaire, en démontrant des résultats semblables à ceux de Klainerman-Machedon [10, § 4]. La méthode utilisée est identique à celle de ces auteurs.

LEMME 3.2.1. — *Soient $s\in\mathbb{R}, N\in\mathbb{N}$ et $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Il existe $C>0$, ne dépendant que d'un nombre fini de normes $\|\partial^\alpha\chi\|_{L^1}$, telle que pour toute $u\in H_N^{s,\frac12}$, $\chi(t)u$ soit dans $H_N^{s,\frac12}$ avec $\|\chi(t)u\|_{H_N^{s,\frac12}}\leq C\|u\|_{H_N^{s,\frac12}}$.*

*Démonstration.* — Nous utiliserons dans la preuve le fait que si l'on a $M>N+\frac12$, il existe $C>0$ telle que, pour toute suite $(c_\ell)_\ell$ dans $\ell^1$, et tout $j$

$$\begin{aligned}(3.2.1)\quad \sum_{k,\ell}2^{\frac{k}{2}-\frac{\ell}{2}}(1+2^{j}h+2^{k}h)^{N}(1+2^{j}h+2^{\ell}h)^{-N}2^{-|k-\ell|M}c_\ell\\ \leq C\big\|(c_\ell)_\ell\big\|_{\ell^1}.\end{aligned}$$

Cette inégalité résulte en effet de la majoration

$$\frac{(1+2^j h+2^k h)}{1+2^j h+2^\ell h} \leq 1+2^{|k-\ell|}.$$

Soit alors $u \in H_N^{s,\frac{1}{2}}$. Quitte à découper $u$ en $\mathbb{1}_{\{D_t>0\}}u + \mathbb{1}_{\{D_t<0\}}u$, on peut supposer que $\hat{u}$ est supportée dans $\{\tau > 0\}$.

Étudions d'abord $\Delta_{jk}^+(\chi u)$. La transformée de Fourier de cette fonction est

$$\sum_\ell \Phi_{jk}^+(\tau,\xi) \int \widehat{\chi}(\tau-\tau')\,\widehat{\Delta_{j\ell}^+ u}\,(\tau',\xi)\,\mathrm{d}\tau'. \tag{3.2.2}$$

Si $(\tau,\xi) \in \operatorname{Supp}\Phi_{jk}^+$ et $(\tau',\xi) \in \operatorname{Supp}\Phi_{j\ell}^+$, on a $|\tau-\tau'|+1 \geq c2^{|k-\ell|}$. Par conséquent, la norme $L^2$ du terme général de (3.2.2) s'estime par

$$\begin{aligned} C_M 2^{-|k-\ell|M}\|\Delta_{jk}^+ u\| \leq C_M 2^{-|k-\ell|M} & h^s|\log h|^{-3/2} \\ & \times 2^{-\ell/2}(1+2^j h+2^\ell h)^{-N} c_{j\ell}\,\|u\|_{H_N^{s,\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

On déduit alors de (3.2.1) que la norme $L^2$ de (3.2.2) s'estime par

$$Ch^s|\log h|^{-3/2}2^{-k/2}(1+2^j h+2^k h)^{-N} c'_{jk}\|u\|_{H_N^{s,\frac{1}{2}}}$$

avec $\sum\limits_j \big(\sum\limits_k |c'_{jk}|\big)^2 \leq 1$ d'où le résultat.

Pour étudier $\Delta_{jk}^-(\chi u)$, on écrit que si $(\tau,\xi)$ appartient à $\operatorname{Supp}\Phi_{jk}^-$ et $(\tau',\xi)$ appartient à $\operatorname{Supp}\Phi_{j\ell}^+$, on a

$$\begin{aligned} |\tau-\tau'|+1 &\geq |\tau|+|\tau'|+1 \\ &\geq \Big|\,|\tau+\sqrt{h^{-2}+\xi^2}|-\sqrt{h^{-2}+\xi^2}\,\Big| \\ &\qquad\qquad + \Big|\,|\tau'-\sqrt{h^{-2}+\xi^2}\,|-\sqrt{h^{-2}+\xi^2}\,\Big|+1 \\ &\geq c\,2^{|k-\ell|} \end{aligned}$$

et on conclut comme précédemment. □

PROPOSITION 3.2.2. — *Soient $s \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}^*$, $u_0 \in H^s_N(\mathbb{R})$, $u_1 \in H^{s-1}_{N-1}(\mathbb{R})$, $f \in H^{s-1,-\frac{1}{2}}_{N-1}(\mathbb{R}^2)$. Soit $u$ la solution de*

$$\left\{\begin{array}{l} \square u + h^{-2}u = f, \\ u_{|t=0} = u_0, \\ \partial_t u_{|t=0} = u_1. \end{array}\right. \tag{3.2.3}$$

*Alors, si $\chi$ est dans $C^\infty_0(\mathbb{R})$, $\chi(t)u$ appartient à $H^{s,\frac{1}{2}}_N$ et dépend continûment de $u_0$, $u_1$, $f$ dans les espaces indiqués.*

*Démonstration.* — La solution de (3.2.3) à l'instant $t$ a pour transformée de Fourier en $x$

$$\begin{aligned} &\cos\big(t\sqrt{h^{-2}+\xi^2}\,\big)\hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin\big(t\sqrt{h^{-2}+\xi^2}\,\big)}{\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}\hat{u}_1(\xi) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathrm{e}^{it\tau} - \mathrm{e}^{it\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}}{\sqrt{h^{-2}+\xi^2}(\tau - \sqrt{h^{-2}+\xi^2})}\hat{f}(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau \\ &\qquad + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathrm{e}^{it\tau} - \mathrm{e}^{-it\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}}{\sqrt{h^{-2}+\xi^2}(\tau + \sqrt{h^{-2}+\xi^2})}\hat{f}(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

LEMME 3.2.3. — *La transformée de Fourier inverse*

$$w = \mathcal{F}^{-1}_\xi\big(\chi(t)\,\mathrm{e}^{it\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}\hat{u}_0(\xi)\big)$$

*est dans $H^{s,\frac{1}{2}}_N$, avec une norme dans cet espace majorée par $C\|u_0\|_{H^s_N}$, où $C$ ne dépend que d'un nombre fini de normes $\|\partial^\alpha\chi\|_{L^1}$.*

*Démonstration.* — La transformée de Fourier de la fonction considérée est $\widehat{\chi}(\tau - \sqrt{h^{-2}+\xi^2}\,)\hat{u}_0(\xi)$. On a donc $\|\Delta^+_{jk}w\| \le C_M 2^{-kM}\|\Delta_j u_0\|$ pour tout $M$. En outre, si $\tau < 0$,

$$\big|\widehat{\chi}(\tau - \sqrt{h^{-2}+\xi^2}\,)\big| \le C_M\big(1 + \big|\tau + \sqrt{h^{-2}+\xi^2}\,\big|\big)^{-M}$$

pour tout $M$, donc on a aussi $\|\Delta^-_{jk}w\| \le C_M 2^{-kM}\|\Delta_j u_0\|$. □

D'après le lemme précédent, la contribution à $\chi(t)u$ fournie par les deux premiers termes de (3.2.4) est dans $H^{s,\frac{1}{2}}_N$. En notant

$$\Psi^\pm(\tau,\xi) = \mathbb{1}_{\{|\tau\mp\sqrt{h^{-2}+\xi^2}|<1\}},$$

écrivons la somme des deux derniers termes de (3.2.4) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}(3.2.5)\quad & \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathrm{e}^{it\tau}}{\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}\,\frac{(1-\Psi^-)}{\tau+\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}\,\hat f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau \\ & -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathrm{e}^{it\tau}}{\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}\,\frac{(1-\Psi^+)}{\tau-\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}\,\hat f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau \\ & -\frac{1}{4\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{-it\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}}{\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}\int \frac{(1-\Psi^-)}{\tau+\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}\,\hat f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau \\ & +\frac{1}{4\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{it\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}}{\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}\int \frac{(1-\Psi^+)}{\tau-\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}\,\hat f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau \\ & +\frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathrm{e}^{it\tau}-\mathrm{e}^{-it\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}}{\sqrt{h^{-2}+\xi^2}(\tau+\sqrt{h^{-2}+\xi^2})}\,\Psi^-\hat f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau \\ & -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathrm{e}^{it\tau}-\mathrm{e}^{it\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}}{\sqrt{h^{-2}+\xi^2}(\tau-\sqrt{h^{-2}+\xi^2})}\,\Psi^+\hat f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau \\ & = I+II+III+IV+V+VI.\end{aligned}$$

LEMME 3.2.4. — *La fonction* $g_\pm = \mathcal{F}_\xi^{-1}\Big(\displaystyle\int \frac{1-\Psi^\pm}{\tau\mp\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}\hat f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau\Big)$ *est dans* $H^{s-1}_{N-1}(\mathbb{R})$.

*Démonstration.* — Traitons le cas du signe +. On a :

$$(3.2.6)\qquad \widehat{\Delta_j g_+} = \sum_{k=1}^{+\infty}\int \frac{\Phi^+_{jk}(\tau,\xi)}{\tau-\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}\,\hat f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau + \sum_{k=0}^{+\infty}\int \frac{\Phi^-_{jk}(1-\Psi^+)}{\tau-\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}\,\hat f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau.$$

On majore la norme $L^2$ en $\xi$ du terme général de la première somme par

$$\sup_\xi \Big\| \frac{\Phi^+_{jk}(\tau,\xi)}{\tau-\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}\Big\|_{L^2(\mathrm{d}\tau)} \big\|\widehat{\Delta^+_{jk} f}\big\|_{L^2(\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi)}$$

soit par

$$h^{s-1}|\log h|^{-3/2}(1+2^j h)^{-N+1}c_{jk}$$

avec $\sum_j\big(\sum_k |c_{jk}|\big)^2 < +\infty$. Le résultat en découle, la seconde somme s'estimant de même. □

D'après le lemme 3.2.3 les termes *III* et *IV* vérifient les conclusions du théorème. La somme des transformées de Fourier en $t$ des termes $I$ et $II$ s'écrit

$$\begin{aligned}(3.2.7)\qquad &\frac{1}{2}\Big[\frac{(1-\Psi^-)(\tau,\xi)}{\sqrt{h^{-2}+\xi^2}\,(\tau+\sqrt{h^{-2}+\xi^2}\,)} \\ &\qquad\qquad -\frac{(1-\Psi^+)}{\sqrt{h^{-2}+\xi^2}\,(\tau-\sqrt{h^{-2}+\xi^2})}\Big]\hat{f}(\tau,\xi) \\ &= G_1+G_2+G_3\end{aligned}$$

avec

$$(3.2.8)\qquad \begin{cases} G_1 = -\dfrac{(1-\Psi^-)(1-\Psi^+)}{\tau^2-(h^{-2}+\xi^2)}\hat{f}(\tau,\xi), \\ G_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{(1-\Psi^-)\Psi^+}{\sqrt{h^{-2}+\xi^2}\,(\tau+\sqrt{h^{-2}+\xi^2})}\hat{f}, \\ G_3 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{(1-\Psi^+)\Psi^-}{\sqrt{h^{-2}+\xi^2}\,(\tau-\sqrt{h^{-2}+\xi^2})}\hat{f}. \end{cases}$$

On a immédiatement

$$(3.2.9)\qquad \|\Phi^{\pm}_{jk}G_1(\tau,\xi)\| \le Ch^s|\log h|^{-3/2}2^{-k/2}(1+2^jh+2^kh)^{-N}c_{jk}$$

Sur le support de $G_3$, on a $|\tau+\sqrt{h^{-2}+\xi^2}|<1$ et donc $|\tau|<1+\sqrt{h^{-2}+\xi^2}$ ; par conséquent, $\|\Phi^{+}_{jk}G_3\|$ est majoré par le membre de droite de (3.2.9). Sur le support de $\Phi^{-}_{jk}G_3$, l'estimation est triviale. On estime de même $\Phi^{\pm}_{jk}G_2$. Par conséquent, la transformée de Fourier inverse de $I+II$ est dans $H_N^{s,\frac{1}{2}}$, donc son produit par $\chi$ également, d'après le lemme 3.2.1.

Il reste à étudier les termes $V$ et $VI$. Écrivons

$$\begin{aligned}(3.2.10)\qquad &\chi(t)\int\frac{\mathrm{e}^{it\tau}-\mathrm{e}^{it\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}}{\sqrt{h^{-2}+\xi^2}(\tau-\sqrt{h^{-2}+\xi^2})}\,\Psi^+\hat{f}(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau \\ &\qquad = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{it\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}}{\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}\,\frac{\chi(t)(it)^\ell}{\ell!}\,I_\ell(\xi)\end{aligned}$$

avec

$$I_\ell(\xi)=\int\big(\tau-\sqrt{h^{-2}+\xi^2}\,\big)^{\ell-1}\,\Psi^+\hat{f}(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau.$$

On a alors $\mathcal{F}_\xi^{-1} I_\ell \in H^{s-1}_{N-1}$, avec une norme dans cet espace majorée par une constante indépendante de $\ell$, et le lemme 3.2.3 entraîne que la transformée de Fourier inverse de

$$\frac{e^{it\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}}{\sqrt{h^{-2}+\xi^2}}\,\chi(t)\,(it)^\ell\, I_\ell(\xi)$$

est dans $H_N^{s,\frac12}$ avec une norme dans cet espace majorée par $C^\ell$. La série converge donc dans $H_N^{s,\frac12}$. □

*Démonstration du théorème 1.2.2.* — Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\chi \equiv 1$ au voisinage de $[-1,1]$. Définissons, pour $n \geq 0$, une suite $U^n$ de fonctions par la relation

$$(3.2.11)\qquad \begin{cases} \square U^{n+1} + h^{-2}U^{n+1} \\ \qquad\qquad = h^{-2}F\big(\chi(t)U^n, h\partial_t\big(\chi(t)U^n\big), h\partial_x\big(\chi(t)U^n\big)\big), \\ U^{n+1}{}_{|t=0} = V, \\ \partial_t U^{n+1}{}_{|t=0} = W, \end{cases}$$

$U^0$ désignant la solution du problème homogène

$$\square U^0 + h^{-2}U^0 = 0, \quad U^0{}_{|t=0} = V, \quad \partial_t U^0{}_{|t=0} = W.$$

D'après (1.2.2), le théorème 2.2.2 et le théorème 3.1.1, si $\chi(t)U^n$ est dans $H_N^{\frac34,\frac12}$, le membre de droite de (3.2.11) est dans $H_{N-1}^{-\frac14,-\frac12}$, avec une norme dans cet espace majorée par

$$\big\|\chi(t)U^n\big\|^2_{H_N^{\frac34,\frac12}} P\Big(\big\|\chi(t)U^n\big\|_{H_N^{\frac34,\frac12}}\Big)$$

où $P$ est un polynôme sur $\mathbb{R}$. D'après la proposition 3.2.2, $\chi(t)U^{n+1}$ est alors dans $H_N^{\frac34,\frac12}$ avec une norme dans cet espace majorée par

$$(3.2.12)\quad C\Big(\|V\|_{H_N^{3/4}} + \|W\|_{H_{N-1}^{-1/4}}\Big) + C\big\|\chi(t)U^n\big\|^2_{H_N^{\frac34,\frac12}} P\Big(\big\|\chi(t)U^n\big\|_{H_N^{\frac34,\frac12}}\Big).$$

Comme $\chi(t)U^0$ est dans $H_N^{\frac34,\frac12}$ avec une norme dans cet espace majorée par le premier terme de (3.2.12), on constate immédiatement que la suite $(\chi(t)U^n)_n$ est bornée dans $H_N^{\frac34,\frac12}$ si $\|V\|_{H_N^{3/4}} + \|W\|_{H_{N-1}^{-1/4}} < \delta$ est assez petit.

Pour obtenir la convergence, il suffit de remarquer que

$$h^{-2}\big(F(U, h\partial_t U, h\partial_x U) - F\big(V, h\partial_t V, h\partial_x V\big)\big)$$

s'exprime à partir d'expressions

$$B(U, U-V)G(U), \quad B(V, U-V)G(U), \quad B(V,V)G(U,V)(U-V)$$

où $G(U)$, $G(U,V)$ sont des polynômes et $B$ est l'une quelconque des expressions (2.2.8), et de répéter le raisonnement précédent. La limite ainsi obtenue est, pour $t \in ]-1,1[$, solution de (1.2.4) et dans les espaces indiqués dans l'énoncé du théorème puisque $H_N^{\frac{3}{4},\frac{1}{2}}$ est contenu dans $C^0(\mathbb{R}, H_N^{3/4})$ et que $U \in H_N^{\frac{3}{4},\frac{1}{2}}$ implique $\partial_t U \in H_{N-1}^{-\frac{1}{4},\frac{1}{2}} \subset C^0(\mathbb{R}, H_{N-1}^{-1/4})$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] Bony (J.-M.). — *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles nonlinéaires*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **14**, 1981, p. 209–256.

[2] Bony (J.-M.). — *Second microlocalization and propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations, Hyperbolic equations and related topics (Katata/Kyoto, 1984)*. — Academic Press, Boston, 1986, p. 11–49.

[3] Bourgain (J.). — *Fourier transforms restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, I, II*, Geom. Funct. Anal., t. **3**, 1993, p. 107–156, 202–262.

[4] Fang (Y.-F.) et Grillakis (M.G.). — *A priori estimates for the* 2-*d wave equation*, Commun. Part. Diff. Eqs, t. **21**, 1996, p. 1643–1665.

[5] Georgiev (V.) et Popivanov (P.). — *Global solutions to the two-dimensional Klein-Gordon equations*, Commun. Part. Diff. Eqs, t. **16**, 1991, p. 941–995.

[6] Hörmander (L.). — *Non-linear Hyperbolic Differential Equations*, Lectures Notes in Lund, preprint, 1986–87.

[7] Kenig (C.), Ponce (G.) et Vega (L.). — *The Cauchy problem for the Korteweg-de-Vries equation on Sobolev spaces of negative indices*, Duke Math. J., t. **71**, 1993, p. 1–21.

[8] KENIG (C.), PONCE (G.) et VEGA (L.). — *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*, J. Amer. Math. Soc., t. **9**, 1996, p. 573–603.

[9] KLAINERMAN (S.). — *Global existence of small amplitude solutions to nonlinear Klein-Gordon equations in four space-time dimensions*, Comm. Pure Appl. Math., t. **38**, 1985, p. 631–641.

[10] KLAINERMAN (S.) et MACHEDON (M.). — *Smoothing estimates for null forms and applications*, Duke Math. J., 1996, p. 99–131.

[11] KOSECKI (R.). — *The Unit Condition and Global Existence for a Class of Nonlinear Klein-Gordon Equations*, Jour. Diff. Eq., t. **100**, 1992, p. 257–268.

[12] MORIYAMA (K.), TONEGAWA (S.) et TSUTSUMI (Y.). — *Almost Global Existence of Solutions for the Quadratic Semilinear Klein-Gordon Equation in One Space Dimension*, preprint, 1996.

[13] OZAWA (T.), TSUTAYA (K.) et TSUTSUMI (Y.). — *Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Klein-Gordon equations with quadratic nonlinearity in two space dimensions*, Math. Z., t. **222**, 1996, p. 341–362.

[14] SHATAH (J.). — *Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations*, Comm. Pure Appl. Math., t. **38**, 1985, p. 685–696.

[15] SIMON (J.C.H.) et TAFLIN (E.). — *The Cauchy problem for nonlinear Klein-Gordon equations*, Commun. Math. Phys., t. **152**, 1993, p. 433–478.

[16] YORDANOV (B.). — *Blow-up for the one-dimensional Klein-Gordon Equation with a cubic nonlinearity*, preprint, 1996.