BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-MARC DERRIEN

Construction de cocycles en escalier ergodiques et faiblement mélangeants au-dessus de rotations irrationnelles du cercle

Bulletin de la S. M. F., tome 125, nº 2 (1997), p. 227-248

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_2_227_0>

Bull. Soc. math. France,
125, 1997, p. 227–248.

CONSTRUCTION DE COCYCLES EN ESCALIER ERGODIQUES ET FAIBLEMENT MÉLANGEANTS AU-DESSUS DE ROTATIONS IRRATIONNELLES DU CERCLE

PAR JEAN-MARC DERRIEN (*)

RÉSUMÉ. — On étudie, à l'aide d'une nouvelle condition d'approximation diophantienne, des équations fonctionnelles de type « cobord » pour les cocycles en escalier définis sur les rotations irrationnelles du cercle et à valeurs dans des groupes compacts métrisables. On en déduit des constructions explicites de tels cocycles ergodiques et faiblement mélangeants.

ABSTRACT. — We study, with the help of a new condition of diophantine approximation, functional equations of « coboundary » type for step cocycles defined on irrational rotation of the circle and with values in metrizable compact groups. We deduce some explicit constructions of such cocycles ergodic and weakly mixing.

Introduction

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé et $T : X \to X$ une transformation mesurable de X qui préserve la mesure μ. Ces hypothèses font du quadruplet $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique probabilisé.

Toute application mesurable φ, définie sur X et à valeurs dans un groupe compact métrisable G, permet de construire une transformation mesurable T_φ de $X \times G$, en posant :

$$T_\varphi(x, g) = (Tx, \varphi(x)g), \quad (x, g) \in X \times G.$$

Le théorème de Fubini assure que la probabilité produit $\mu \otimes m$, où m désigne la probabilité de Haar sur G muni de sa tribu borélienne, $\mathcal{B}_G$, est invariante sous l'action de T_φ.

(*) Texte reçu le 29 août 1996, révisé le 21 janvier 1997, accepté le 18 mars 1997.
J.-M. DERRIEN, Université de Bretagne Occidentale, Laboratoire de Mathématiques, 6, avenue Le Gorgeu, BP 809, 29 285 Brest CEDEX (France).
Email : jderrien@univ-brest.fr.

Classification AMS : 28

Le système dynamique probabilisé $(X\times G, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}_G, \mu\otimes m, T_\varphi)$ ainsi défini est classiquement appelé *extension* (ou *produit croisé*) de $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ par le groupe G ; $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ étant la *base* de l'extension, et φ, son *cocycle.*

Remarquons que les itérés de la transformation T_φ font apparaître naturellement la suite d'applications $(\varphi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur X par :

$$\varphi^{(n)}(x) := \begin{cases} \varphi(T^{n-1}x)\cdots\varphi(Tx)\varphi(x) & \text{pour } n \geq 1, \\ 1 & \text{pour } n = 0. \end{cases}$$

Dans la suite, la base, $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$, de l'extension est toujours supposée ergodique ; c'est-à-dire que les éléments de la tribu $\mathcal{A}$, invariants par T, ne peuvent être que de mesure, μ, 0 ou 1.

Initialement introduit par Anzaï [1] dans le cas particulier des extensions de translations ergodiques sur le tore (de dimension 1) par le groupe $\mathcal{S}^1$ des complexes de module 1, les produits croisés sont apparus de façon naturelle dans des théorèmes de structure de systèmes dynamiques (voir [6], [17], [18]) qui généralisent le théorème de représentation des systèmes dynamiques à spectre discret de P. Halmos et J. von Neumann.

Depuis ces premiers travaux, les produits croisés ont permis la construction de nombreux exemples et contre-exemples en théorie ergodique (voir [5], [9]). Ils ont également permis de démontrer des théorèmes ergodiques ponctuels le long de sous-suites particulières (voir [10], [11]).

Introduisons à présent deux notions qui sont au centre de notre étude.

DÉFINITION. — Le cocycle φ est dit *ergodique* lorsque le système dynamique $(X \times G, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_G, \mu \otimes m, T_\varphi)$ est ergodique.

DÉFINITION. — Le cocycle φ est dit *faiblement mélangeant* lorsqu'il est ergodique et lorsque toute fonction propre pour l'action de T_φ sur $L^2(\mu \otimes m)$ est en fait $\mathcal{A}$-mesurable.

Dans cet article, on considère plus spécialement les extensions par des groupes des translations ergodiques du tore de dimension un. Dans cette situation, l'espace X s'identifie à l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$, et les cocycles φ envisagés seront supposés en escalier relativement à une subdivision finie, $\mathcal{S}$, de $[0,1[$. On s'intéresse à la construction explicite de tels cocycles qui soient ergodiques ou faiblement mélangeants. Ces questions ont déjà fait l'objet de plusieurs travaux : [3], [7], [14], [16],...

Dans [16] en particulier, W.A. Veech montre le théorème suivant.

THÉORÈME. — *Si la translation du tore considérée est associée à un irrationnel α dont les quotients partiels sont bornés, si les éléments de la* *subdivision S sont rationnels et si le groupe G est fini, alors le cocycle φ est ergodique si et seulement si ses valeurs engendrent G.*

Le théorème qui suit est une conséquence des résultats établis dans cet article. Lorsque le groupe G est fini, il permet, par exemple, de construire explicitement des cocycles faiblement mélangeants définis sur n'importe quelle translation ergodique du tore.

THÉORÈME. — *Soient α un nombre irrationnel, G un groupe compact métrisable et r un entier ≥ 2.*

Il existe, dans l'ensemble des subdivisions à r éléments du tore, un G_δ-dense, $\mathcal{G}$, de mesure pleine (qui contient les subdivisions à points rationnels), tel que tout cocycle φ, défini sur la translation ergodique du tore associée à α, à valeurs dans G et en escalier relativement à une subdivision de $\mathcal{G}$, est faiblement mélangeant dès que l'ensemble de ses sauts n'est pas contenu dans la réunion des conjugués de n'importe quel sous-groupe fermé strict de G.

Dans le cadre particulier d'un cocycle en escalier défini au-dessus d'une translation ergodique du tore décrit ci-dessus, le théorème suivant s'applique. Il a motivé notre étude.

THÉORÈME. — *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique probabilisé. Sous les hypothèses suivantes :*

(a) *l'espace X est métrique et compact, $\mathcal{A}$ est sa tribu borélienne et T est continue sur X ;*

(b) *le système $(X, \mathcal{A}, T)$ est uniquement ergodique (ie : μ est la seule probabilité invariante sous l'action de T) ;*

(c) *φ est une application mesurable, définie sur X et à valeurs dans un groupe compact métrisable G, dont l'ensemble des points de discontinuité est négligeable ;*

il y a équivalence entre :

- *le système dynamique $(X \times G, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_G, \mu \otimes m, T_\varphi)$ est ergodique ;*
- *le système $(X \times G, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_G, T_\varphi)$ est uniquement ergodique ;*
- *pour* tout *couple (x_0, g_0) dans $X \times G$ et pour toute fonction f continue sur $X \times G$, on a :*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T_\varphi^n(x_0, g_0) = \int_{X \times G} f \, \mathrm{d}\mu \otimes m.$$

Ce théorème a été initialement établi par H. Furstenberg [5] sous l'hypothèse de continuité de φ. J.-P. Conze [3] puis P. Liardet [12] l'ont ensuite généralisé aux cocycles satisfaisant l'hypothèse (c).

Plan de l'article

Dans le premier paragraphe, on rappelle quelques caractérisations classiques de l'ergodicité et du mélange faible de cocycles. On rappelle également un théorème de H. Furstenberg et R.J. Zimmer et l'on en déduit une nouvelle condition nécessaire et suffisante d'ergodicité de produits croisés. Toutes ces caractérisations reposent sur l'absence de solutions à certaines équations fonctionnelles de type « cobord ».

Ces équations fonctionnelles sont étudiées dans le paragraphe 2 lorsque le système dynamique à la base de l'extension est une translation ergodique du tore associée à un irrationnel α et lorsque le cocycle φ est en escalier. Pour cela, on introduit une nouvelle condition concernant l'approximation des distances entre les points de discontinuité de φ par la suite $(j\alpha)_{j\geq 0}$ modulo un, et l'on montre que, sous cette condition, une équation fonctionnelle donnée n'admet pas de solution lorsque les sauts de φ sont bien choisis.

Plusieurs applications du résultat principal obtenu au paragraphe 2 sont présentées dans le dernier paragraphe.

Signalons enfin que les méthodes développées dans cet article permettent d'effectuer une étude analogue lorsque la base de l'extension est la machine à additionner.

Pour terminer cette introduction, je tiens à remercier le Professeur Emmanuel Lesigne pour ses remarques et ses encouragements.

1. Caractérisation de l'ergodicité et du mélange faible des cocycles à l'aide d'équations fonctionnelles de cobord

1.1. Sur l'ergodicité des cocycles.

Tout au long de ce paragraphe, $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ désigne un système dynamique probabilisé que l'on suppose ergodique, G un groupe compact métrisable dont la tribu borélienne et la probabilité de Haar sont notées, respectivement, $\mathcal{B}_G$ et m, et φ un cocycle défini sur X et à valeurs dans G.

La première caractérisation présentée est classique. C'est une conséquence du théorème de Peter-Weyl pour les groupes compacts métrisables (voir [8]).

PROPOSITION 1.1. — *Il y a équivalence entre :*

1) *le cocycle φ est ergodique ;*

2) *pour toute représentation unitaire irréductible non triviale U du groupe G dans un espace hermitien $\mathcal{H}_U$, il n'existe pas d'application mesurable v de X dans la sphère unité de $\mathcal{H}_U$ qui vérifie*

$$v(Tx) = U\big(\varphi(x)\big)v(x), \quad \textit{pour } \mu\textit{-presque tout } x.$$

La seconde caractérisation a été introduite dans [4]. Elle permet de s'affranchir des représentations unitaires du groupe G. C'est une conséquence du théorème suivant, qui a été démontré indépendamment par H. Furstenberg [6] et R.J. Zimmer [18].

THÉORÈME 1.2. — *Si le cocycle φ n'est pas ergodique, il existe une application mesurable p de X dans G et un sous-groupe fermé H de G distinct de G tels que :*

1) *pour presque tout x dans X, $\widetilde{\varphi}(x) := p(Tx)^{-1}\varphi(x)p(x)$ appartienne à H ;*

2) *le système dynamique $(X \times G, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_G, \mu \otimes m_H, T_{\widetilde{\varphi}})$ soit ergodique (m_H désigne ici l'image de la probabilité de Haar sur H par l'injection canonique de H dans G).*

(La réciproque de ce théorème est évidemment vraie.)

PROPOSITION 1.3. — *Il y a équivalence entre :*

1) *Le cocycle φ est ergodique ;*

2) *Pour tout sous-groupe fermé H de G distinct de G, l'équation fonctionnelle*

$$v(Tx) = \varphi(x)v(x), \quad \textit{pour presque tout } x \textit{ dans } X,$$

n'a pas de solution mesurable v de X dans G/H.

Preuve. — L'implication 2) $\Rightarrow$ 1) est immédiate avec le théorème 1.2. L'implication réciproque résulte du lemme suivant du à G.W. Mackey (voir [13]).

LEMME 1.4. — *Soit G un groupe compact métrisable et H un sous-groupe fermé de G. Il existe une application mesurable $\gamma : G/H \to G$, appelée* section mesurable, *telle que*

$$\gamma(gH)H = gH, \quad \textit{pour tout } g \textit{ dans } G. \quad \square$$

1.2. Sur le mélange faible des cocycles.

De même que la proposition 1.1, la proposition suivante est classique et s'obtient grâce au théorème de Peter-Weyl.

PROPOSITION 1.5. — *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) *Le cocycle φ est faiblement mélangeant.*

2) *Pour toute représentation unitaire irréductible non triviale U du groupe G dans un espace hermitien $\mathcal{H}_U$ et pour tout complexe ξ de module 1, l'équation fonctionnelle*

(1) $$v(Tx)=\xi\, U\big(\varphi(x)\big)v(x),\quad \textit{pour presque tout } x \textit{ dans } X,$$
n'a pas de solution mesurable v de X dans la sphère unité de $\mathcal{H}_U$.

Si l'on suppose en outre le cocycle φ ergodique alors il vient la :

PROPOSITION 1.6. — *Lorsque le cocycle φ est ergodique, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) *Le cocycle φ est faiblement mélangeant.*

2) *Pour toute représentation non triviale u de G dans le groupe $\mathcal{S}^1$ des complexes de module un et pour tout élément ξ de $\mathcal{S}^1$, l'équation fonctionnelle*
$$v(Tx)=\xi\, u\big(\varphi(x)\big)v(x),\quad \textit{pour presque tout } x \textit{ dans } X,$$
n'a pas de solution mesurable v de X dans $\mathcal{S}^1$.

Preuve. — Il suffit d'établir que si l'équation fonctionnelle (1) de la proposition 1.5 admet une solution v de X dans la sphère unité de $\mathcal{H}_U$ alors, nécessairement, l'espace hermitien $\mathcal{H}_U$ est de dimension 1.

Pour x dans X, notons $V(x)$ la droite vectorielle de $\mathcal{H}_U$ engendrée par $v(x)$, où v désigne une telle solution mesurable.

Il résulte de la relation satisfaite par v que l'application
$$F(x,g):=U(g^{-1})V(x),\quad (x,g)\in X\times G,$$
est T_φ-invariante.

L'ergodicité du cocycle φ entraîne donc que l'application V est presque partout constante, égale à une droite vectorielle V_0 de $\mathcal{H}_U$, et l'on a
$$V_0=U(g)V_0,\quad \text{pour tout } g \text{ dans } G.$$
L'irréductibilité de la représentation unitaire U permet ainsi d'affirmer que $\mathcal{H}_U = V_0$. L'espace $\mathcal{H}_U$ est donc un espace hermitien de dimension 1. □

2. Cocycles en escalier au-dessus de translations ergodiques du tore

Dans ce paragraphe, on identifie, de manière classique, le tore (de dimension 1) à l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$.

Avec cette identification, toute translation ergodique du tore s'écrit sous la forme d'un système dynamique $([0,1[,\mathcal{B}_{[0,1[},\mu,T)$, où μ est la mesure de Lebesgue et
$$T:[0,1[\longrightarrow[0,1[,\qquad x\longmapsto\{x+\alpha\}=x+\alpha-[x+\alpha]$$
pour un nombre irrationnel $\alpha\in[0,1[$, dont le développement en fractions continues est noté $[0;a_1,a_2,\dots]$, et la suite de ses convergents, $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$.

Comme dans le paragraphe précédent, le triplet $(G, \mathcal{B}_G, m)$ désigne un groupe compact métrisable, muni de sa tribu borélienne et de sa probabilité de Haar.

De plus, les cocycles $\varphi : [0,1[\to G$ envisagés sont supposés en escalier relativement à une subdivision

$$\mathcal{S} = \{0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_r = t_0 < 1\}$$

de $[0,1[$ (*i.e.* φ est constant sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, $0 \leq i \leq r-1$) et l'on considère à nouveau les produits croisés :

$$\big([0,1[\times G, \mathcal{B}_{[0,1[} \otimes \mathcal{B}_G, \mu \otimes m, T_\varphi\big).$$

L'étude des propriétés ergodiques de ces produits croisés met en jeu l'approximation des pas de la subdivision $\mathcal{S}$ par la suite $(\{j\alpha\})_{j \geq 0}$. C'est pourquoi on introduit, dans la définition suivante, une notion de séparation concernant l'irrationnel α et la subdivision $\mathcal{S}$.

DÉFINITION 2.1. — Soit $\mathcal{S} = \{0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_r = t_0 < 1\}$ une subdivision de $[0,1[$.

- Un point t_{i_0}, $i_0 \in \{1, 2, \ldots, r\}$, sera dit *$\alpha$-isolé* (dans $\mathcal{S}$) si l'on peut trouver une suite de rationnels $(\alpha_n)_n$ et une suite d'entiers naturels strictement croissante $(\ell_n)_n$ telles que

$$\inf_n \big(\tfrac{1}{2} \ell_n \Delta_n(i_0) - r\ell_n^2 |\alpha - \alpha_n|\big) > 0$$

où, avec $\|x\| = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |\, x - k|$,

$$\Delta_n(i_0) = \min_{\substack{1 \leq i \leq r \\ |j| < \ell_n \\ (i,j) \neq (i_0, 0)}} \big\|(t_{i_0} - t_i) - j\alpha_n\big\|.$$

- On dira que la subdivision $\mathcal{S}$ est *α-séparée* si chacun de ses points est α-isolé.

Cette condition de α-séparation est proche d'une condition introduite par P. Gabriel, M. Lemańczyk et P. Liardet dans [7].

REMARQUE 1. — Il est immédiat de vérifier que la suite $(\alpha_n)_n$ associée à un point t_{i_0} α-isolé dans une subdivision $\mathcal{S}$ converge nécessairement vers l'irrationnel α.

Des exemples de subdivisions α-séparées sont donnés en fin de paragraphe. On montre en particulier que les subdivisions à points rationnels sont α-séparées et que « presque toute » subdivision est α-séparée.

En utilisant les méthodes de J.-P. Conze [3] pour l'étude des cocycles en escalier, on peut à présent montrer le théorème principal de ce paragraphe.

THÉORÈME 2.2. — *Soient $\mathcal{S}$ une subdivision de* $[0,1[$ *et* $\varphi : [0,1[\to G$ *un cocycle en escalier relativement à $\mathcal{S}$. Soit H un sous-groupe fermé de G. Si t_{i_0} est un point α-isolé dans $\mathcal{S}$ et si le saut de φ en t_{i_0} (c'est-à-dire $\varphi(t_{i_0}-0)^{-1}\varphi(t_{i_0}+0)$) n'appartient pas à la réunion des conjugués de H alors, l'équation fonctionnelle :*

$$v(\{x+\alpha\}) = \varphi(x)v(x), \quad \textit{pour presque tout } x \textit{ dans } [0,1[,$$

n'a pas de solution mesurable v de $[0,1[$ *dans G/H.*

Des applications de ce théorème pour la construction de cocycles en escalier ergodiques et faiblement mélangeants à valeurs dans des groupes compacts métrisables particuliers sont données dans le paragraphe suivant.

REMARQUE 2. — Le théorème 2.2 reste vrai lorsque G désigne un groupe topologique muni d'une distance invariante par translations à droite et à gauche, à condition que la réunion des conjugués du sous-groupe H constitue un ensemble fermé de G.

REMARQUE 3. — Le théorème 2.2 est démontré dans [3] dans les deux situations suivantes :

• Pour un groupe topologique G admettant une distance invariante par translations à droite et à gauche, un sous-groupe H réduit à l'élément neutre de G et pour n'importe quel élément t_{i_0} d'une subdivision $\mathcal{S}$ à points rationnels.

• Pour un groupe topologique abélien G et un point t_{i_0} d'une subdivision $\mathcal{S} = \{0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_r = t_0\}$ pour lequel il existe une suite strictement croissante $(k_n)_n$ telle que

$$(*) \qquad r \sup_n k_n \|k_n\alpha\| < \min_{i\neq i_0} \inf_n \big\|k_n(t_i - t_{i_0})\big\|.$$

(On peut montrer qu'un tel point t_{i_0} est α-isolé dans $\mathcal{S}$.)

J.-P. Conze remarque en outre que :

• pour tout irrationnel α, pour tout entier $r \ge 2$, presque toute subdivisions à r éléments, au sens de la mesure de Lebesgue sur $[0,1[^r$, ne possède que des points qui vérifient la condition (*).

• pour tout irrationnel α à quotients partiels non bornés, tous les éléments d'une subdivision à points rationnels vérifient la condition (*).

Preuve du théorème 2.2.

Commençons par introduire quelques notations.

Comme G est compact, l'ensemble $\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}$ est fermé. Ainsi,

$$\delta_0 := d\Big(\varphi(t_{i_0}-0)^{-1}\varphi(t_{i_0}+0), \bigcup_{g\in G} gHg^{-1}\Big) > 0,$$

où d désigne une distance sur G, invariante par translations à droite et à gauche.

Les suites associées à t_{i_0} par la définition 2.1 étant $(\alpha_n)_n$ et $(\ell_n)_n$, on pose, pour tout $n \geq 1$,

$$\phi_n(x) = \varphi\big(\{x+(\ell_n-1)\alpha_n\}\big)\cdots\varphi\big(\{x+\alpha_n\}\big)\varphi(x), \quad x \in [0,1[\,;$$

$$A_n = \big\{x \in [0,1[\,;\ \varphi^{(\ell_n)}(x) = \phi_n(x)\big\}\,;$$

$$\Gamma_n = \text{ensemble des points de discontinuité de la fonction en escalier } \phi_n.$$

On obtient alors les quatre propriétés suivantes qui expriment que l'on peut facilement contrôler la distance entre les points de discontinuité des fonctions ϕ_n et majorer la mesure du complémentaire de l'ensemble A_n.

1) L'ensemble Γ_n est contenu dans l'ensemble

$$\big\{\{t_i - j\alpha_n\}\,;\ i=1,\dots,r,\ j=0,\dots,\ell_n-1\big\}$$

des points de discontinuité de chaque fonction $\varphi(\{\cdot + j\alpha_n\})$, $0 \leq j < \ell_n$.

2) Comme $A_n^{\mathrm{c}} \subset \bigcup_{j=0}^{\ell_n-1} \big\{x\in[0,1[\,;\ \varphi(\{x+j\alpha\}) \neq \varphi(\{x+j\alpha_n\})\big\}$, il vient :

$$\mu(A_n^{\mathrm{c}}) \leq \sum_{j=0}^{\ell_n-1} 2r|j\alpha - j\alpha_n| = r|\alpha-\alpha_n|\ell_n(\ell_n-1) \leq r\ell_n^2|\alpha-\alpha_n|.$$

3) L'ensemble Γ_n contient $\{\{t_{i_0} - j\alpha_n\}\,;\ 0 \leq j < \ell_n\}$ et la distance entre un point de type i_0 (*i.e.* de la forme $\{t_{i_0} - j\alpha_n\}$) et un autre point distinct de Γ_n est minorée par $\Delta_n(i_0) > 0$.

4) Comme la suite $(\alpha_n)_n$ converge vers α, que l'ensemble Γ_n contient $\{\{t_{i_0} - j\alpha_n\}\,;\ 0 \leq j < \ell_n\}$ et comme la suite $(\{j\alpha\})_{j\geq 0}$ est dense dans $[0,1[$, on peut rendre la distance entre deux points successifs de Γ_n arbitrairement petite à condition de choisir l'entier n suffisamment grand.

Pour démontrer le théorème 2.2, on raisonne par l'absurde et l'on suppose qu'il existe une solution mesurable v à l'équation fonctionnelle :

$$v\big(\{x+\alpha\}\big) = \varphi(x)v(x), \quad \text{pour presque tout } x \text{ dans } [0,1[.$$

Soit ε un réel strictement positif fixé. Comme l'application v est mesurable, il existe une partie F de $[0,1[$ de mesure supérieure à $1-\varepsilon$ telle que la restriction de v à cet ensemble F soit uniformément continue.

En particulier, il existe donc $\eta_0 > 0$ tel que :

$$\text{si } x, y \in F \text{ et si } \|x-y\| \leq \eta_0 \text{ alors } d\big(v(x), v(y)\big) < \tfrac{1}{2}\delta_0.$$

On peut également supposer que, si x est un élément de F, alors :

$$v\big(\{x+n\alpha\}\big) = \varphi^{(n)}(x)v(x), \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

Soient maintenant I et J, deux intervalles consécutifs de $[0,1[$ dont les extrémités appartiennent à Γ_n, dont les intérieurs sont disjoints de Γ_n et dont l' extrémité commune est un point de type i_0, noté $\{t_{i_0} - j_0\alpha_n\}$.

Si x est dans I et y dans J, on a, si $\varphi(\{x+j_0\alpha_n\}) = \varphi(t_{i_0} \mp 0)$:

$$\begin{aligned}
\phi_n(y) &= \varphi\big(\{y+(\ell_n-1)\alpha_n\}\big)\cdots\varphi\big(\{y+(j_0+1)\alpha_n\}\big)\varphi(\{y+j_0\alpha_n\}) \\
&\qquad\qquad \times \varphi\big(\{y+(j_0-1)\alpha_n\}\big)\ldots\varphi\big(\{y+\alpha_n\}\big)\varphi(y) \\
&= \varphi\big(\{x+(\ell_n-1)\alpha_n\}\big)\ldots\varphi\big(\{x+(j_0+1)\alpha_n\}\big) \\
&\qquad\qquad \times \varphi(t_{i_0} \pm 0)\varphi\big(x+(j_0-1)\alpha_n\big)\cdots\varphi(x+\alpha_n)\varphi(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, en notant $g_0 := \varphi(\{x+(j_0-1)\alpha_n\})\cdots\varphi(\{x+\alpha_n\})\varphi(x)$, il vient :

$$\phi_n(y)^{-1}\phi_n(x) = \begin{cases} {g_0}^{-1}\varphi(t_{i_0}-0)^{-1}\varphi(t_{i_0}+0)g_0 \\ \text{ou} \\ {g_0}^{-1}\varphi(t_{i_0}+0)^{-1}\varphi(t_{i_0}-0)g_0. \end{cases}$$

Si l'entier n est choisi assez grand pour que, à l'aide de la propriété 4 ci-dessus, on puisse supposer les longueurs des intervalles I et J inférieures à $\frac{1}{2}\eta_0$ et si x et y appartiennent en outre à l'ensemble

$$F \cap (F - \ell_n\alpha) \cap A_n,$$

on a :

$$\begin{aligned}
\delta_0 &= d\Big(\phi_n(y)^{-1}\phi_n(x), \bigcup_{g\in G} gHg^{-1}\Big) \\
&= d\Big(\varphi^{(\ell_n)}(y)^{-1}\varphi^{(\ell_n)}(x), \bigcup_{g\in G} gHg^{-1}\Big) \\
&\leq d\big(\varphi^{(\ell_n)}(y)^{-1}\varphi^{(\ell_n)}(x), g(x)Hg(x)^{-1}\big) \\
&\qquad\qquad \text{où } g(x) \in G \text{ vérifie } g(x)H = v(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= d\big(\varphi^{(\ell_n)}(x)v(x), \varphi^{(\ell_n)}(y)v(x)\big)\\
&\le d\big(\varphi^{(\ell_n)}(x)v(x), \varphi^{(\ell_n)}(y)v(y)\big) + d\big(\varphi^{(\ell_n)}(y)v(x), \varphi^{(\ell_n)}(y)v(y)\big)\\
&\le d\big(v(\{x+\ell_n\alpha\}), v(\{y+\ell_n\alpha\})\big) + d\big(v(x), v(y)\big)\\
&< \delta_0,
\end{aligned}
$$

ce qui est impossible.

L'un des deux intervalles I ou J est donc contenu dans le complémentaire de $F \cap (F - \ell_n\alpha) \cap A_n$.

En procédant de la sorte avec les ℓ_n points de type i_0 de Γ_n, on montre ainsi qu'il existe au moins $\frac{1}{2}\ell_n$ intervalles deux à deux disjoints, de mesure au moins égale à $\Delta_n(i_0)$ et qui sont contenus dans $(F \cap (F - \ell_n\alpha) \cap A_n)^c$. Ainsi,

$$
\tfrac{1}{2}\ell_n\Delta_n(i_0) \le \mu\big((F \cap \{F_\varepsilon - \ell_n\alpha\} \cap A_n)^c\big) \le 2\varepsilon + r\ell_n^2|\alpha - \alpha_n|,
$$

ce qui est absurde lorsque t_{i_0} est α-isolé, si l'on a choisi au départ ε assez petit. $\square$

Exemples de subdivisions α-séparées

On commence par donner des exemples explicites de subdivisions α-séparées (propositions 2.4 et 2.5) ; puis on démontre qu'il en existe « beaucoup » aussi bien du point de vue de la théorie de la mesure que du point de vue topologique (proposition 2.6).

Tout d'abord, il convient d'énoncer une condition suffisante pour qu'une subdivision $\mathcal{S}$ soit α-séparée qui est mieux adaptée à nos besoins.

LEMME 2.3. — *Pour que la subdivision $\mathcal{S} = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_r = t_0\}$ de $[0,1[$ soit α-séparée, il suffit qu'elle vérifie la condition suivante : il existe un réel a dans $\big]0, \frac{1}{2r}\big[$ tel que*

$$
\limsup_n \; q_n\Big(\min_{1\le i<i'\le r} \; \min_{|j|<[aq_n]} \big\|(t_{i'} - t_i) - jp_n/q_n\big\|\Big) > 2ra,
$$

où $(p_n/q_n)_n$ est la suite des convergents de α.

Preuve. — Par hypothèse, on peut trouver une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k\ge1}$ et un réel C tels que, pour tout $k \ge 1$:

$$
q_{n_k}\Big(\min_{1\le i<i'\le r} \; \min_{|j|\;<[aq_{n_k}]} \big\|(t_{i'} - t_i) - jp_{n_k}/q_{n_k}\big\|\Big) \ge C > 2ra.
$$

Pour $k \geq 1$, posons alors $\ell_k := [aq_{n_k}]$ et $\alpha_k := \dfrac{p_{n_k}}{q_{n_k}}$. On a ainsi

$$q_{n_k}\Big(\min_{\substack{1\leq i,i'\leq r\\ |j|<\ell_k\\ (i,j)\neq(i',0)}} \big\|(t_{i'}-t_i)-j\alpha_k\big\|\Big) \geq \min(1,C) > 2ra$$

puisque, pour $0<|j|<[aq_{n_k}]<q_{n_k}$, $j\alpha_k$ n'est pas entier (p_{n_k} et q_{n_k} sont premiers entre eux) et qu'ainsi, $\|j\alpha_k\| \geq \dfrac{1}{q_{n_k}}$.

Or, on a toujours

$$|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}};$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ell_k\Big(\min_{\substack{1\leq i,i'\leq r\\ |j|<\ell_k\\ (i,j)\neq(i',0)}} \big\|(t_{i'}-t_i)-j\alpha_k\big\|\Big) &\geq \frac{1}{2}\frac{\ell_k}{q_{n_k}}\min(1,C)\\ &> \frac{ra\ell_k}{q_{n_k}} \geq \frac{r\ell_k^2}{q_{n_k}q_{n_k+1}} \geq r\ell_k^2|\alpha-\alpha_k|,\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ell_k\Big(\min_{\substack{1\leq i,i'\leq r\\ |j|<\ell_k\\ (i,j)\neq(i',0)}} \big\|(t_{i'}-t_i)-j\alpha_k\big\|\Big) - r\ell_k^2|\alpha-\alpha_k|\\ \geq \frac{\ell_k}{q_{n_k}}\big(\tfrac{1}{2}\min(1,C)-ra\big),\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme car $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{\ell_k}{q_{n_k}} = a > 0$. □

PROPOSITION 2.4. — *Pour tout irrationnel α, toute subdivision $\mathcal{S}$ de $[0,1[$ à points rationnels est α-séparée.*

Preuve. — Posons $\mathcal{S} = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_r = t_0\}$ et notons d un dénominateur commun aux points t_i, $1\leq i\leq r$.

Soient i et i' deux éléments distincts de $\{1,\ldots,r\}$. Il existe un entier m tel que $t_{i'}-t_i = \dfrac{m}{d}$.

D'autre part, si $0<|j|<\dfrac{q_n}{d}$, on a :

$$\big(t_{i'}-t_i\big) - j\frac{p_n}{q_n} = \frac{m - dj\frac{p_n}{q_n}}{d} \notin \mathbb{Z}.$$

En effet, dans le cas contraire, $dj\dfrac{p_n}{q_n}$ appartiendrait à $\mathbb{Z}$ et, comme p_n et q_n sont premiers entre eux, q_n diviserait dj, ce qui est exclus puisque nous supposons $d|j|<q_n$.

Ainsi,

$$\min_{1\leq i<i'\leq r}\ \min_{|j|<q_n/d}\left\|(t_{i'}-t_i)-j\frac{p_n}{q_n}\right\| \geq \min\Big(\min_{i\neq i'}(\|t_i-t_{i'}\|),\frac{1}{dq_n}\Big)=\frac{1}{dq_n}$$

et donc, si l'on choisit a dans $\left]0,\dfrac{1}{2dr}\right[$, il vient $[aq_n]\leq q_n/d$ et

$$q_n\Big(\min_{1\leq i<i'\leq r}\ \min_{|j|<[aq_n]}\left\|(t_{i'}-t_i)-j\frac{p_n}{q_n}\right\|\Big)\geq\frac{1}{d}>2ra. \quad \square$$

Lorsque α est à quotients partiels bornés et lorsque $r=2$, on peut obtenir une condition nécessaire et suffisante de α-séparation de la subdivision $\mathcal{S}$.

PROPOSITION 2.5. — *Pour tout irrationnel α à quotients partiels bornés, pour tout couple (u,v) de $[0,1[^2$ qui vérifie $u-v\notin\mathbb{Z}\alpha+\mathbb{Z}$ mod 1, la subdivision $\{u,v\}$ correspondante de $[0,1[$ est α-séparée.*

Preuve. — L'argument est similaire à un argument utilisé dans [14] par K.D. Merrill. Raisonnons par l'absurde et supposons que la subdivision $\{u<v\}$ ne vérifie pas la condition introduite au lemme 2.3. Alors, à tout a dans $]0,\frac{1}{4}[$ et tout $\delta>0$, on peut associer un entier N tel que, pour tout $n\geq N$, on ait

$$q_n\left\|(u-v)-j_n\frac{p_n}{q_n}\right\|\leq 4a+\delta$$

pour un entier $j_n\in\big\{-[aq_n]+1,\ldots,[aq_n]-1\big\}$.

Pour la suite, on fixe a dans $]0,\frac{1}{4}[$ et $\delta>0$ tels que

$$9a+2\delta<\frac{1}{M+1},$$

où M désigne un majorant de la suite des quotients partiels de α.

On déduit de ce qui précède qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels $j_n\neq j_{n+1}$. En effet, dans le cas contraire, il existerait un entier j dans $\mathbb{Z}$ tel que, pour tout n assez grand,

$$\left\|(u-v)-j\frac{p_n}{q_n}\right\|\leq\frac{4a+\delta}{q_n}$$

ce qui aboutit à la contradiction $u-v\in j\alpha+\mathbb{Z}$ lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$.

Soit donc $n \geq N$ tel que $j_n \neq j_{n+1}$. Il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M+1} &\leq \frac{q_n}{q_{n+1}} \\
&\leq q_n \Big\| (j_{n+1} - j_n) \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \Big\| \\
&\qquad\qquad \text{car } |j_{n+1} - j_n| < [a q_{n+1}] + [a q_n] < q_{n+1} \\
&\leq q_n \big\| j_{n+1}\alpha_{n+1} - (u-v) \big\| + q_n \big\| (u-v) - j_n \alpha_n \big\| \\
&\qquad\qquad + q_n \Big\| j_n \Big(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \Big) \Big\| \\
&\leq (4a+\delta) + \frac{q_n}{q_{n+1}} (4a+\delta) + q_n |j_n| \times \Big\| \frac{1}{q_n q_{n+1}} \Big\| \\
&\qquad\qquad \text{car } p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n \\
&\leq 2(4a+\delta) + \frac{|j_n|}{q_{n+1}} \leq 2(4a+\delta) + a,
\end{aligned}$$

ce qui est absurde étant donnée l'hypothèse faite sur a et δ. $\square$

Remarque 4. — La proposition précédente devient fausse lorsque l'irrationnel α n'est plus à quotients partiels bornés puisque, dans ce cas, W.A. Veech a prouvé dans [15] l'existence d'une famille (qu'il explicite dans son article) non dénombrable (bien que de mesure nulle) de valeurs de t pour lesquelles si $\mathcal{S}_t := \{0 < t\}$ et si $\varphi := \mathbf{1}_{[0,t[} - \mathbf{1}_{[t,1[}$ alors le produit croisé :

$$\big([0,1[\times \{-1,+1\}, \mathcal{B}_{[0,1[} \otimes \mathcal{B}_{\{-1,+1\}}, \mu \otimes m, T_\varphi \big)$$

n'est pas ergodique bien que les sauts du cocycle engendrent $\{-1,1\}$; la subdivision $\mathcal{S}_t$ ne peut donc pas être α-séparée d'après le corollaire 3.3 ci-dessous.

Dans la suite, on identifie les subdivisions à r éléments de $[0,1[$ avec des points de l'ensemble :

$$\mathcal{O}_r := \big\{ (t_1, t_2, \ldots, t_r) \in [0,1[^r \; ; \; 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_r < 1 \big\}.$$

On montre alors que l'ensemble des subdivisions α-séparées constitue une « grosse » partie de $\mathcal{O}_r$ du point de vue de la mesure, ainsi que du point de vue topologique.

Proposition 2.6. — *Soit $r \geq 2$ un entier fixé. L'ensemble des subdivisions α-séparées à r éléments est de mesure pleine et est un G^δ-dense de $\mathcal{O}_r$.*

Preuve. — D'après le lemme 2.3, la proposition 2.6 sera établie si l'on montre qu'il existe un réel strictement positif ρ tel que l'ensemble

$$\Big\{(t_1, t_2, \dots, t_r) \in [0,1[^r\,; \\ \limsup_n q_n\Big(\min_{1\le i<i'\le r}\ \min_{0\le k\le q_n-1}\Big\|(t_{i'}-t_i)-\frac{k}{q_n}\Big\|\Big) > \rho\Big\}$$

soit de mesure pleine et soit un G_δ-dense de $[0,1[^r$.

On montre en fait que cette affirmation est vraie pour tout réel ρ dans $]0,\rho_0]$, où $\rho_0 := \dfrac{1}{3r(r-1)}$, en établissant que l'ensemble E suivant est de mesure pleine et est un G_δ-dense :

$$E := \bigcap_{n\ge 0}\ \bigcup_{m\ge n} {A_m}^c,$$

où

$$A_m := \Big\{(t_1, t_2, \dots, t_r) \in [0,1[^r\,; \\ t_{i'} - t_i \in \bigcup_{k=0}^{q_m-1} \overline{B}\Big(\frac{k}{q_m}, \frac{\rho_0}{q_m}\Big) \text{ pour un couple} \\ \text{d'entiers } (t_i, t_{i'}) \text{ qui vérifie } 1 \le i < i' \le r\Big\},$$

avec, pour x_0 dans $[0,1[$ et $\rho > 0$,

$$\overline{B}(x_0,\rho) := \big\{x \in [0,1[\,;\ \|x - x_0\| \le \rho\big\}.$$

Pour cela, montrons que, pour tout entier $n \ge 0$, le fermé de $[0,1[^r$:

$$F_n := \bigcap_{m\ge n} A_m,$$

est négligeable et remarquons qu'il suffit d'établir l'inégalité

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu^{\otimes r}(A_n \cap B) < \tfrac{1}{2}\mu^{\otimes r}(B), \tag{1}$$

pour n'importe quel borélien B de $[0,1[^r$ qui n'est pas négligeable.

En effet, l'inégalité précédente permet de construire, par récurrence, une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\ge 1}$ telle que, pour tout $k \ge 2$ et tout j dans $\{1, \dots, k-1\}$, on ait

$$\mu^{\otimes r}(A_{n_k} \cap A_{n_{k-1}} \cap \dots \cap A_{n_j}) \le \frac{1}{2^{k-j}},$$

ce qui permet de conclure.

Pour établir l'inégalité (1), introduisons la notation suivante :

$$D_n := \bigcup_{k=0}^{q_n-1} \overline{B}\Big(\frac{k}{q_n}, \frac{\rho_0}{q_n}\Big), \quad n \geq 1.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\mu^{\otimes r}(A_n \cap B) &\leq \sum_{1 \leq i < i' \leq r} \int_{\mathcal{T}^r} \mathbf{1}_{D_n}(t_{i'} - t_i)\mathbf{1}_B(t_1, t_2, \ldots, t_r)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_r \\ &= \sum_{1 \leq i < i' \leq r} \int_{\mathcal{T}^r} \mathbf{1}_{D_n}(t_{i'})\mathbf{1}_B(t_1, t_2, \ldots, t_{i'-1}, t_{i'} + t_i, \\ &\qquad\qquad t_{i'+1}, \ldots, t_r)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_r \\ &= \sum_{1 \leq i < i' \leq r} \int_{\mathcal{T}^1} \mathbf{1}_{D_n}(t_{i'})F_{(i,i')}(t_{i'})\,\mathrm{d}t_{i'},\end{aligned}$$

où $\mathcal{T}^r$ désigne le tore de dimension r et

$$\begin{aligned}F_{(i,i')}(t) := \int_{\mathcal{T}^{r-1}} &\mathbf{1}_B(t_1, t_2, \ldots, t_{i'-1}, t + t_i, t_{i'+1}, \ldots, t_r) \\ &\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_{i'-1}\,\mathrm{d}t_{i'+1} \cdots \mathrm{d}t_r.\end{aligned}$$

Le lemme suivant, dont la démonstration ne pose pas de difficultés, permet donc de conclure.

Lemme 2.7. — *Pour toute fonction mesurable $f : [0,1[\to \mathbb{R}^+$, la convergence suivante a lieu :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1[} \mathbf{1}_{D_n}(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 2\rho_0 \int_{[0,1[} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. Application du théorème 2.2

Tout au long de ce paragraphe, le quadruplet $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ désigne une translation ergodique du tore (caractérisée par un irrationnel noté α). On considère un cocycle φ défini au-dessus de $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$, à valeurs dans un groupe compact métrisable G et en escalier relativement à une subdivision $\mathcal{S}$ de X identifié à l'intervalle $[0,1[$.

On supposera toujours la subdivision $\mathcal{S}$ α-séparée.

Le théorème 2.2 associé à la proposition 1.3 donne immédiatement le :

THÉORÈME 3.1. — *Si, pour tout sous-groupe fermé H de G distinct de G, l'un des sauts du cocycle φ n'appartient pas à la réunion $\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}$ alors φ est ergodique.*

Comme tout sous-groupe fermé normal H de G, distinct de G, tel que G/H soit abélien, est contenu dans le noyau d'une représentation de G, unitaire, de dimension 1, non triviale (voir [8]), sous l'hypothèse d'ergodicité du cocycle φ, le théorème 2.2 associé cette fois à la proposition 1.6 donne le :

THÉORÈME 3.2. — *Supposons le cocycle φ ergodique. Il y a équivalence entre les points suivants.*

1) *Le cocycle φ est faiblement mélangeant.*

2) *Le sous-groupe de G engendré par les sauts de φ n'est pas contenu dans un sous-groupe fermé normal H de G, distinct de G et tel que G/H soit abélien.*

REMARQUE 1. — Ainsi, lorsque, pour tout sous-groupe fermé H de G distinct de G, l'un des sauts du cocycle φ n'appartient pas à $\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}$, le cocycle φ est faiblement mélangeant.

REMARQUE 2. — On peut également utiliser le théorème 2.2 pour étudier les équations fonctionnelles de la proposition 1.1. Il suffit pour cela d'écrire la sphère unité de l'espace hermitien, $\mathcal{H}_U$, comme quotient de groupes unitaires (voir, par exemple, la proposition 3.9 ci-dessous).

(a) Cas où G est abélien.

On déduit immédiatement des théorèmes 3.1 et 3.2, le :

COROLLAIRE 3.3. — *Si le groupe G est abélien alors φ est faiblement mélangeant si et seulement si l'ensemble des sauts de φ engendre un sous-groupe dense dans G .*

Plus précisément, en ce qui concerne l'ergodicité, on a le résultat suivant :

COROLLAIRE 3.4. — *Supposons le groupe G abélien. Le cocycle φ est ergodique si et seulement si l'application $u\circ\varphi$ n'est identiquement égale à une valeur propre du système dynamique $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ que lorsque u est le caractère trivial de G. Dans le cas contraire et si les valeurs de φ engendrent G, le produit croisé :*

$$(X\times G,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}_G,\mu\otimes m,T_\varphi),$$

admet un facteur défini sur $X \times X$ de la forme :

$$S_p : (x, y) \longmapsto (Tx, y + p\alpha),$$

pour un entier p fixé.

Preuve. — D'après le théorème 2.2, l'équation fonctionnelle :

$$v(Tx) = u\big(\varphi(x)\big)v(x), \quad \text{pour presque tout } x \text{ dans } X,$$

où u est un caractère de G, n'admet de solution mesurable $v : X \to \mathcal{S}^1$, que dans le cas où le cocycle $u \circ \varphi$ est identiquement constant, égal, nécessairement, à une valeur propre de $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$.

La proposition 1.1 permet donc d'établir la première partie du corollaire. Pour montrer la seconde partie du corollaire 3.4, rappelons par exemple l'argument de W.A. Veech introduit dans [16].

Comme les valeurs de φ engendrent G, si u est une représentation non triviale de G dans $\mathcal{S}^1$ pour laquelle l'application $u \circ \varphi$ est identiquement égale à une valeur propre de T, u est nécesairement une représentation surjective.

Ainsi, si l'on définit :

$$\begin{aligned} \sigma : X \times G &\longrightarrow X \times X \\ (x, g) &\longmapsto \Big(x, \frac{1}{2\pi}\arg\big(u(g)\big)\Big) \end{aligned}$$

il vient :

$$\sigma(\mu \otimes m) = \mu \otimes \mu.$$

Comme, par ailleurs, $\sigma \circ T_\varphi = S_p \circ \sigma$ sur $X \times G$, pour l'entier p défini par $u \circ \varphi \equiv e^{2i\pi p\alpha}$, on a montré que S_p est un facteur de T_φ. $\square$

Exemple. — Lorsque G est le tore de dimension 1, le cocycle φ est ergodique si et seulement si l'ensemble des valeurs de φ n'est pas contenu dans $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\alpha$ mod 1.

(b) Cas où G est fini.

La proposition suivante, que l'on trouve par exemple dans [2], montre que l'on peut construire explicitement, à l'aide des théorème 3.1 et 3.2, des cocycles φ faiblement mélangeants à valeurs dans n'importe quel groupe fini G.

PROPOSITION 3.5. — *Lorsque G est fini, la réunion des conjugués de n'importe quel sous-groupe strict de G est distincte de G.*

Par exemple, on en déduit le :

COROLLAIRE 3.6. — *Lorsque G est fini et lorsque l'ensemble des sauts du cocycle φ contient un représentant de chaque classe de conjugaison de G, le cocycle φ est faiblement mélangeant.*

La proposition suivante montre que l'on peut toujours construire un cocycle à quatre marches faiblement mélangeant à valeurs dans le groupe symétrique, $\mathcal{S}_n$.

PROPOSITION 3.7. — *Soit p_n un nombre premier tel que $\frac{1}{2}n < p_n \leq n$. Si le cocycle φ est à valeurs dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et si l'ensemble de ses sauts contient un n-cycle, un p_n-cycle et une transposition, alors φ est faiblement mélangeant.*

Preuve. — La proposition 3.7 résulte du fait que toute partie de $\mathcal{S}_n$ contenant un n-cycle, un p_n-cycle et une transposition, engendre $\mathcal{S}_n$. □

(c) Cas où $G = \mathrm{U}(2)$ ou $\mathrm{SO}(3)$.

Si D désigne le sous-groupe de $U(2)$ des matrices diagonales (resp. le sous-groupe fermé de $\mathrm{SO}(3)$ engendré par une rotation d'angle incommensurable avec π), la réunion des conjugués de D est égale à $\mathrm{U}(2)$ (resp. $\mathrm{SO}(3)$). Le théorème 2.2 est donc insuffisant pour permettre de construire un cocycle ergodique à valeurs dans $\mathrm{U}(2)$ ou à valeurs dans $\mathrm{SO}(3)$.

Ce théorème permet néammoins de traiter, pour ces deux groupes, certaines des équations fonctionnelles qui apparaissent dans les propositions 1.1 et 1.3.

1) *Description de systèmes complets de représentations unitaires irréductibles pour* $\mathrm{U}(2)$ *et* $\mathrm{SO}(3)$.

Pour un entier $n \geq 0$, désignons par E_n, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ des polynômes homogènes de degré n. C'est un espace hermitien lorsqu'il est muni du produit scalaire :

$$(P, Q) := \int_{|z_1|^2+|z_2|^2 \leq 1} P(z_1, z_2)\, \overline{Q}(z_1, z_2)\, \mathrm{d}z_1\, \mathrm{d}z_2.$$

Le groupe des endomorphismes unitaires de E_n sera noté $\mathcal{U}(E_n)$.

Toujours pour un entier $n \geq 0$ et lorsque M est élément de $\mathrm{U}(2)$, on définit un élément de $\mathcal{U}(E_n)$ en posant :

$$\begin{aligned} V_n(M) : E_n &\longrightarrow E_n \\ P(z_1, z_2) &\longmapsto P\big((z_1, z_2)M\big). \end{aligned}$$

Enfin, on désigne par λ une application de $\mathcal{S}^1$ dans lui-même qui vérifie, pour tout complexe z de module 1, $\lambda(z)^2 = z$.

Il vient alors (voir [8]) le :

THÉORÈME 3.8. — *La famille de morphismes :*

$$A_m \otimes V_n : \mathrm{U}(2) \longrightarrow \mathcal{U}(E_n),$$
$$M \longmapsto \lambda(\det M)^m V_n\big(\overline{\lambda(\det M)}M\big)$$

où $n \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$ *et* $m+n$ *pair, forme un système complet de représentations unitaires irréductibles de* $\mathrm{U}(2)$. *De plus, la famille restreinte :*

$$\{A_0 \otimes V_n \; ; \; n \geq 0 \textit{ pair}\},$$

forme un système complet de représentations unitaires irréductibles de $\mathrm{SU}(2)/\{-1,+1\} \equiv \mathrm{SO}(3)$.

2) *Réduction de la recherche d'un cocycle ergodique à valeurs dans* $\mathrm{U}(2)$ *à la recherche d'un cocycle ergodique à valeurs dans* $\mathrm{SO}(3)$.

PROPOSITION 3.9. — *On suppose que* $G = \mathrm{U}(2)$ *et que l'un des sauts* s_0 *du cocycle* φ *admet deux valeurs propres* $\lambda_1 := \mathrm{e}^{i\theta_1}$ *et* $\lambda_2 := \mathrm{e}^{i\theta_2}$ *telles que* θ_1, θ_2 *et* π *soient rationnellement indépendants.*

Alors, si l'application $\lambda : \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^1$, *introduite ci-dessus, est choisie mesurable, si* p *désigne la projection canonique de* $\mathrm{SU}(2)$ *sur* $\mathrm{SU}(2)/\{-1,+1\}$ *et si* $\tau : \mathrm{SU}(2)/\{-1,+1\} \to \mathrm{SO}(3)$ *est un isomorphisme continu, l'ergodicité du cocycle* ψ *à valeurs dans* $\mathrm{SO}(3)$ *et défini par :*

$$\psi(x) := \tau\big(p\big(\overline{\lambda(\det\varphi(x))}\,\varphi(x)\big)\big), \quad x \in X,$$

entraîne l'ergodicité du cocycle φ.

Preuve. — Étant donné le théorème 3.8, il s'agit de montrer que, pour m dans $\mathbb{Z}^*$ et pour n entier ≥ 0 tels que $m+n$ soit pair, l'équation fonctionnelle :

$$v(x+\alpha) = A_m \otimes V_n\big(\varphi(x)\big)v(x), \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x,$$

n'admet pas de solution mesurable $v : X \to \mathcal{S}(E_n)$, où $\mathcal{S}(E_n)$ désigne la sphère unité de E_n.

D'après le théorème 2.2 et parce que $\mathcal{S}(E_n)$ s'identifie à $\mathcal{U}(E_n)/\mathcal{U}_0$, où $\mathcal{U}_0$ désigne le sous-groupe de $\mathcal{U}(E_n)$ laissant fixe un vecteur de E_n donné, il suffit donc de vérifier que, pour ces valeurs de m et n, $A_m \otimes V_n(s_0)$ n'est pas élément de l'ensemble,

$$\bigcup_{g \in \mathcal{U}(E_n)} g\mathcal{U}_0 g^{-1},$$

des endomorphismes unitaires de E_n admettant 1 pour valeur propre.

Or, les valeurs propres de $A_m \otimes V_n(s_0)$ sont données par :

$$\lambda_1{}^{\frac{1}{2}(m+n)-k}\lambda_2{}^{\frac{1}{2}(m-n)+k}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

(considérer $A_m \otimes V_n\left(\begin{smallmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{smallmatrix}\right)$). Par hypothèse sur θ_1 et θ_2, ces valeurs propres sont donc toutes distinctes de 1, pour m dans $\mathbb{Z}^*$ et n entier ≥ 0 tels que $m+n$ soit pair, ce qui achève la preuve de la proposition 3.9. $\square$

3) *Cas où* $G = \mathrm{SO}(3)$.

La construction d'un cocycle ergodique à valeurs dans SO(3) peut se ramener à l'étude d'une seule équation fonctionnelle comme le montre la :

PROPOSITION 3.10. — *Supposons* $G = \mathrm{SO}(3)$. *Si l'un des sauts du cocycle* φ *n'est pas d'ordre fini alors* φ *est ergodique dès que l'équation fonctionnelle :*

$$v(Tx) = \varphi(x)v(x), \quad \textit{pour presque tout } x \textit{ dans } X,$$

n'admet pas de solution mesurable $v : X \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Preuve. — La proposition 3.10 résulte de ce que tout sous-groupe fermé strict de SO(3) contenant un élément R_0 d'ordre infini est contenu dans le sous-groupe fermé H_0 de SO(3) engendré par un (les) retournement(s) d'axe orthogonal à l'axe de R_0 (pour lequel le quotient $\mathrm{SO}(3)/H_0$ s'identifie avec $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$). $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANZAÏ (H.). — *Ergodic skew product transformations on the torus*, Osaka J. Math., t. **3**, 1951, p. 83–99.
[2] BURNSIDE (W.). — *Theory of groups of finite order.* — Dover Publications, 1911.
[3] CONZE (J.-P.). — *Équirépartition et ergodicité de transformations cylindriques*, Séminaire de Probabilité, Université de Rennes, 1976.
[4] DERRIEN (J.-M.). — *Critères d'ergodicité de cocycles en escalier. Exemples*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **316**, Série I, 1993, p. 73–76.
[5] FURSTENBERG (H.). — *Strict ergodicity and transformations of the torus*, Am. J. Math., t. **88**, 1961, p. 573–601.

[6] Furstenberg (H.). — *Ergodic behaviour of diagonal measures and a theorem of Szemeredi on arithmetic progressions*, J. Analyse Math., t. **34**, 1978, p. 204–256.
[7] Gabriel (P.), Lemańczyk (M.), Liardet (P.). — *Ensemble d'invariants pour les produits croisés de Anzaï*, Mémoire de la SMF, t. **47**, 1991.
[8] Hewitt (E.), Ross (K.A.). — *Abstract Harmonic Analysis II.* — Springer-Verlag, 1970.
[9] Kwiatkowski (J.), Lemańczyk (M.), Rudolph (D.). — *Weak isomorphism of measure-preserving diffeomorphisms*, Israel J. Math., t. **80**, 1992, p. 33–64.
[10] Lesigne (E.). — *Ergodic theorem along a return time sequence, Ergodic theory and related topics III,* Proc. 3rd Int. Conf., Guestrow/Ger. (1990), Lecture Notes Math., t. **1514**, 1992, p. 146–152.
[11] Lesigne (E.), Mauduit (C.), Mosse (B.). — *Le théorème ergodique le long d'une suite q-multiplicative*, Compositio Mathematica, t. **93**, 1994, p. 49–79.
[12] Liardet (P.). — *Répartion et ergodicité*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou (Théorie des nombres), 19^{e} année, t. **10** , (1977/78).
[13] Mackey (G.W.). — *Induced representation of locally compact groups,* 1, Ann. of Math., t. **55**, 1952, p. 101–139.
[14] Merrill (K.D.). — *Cohomology of step functions under irrationnal rotations*, Israel J. Math., t. **52**, n° 4, 1985, p. 320–340.
[15] Veech (W.A.). — *Strict ergodicity in zero dimensionnal dynamical systems and the Kronecker-Weyl theorem Mod 2*, Trans. Am. Math. Soc., t. **140**, 1969, p. 1–33.
[16] Veech (W.A.). — *Finite group extensions of irrational rotations*, Israel J. Math., t. **21**, 1975, p. 240–259.
[17] Zimmer (R.J.). — *Ergodic actions with generalized discrete spectrum*, Illinois J. Math., t. **20**, 1976, p. 555–588.
[18] Zimmer (R.J.). — *Extensions of ergodic group actions*, Illinois J. Math., t. **20**, 1976, p. 373–409.