BULLETIN DE LA S. M. F.

MARC HERZLICH

Compactification conforme des variétés asymptotiquement plates

Bulletin de la S. M. F., tome 125, nº 1 (1997), p. 55-92

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_1_55_0>

Bull. Soc. math. France,
125, 1997, p. 55–92.

COMPACTIFICATION CONFORME DES VARIÉTÉS ASYMPTOTIQUEMENT PLATES

PAR

MARC HERZLICH (*)

RÉSUMÉ. — Le thème de cet article est la recherche de compactifications conformes compactes et suffisamment régulières de variétés riemanniennes asymptotiquement plates : une telle compactification existe si les tenseurs de Weyl et de Cotton-York décroissent à l'infini plus vite que r^{-4} et r^{-5}. Nous étudions également le cas critique où ces tenseurs ont exactement la décroissance citée.

ABSTRACT. — In this paper we study sufficient conditions for an asymptotically flat Riemannian manifold to be obtained from a compact Riemannian manifold. For any given asymptotically flat Riemannian manifold whose Weyl and Cotton-York curvature decay faster than r^{-4} and r^{-5}, we prove the existence of a distinguished conformal rescaling of the metric which turns the manifold into a compact and regular Riemannian manifold. We also study the case when the decay rate is precisely the critical one.

Introduction

Les variétés riemanniennes asymptotiquement plates jouent un rôle important dans l'étude des variétés non compactes. Cela est dû non seulement à leur importance physique dans la théorie de la relativité générale (*cf.* [7], [15]) ou à leur proximité avec l'espace euclidien naturel $\mathbb{R}^n$ mais aussi à leur apparition dans de nombreux phénomènes de perte de compacité faisant intervenir le groupe des difféomorphismes conformes d'une variété riemannienne (*cf.* [1], [17]).

Face à la nécessité de traiter des problèmes à l'infini apparaît alors la question de savoir dans quelle mesure la géométrie à l'infini peut-être abordée de la même manière que la géométrie locale autour d'un

(*) Texte reçu le 18 mars 1996, acepté le 26 juillet 1996.

M. HERZLICH, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, URA 169 du CNRS, 91128 Palaiseau CEDEX (France) et Université de Cergy-Pontoise, Département de Mathématiques, Site de Saint-Martin, 95302 Cergy-Pontoise CEDEX (France).
Email : herzlich@math.polytechnique.fr.

Classification AMS : 53C20, 58G30.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1997/55/$ 5.00

point. Ce point de vue a été particulièrement étudié dans le cadre de la Relativité générale (et donc de la géométrie lorentzienne) dans les années 60 par R. Penrose [21] et dans les années 80 par A. Ashtekar et R.O. Hansen [4], puis par A. Ashtekar et A. Magnon [5]. Ces derniers ont en particulier tenté de mettre en évidence de nouvelles définitions des variétés asymptotiquement plates, par l'intermédiaire d'une modification conforme de la géométrie.

Cette approche a été couronnée d'un certain succès à la fois dans le cadre de la relativité générale (dans la mesure où non seulement la plupart des exemples d'espace-temps asymptotiquement plats connus des physiciens rentrent dans ce cadre mais aussi parce qu'elle a permis d'établir l'existence de nombreux autres exemples [2], [11], [12]), mais aussi en géométrie riemannienne (l'exemple le plus spectaculaire étant la démonstration finale de la conjecture de Yamabe proposée par R. Schoen [17], [22]). Malgré cette intense activité, une question fondamentale — toutes les variétés asymptotiquement plates (définies de manière classique) relèvent-elles de ce formalisme ? — était restée en suspens [3, p. 97].

Nous nous préoccuperons dans ce travail du pendant riemannien de cette question. Il est connu que la géométrie locale d'une variété riemannienne suffisamment régulière (au moins C^2) autour d'un point est déterminée par la connaissance de la courbure (et de ses dérivées successives) ; un développement limité de la métrique autour du point choisi est fourni par la carte exponentielle, qui constitue en quelque sorte un choix privilégié de coordonnées dans laquelle l'expression de la métrique est particulièrement simple.

À première vue, l'étude à l'infini d'une variété asymptotiquement plate semble être une situation parfaitement analogue. Il apparaît néanmoins assez vite qu'elle est bien différente : il est en effet impossible d'identifier une carte privilégiée jouant un rôle analogue à celui de la carte exponentielle. L'existence d'invariants d'ordre 1 (*i.e.* ne dépendant que du 1-jet de la métrique) à l'infini, comme la masse (*cf.* [7]) accentue cette différence fondamentale avec la situation locale où le choix de la carte exponentielle permet précisément de rendre nuls tous les termes d'ordre inférieur à deux dans l'expression de la métrique.

Néanmoins la question subsiste de savoir si une partie de la géométrie à l'infini (du moins pour un sous-ensemble de l'ensemble des variétés asymptotiquement plates) peut être comprise comme la géométrie locale autour d'un *point à l'infini*. Le moyen choisi est celui d'une modification conforme de la géométrie, telle que la nouvelle métrique fasse de la variété à laquelle on a ajouté un point (à l'infini) une variété riemannienne compacte et régulière (au moins C^2).

L'objet de cet article est de répondre affirmativement à cette question. Nous mettons en évidence des conditions, portant sur la géométrie conforme des variétés asymptotiquement plates, sous lesquelles elles sont obtenues à partir de variétés compactes et régulières par un procédé d'éclatement conforme, dénommé *projection stéréographique.*

Le principal résultat de notre article est le suivant :

THÉORÈME A. — *Une variété riemannienne asymptotiquement plate dont le tenseur de courbure de Weyl décroît comme* $r^{-4-\varepsilon}$ *à l'infini et le tenseur de Cotton-York comme* $r^{-5-\varepsilon}$ *(où* $\varepsilon > 0$*) est obtenue par projection stéréographique à partir d'une variété riemannienne compacte de classe* C^2.

La courbure de Weyl est, comme de coutume, la partie conformément invariante de la courbure de Riemann d'une variété riemannienne. Au contraire de cette dernière, le tenseur de Cotton-York dépend du 3-jet de la métrique; en dimension 3, sa nullité entraine que la variété considérée est conformément plate. Ces deux objets ont une importance considérable en géométrie conforme (*cf.* la section 2.1).

Plan de l'article.

La section 1 rappelle leur principales propriétés des variétés asymptotiquement plates et détaille les obstacles à leur compactification conforme. Elle se clôt par l'énoncé précis des théorèmes démontrés dans cet article.

La section 2 détaille les outils nécessaires à l'élaboration de la preuve des théorèmes principaux : fibré et connexion de Cartan de la géométrie conforme et analyse dans les espaces de Hölder à poids.

Nous présentons ensuite en parallèle la démonstration de tous les théorèmes et la section 3 en constitue le cœur. Nous y construisons une métrique conforme à la métrique initialement donnée et dont le tenseur de courbure de Ricci est bien contrôlé.

La section 4 clôt la démonstration en utilisant principalement les propriétés des coordonnées harmoniques. Enfin, nous y avons rassemblé quelques remarques élémentaires sur nos résultats.

REMERCIEMENTS

Ce travail a bénéficié de nombreuses discussions avec Max Bézard, Olivier Biquard, Jean Pierre Bourguignon, Paul Gauduchon et Emmanuel Hebey. Qu'ils se voient tous ici chaleureusement remerciés.

1. Notations et énoncés

1.1 Notations.

Dans toute la suite, (M,g) désignera une variété riemannienne de dimension $n \geq 3$. La régularité de la métrique sera précisée chaque fois que nécessaire. La notation D^g (ou plus simplement D) désignera toujours la connexion de Levi-Civita de la métrique g. Sur un fibré quelconque au-dessus de M, on notera ∇ ou $\mathcal{D}$ des connexions dont la courbure sera notée $\mathcal{R}^\nabla$ (resp. $\mathcal{R}^\mathcal{D}$). La différentielle et son adjoint la divergence (en présence d'une métrique sur le fibré) des formes à valeurs dans les sections seront notées respectivement d^∇ et $(\mathrm{d}^\nabla)^*$.

On désignera par R le tenseur de courbure de Riemann de (M,g), par Ric la courbure de Ricci et par Scal la courbure scalaire. Sous l'action du groupe orthogonal, $S^2\Lambda^2 T_m M$ se scinde en trois composantes irréductibles et le tenseur de courbure s'écrit (*cf.* [9]) :

$$R = W + Z + U$$

où on a posé

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{n-2}\Big(\mathrm{Ric} - \frac{1}{n}\,\mathrm{Scal}\,g\Big) \owedge g = \frac{1}{n-2} z \owedge g, \\ U &= \frac{1}{2n(n-1)}\,\mathrm{Scal}\,g \owedge g, \end{aligned}$$

où W est le tenseur de courbure conforme de Weyl et $\owedge$ désigne comme dans [9] le produit de Kulkarni-Nomizu de deux formes bilinéaires symétriques, défini par

$$\begin{aligned} h \owedge k(X,Y,Z,T) =& h(X,Z)k(Y,T) - k(Y,Z)h(X,T) \\ & - h(Y,Z)k(X,T) + h(Y,T)k(X,Z). \end{aligned}$$

On peut alors regrouper les termes Z et U en

$$Z + U = S \owedge g = \frac{1}{n-2}\Big(\mathrm{Ric} - \frac{1}{2(n-1)}\,\mathrm{Scal}\,g\Big) \owedge g.$$

Le tenseur S est dit *tenseur de Schouten-Weyl*. Enfin, on définit le *tenseur de Cotton-York* de (M,g) par

$$C = -\mathrm{d}^D S = -\Big(\mathrm{d}^D\,\mathrm{Ric} - \frac{1}{2(n-1)}\,\mathrm{d}\,\mathrm{Scal} \wedge g\Big)$$

(*cf.* la section 2.1 pour comprendre où interviennent ces objets).

1.2 Variétés asymptotiquement plates.

L'objet central de cet article est la classe des variétés riemanniennes non compactes, à un seul bout, qui sont asymptotiquement plates. Par ce terme, nous entendons la définition suivante :

DÉFINITION 1.1. — Une variété riemannienne (M,g), non compacte, à un seul bout est dite *$C^{k,\alpha}$-asymptotiquement plate* (avec $k \in \mathbb{N}$ et $0<\alpha<1$) d'ordre $\tau > 0$ s'il existe un compact $K \subset M$ et un difféomorphisme $C^{k+1,\alpha}$ (carte à l'infini)

$$\varphi : M \setminus K \longrightarrow \big(\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)\big)/\Gamma$$

(où $r>0$ et Γ est un groupe discret d'isométries) tels que les coefficients de la métrique s'écrivent dans cette carte $\{z^i\}$

$$\begin{aligned} &g_{ij} = \delta_{ij} + O\big(|z|^{-\tau}\big),\\ &\partial_{\ell_1}\cdots\partial_{\ell_m} g_{ij} = O\big(|z|^{-m-\tau}\big) \quad \text{pour tout } m \in \{1,\dots,k\},\\ &[\partial_{\ell_1}\cdots\partial_{\ell_k} g_{ij}]_\alpha = O\big(|z|^{-k-\alpha-\tau}\big), \end{aligned}$$

où

$$[u]_\alpha = \sup_{0<d(z,z')\le 1} \frac{|u(z)-u(z')|}{|z-z'|^\alpha}.$$

On notera en abrégé :

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O^{(k,\alpha)}\big(|z|^{-\tau}\big).$$

On ne se préoccupera par la suite que de variétés asymptotiquement plates simplement connexes à l'infini ($\Gamma = \{1\}$).

Bien que la définition d'une variété asymptotiquement plate fasse intervenir des cartes particulières, il est connu depuis le travail de R. Bartnik [7] que la platitude à l'infini est une propriété purement géométrique. Par ailleurs, il existe désormais des caractérisations intrinsèques des variétés asymptotiquement plates : S. Bando, A. Kasue et H. Nakajima [6] ont ainsi établi qu'une variété riemannienne complète, non compacte et à un seul bout, était $C^{1,\alpha}$-asymptotiquement plate si sa courbure décroissait plus vite que r^{-2} et si le volume de ses grandes sphères géodésiques satisfaisait une propriété de croissance sur-euclidienne. Cette dernière condition peut être remplacée par une propriété de finitude du groupe fondamental à l'infini dans presque toutes les dimensions [14].

1.3 Compactification conforme.

Il est connu que l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ possède une compactification naturelle en la sphère canonique S^n et que la projection stéréographique π_N par rapport au pôle Nord est une transformation conforme. En effet, si g_{can} est la métrique standard de S^n (vue comme plongée dans $\mathbb{R}^{n+1}$ avec les coordonnées $\{\xi^1, \dots, \xi^{n+1}\}$) et e la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^n$ (muni des coordonnées $\{z^i\}$), alors

$$\pi_N(\xi^1, \dots, \xi^{n+1}) = \Big(z^1 = \frac{\xi^1}{1-\xi^{n+1}}, \dots, z^n = \frac{\xi^n}{1-\xi^{n+1}}\Big)$$

et

$$(\pi_N^{-1})^* g_{\mathrm{can}} = 4\big(|z|^2+1\big)^{-2} e,$$

soit encore

$$g_{\mathrm{can}} = (1-\xi_{n+1})^2 \pi_N^* e.$$

Si l'on se contente d'étudier la géométrie locale à l'infini, seul le premier terme du facteur conforme est important : on remarque alors que la modification conforme de la métrique euclidienne par $|z|^{-4}$ produit... une autre métrique euclidienne. Cela revient à effectuer succesivement l'inverse de la projection stéréographique par rapport au pôle Nord puis la projection stéréographique par rapport au pôle Sud, ou encore l'inversion des coordonnées $x^i = z^i/|z|^2$.

Ce fait (ou plus exactement son analogue lorentzien) est à l'origine de la technique d'étude des variétés asymptotiquement plates par le biais d'une «compactification conforme» développée par R. Penrose dans les années 60 pour les espaces-temps de la Relativité générale [21], mais qui s'étend aux variétés riemanniennes moyennant quelques modifications mineures.

DÉFINITION 1.2. — Une variété riemannienne non compacte (M, g) est dite *conformément compacte* s'il existe une variété riemannienne compacte (éventuellement à bord) $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ de classe C^k (avec $k \in \mathbb{N}$), une sous-variété Σ de $\widetilde{M}$, et un facteur conforme Ω tels que $M = \widetilde{M} \setminus \Sigma$, $\Omega^2 g = \widetilde{g}$ et $\Omega = 0$ sur Σ.

Si de plus Σ est un seul point (noté i^0) et Ω est équivalent au voisinage de i^0 au carré de la fonction distance à i^0 de $\widetilde{g}$, on dit que la variété (M, g) est obtenue par *projection stéréographique* à partir de la variété compacte $\widetilde{M}$.

Dans le cas modèle de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ obtenu par projection stéréographique par rapport au pôle Nord $N = i^0$, on a bien sûr

$$\Omega(x) = \sin^2\big(\tfrac{1}{2}\operatorname{dist}(x, i^0)\big)$$

(le facteur $\frac{1}{2}$ provenant de l'habitude de considérer la sphère de rayon 1 ; si l'on souhaite — comme c'est le cas dans cet article — que la fonction Ω soit équivalente au carré de la distance à i^0, il vaut mieux prendre la projection stéréographique à partir de la sphère de rayon $1/2$). Les variétés asymptotiquement plates rentrent nécessairement dans ce dernier cadre, comme le montre le résultat suivant :

LEMME 1.3. — *Si* (M, g) *est asymptotiquement plate* (*de coordonnées associées* (z^i)) *et si* $\widetilde{g} = \Omega^2 g$ *est régulière au point à l'infini avec* $\Omega \sim |z|^{-\alpha}$ (*où* $\alpha \in \mathbb{R}_+$) *à l'infini, alors* $\alpha = 2$.

Démonstration. — Le volume des sphères de rayon $|z| = r$ dans la métrique $\widetilde{g}$ est, lorsque r tend vers l'infini,

$$\mathrm{vol}_{\tilde{g}}\, S_r = \int \Omega^{n-1} \sqrt{|g|}\, r^{n-1}\, \mathrm{d}\omega_{n-1} \sim r^{-n\alpha+\alpha+n-1}\omega_{n-1}$$

où $\mathrm{d}\omega_{n-1}$ est la mesure riemannienne usuelle sur S^{n-1} et ω_{n-1} son volume. Comme on compactifie par un point, cela impose $\alpha > 1$ pour que

$$\lim_{r\to\infty} \mathrm{vol}_{\tilde{g}}\, S_r = 0.$$

Par ailleurs, la distance ρ (dans la métrique $\tilde{g}$) au point à l'infini est équivalente à

$$\rho = \frac{1}{|1-\alpha|} r^{1-\alpha},$$

donc

$$\mathrm{vol}_{\tilde{g}}\, S_r = \mathrm{vol}_{\tilde{g}}\, \widetilde{S}_\rho \sim \omega_{n-1} |1-\alpha|^{n-1} \rho^{n-1}.$$

Si $\tilde{g}$ est régulière (au moins C^2), $\mathrm{vol}_{\tilde{g}}\, \widetilde{S}_\rho \sim \omega_{n-1}\rho^{n-1}$, ce qui impose $\alpha = 2$. □

Cette manière de construire des variétés asymptotiquement plates (en « éclatant » un point envoyé à l'infini par le facteur conforme) s'est révélée particulièrement féconde dans la démonstration finale de la conjecture de Yamabe par R. Schoen [22].

Contrairement aux espoirs suscités par la démarche de Penrose, toutes les variétés asymptotiquement plates ne peuvent se décrire ainsi. Sur une variété riemannienne $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ compacte et C^2, la carte exponentielle $\{x^i\}$ autour d'un point permet d'écrire un développement

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} - \tfrac{1}{3} \sum_{k,\ell} \widetilde{R}_{ikj\ell}\, x^k x^\ell + \cdots$$

et la métrique g obtenue après changement conforme par $\Omega = |x|^2(1+\Omega_1)$ et inversion des coordonnées ($z^i = x^i/|x|^2$) est donc

$$g_{ij} = \big(1+\Omega_1\big)^{-2}\big[\delta_{ij} + O(|z|^{-2})\big].$$

En particulier, les $\frac{1}{2}n(n+1)$ fonctions correspondant aux termes d'ordre plus petit que deux dans le développement asymptotique de g sont commandées par le comportement de la seule fonction Ω_1 au voisinage de 0, puisque seul le facteur conforme contribue à cette partie du développement (les premiers termes en $\widetilde{R}$ sont nuls à cause des symétries de la courbure). On voit donc que, pour une métrique asymptotiquement plate, être obtenue par projection stéréographique à partir d'une métrique régulière au point à l'infini constitue une contrainte hautement surdéterminée.

Cette rigidité conforme a également une traduction dans le comportement des courbures conformes W et C dont les lois de transformations s'écrivent (voir le paragraphe 2.1 pour comprendre pourquoi il doit en être ainsi) :

$$W^{\ell}_{ijk} = \widetilde{W}^{\ell}_{ijk}, \quad C_{ijk} = \widetilde{C}_{ijk} + \frac{\mathrm{d}\Omega_\ell}{\Omega}\widetilde{W}^{\ell}_{ijk}.$$

La régularité de la métrique $\tilde{g}$ en i^0 impose donc par exemple

$$W = O\big(|z|^{-4}\big), \quad C = O\big(|z|^{-5}\big).$$

1.4 Énoncés des résultats.

Dans une première étape, nous nous attachons à obtenir une régularité C^2 de la métrique compactifiée, afin de pouvoir disposer de l'objet fondamental de la géométrie différentielle riemannienne : le tenseur de courbure. Nous énonçons alors :

THÉORÈME A. — *Soit (M, g) une variété riemannienne (de dimension supérieure ou égale à 3), asymptotiquement plate, à un seul bout, simplement connexe à l'infini. Soit $\alpha \geq \varepsilon > 0$. Si les tenseurs de Weyl et de Cotton-York de M satisfont les hypothèses :*

$$W = O^{(0,\alpha)}(r^{-4-\varepsilon}), \quad C = O^{(0,\alpha)}(r^{-5-\varepsilon}),$$

alors M est obtenue par projection stéréographique à partir d'une variété riemannienne compacte de classe C^2.

Si $\varepsilon = 0$, il existe une compactification privilégiée de classe $C^{1,\alpha}$ et à courbure bornée au voisinage du point à l'infini.

Nous ne nous intéressons ici qu'à la régularité au point à l'infini, qui seule pose problème. Nous supposons donc dans tous les énoncés que la variété initiale possède une régularité locale suffisante pour tous nos raisonnements (par exemple C^∞, mais $C^{3,\alpha}$ est suffisant) et nous n'énonçons explicitement que les conditions portant sur des comportements particuliers à l'infini. De même, les conclusions ne font état que du comportement de la variété compactifiée au point à l'infini et non de sa régularité locale en-dehors de celui-ci. Ainsi, l'énoncé précédent doit être compris comme

> *... est obtenue par projection stéréographique à partir d'une variété riemannienne compacte, régulière en dehors du point à l'infini et dont la métrique s'étend C^2 au-dessus de celui-ci...*

Notons par ailleurs que la démonstration du deuxième point repose sur de curieuses annulations algébriques des tenseurs de courbure conformes des variétés asymptotiquement plates (*cf.* les propositions 3.8 et 3.9).

Nous nous intéressons dans un deuxième temps à la correspondance entre variétés asymptotiquement plates et variétés riemanniennes compactes plus régulières. Nous incluons donc dans ce travail un résultat qui donne une condition suffisante pour obtenir une compactification conforme de classe C^k.

THÉORÈME B. — *Soit (M, g) une variété riemannienne (de dimension supérieure ou égale à 3), asymptotiquement plate, à un seul bout, simplement connexe à l'infini. Soient $\ell \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$. Si les tenseurs de Weyl et de Cotton-York de M satisfont les hypothèses*

$$W = O^{(\ell,\alpha)}(r^{-4-\ell-\eta}), \quad C = O^{(\ell-1,\alpha)}(r^{-5-\ell-\eta}),$$

alors M est obtenue par projection stéréographique à partir d'une variété riemannienne compacte de classe $C^{\ell+2}$.

On peut enfin s'attarder sur le cas où le tenseur de Weyl ne décroît pas suffisamment vite pour permettre une compactification conforme régulière. Les objets construits par notre méthode présentent l'intérêt d'avoir des singularités précises au point à l'infini. De fait, nous avons le

THÉORÈME C. — *Soit (M, g) une variété riemannienne (de dimension supérieure ou égale à 3), asymptotiquement plate, à un seul bout, simplement connexe à l'infini. Soit $\eta > 0$. Si les tenseurs de Weyl et de Cotton-York de M satisfont les hypothèses :*

$$W = O^{(0,\alpha)}(r^{-2-\eta}), \quad C = O^{(0,\alpha)}(r^{-3-\eta}),$$

alors M est obtenue par projection stéréographique à partir d'une variété riemannienne compacte de classe $C^{0,\delta}$ dont la courbure diverge au voisinage du point à l'infini comme $r^{-2+\eta'}$ au voisinage de 0 (ou $\eta' < \eta$ et est arbitrairement proche de η).

Notons que ce résultat est bien meilleur qu'une compactification conforme faite sans précautions (comme celle qui consiste par exemple à prendre $\widetilde{g} = r^{-4}g$ et qui ne fournit qu'une courbure se comportant en $r^{-2+\tau}$ où τ est l'ordre de décroissance de la métrique, et non de la courbure de Weyl, lequel peut être bien plus grand).

2. Préliminaires géométriques et analytiques

2.1 Géométrie conforme.

L'ingrédient principal de la démonstration des théorèmes provient de la géométrie conforme et de constructions qui trouvent leur origine dans l'œuvre d'Élie Cartan [10]. Nous avons rassemblé dans cette section l'ensemble des notions que nous utiliserons dans la suite de ce travail, en suivant principalement les lignes de [13].

Soit (M, c) une variété munie d'une structure conforme ; elle est dotée d'un fibré en droites L, trivialisable, correspondant à la représentation de poids 1 du groupe conforme d'ordre n :

$$A \in \mathrm{CO}(n) \longmapsto |\det A|^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}_+^* = \mathrm{GL}^+(1, \mathbb{R}).$$

Le choix d'une section locale (ou *jauge locale*) de L correspond précisément au choix d'une métrique dans la classe conforme. Les éléments de courbure W, Z et U de chaque métrique peuvent alors être vus comme des fonctions (polynômiales) sur le fibré J^2L des 2-jets de sections de L (qui ne sont autres que les 2-jets de métriques dans la classe conforme en un point), quitte à tensoriser par l'évaluation $j^0 : J^2L \to J^0L = L$ si besoin. Le tenseur de Weyl (vu comme 2-forme à valeurs dans les endomorphismes antisymétriques du fibré tangent) est constant. La fonction $\dfrac{1}{n-2} z \otimes j^0$ s'écrit pour un élément (ψ, θ, φ) de J^2L vu par rapport à une jauge locale ℓ correspondant à une métrique locale g :

$$(\psi, \theta, \varphi) \longmapsto \Big(\psi - \frac{\mathrm{tr}_g \psi}{n} g\Big) + \frac{1}{n-2} \varphi z^g = \psi_0 + \frac{1}{n-2} \varphi z^g$$

et produit donc une projection de J^2L sur $S^2T_0^*M \otimes L$, qui peut-être lui-même vu comme sous-espace de J^2L (celui des 2-jets dont la projection sur J^1L est nulle et de hessien — bien défini dans ce cas — orthogonal pour la structure conforme à c). Son noyau constitue donc un sous fibré E de J^2L, de rang $n+2$, appelé *fibré conforme de Cartan*. Le choix d'une jauge locale fournit un isomorphisme entre $\mathbb{R} \oplus T^*M \oplus \mathbb{R}$ et E, dont les éléments s'écrivent en jauge

$$\nu = (\psi = \mu g - \varphi S^g, \theta, \varphi)$$

où S^g est le tenseur de Schouten-Weyl défini au paragraphe 1.1. La fonction $q = \frac{1}{n(n-1)}$ Scal, enfin, est une forme bilinéaire sur J^2L dont la restriction à E est non-dégénérée et lorentzienne de signature $(n+1,1)$. Son expression en jauge est donnée par

$$q(\mu,\theta,\varphi) = 2\mu\varphi - |\theta|_g^2.$$

Le fibré E est également muni d'une connexion, dite *connexion normale de Cartan* et notée ∇, qui est l'unique connexion q-métrique et respectant une propriété de compatibilité exprimant que la collection de 2-jets ponctuels considérée est la donnée continue d'un 2-jet local d'une métrique. Son action sur une section locale $s = (\mu,\theta,\varphi)$ en un point x de M dans la direction d'un vecteur X de T_xM est donnée en jauge par

$$\nabla_X(\mu,\theta,\varphi) = \begin{cases} \mathrm{d}\mu(X) + \theta\big(S(X)\big), \\ D_X^g\theta - \mu g(X,.) + \varphi S(X,.), \\ \mathrm{d}\varphi(X) - \theta(X), \end{cases}$$

où S est cette fois-ci vu comme un endomorphisme de T_xM. La courbure de la connexion ∇ se calcule aisément et vaut :

$$\mathcal{R}^\nabla_{X,Y}(\mu,\theta,\varphi) = \begin{cases} \theta(C_{X,Y}), \\ \theta(W_{X,Y}\cdot) + \varphi C_{X,Y,\cdot}, \\ 0, \end{cases}$$

où W est la courbure conforme de Weyl et C le tenseur de Cotton-York déjà défini au paragraphe 1.1. En dimension 3, l'expression reste valable en prenant simplement $W = 0$.

Un changement de jauge $\widetilde{g} = \varphi^{-2}g$ (*i.e.* une modification conforme de la métrique) modifie la connexion et la courbure de la manière suivante [13] :

$$\begin{aligned} &\widetilde{S}(X,Y) = S(X,Y) + \frac{1}{\varphi}D\,\mathrm{d}\varphi(X,Y) - \frac{1}{2\varphi^2}|\mathrm{d}\varphi|^2 g(X,Y), \\ &\widetilde{W}_{X,Y}Z = W_{X,Y}Z, \\ &\widetilde{C}_{X,Y,Z} = C_{X,Y,Z} - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi}(W_{X,Y}Z), \end{aligned}$$

où X, Y et Z sont des vecteurs tangents au même point de M.

La mise en place de cette connexion permet une démonstration commode du célèbre théorème de Schouten-Weyl [23] :

THÉORÈME de Schouten-Weyl. — *Soit* (M,g) *une variété riemannienne de dimension* $n \geq 4$ *dont le tenseur de Weyl est nul ou, si* $n = 3$, *dont le tenseur de Cotton-York est nul. Alors* (M,g) *est conformément plate.*

Démonstration [13]. — Si $n \geq 4$ et si $W = 0$, la deuxième identité de Bianchi implique que $C = (n-3)(\mathrm{d}^D)^* W = 0$. Donc, pour tout $n \geq 3$, ∇ est une connexion plate ; il existe donc autour de chaque point de M une section locale non nulle, parallèle et (par exemple) isotrope pour q. Soit $s = (\mu, \theta, \varphi)$ une telle section. On vérifie alors facilement que

$$D\,\mathrm{d}\varphi - \frac{|\mathrm{d}\varphi|^2}{2\varphi} g + \varphi S = 0,$$

ce qui signifie exactement que la métrique $\varphi^{-2} g$ est à courbure de Ricci nulle, donc à courbure nulle. $\square$

Nous utiliserons cette construction pour un problème analogue : trouver des sections asymptotiquement parallèles pour la connexion ∇ dont le comportement à l'infini est prescrit. C'est pour cette raison qu'il nous est nécessaire d'introduire le formalisme des espaces de Hölder à poids.

2.2 Espaces de Hölder à poids.

Les outils adaptés à l'analyse des opérateurs différentiels dans le cadre des variétés compactes (espaces de Hölder et de Sobolev usuels) se révèlent inadaptés quand on les transporte sur des espaces non compacts. Pour ne citer qu'un seul exemple, le laplacien Δ perd son caractère Fredholm quand il est considéré sur l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier dans l'espace L^2 usuel. Cette remarque simple a conduit à l'introduction des espaces à poids (le lecteur intéressé par plus de détails pourra consulter [7], [18], [19], [20]).

Deux types d'espaces à poids apparaissent dans ce texte. Dans un premier temps, nous nous plaçons ici (comme ce sera le cas dans la section 3) sur un cylindre $\mathcal{C} = \mathbb{R} \times S^{n-1}$, dont les points sont notés (t,x), doté de la métrique conformément plate $g = \mathrm{d}t^2 \oplus g_{\mathrm{can}}$. Soit F un fibré vectoriel sur $\mathcal{C}$, muni d'une connexion et d'une métrique (riemannienne ou hermitienne), dont on considère les sections.

DÉFINITION 2.1. — Nous définissons l'espace de Hölder à poids $C^{k,\alpha}_\beta(\mathcal{C},F)$ par

$$C^{k,\alpha}_\beta(\mathcal{C},F) = \left\{u \in C^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{C},F)\,;\ \mathrm{e}^{\beta t} u \in C^{k,\alpha}(\mathcal{C},F)\right\}$$

(où la comparaison entre deux points différents a lieu *via* le transport parallèle associé à la connexion).

Nous noterons indifféremment $u \in C^{k,\alpha}_\tau$ ou $u = O^{(k,\alpha)}(\mathrm{e}^{-\tau t})$. Nous utiliserons également les espaces à poids « euclidiens », donnés quand la base est l'espace $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par la

DÉFINITION 2.2. — Si ρ est cette fois-ci la distance à l'origine, on pose

$$C^{k,\alpha}_\beta(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, F) = \Big\{u\,;\ \forall \ell \le k,\ \|\rho^{\beta+\ell}\nabla^\ell u\|_{C^0} < \infty,\\ [\rho^{\beta+k+\alpha}\nabla^k u]_\alpha < \infty\Big\}.$$

Il faut noter que la définition des espaces à poids fait toujours intervenir le comportement aux deux extrêmités de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ou du cylindre. Or les variétés que nous considérons ne possèdent qu'un seul bout, qui sera identifié selon les cas à un bout euclidien à l'infini (énoncés des théorèmes), à un bout cylindrique (section 3) ou à une boule épointée (section 4). Tous les objets que nous considérerons pour les besoins de l'analyse seront supposés avoir été transportés, *via* une des identifications déjà citées, sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ou le cylindre, puis tronqués et prolongés par 0 en-dehors du bout, de telle sorte que leur appartenance à un espace à poids ne dépende que de leur comportement sur le premier bout considéré.

Cette convention sera en vigueur tout au long de notre travail.

Nous n'avons pas distingué au cours du texte par des notations différentes les deux types d'espaces à poids, étant entendu que le contexte permet toujours de comprendre sans ambiguïté de quel type d'espace il est question.

La principale vertu des espaces à poids (outre d'offrir un cadre adapté aux problèmes non compacts) est leur stabilité vis-à-vis de certaines transformations conformes. Ainsi le passage de la métrique euclidienne en métrique cylindrique

$$r^{-2}(\mathrm{d}r^2 + r^2 g_{\mathrm{can}}) = \mathrm{d}t^2 + g_{\mathrm{can}} \qquad (t = \ln r),$$

échange espaces à poids « euclidiens » et « cylindriques ». Ces derniers se transforment en de nouveaux espaces à poids « euclidiens » lors du changement conforme

$$\mathrm{e}^{-2t}(\mathrm{d}t^2 + g_{\mathrm{can}}) = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2 g_{\mathrm{can}} \qquad (\rho = \mathrm{e}^{-t}),$$

qui fait passer de la métrique cylindrique à une nouvelle métrique euclidienne (qui n'est autre que la métrique de la « carte inverse » du premier espace euclidien, puisque la composée des deux opérations est naturellement le produit de l'inversion usuelle).

2.3 Régularité à l'infini et vitesse de décroissance.

Nous aurons besoin du résultat crucial suivant, qui permet de relier comportement en 0 dans une boule épointée et régularité. Nous l'énonçons dans le cadre le plus général :

LEMME 2.3. — *Soit f une fonction $C^{k,\alpha}_{-k-\delta}$ sur la boule fermée épointée $B^n \setminus \{0\}$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 < \delta \leq \alpha$. Alors f se prolonge de manière $C^{k,\delta}$ à la boule tout entière en posant $f(0) = 0$.*

Démonstration. — Elle est totalement élémentaire, mais compte-tenu de l'importance de ce lemme dans la suite, nous allons y prêter un peu d'attention. Il suffit de traiter le cas $k = 0$. Tout d'abord, comme $\delta > 0$,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0,$$

donc f s'étend continûment par 0 en l'origine.

Nous devons maintenant comparer $|f(x)-f(y)|$ à $|x-y|^\delta$ avec x, y dans la boule. L'hypothèse de croissance montre le résultat voulu quand x ou y est le point 0. Considérons maintenant les cas où $x \neq 0$, $y \neq 0$. On supposera toujours $|x| \leq |y|$ et on choisit β un réel de l'intervalle $]0,1[$.

- Cas 1 : $|x-y| \geq \beta|y|$. Alors,

$$\begin{aligned}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\delta} &\leq \beta^{-\delta}\frac{|f(x)-f(y)|}{|y|^\delta} \leq \beta^{-\delta}\Big(\frac{|f(x)|}{|y|^\delta} + \frac{|f(y)|}{|y|^\delta}\Big)\\ &\leq \beta^{-\delta}\Big(\frac{|f(x)|}{|x|^\delta} + \frac{|f(y)|}{|y|^\delta}\Big) \leq \mathrm{C^{te}}.\end{aligned}$$

- Cas 2 : $|x-y| \leq \beta|y|$. Alors,

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\delta} = |x-y|^{\alpha-\delta}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \beta\,|y|^{\alpha-\delta}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

et il est facile de voir que cette dernière expression est équivalente au quotient höldérien qui intervient dans la définition de $C^{0,\alpha}_\delta$. Ce qui conclut donc la démonstration. ▯

3. Construction d'un facteur conforme adapté

La démonstration des théorèmes va se faire en quatre étapes :

Dans un premier temps, on effectue un premier changement conforme : la variété asymptotiquement plate de départ devient asymptotiquement cylindrique. On calcule alors le comportement des courbures par rapport à celles du modèle $S^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Dans une deuxième étape, nous étudions deux opérateurs différentiels agissant respectivement sur les sections et sur les 1-formes à valeurs dans les sections du fibré conforme E au-dessus du cylindre-modèle $S^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Dans un troisième mouvement, on applique ces résultats au fibré conforme de la variété asymptotiquement cylindrique. Nous obtenons ainsi une section asymptotiquement parallèle pour la connexion normale de Cartan, qui donne naissance à un nouveau changement conforme de la métrique. Celui-ci nous transporte alors sur une variété compacte (obtenue tout simplement par addition d'un point) dont la métrique est continue et la courbure (et en particulier la courbure de Ricci) est bien contrôlée au voisinage du point à l'infini.

Le dernier mouvement (que nous avons repoussé à la section 4) est consacré à l'étude de la régularité de la métrique finale dans une nouvelle carte constituée de coordonnées harmoniques. En effet, nous sommes obligés de modifier la façon particulière dont est attaché différentiablement le point à l'infini pour obtenir la régularité voulue.

3.1 Transport du problème sur un cylindre.

Soit (M,h) une variété $C^{k,\alpha}$-asymptotiquement plate d'ordre $\tau > 0$. D'après la définition 1.1, elle est donc munie d'une carte à l'infini

$$\Phi : M \setminus K \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus B(0,r_0)$$

dont les coordonnées sont notées $\{z^i\}$, dans laquelle les coefficients de la métrique vérifient

$$h_{ij}(z) - \delta_{ij} = O^{(k,\alpha)}\big(|z|^{-\tau}\big).$$

Nous supposons de plus que les courbures conformes vérifient

$$W^h = O^{(s,\alpha)}\big(|z|^{-4-\varepsilon}\big), \quad C^h = O^{(s,\alpha)}\big(|z|^{-5-\varepsilon}\big).$$

Nous avons ici posé par convention :

- $k \geq 3,\ s=0,\ \varepsilon \geq 0$ dans le cas du théorème A (la cas $\varepsilon = 0$ sera désigné comme le cas « critique » dans toute la suite) ;
- $k \geq \ell + 3,\ s = \ell,\ \varepsilon = \ell + \eta$ dans le cas du théorème B ;
- $k \geq 3,\ s = 0,\ \varepsilon = \eta - 2$ dans le cas du théorème C.

Par ailleurs, on ne séparera pas le cas de dimension $n = 3$ (où la courbure de Weyl n'existe pas) des autres dans la mesure où tous nos raisonnements y sont identiques, et tous les calculs que nous aurons à faire restent justes en posant $W = 0$.

Nous munissons alors M de la nouvelle métrique $g = f^{-2}h$ où

$$f = \begin{cases} r_0 & \text{à l'intérieur de } B(0,r_0), \\ |z| & \text{à l'extérieur de } B(0,r_0). \end{cases}$$

À l'extérieur de $B(0,r_0)$, on a alors (en notant $r=|z|$)

$$g=r^{-2}h=\mathrm{d}t^2+g_{\mathrm{can}}+\mathrm{e}^{-2t}(h-e)$$

où on a posé $t=\ln r$. Il est alors facile de voir que

$$g=c+O^{(k,\alpha)}(\mathrm{e}^{-\tau t}),$$

où $c=\mathrm{d}t^2+g_{\mathrm{can}}$ est la métrique cylindrique usuelle de $\mathbb{R}\times S^{n-1}$ et sert ici de métrique de référence (nous la désignerons dans toute la suite sous le nom de *métrique du cylindre modèle*). Nous avons alors la

PROPOSITION 3.1. — *Pour le cylindre modèle,*

$$S^c=\frac{1}{2}(g_{\mathrm{can}}-\mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}t),\quad W^c=0,\quad C^c=0.$$

Pour la métrique g,

$$\begin{aligned}S^g&=S^c+O^{(k-2,\alpha)}(e^{-\tau t}),\\ W^g&=O^{(s,\alpha)}(\mathrm{e}^{-(2+\varepsilon)t}),\\ C^g&=O^{(s,\alpha)}(\mathrm{e}^{-(2+\varepsilon)t}).\end{aligned}$$

Munis de ces résultats préliminaires, nous pouvons maintenant passer à la partie centrale de la démonstration.

3.2 Analyse sur le fibré conforme du cylindre.

Cette section a pour objectif de nous doter d'une description assez précise de deux opérateurs différentiels linéaires formés à partir de la connexion normale de Cartan sur le fibré conforme et agissant dans des espaces de Hölder à poids. Nous commençons dans une première partie par étudier (par des moyens d'algèbre linéaire élémentaire) la connexion normale (définie en 2.1) sur le cylindre. Nous déduisons de cette étude l'expression d'une métrique riemannienne sur le fibré conforme bien adaptée à notre situation et pour laquelle la connexion normale possède d'intéressantes propriétés de symétrie. Grâce à cette métrique, nous pouvons définir l'opération adjointe de la différentiation extérieure sur certains espaces de formes à valeurs dans les sections de E. La deuxième partie de la section est consacrée à l'étude du laplacien (qu'on vient de définir) sur les sections de E et du couple différentielle-divergence sur les 1-formes à valeurs dans les sections de E dans les espaces à poids.

Nous nous placerons dans toute cette section 3.2 sur le cylindre

$$\mathcal{C}=\mathbb{R}\times S^{n-1}$$

dont les points seront notés $(x,t), x \in S^{n-1}, t \in \mathbb{R}$, muni de la métrique standard (modèle)

$$c = \mathrm{d}t^2 + g_{\mathrm{can}}.$$

Les notations R, Ric, S, W, C désigneront dans cette section les éléments de courbure de cette métrique tels que calculés à la proposition 3.1.

3.2.1. Étude algébrique de la connexion conforme.

Le fibré conforme E est muni de la connexion normale ∇_0 dont l'action sur une section locale $s = (\mu, \theta, \varphi)$ de E est

$$(\nabla_0)s = \begin{cases} \mathrm{d}\mu + \theta \circ S, \\ D^{g_{\mathrm{can}}}\theta - \mu c + \varphi S, \\ \mathrm{d}\varphi - \theta. \end{cases}$$

Nous pouvons distinguer dans l'expression en jauge de la connexion ∇_0 une partie radiale et une partie transverse

$$\nabla_0 = \mathcal{D} + \mathrm{d}t \otimes (\partial_t + A_t) = (\mathrm{d} + B_t) + \mathrm{d}t \otimes (\partial_t + A_t)$$

où d est la connexion triviale $\mathrm{d}s = (d_{|S^{n-1}}\mu, D^{g_{\mathrm{can}}}\theta, \mathrm{d}_{|S^{n-1}}\varphi)$, ∂_t est la dérivation par rapport à la variable t, B_t est la 1-forme sur la partie tangente à S^{n-1} de $\mathcal{C}$ à valeurs dans les endomorphismes de E, invariante par translation, définie par

$$(B_t)_Y(\mu, \theta, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\theta(Y), \\ (\frac{1}{2}\varphi - \mu) g_{\mathrm{can}}(Y, .) \quad \text{pour tout } Y \text{ tangent à } S^{n-1}, \\ -\theta(Y) \end{cases}$$

et A_t est un endomorphisme de E défini par

$$A_t(\mu, \theta, \varphi) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\theta(\partial_t), \\ -(\frac{1}{2}\varphi + \mu)\,\mathrm{d}t, \\ -\theta(\partial_t). \end{cases}$$

PROPOSITION 3.2. — *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- *la courbure $\mathcal{R}^{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$ est nulle et l'endomorphisme A_t est $\mathcal{D}$-parallèle ;*
- $A_tB_t = B_tA_t = 0$;
- *A_t est diagonalisable, de valeurs propres réelles $+1$, -1 et 0, de multiplicités respectives 1, 1 et n, d'espaces propres respectivement engendrés par $v_+ = (\frac{1}{2}, -\mathrm{d}t, 1)$, $v_- = (\frac{1}{2}, \mathrm{d}t, 1)$, $v_0 = (\frac{1}{2}, 0, -1)$ et les 1-formes tangentes à la tranche S^{n-1} ;*

• *dans la décomposition précédente, pour tout vecteur* Y *de* T_xS^{n-1}, $(B_t)_Y$ *est antisymétrique et son expression est donnée par*

$$\begin{aligned}
&(B_t)_Y v_+ = B_Y v_- = 0,\\
&(B_t)_Y v_0 = -\big(0, g_{\mathrm{can}}(Y,.), 0\big),\\
&(B_t)_Y\big(0, g_{\mathrm{can}}(Y,.), 0\big) = g_{\mathrm{can}}(Y,Z) v_0.
\end{aligned}$$

Démonstration. — Le premier point provient du calcul de la courbure de ∇_0 :

$$\begin{aligned}
0 = \mathcal{R}^{\nabla_0} &= \mathrm{d}(B_t + \mathrm{d}t\otimes A_t) + (B_t + \mathrm{d}t\otimes A_t)\wedge(B_t + \mathrm{d}t\otimes A_t)\\
&= \mathcal{R}^{\mathcal{D}} + \mathrm{d}t\wedge \mathrm{d}A_t + B_t\wedge(\mathrm{d}t\otimes A_t) + (\mathrm{d}t\otimes A_t)\wedge B_t\\
&= \mathcal{R}^{\mathcal{D}} + \mathrm{d}t\wedge\big(\mathrm{d}+[B_t,.]\big)A_t,
\end{aligned}$$

où le premier terme est une 2-forme complètement tangente au facteur S^{n-1} tandis que le deuxième est un terme mixte prenant comme arguments un vecteur parallèle à ∂_t et un vecteur tangent à S^{n-1}. Donc $\mathcal{R}^{\mathcal{D}} = 0$ et $\mathcal{D}A_t = 0$. La suite est de l'algèbre linéaire élémentaire. ☐

Nous notons (E) la décomposition de la fibre issue de la diagonalisation de A_t :

$$E_{(x,t)} = (\mathbb{R}v_+ \oplus \mathbb{R}v_0 \oplus \mathbb{R}v_-)\oplus T_x^*S^{n-1}.$$

Nous pouvons maintenant définir une métrique riemannienne sur le fibré E, adaptée à notre situation :

DÉFINITION-PROPOSITION 3.3. — *On définit sur* E *un produit scalaire par*

$$\ell(s,s) = (\alpha_+)^2 + (\alpha_0)^2 + (\alpha_-)^2 + g_{\mathrm{can}}(\beta,\beta)$$

pour tout

$$s = \alpha_+v_+ + \alpha_0v_0 + \alpha_-v_- + \beta$$

élément de la fibre $E_{(x,t)}$ *décomposée en* $(\mathbb{R}v_+ \oplus \mathbb{R}v_0 \oplus \mathbb{R}v_-)\oplus T_x^*S^{n-1}$.

La connexion $\mathcal{D}$ *est métrique pour* ℓ *et l'endomorphisme* A_t *est symétrique pour* ℓ. *L'adjoint pour* $(\mathrm{d}t^2 + g_{\mathrm{can}})\otimes\ell$ *de*

$$\nabla_0 : \Omega^0(\mathcal{C},E) \longrightarrow \Omega^1(\mathcal{C},E),$$

noté indifféremment $(\nabla_0)^*$ *ou* $(\mathrm{d}^{\nabla_0})^*$, *est donné par la formule*

$$(\nabla_0)^*\alpha = \mathcal{D}^*\alpha - \partial_t\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) + A_t\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)$$

où α est une 1-forme à valeurs dans les sections de E.

Nous sommes maintenant en mesure d'entamer la partie analytique de notre travail, à savoir l'étude des opérateurs :

$$\Delta^E = (\nabla_0)^*\nabla_0 : \Omega^0(\mathcal{C}, E) \longrightarrow \Omega^0(\mathcal{C}, E),$$
$$\Box^E = (d^{\nabla_0})^* \oplus d^{\nabla_0} : \Omega^1(\mathcal{C}, E) \longrightarrow \Omega^0(\mathcal{C}, E) \oplus \Omega^2(\mathcal{C}, E).$$

3.2.2. Étude des opérateurs Δ^E et $\Box^E$ dans les espaces à poids.

Nous commençons par étudier le laplacien Δ^E :

PROPOSISITION 3.4. — *L'opérateur Δ^E est un isomorphisme*

$$\Delta^E : C^{2,\alpha}_\delta(\mathcal{C}, E) \longrightarrow C^{0,\alpha}_\delta(\mathcal{C}, E)$$

si et seulement si δ n'appartient pas à l'ensemble des poids critiques

$$\{\pm\sqrt{\lambda_p + 1}, \pm\sqrt{\mu_p}, p \in \mathbb{N}\}$$

où les λ_p sont les valeurs propres du laplacien de la sphère (S^{n-1}, can) sur les fonctions et les μ_p sont les valeurs propres de $\mathcal{D}^*\mathcal{D}$ sur les sections de $\mathbb{R}v_0 \times T^*S^{n-1}$.

Démonstration. — Nous appliquons ici le théorème 5.1 de [20] : comme notre opérateur est elliptique autoadjoint, il est un isomorphisme entre espaces de poids δ si et seulement si est injectif l'opérateur obtenu sur la tranche S^{n-1} du cylindre en remplaçant ∂_t par $i\lambda$ (où $\operatorname{Im}\lambda = \delta$). Les poids pour lesquels cet opérateur est singulier sont dits « critiques » et forment toujours un ensemble discret ; comme

$$\Delta^E = \mathcal{D}^*\mathcal{D} - \partial_t^2 + A_t^2,$$

l'équation issue de cette « transformée de Fourier » en t est :

$$(\mathcal{D}^*\mathcal{D} + \lambda^2 + A_t^2)\, u(x, \lambda) = 0;$$

cette équation ne peut avoir de solutions non-nulles que si λ est imaginaire pur. De plus, si on écrit $u = u_+v_+ + u_0v_0 + u_-v_- + \sum u_iw_i$ suivant la décomposition (E) adaptée à la connexion normale, on parvient à :

$$\begin{aligned}
&\Delta u_+ + (\lambda^2 + 1)\, u_+ = 0,\\
&\Delta u_- + (\lambda^2 + 1)\, u_- = 0,\\
&(\mathcal{D}^*\mathcal{D} + \lambda^2)\Big(u_0v_0 + \sum u_iw_i\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Les deux premières équations montrent donc que les

$$\pm\sqrt{\lambda_p + 1},$$

où les λ_p sont les valeurs propres du laplacien sur les fonctions sur la sphère standard, sont poids critiques. Sont également poids critiques les

$$\pm\sqrt{\mu_p},$$

où les μ_p sont les valeurs propres de $\mathcal{D}^*\mathcal{D}$ sur $\mathbb{R}v_0 \times T^*S^{n-1}$. $\square$

Ces dernières valeurs propres se calculent aisément en remplaçant $\mathcal{D}$ par son expression et à l'aide de la théorie de Hodge L^2 usuelle sur la sphère standard. On parvient au terme de calculs sans difficultés mais fastidieux au résultat suivant : μ est valeur propre si et seulement si

$$\mu + 1 + \sqrt{(n-2)^2 + 4\mu}$$

est une valeur propre du laplacien sur les fonctions, ou si

$$\mu + n - 3$$

est une valeur propre du laplacien de Hodge-de Rham sur les 2-formes.

Nous retiendrons en particulier de cette rapide étude que $\delta = 0$ est poids critique (car $\mu_0 = 0$) et qu'il existe donc un intervalle $]0, \delta_0[$ tel que Δ^E soit un isomorphisme dans les espaces à poids correspondants. Nous n'aurons pas besoin d'une connaissance explicite des autres poids critiques par la suite.

Nous allons maintenant étudier l'opérateur sur les 1-formes avec plus de précision car les résultats obtenus auront cette fois-ci une grande importance par la suite, en particulier dans le cas dit « critique ». Nous noterons une 1-forme à valeurs dans les sections du fibré conforme

$$\Omega_T + \omega \otimes \mathrm{d}t$$

où Ω_T est une 1-forme tangente à S^{n-1} à valeurs dans les sections de E et ω est une section de E. L'équation transformée en Fourier à étudier s'écrit alors

$$\begin{cases} \mathrm{d}^{\mathcal{D}}\Omega_T = 0, \\ (i\lambda + A_t)\Omega_T - \mathcal{D}\omega = 0, \\ (\mathrm{d}^{\mathcal{D}})^*\Omega_T + (-i\lambda + A_t)\omega = 0. \end{cases}$$

Comme l'opérateur étudié est elliptique, les solutions sont régulières. On pose alors :

$$\omega = \omega_+ v_+ + \omega_- v_- + \omega_0 v_0 + \overline{\omega},$$

$$\Omega = \Omega_+ v_+ + \Omega_- v_- + \Omega_0 v_0 + \overline{\Omega},$$

où ω_+, ω_- et ω_0 sont des fonctions, $\overline{\omega}$ est une 1-forme sur S^{n-1}, $\Omega_+, \Omega_-, \Omega_0$ sont des 1-formes sur S^{n-1} et $\overline{\Omega}$ est une 1-forme à valeurs 1-forme (autrement dit, c'est un champ d'endomorphismes sur la sphère, mais nous préférerons la première interprétation).

Des calculs sans difficultés montrent que les équation précédentes s'écrivent, pour les composantes en v_+ et v_-, comme

$$(E_\pm) \qquad \begin{cases} \mathrm{d}\Omega_\pm = 0, \\ \mathrm{d}\omega_\pm - (i\lambda \pm 1)\Omega_\pm = 0, \\ (\mathrm{d}^D)^*\Omega_\pm + (-i\lambda \pm 1)\omega_\pm = 0, \end{cases}$$

(D désigne toujours ici la connexion de Levi-Civita de la sphère) et pour les composantes en v_0 et en les w_i,

$$(E_0) \qquad \begin{cases} \mathrm{d}\Omega_0 = \mathcal{A}(\overline{\Omega}), \\ \mathrm{d}^D\overline{\Omega} = -\Omega_0 \wedge g, \\ \mathrm{d}\omega_0 + \overline{\omega} - i\lambda\Omega_0 = 0, \\ \mathrm{d}^D\overline{\omega} - \omega_0 g - i\lambda\overline{\Omega} = 0, \\ (\mathrm{d}^D)^*\Omega_0 - \mathrm{tr}(\overline{\Omega}) - i\lambda\omega_0 = 0, \\ (\mathrm{d}^D)^*\overline{\Omega} + \Omega_0 - i\lambda\overline{\omega} = 0, \end{cases}$$

où $\mathcal{A}$ désigne l'opération d'antisymétrisation $X \otimes Y \mapsto X \otimes Y - Y \otimes X$ appliquée à l'endomorphisme $\overline{\Omega}$, où $\overline{\omega}$ et Ω_0 doivent être vues comme des 0-formes à valeurs dans T^*S^{n-1} et $\overline{\Omega}$ comme une 1-forme à valeurs 1-forme.

Nous commençons par rechercher les poids critiques correspondant aux composantes en v_+ et en v_-. À titre d'exemple et comme les résultats ne sont pas innocents pour la suite, nous allons les étudier très précisément.

Comme la symétrie $t \mapsto -t$ échange v_+ et v_- (ainsi que les espaces à poids $C^{k,\alpha}_\delta$ et $C^{k,\alpha}_{-\delta}$), il nous suffira de traiter une seule des deux composantes, par exemple celle en v_-. Nous cherchons donc les solutions de

$$(E_-) \qquad \begin{cases} \mathrm{d}\Omega_- = 0, \\ \mathrm{d}\omega_- - (i\lambda - 1)\Omega_- = 0, \\ (\mathrm{d}^D)^*\Omega_- - (i\lambda + 1)\omega_- = 0, \end{cases}$$

Nous décomposons alors

$$\omega_- = \omega_-^0 + \sum_{k\geq 1} \omega_-^k u_k,$$

$$\Omega_- = \sum_{k\geq 1} \Omega_-^{k,u} \mathrm{d}u_k + \sum_{k\geq 1} \Omega_-^{k,v} \delta v_k$$

selon les vecteurs propres u_k (resp. $du_k, \delta v_k$) du laplacien sur les fonctions (resp. sur les 1-formes) de la sphère standard. Nous avons noté ici u_k les fonctions propres associées aux valeurs propres qui seront notées λ_k^u (on a bien sûr $u_0 = 1$, $\lambda_0^u = 0$), et v_k les 2-formes propres associés aux valeurs propres λ_k^v. Nos équations se scindent alors en trois ensembles :

$$\begin{cases} \lambda_k^v \Omega_-^{k,v} = 0, & k \geq 1, \\ (i\lambda - 1)\Omega_-^{k,v} = 0, & k \geq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (i\lambda - 1)\Omega_-^{k,u} - \omega_-^k = 0, & k \geq 1, \\ -\Omega_-^{k,u}\lambda_k^u + (i\lambda + 1)\omega_-^k = 0, & k \geq 1, \end{cases}$$

$$(i\lambda + 1)\omega_-^0 = 0.$$

On constate alors immédiatement qu'il n'y a un poids critique pour le premier couple d'équations qu'en dimension $n = 3$ (qui est $\delta = -1$) et que δ est poids critique du second couple d'équations si et seulement si $(\delta^2 - 1)$ est valeur propre *non nulle* du laplacien sur les fonctions. La dernière équation fournit enfin le poids critique $\delta = +1$. La transformation $t \mapsto -t$ permet d'obtenir les poids critiques correspondant aux composantes en v_+ (ici, les $\delta \in \mathbb{R}$ tels que $(\delta^2 - 1)$ est valeur propre non nulle du laplacien sur les fonctions, ainsi que $\delta = -1$ et, en dimension 3 seulement, $\delta = +1$).

Les poids critiques correspondant aux composantes en $\mathbb{R}v_0 \oplus T^*S^{n-1}$ se calculent d'une manière analogue (mais encore plus fastidieuse). Pour épargner la patience du lecteur, nous résumons les résulats qui nous seront utiles par la suite : le seul poids critique de valeur absolue plus petite ou égale à 1 est $\delta = 0$ (ce fait est facile à voir en dimension supérieure ou égale à 4 grâce à la formule de Weitzenböck classique [9] :

$$\Delta^{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^*\mathcal{D} + \mathrm{Ric} + \mathcal{R}^{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^*\mathcal{D} + (n-2);$$

en dimension 3, il suit du calcul du noyau de $\mathcal{D}$ sur les 1-formes qui se révèle nul).

De plus, le noyau associé à un poids critique de $\square^E$ est toujours inclus dans l'image de ∇_0, comme le montre le « lemme de Poincaré à poids » suivant :

LEMME 3.5. — *Soit ξ une 1-forme à valeur dans les sections de $\mathbb{R}v_0 \oplus T^*S^{n-1}$, vu comme sous-fibré de E muni de la connexion induite de ∇_0. Si ξ appartient à $C_\delta^{k,\alpha}$ avec $\delta \neq 0$ et si $\mathrm{d}^{\nabla_0}\xi = 0$, alors il existe une section χ dans $C_\delta^{k+1,\alpha}$ telle que $\nabla_0\chi = \xi$. Si $\delta = 0$, χ comprend des termes linéaires en t.*

Démonstration. — La connexion ∇_0 est plate et s'écrit :

$$\nabla_0 = \mathrm{d}t \otimes \partial_t + \mathcal{D},$$

où $\mathcal{D}$ est également plate. Notons $\xi = a \otimes \mathrm{d}t + b$ une forme vérifiant les hypothèses de l'énoncé, avec a section et b 1-forme tangente à S^{n-1}. Alors,

$$0 = \mathrm{d}^{\nabla_0}\xi = \mathrm{d}^{\mathcal{D}}b + (\mathcal{D}a - \partial_t b),$$

d'où :

$$\mathrm{d}^{\mathcal{D}}b = 0, \quad \mathcal{D}a = \partial_t b.$$

L'équation à résoudre est alors :

$$a = \partial_t\chi, \; b = \mathcal{D}\chi.$$

Comme

$$\mathcal{D}\int a(t)\,\mathrm{d}t = \int \mathcal{D}a(t)\,\mathrm{d}t = b + c$$

où c est une forme indépendante de t et fermée, il suffit de poser :

$$\chi = \int a(t)\,\mathrm{d}t - c'$$

où c' est une primitive de c pour $\mathcal{D}$ (se souvenir que $\mathcal{H}^1(S^{n-1}, \mathbb{R}) = 0$). En faisant tendre t vers $\pm\infty$, on voit que $c = 0$ sauf dans le cas $\delta = 0$. □

REMARQUE. — Un calcul direct montre que le noyau pour $\delta = 0$ est engendré par les

$$\big(\psi_1 v_0 - (0, \mathrm{d}\psi_1, 0)\big) \otimes \mathrm{d}t,$$

où ψ_1 est une fonction propre pour la première valeur propre non nulle du laplacien sur la sphère standard, et

$$\nabla_0\big((t\psi_1)v_0 - (0, t\,\mathrm{d}\psi_1, 0)\big) = \big(\psi_1 v_0 - (0, \mathrm{d}\psi_1, 0)\big) \otimes \mathrm{d}t.$$

Nous concluons cette étude en énonçant un résultat de *franchissement de poids critiques*, issu du théorème 5.2 de [20].

THÉORÈME 3.6. — *Soit $u \in C^{k+1,\alpha}_{\delta}(\mathcal{C}, T^*\mathcal{C} \otimes E)$ où δ n'est pas un poids critique de l'opérateur $\square^E$. Si nous supposons*

$$\square^E u \in C^{k,\alpha}_{\delta'}$$

où δ' n'est pas un poids critique de $\square^E$, alors il existe une section v de $T^*\mathcal{C} \otimes E$, combinaison linéaire d'éléments des noyaux de $\square^E$ pour tous les poids critiques contenus entre δ et δ' telle que

$$u - v \in C^{k+1,\alpha}_{\delta'}.$$

De plus, $v = \nabla_0 w$ où w est une section de $C^{k+2,\alpha}_{\delta}$ (sauf si $\delta = 0$).

Par la suite, nous noterons δ_i les poids critiques positifs de $\square^E$: ainsi $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 1$, *etc.*

3.3. Construction d'une section asymptotiquement parallèle.

Nous revenons maintenant à la variété M munie de la métrique g asymptote à la métrique modèle c. Dans toute la suite, nous identifierons le bout

$$\mathcal{C}_T = \{(\theta, t) \in M \,;\ t \geq T\}$$

(avec $T \geq \ln r_0$) à $S^{n-1} \times [T, \infty[\subset \mathcal{C}$.

Le but de cette section est de trouver une section $s = (\mu, \theta, \varphi)$ asymptotiquement parallèle pour ∇ (nous souhaitons même plus précisément

$$\nabla s = \mathrm{O}\big(\mathrm{e}^{-(1+\delta)t}\big)$$

où δ est essentiellement ε) et qui est une perturbation à l'infini de la section $s_0 = \mathrm{e}^t(\frac{1}{2}, \mathrm{d}t, 1)$ qui correspond au cas plat, c'est-à-dire au changement conforme qui transforme le cylindre standard $c = \mathrm{d}t^2 + g_{\mathrm{can}}$ en plan euclidien de métrique $e = \mathrm{e}^{-2t}c = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2 g_{\mathrm{can}}$ (en posant $\rho = \mathrm{e}^{-t}$).

Comme le cylindre modèle est conformément plat, la section s_0 est parallèle pour la connexion ∇_0 associée à la métrique c. On a alors

$$\nabla s = \nabla_0 s + (\nabla - \nabla_0)s = \mathrm{O}^{(k-2,\alpha)}\big(\mathrm{e}^{-(\tau-1)t}\big),$$

puisque $s_0 = \mathrm{e}^t(\frac{1}{2}, \mathrm{d}t, 1)$ et $\nabla - \nabla_0 = \mathrm{O}^{(k-2,\alpha)}(\mathrm{e}^{-\tau t})$.

Nous considérons maintenant l'opérateur différentiel elliptique entre espaces à poids

$$\nabla^*\nabla : C^{m,\alpha}_{\beta}(M, E) \longrightarrow C^{m-2,\alpha}_{\beta}(M, E)$$

avec $m \geq 2$ et $0 < \alpha < 1, \beta \in \mathbb{R}$, et où l'adjoint est défini à l'aide de la métrique riemannienne ℓ définie sur E de manière analogue à la métrique du fibré conforme de la section précédente. Cet opérateur est asymptote à l'infini (sur le bout $\mathcal{C}_T$) à l'opérateur

$$(\nabla_0)^* \nabla_0 : C_\beta^{m,\alpha}(\mathcal{C}, E) \longrightarrow C_\beta^{m-2,\alpha}(\mathcal{C}, E).$$

Notons $\eta_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une famille de fonctions de troncature, telles que

$$\eta_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \frac{1}{2}T, \\ 0 & \text{si } t \geq T. \end{cases}$$

Pour $T \geq \ln r_0$, soit P_T l'opérateur

$$P_T = \eta_T(\nabla_0)^* \nabla_0 + (1 - \eta_T)\nabla^* \nabla$$

agissant sur les sections du fibré conforme E du cylindre modèle $\mathcal{C}$.

PROPOSITION 3.7. — *L'opérateur*

$$P_T : C_\beta^{m,\alpha}(\mathcal{C}, E) \longrightarrow C_\beta^{m-2,\alpha}(\mathcal{C}, E)$$

est un isomorphisme dès que β n'est pas un poids critique et dès que T est suffisamment grand.

Démonstration. — L'opérateur P_T est asymptote à l'infini à $(\nabla_0)^*\nabla_0$:

$$\left\| P_T - (\nabla_0)^*\nabla_0 \right\|_{\mathcal{L}(C_\beta^{m,\alpha}(\mathcal{C},E), C_\beta^{m-2,\alpha}(\mathcal{C},E))} = \mathrm{O}(e^{-\tau T}) \quad (T \to \infty),$$

donc P_T converge fortement (en norme d'opérateurs) dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(C_\beta^{m,\alpha}(\mathcal{C}, E), C_\beta^{m-2,\alpha}(\mathcal{C}, E))$ vers $(\nabla_0)^*\nabla_0$. La proposition 3.4 assure la fin de la démonstration. $\square$

Revenons maintenant à notre problème : ∇s_0 appartient à $C_{\tau-1}^{k-2,\alpha}(\mathcal{C}, E)$, donc d'après la proposition précédente, il existe $(\kappa - 1)$ et

$$s_1 = (P_T)^{-1} \nabla^* \nabla s_0$$

dans $C_\kappa^{k-1,\alpha}(\mathcal{C}, E)$ (remarquons ici que nous pouvons nous permettre une légère perte de poids si $(\tau - 1)$ est critique pour Δ^E : la valeur exacte de κ n'a que peu d'importance dans la suite du raisonnement). Rappelons aussi que, suivant la convention énoncée dans la section 2.2, nous considérons que la section ∇s_0 a été tronquée et prolongée par 0 en dehors du bout $\mathcal{C}_T$:

il est donc justifié d'écrire que si ∇s_0 est dans $C^{k-2,\alpha}_{\tau-1}$, alors il appartient aussi à $C^{k-2,\alpha}_{\kappa-1}$ pour tout $\kappa \leq \tau$.

Comme $\eta_T = 0$ sur $[T, \infty[$, on a donc :

$$\nabla^*\nabla\big((1-\eta_T)s_1\big) = \nabla^*\nabla s_0 \quad \text{sur} \quad \mathcal{C}_T.$$

Nous posons

$$s_2 = s_0 - (1-\eta_T)s_1,$$

et nous avons obtenu une section asymptotiquement parallèle du fibré conforme de M pour la connexion ∇

$$\nabla s_2 \in C^{k-2,\alpha}_{\kappa}(M, E)$$

dont le premier terme est la section triviale s_0.

Nous utilisons maintenant les propriétés de décroissance des courbures conformes W et C. Notant $\gamma = \nabla s_2$, nous avons sur $\mathcal{C}_T$

$$\begin{cases} (\mathrm{d}^\nabla)^*\gamma = 0, \\ \mathrm{d}^\nabla\gamma = -\mathcal{R}^\nabla s_2 = \mathrm{O}^{(0,\alpha)}(\mathrm{e}^{-(1+\epsilon)t}), \end{cases}$$

soit encore

$$\big((\mathrm{d}^\nabla)^* \oplus \mathrm{d}^\nabla\big)\gamma \in C^{s,\alpha}_{1+\varepsilon}.$$

Comme l'opérateur considéré $((\mathrm{d}^\nabla)^* \oplus \mathrm{d}^\nabla)$ est asymptote à l'infini à l'opérateur $((\mathrm{d}^{\nabla_0})^* \oplus \mathrm{d}^{\nabla_0})$ déjà étudié, nous déduisons de la partie 3.2 le résultat suivant :

PROPOSITION 3.8. — *Il existe une section s_3 du fibré E, de croissance au plus linéaire en t à l'infini, telle que*

$$\nabla(s_2 - s_3) \in C^{s+1,\alpha}_{1+\delta}(\mathcal{C}_T, E).$$

où δ vaut :

- *ε si $1+\varepsilon$ n'est pas un des poids critiques δ_i ;*
- *n'importe quel réel strictement inférieur à $(\delta_j - 1)$ si $1+\varepsilon = \delta_j$ avec $j \neq 1$;*
- *0 si $\varepsilon = 0$.*

Démonstration. — Elle serait une simple application du théorème 5.2 de [20] si l'on ne souhaitait pas corriger notre section initiale uniquement par des termes appartenant à l'image de ∇. Nous sommes donc obligés de reprendre la démonstration de [20] en l'adaptant à notre situation.

Soit δ comme dans l'énoncé. Nous distinguons deux cas : le cas où $\varepsilon \neq 0$ et le cas dit « critique » où $\varepsilon = 0$. Nous noterons ici

$$R = (\mathrm{d}^{\nabla})^* \oplus \mathrm{d}^{\nabla}, \quad R_0 = (\mathrm{d}^{\nabla_0})^* \oplus \mathrm{d}^{\nabla_0}.$$

Dans le cas non critique, remarquons tout d'abord que nous avons $R_0\gamma = R\gamma + (R_0 - R)\gamma$, d'où

$$R_0\gamma \in C^{0,\alpha}_{\inf(1+\varepsilon,\kappa+\tau)},$$

car $((\mathrm{d}^{\nabla})^* \oplus \mathrm{d}^{\nabla})\gamma$ appartient à $C^{0,\alpha}_{1+\delta}$ et les coefficients de $(\mathrm{d}^{\nabla})^* \oplus \mathrm{d}^{\nabla}$ diffèrent de ceux de $(\mathrm{d}^{\nabla_0})^* \oplus \mathrm{d}^{\nabla_0}$ par des termes en $\mathrm{O}^{(0,\alpha)}(\mathrm{e}^{-\tau t})$.

Nous allons maintenant construire par récurrence un couple de suites (t_n, κ_n) dont les éléments sont une section t_n de E et un réel κ_n, non critique et strictement plus grand que -1, vérifiant les propriétés suivantes :

- $(t_n - s_0)$ est de croissance au plus linéaire à l'infini ;
- $\nabla t_n \in C^{s+1,\alpha}_{\kappa_n}$;
- $(\mathrm{d}^{\nabla})^*(\nabla t_n) = 0$ et $\mathrm{d}^{\nabla}(\nabla t_n) \in C^{s,\alpha}_{1+\varepsilon}$;
- $\inf\bigl(\kappa_n + \frac{1}{2}\tau, 1+\varepsilon\bigr) \leq \kappa_{n+1} \leq 1 + \delta$.

Posons tout d'abord :

$$t_0 = s_2, \quad \kappa_0 = \kappa - 1.$$

Supposons maintenant $(t_0, \kappa_0), \dots, (t_n, \kappa_n)$ construits. Alors

$$R_0 t_n = R t_n + (R_0 - R) t_n \in C^{s,\alpha}_{\lambda}$$

où λ vaut $\inf(\kappa_n + \tau, 1 + \varepsilon)$. On pose enfin $\mu = \inf(1 + \delta, \lambda)$. Nous distinguons alors trois possibilités de construction de (t_{n+1}, κ_{n+1}) :

— Si $[\kappa_n, \lambda]$ ne contient pas de poids critique, le théorème 3.6 montre que

$$\nabla t_n \in C^{s+1,\alpha}_{\lambda}.$$

Il ne reste qu'à poser $t_{n+1} = t_n$ et $\kappa_{n+1} = \mu$.

— Si $[\kappa_n, \lambda[$ contient des poids critiques et λ est non critique, alors la section 3.2 montre qu'il existe u tel que

$$\nabla t_n - \nabla_0 u \in C^{s+1,\alpha}_{\lambda}$$

(λ défini comme au point précédent). De plus, u est de croissance au plus linéaire en l'infini car le plus petit poids critique contenu dans $[\kappa_n, \lambda[$ est forcément positif (car $\kappa_n > -1$). Notons ν ce poids. Il existe alors v, élément de $C^{s+2,\alpha}_{\nu'}$ (pour un $\nu' < \nu$ arbitraire) tel que

$$\Delta v = \Delta u.$$

Nous pouvons alors vérifier

$$\begin{cases} (\mathrm{d}^\nabla)^*\nabla(t_n - u - v) = 0, \\ \mathrm{d}^\nabla\nabla(t_n - u - v) = -\mathcal{R}^\nabla(t_n) - \mathcal{R}^\nabla(u+v) \in C^{s,\alpha}_{1+\varepsilon}, \end{cases}$$

pour ν' suffisamment proche de ν. On peut alors poser

$$t_{n+1} = t_n - u - v, \quad \kappa_{n+1} = \mu.$$

— Si $[\kappa_n, \lambda[$ contient des poids critiques et λ est critique, alors on procède à l'identique en remplaçant λ par un λ' appartenant à $]\lambda - \frac{1}{2}\tau, \lambda[$.

Par définition de la suite, on a

$$\inf\bigl(\kappa_n + \tfrac{1}{2}\tau, 1+\delta\bigr) \leq \kappa_{n+1} \leq 1+\delta,$$

ce qui montre que (κ_n) est croissante, stationnaire et de limite $1+\delta$. De plus, dès que $\kappa_m = 1+\delta$ pour un entier $m \in \mathbb{N}$, la construction de la suite a lieu par la première méthode et (t_n) est aussi stationnaire. Nous avons alors, pour un entier m suffisamment grand,

$$\nabla t_m \in C^{s+1,\alpha}_{1+\delta}.$$

Il ne reste plus qu'à prendre ce t_m pour valeur de s_3.

Dans le cas critique, nous avons à nous pencher sur le poids critique $\delta_1 = 1$. La démonstration précédente fournit une section t_m de E telle que

$$\nabla(s_2 - t_m) \in C^{s+1,\alpha}_{\nu},$$

avec $\nu < 1$ arbitrairement proche de 1. Mais une étude plus approfondie permet ici de pousser jusqu'au poids 1 : on peut tout d'abord supposer que $[\nu, 1]$ ne contient pas d'autre poids critique que 1 et que $\nu + \tau 1$. Dès lors,

$$R_0(\nabla(s_2 - t_m)) \in C^{s,\alpha}_1.$$

On ne peut pas conclure *a priori* car le théorème de franchissement de poids critiques ne s'applique pas simplement (car $1+\varepsilon = 1$ est critique pour $\square^E$). Néanmoins, comme ∇_0 respecte la décomposition de E en $\mathbb{R}v_-$, $\mathbb{R}v_+$, $\mathbb{R}v_0 \oplus T^*S^{n-1}$, on peut étudier séparément chacune des composantes.

La valeur $\delta = 1$ n'est pas critique pour les dernières composantes, donc le théorème 3.6 peut être utilisé directement pour celles-ci.

De plus, pour la composante en v_-, l'étude précise réalisée en 3.2 montre que si l'on décompose selon les espaces propres du laplacien sur la sphère, $\delta = 1$ n'est poids critique que pour la composante invariante par rotation (déjà notée ω_-^0). On peut donc encore utiliser directement 3.6 pour toutes les autres composantes. Enfin, on remarque que la composante invariante par rotation est contrôlée par la seule équation sans second membre

$$(\mathrm{d}^\nabla)^*\big(\nabla(s_2 - t_m)\big) = 0,$$

autrement dit, on se trouve face à un problème de dimension 1 dont la solution est bien connue, à savoir contrôler ω_-^0 sachant que

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + 1\Big)\,\omega_-^0 \in C_{\nu'}^{s,\alpha}$$

avec ν' *strictement plus grand* que 1 (car il n'y a pas ici de terme en courbure de décroissance comparable à e^{-t}). On en déduit donc qu'il existe une constante c telle que

$$\omega_-^0 - c\mathrm{e}^{-t} \in C_{\nu'}^{s+1,\alpha}.$$

La composante en v_+ qui intervient en dimension 3 se traite exactement de la même façon ; elle est contrôlée par la seule équation

$$(\mathrm{d}^\nabla)\big(\nabla(s_2 - t_m)\big) = -\mathcal{R}^\nabla(s_2 - t_m)$$

où le second membre comprend *a priori* des termes de décroissance comparable à e^{-t}. Néanmoins, comme ∇_0 préserve la décomposition de la fibre en les espaces propres de A_t, le comportement de cette composante en v_+ est commandé au premier ordre par le comportement de $(\mathcal{R}^\nabla s_0)_+$. Or un simple calcul montre que

$$\mathcal{R}^\nabla_{\cdot,\cdot}\, v_- = \Big(C_{\cdot,\cdot}\,\frac{\partial}{\partial t}\Big)v_0 + \Big(C_{\cdot,\cdot}\,\frac{\partial}{\partial t}\Big)v_- - \Big(W_{\cdot,\cdot}\,\frac{\partial}{\partial t} - C_{\cdot,\cdot}\Big)_{|T^*S^{n-1}}.$$

La composante en v_+ de $\mathcal{R}^\nabla(s_2 - t_m)$ est donc de décroissance plus rapide que e^{-t} et la remarque précédente s'applique.

Le résultat voulu est donc démontré. $\square$

Nous posons finalement

$$s = (\mu, \theta, \varphi) = s_2 - s_3$$

qui est la perturbation voulue de $s_0 = \mathrm{e}^t(\frac{1}{2}, \mathrm{d}t, 1)$ par un objet de croissance au plus linéaire en t. Dès lors, si ∇s appartient à $C^{s+1,\alpha}_{1+\delta}$,

$$D\,\mathrm{d}\varphi - \mu g + \varphi S = D(\mathrm{d}\varphi - \theta) + D\theta - \mu g + \varphi S \in C^{s,\alpha}_{1+\delta}.$$

PROPOSITION 3.9.

- *Si $\delta \geq 0$, alors*

$$q(s)(x,t) = 2\mu\varphi - |\theta|^2_g$$

est de Cauchy quand t tend vers l'infini. Il existe donc

$$q_\infty = \lim_{t \to \infty} q(s)(x,t).$$

En particulier, $q - q_\infty$ vit dans $C^{s+2,\alpha}_\delta$.

- *Si $\delta < 0$, alors q vit dans $C^{s+2,\alpha}_\delta$.*

Démonstration. — Commençons par le cas non critique où $\delta \geq 0$: la connexion ∇ est métrique pour la forme quadratique q, donc

$$\nabla\big(q(s(x,t), s(x,t))\big) = 2q\big(\nabla s(x,t), s(x,t)\big)$$

vit dans l'espace $C^{s+1,\alpha}_\delta$. Par intégration, la fonction est bien de Cauchy, donc convergente à l'infini et de plus, $q(s,s)(x,t) - q_\infty$ vit bien dans $C^{s+2,\alpha}_\delta$.

Dans le cas critique, on remarque que

$$q(\nabla s, s) - q(\nabla s, s_0) \in C^{s+2,\alpha}_\beta$$

avec un $\beta > 0$. De plus $s_0 = \mathrm{e}^t v_-$, donc

$$q(\nabla s, s_0) = 2e^t(\nabla s)_+,$$

où $(\nabla s)_+$ désigne la composante en v_+ de ∇s. Comme $\Box^E$ préserve au premier ordre la décomposition (E), le comportement de $(\nabla s)_+$ est gouverné (à des perturbations décroissant exponentiellement à l'infini près) par celui de $(\mathcal{R}^\nabla s)_+$, donc (toujours à perturbation près), par celui de $(\mathcal{R}^\nabla s_0)_+$.

Rappelons alors que

$$\mathcal{R}^\nabla_{\cdot,\cdot} v_- = \Big(C_{\cdot,\cdot}\frac{\partial}{\partial t}\Big)v_0 + \Big(C_{\cdot,\cdot}\frac{\partial}{\partial t}\Big)v_- - \Big(W_{\cdot,\cdot}\frac{\partial}{\partial t} - C_{\cdot,\cdot}\Big)_{|T^*S^{n-1}},$$

c'est-à-dire que la composante en v_+ de ∇s est nulle au premier ordre : le formalisme du cas non critique s'applique donc.

Enfin, dans le cas non critique où $\delta < 0$, nous avons encore

$$q(\nabla s, s) \in C^{s+1,\alpha}_\delta$$

et il est immédiat de voir que $q(s,s)$ appartient à $C^{s+2,\alpha}_\delta$. $\square$

REMARQUE. — Si $\delta \geq 0$, q_∞ est la courbure scalaire (normalisée) au point à l'infini. Elle peut être choisie à notre convenance : en effet, en modifiant la section s par un terme $b\mathrm{e}^{-t}v_+ + s_4$ (où b est un réel et $\Delta^E(b\mathrm{e}^{-t}v_+ + s_4) = 0$) sa valeur devient $q_\infty + 4b$.

Finalement, en posant aussi $q_\infty = 0$ dans le cas où $\delta < 0$, nous avons dans tous les cas :

$$\Big(D\,\mathrm{d}\varphi - \frac{1}{2\varphi}|\mathrm{d}\phi|^2 g + \varphi\, S\Big) - \frac{q_\infty}{2\varphi} g \in C^{s,\alpha}_{1+\delta}\,.$$

Nous posons alors $\Omega = (f\varphi)^{-1}$ où f est le facteur conforme utilisé en 3.1 et nous pouvons énoncer :

PROPOSITION 3.10. — *Dans la carte inverse de la carte à l'infini initiale, la métrique $\widetilde{g} = \Omega^2 h$ et son tenseur de Schouten-Weyl $\widetilde{S}$ vérifient*

$$\widetilde{g}_{ij} - \delta_{ij} \in C^{k,\alpha}_{-\beta}, \quad \widetilde{S} - \tfrac{1}{2} q_\infty \in C^{s,\alpha}_{-\delta}\,.$$

(*dans les espaces à poids de la boule épointée de $\mathbb{R}^n$*) *avec $\beta > 0$.*

Démonstration. — Il suffit de collecter les résultats obtenus tout au long de cette section : tout d'abord, de la définition même de $\tilde{g}$ et du bon comportement des espaces à poids par inversion, on calcule que

$$\tilde{g}_{ij} - \delta_{ij} \in C^{k,\alpha}_{-\beta}$$

avec un β strictement positif (sa valeur exacte est sans importance). De plus, nous savons que le tenseur de Schouten-Weyl de $\tilde{g}$ vérifie (en notant $g = r^{-2}h$) :

$$\widetilde{S} = S^g + \frac{1}{\varphi} D^g\,\mathrm{d}\varphi - \frac{|\mathrm{d}\varphi|_g^2}{2\varphi^2} g = \frac{1}{2} q_\infty \tilde{g} + \widetilde{S}_1\,,$$

où $\widetilde{S}_1$ vit dans l'espace $C^{s,\alpha}_{2+\delta}$ du cylindre. Le bon comportement des espaces à poids montre alors que

$$\widetilde{S}_1 \in C^{s,\alpha}_{-\delta}$$

quand on le mesure dans les espaces à poids de la carte inverse. $\square$

COROLLAIRE 3.10.1. — *Le théorème* C *est vérifié.*

4. Régularité de la métrique finale.

4.1. — Nous pouvons maintenant passer à la dernière partie de la démonstration des théorèmes A et B. Nous effectuons pour cela un changement de coordonnées, de la carte inverse vers des coordonnées harmoniques pour la métrique $\tilde{g}$. Nous notons

$$x^i = \frac{z^i}{|z|^2},$$

les coordonnées de la carte inverse.

PROPOSITION 4.1. — *Il existe des coordonnées y^i, harmoniques pour la métrique $\tilde{g}$ et telles que*

$$x^i - y^i \in C^{k+1,\alpha}_{-\beta'-1}$$

avec $\beta' < \beta$, arbitrairement proche de β.

Démonstration. — L'existence de coordonnées harmoniques à l'infini est un fait bien connu pour les métriques asymptotiquement plates [7]. Le même résultat est naturellement valable dans une boule épointée. De fait, nous avons

$$\Delta_{\tilde{g}} x^k = \tilde{g}^{ij} \widetilde{\Gamma}^k_{ij} \in C^{k-1,\alpha}_{-\beta+1},$$

où les $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ sont les symboles de Christoffel de $\tilde{g}$. En tronquant et en prolongeant par 0 à l'extérieur d'une boule centrée en l'origine les x^k, on définit des fonctions (encore notées x^k) telles que

$$\Delta_{\tilde{g}} x^k \in C^{k-1,\alpha}_{-\beta+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

On peut alors appliquer le théorème d'isomorphisme (ou plus exactement son analogue pour les espaces à poids de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). Il nous fournit une collection de fonctions $(u^k)_{1 \leq k \leq n}$ de $C^{k+1,\alpha}_{-\beta'-1}$ (avec β' comme dans l'énoncé) telles que

$$\Delta_{\tilde{g}} x^k = \Delta_{\tilde{g}} u^k.$$

Dès lors, les fonctions $y^k = x^k - u^k$ sont harmoniques, et peuvent se prolonger par 0 en 0. La différentielle $\partial y^k / \partial x^\ell$ se prolonge continûment par l'identité en 0, ce qui prouve bien qu'il s'agit d'un changement de coordonnées au voisinage de l'origine. $\square$

L'intérêt des coordonnées harmoniques repose sur la simplification qu'elles introduisent dans l'écriture de la courbure de Ricci. Plus précisément, dans une carte harmonique $\{y^i\}$,

$$\mathrm{Ric}^{\tilde{g}}_{ij} = -\frac{1}{2} \tilde{g}^{k\ell} \frac{\partial^2}{\partial y^k \partial y^\ell} \tilde{g}_{ij} + \mathcal{Q}(\tilde{g}^{ab}, \partial_c \tilde{g}_{de})$$

où Q est linéaire en sa première variable et quadratique en sa seconde variable.

La fin de la démonstration des théorèmes se fonde alors sur une simple application du théorème de franchissement des poids critiques (dans sa version « euclidienne ») que nous résumons dans le lemme suivant :

LEMME 4.2. — *Soit $f \in C^{k,\alpha}_{-\beta}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ avec $k \geq 1$, $\beta > 0$, et telle que*

$$\Delta f \in C^{s,\alpha}_{-\delta} \quad \textit{avec} \quad s \geq k-2,\ \delta \geq 0.$$

Alors il existe un polynôme harmonique P à n variables et sans terme constant tel que

$$f - P \in C^{s+2,\alpha}_{-2-\delta}$$

quitte à remplacer δ par un $\delta' < \delta$ et arbitrairement proche de δ.

Démonstration. — On calcule facilement que l'ensemble des poids critiques du laplacien est $((n-2)+\mathbb{N}) \cup (-\mathbb{N})$. Le seul point à vérifier est que les éléments du noyau de Δ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans les espaces à poids strictement négatifs sont des polynômes, ce qui est bien connu (théorème de Schwartz). $\square$

Application aux théorèmes A *et* B.

En partant de

$$\widetilde{\mathrm{Ric}} = (n-1)q_\infty \tilde{g} + \tilde{S}_1,$$

et de la forme particulière du tenseur de Ricci en coordonnées harmoniques, le lemme précédent montre que dans le cas non critique du théorème A,

$$\tilde{g}_{ij} - \delta_{ij} - P_{ij} \in C^{s+2,\alpha}_{-2-\delta}$$

où $\delta > 0$ et P_{ij} est un polynôme harmonique de degré positif et sans terme constant. Ce dernier est donc bien évidemment C^∞ et le lemme 2.3 permet alors de conclure :

$$\tilde{g}_{ij} \in C^{2,\delta}.$$

Dans le cas critique, on ne peut obtenir mieux que

$$\tilde{g}_{ij} - \delta_{ij} - P_{ij} \in C^{s+2,\alpha}_{-1-\zeta}$$

(car $\delta = -2$ est un poids critique du laplacien) et la meilleure conclusion possible est

$$\tilde{g}_{ij} \in C^{1,\zeta}$$

avec $0 < \zeta < 1$. Le théorème B est obtenu de manière similaire. $\square$

4.2. Remarques finales.

Le théorème C permet de mieux cerner les liens entre la vitesse de décroissance à l'infini du tenseur de Weyl et le comportement de la compactification : imposer à W de vivre dans un certain espace à poids permet de contrôler la courbure de la métrique compactifiée dans un autre espace à poids (puisque ceux-ci se correspondent par l'intermédiaire de l'inversion).

Ainsi, dans le cas critique, la meilleure conclusion possible pour le tenseur de courbure de Ricci de $\tilde{g}$ est d'appartenir à l'espace $C_0^{0,\alpha}$ de la boule épointée qui ne s'injecte pas dans $C^{0,\alpha}$. En revanche, l'espace $C_\delta^{0,\alpha}$ (pour $0 < \delta \leq \alpha$) s'injecte bel et bien dans $C^{0,\delta}$, ce qui permet d'obtenir la conclusion du théorème A.1. Dans le cas critique, nous obtenons seulement que la courbure est bornée, et il est bien connu que nous ne pouvons alors espérer contrôler la métrique qu'à l'ordre $C^{1,\alpha}$ (voir par exemple le rapport [16]).

On peut néanmoins indiquer, en dimension supérieure ou égale à 4, une condition optimale :

THÉORÈME 4.3. — *Sous les hypothèses du théorème* A (*cas critique*), *si* $n \geq 4$ *et si le tenseur de Weyl s'étend de manière* $C^{0,\alpha}$ *à l'origine dans la carte inverse d'une carte à l'infini du bout, alors* M *est obtenue par projection stéréographique à partir d'une variété riemannienne compacte de classe* $C^{2,\alpha}$.

Cette condition est optimale car elle se réfère directement au comportement de la courbure conforme dans la carte « inverse ». Malgré son apparence trompeuse, elle est invariante par changement de coordonnées à l'infini (ce fait est une conséquence de la rigidité des coordonnées harmoniques [7]).

Démonstration. — Les hypothèses de ce théorème impliquent en particulier celles du théorème A, donc nous obtenons en premier lieu une compactification conforme de classe $C^{1,\zeta}$ et de tenseur de courbure borné. Par ailleurs, si le tenseur de Weyl se prolonge $C^{0,\alpha}$ en l'origine dans la carte inverse, il se prolonge également de manière $C^{0,\alpha}$ dans les nouvelles coordonnées harmoniques : en effet, le changement de coordonnées vit dans $C_{-\beta'-1}^{k+1,\alpha}$ qui est un sous-espace de $C^{1,\alpha}$ pour $\beta' \geq \alpha$. La suite de la preuve repose alors sur le

LEMME 4.4. — *Soit* ν *une métrique riemannienne de classe* $C^{k,\alpha}$ ($k \geq 1$) *sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *tel que son tenseur de Weyl* $\mathcal{W}$ *soit* $C^{\ell-2,\alpha}$ *dans ces coordonnées* (*avec* $\ell \geq k$). *Alors il existe un facteur conforme de* *classe $C^{k,\alpha}$, noté φ, tel que $\varphi^{-2}\nu$ soit $C^{s+2,\alpha}$, avec $s = \inf(k, \ell - 2)$, dans un système de coordonnées bien choisi.*

Démonstration du lemme. — Si les $\{u^i\}$ sont les coordonnées initiales de U, nous introduisons un nouveau système de coordonnées $\{v^i\}$ défini sur un ouvert de U par

$$\begin{cases} \Delta_\nu v^i + \nu\Big(\dfrac{n-2}{n}\Big(\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\ln|\nu_{k\ell}| - \mathrm{d}\ln\Big|\dfrac{\partial v^\ell}{\partial u^k}\Big|\Big), Dv^i\Big) = 0, \\ v^i(0) = 0, \quad \dfrac{\partial v^\ell}{\partial u^k}(0) = \delta^\ell_k, \end{cases}$$

où $|\cdot|$ désigne le déterminant en coordonnées u^i. Il est toujours possible (*cf.* [8, § II.5.4, p. 228]), de définir un tel système et celui-ci est de classe $C^{k+1,\alpha}$ en fonction des u^i. Dans ces nouvelles coordonnées, si l'on pose

$$\varphi = \Big|\frac{\partial v^\ell}{\partial u^k}\Big|^{-1/n} |\nu_{k\ell}|^{1/2n},$$

la métrique $\varphi^{-2}\nu$ vérifie le système d'équations

$$\begin{cases} \mathrm{Weyl}(\varphi^{-2}\nu) = \mathcal{W}, \\ \Delta_{\varphi^{-2}\nu} v^i = 0, \\ \mathrm{d\,vol}_{\varphi^{-2}\nu} = \mathrm{d}v^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}v^n, \end{cases}$$

où Weyl désigne le tenseur de Weyl (pris trois fois covariant et une fois contravariant) de la métrique $\varphi^{-2}\nu$ et d vol sa forme volume.

Un calcul sans difficultés montre alors que ce système d'équations aux dérivées partielles est à symbole injectif. □

Nous obtenons également un petit corollaire amusant du théorème B, qui donne une version globale — dans le cadre des variétés asymptotiquement plates — du théorème de Schouten-Weyl :

COROLLAIRE B.1. — *Si (M, g) est une variété C^∞-asymptotiquement plate d'ordre $\tau > 0$, simplement connexe à l'infini et conformément plate ($W = 0$) au voisinage de l'infini, alors il existe une compactification conforme lisse de M qui est plate au voisinage du point à l'infini.*

La méthode du théorème 4.3 ne se généralise malheureusement pas au cas de régularité plus élevée. En effet, deux systèmes de coordonnées à l'infini d'une variété asymptotiquement plate se déduisent l'un de l'autre par une transformation constante plus des termes décroissant à l'infini en $r^{-\tau-1}$ (τ est le plus petit des ordres de décroissance de la variété dans chacun des deux systèmes) [7]. Dans les cartes inverses, le changement de coordonnées se prolonge donc de manière $C^{1,\tau}$ (puisque $C^{1,\alpha}_{-\tau-1}$ est inclus dans $C^{1,\tau}$ pour $\alpha \geq \tau$) au point à l'infini. Dès lors, les propriétés du tenseur de Weyl à l'ordre $C^{0,\tau}$ peuvent être considérées comme de bonnes conditions géométriques alors que des régularités supérieures ne sont pas indépendantes des cartes choisies.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDERSON (M.T.). — *Ricci curvature bounds and Einstein metrics on compact manifolds*, J. Amer. Math. Soc., t. **2**, 1989, p. 455–490.

[2] ANDERSSON (L.), CHRUŚCIEL (P.T.) and FRIEDRICH (H.). — *On the regularity of solutions to the Yamabe equation and the existence of smooth hyperboidal initial data for Einstein's equations*, Commun. Math. Phys., t. **149**, 1992, p. 587–612.

[3] ASHTEKAR (A.). — On the boundary conditions for gravitational and gauge fields aat spatial infinity, Asymptotic behaviour of mass and spacetime geometry, F.J. Flaherty, ed., Proceedings, Corvallis, Oregon, 1983, Lect. Notes in Physics, t. **202**, Springer, 1984, p. 95–109.

[4] ASHTEKAR (A.) and HANSEN (R.O.). — *A unified treatment of null and spatial infinity in general relativity*, J. Math. Phys., t. **19**, 1978, p. 1542–1566.

[5] ASHTEKAR (A.) and MAGNON (A.). — *From i^0 to the $3+1$ description of infinity*, J. Math. Phys., t. **25**, 1984, p. 2682–2691.

[6] BANDO (S.), KASUE (A.), and NAKAJIMA (H.). — *On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth*, Invent. Math., t. **97**, 1989, p. 313–349.

[7] BARTNIK (R.) The mass of an asymptotically flat manifold. — Commun. Pure Appl. Math., t. **39**, 1986, p. 661—693.

[8] BERS (L.), JOHN (F.) and SCHECHTER (M.). — *Partial differential equations*. — American Mathematical Society, Providence, 1974.

[9] BESSE (A.L.). — *Einstein manifolds*, Ergeb. Math. Grenzgeb., t. **10**, Springer, Berlin, 1987.

[10] Cartan (É.). — *Les espaces à connexion conforme*, Ann. Soc. Pol. Mat., t. **22**, 1923, p. 171–221.
[11] Friedrich (H.). — *Cauchy problems for the conformal vacuum field equations in General Relativity*, Commun. Math. Phys., t. **91**, 1983, p. 445–472.
[12] Friedrich (H.). — *Einstein equations and conformal structure : existence of Anti-de Sitter-type spacetimes*, J. Geom. Phys., t. **17**, 1995, p. 125–184.
[13] Gauduchon (P.). — *Connexion canonique et structures de Weyl en géométrie conforme*, Juin 1990, non publié.
[14] Greene (R.), Petersen (P.) and Zhu (S.). — *Riemannian manifolds of faster-than-quadratic curvature decay*, Int. Math. Res. Notices, t. **9**, 1994, p. 363–377.
[15] Hawking (S.W.) and Ellis (G.F.R.). — *The large-scale structure of space-time.* — Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.
[16] Hebey (E.) and Herzlich (M.). — *Convergence of riemannian manifolds; a status report*, Preprint École Polytechnique (Palaiseau), n° **1096**, 1995.
[17] Lee (J.) and Parker (T.H.). — *The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc., t. **117**, 1987, p. 37–91.
[18] Lockhart (R.B.). — *Fredholm properties of a class of elliptic operators on non-compact manifolds*, Duke Math. J., t. **48**, 1983, p. 289–312.
[19] Lockhart (R.B.) and Mcowen (R.). — *Elliptic differential operators on non-compact manifolds*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa, t. **12**, 1985, p. 409–447.
[20] Maz'ya (V.G.) and Plameneevski (B.A.). — *Estimates in L^p and in Hölder classes and the Miranda-Agmon Maximum principle for solutions of elliptic boundary value problems in domains with singular points on the boundary (en russe)*, Math. Nachr., t. **81**, 1978, p. 25–82 ; trad. anglaise Amer. Math. Soc. Transl., t. **123**, 1984, p. 1–56.
[21] Penrose (R.). — *Conformal treatment of infinity, Relativity, groups and topology* (C. de Witt and B. de Witt, eds.), École d'été de Physique Théorique, Les Houches 1963. — Gordon and Breach, 1963.
[22] Schoen (R.). — *Conformal deformation of a Riemannian manifold to constant scalar curvature*, J. Diff. Geom, t. **20**, 1984, p. 479–495.
[23] Weyl (H.). — *Zur Infinitesimalgeometrie : Einordnung der projektiven und den konform Auffassung*, Göttinger Nachrichten, 1921, p. 99–112, repris dans Gesammelte Abhandlungen, vol. II, Chelsea, New York, 1967, p. 195–207.