Bulletin de la S. M. F.

Laurent Moret-Bailly

Un problème de descente

Bulletin de la S. M. F., tome 124, nº 4 (1996), p. 559-585

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_4_559_0>

Bull. Soc. math. France,
124, 1996, p. 559–585.

UN PROBLÈME DE DESCENTE

PAR

LAURENT MORET-BAILLY (*)

RÉSUMÉ. — On étudie le problème de la construction d'un objet géométrique au-dessus d'un schéma affine noethérien, à partir de ses images réciproques sur un ouvert et sur le complété le long du fermé complémentaire.

ABSTRACT. — We investigate the problem of constructing a geometric object over a Noetherian affine scheme given its pullbacks on an open set and on the completion along the complement.

0. Introduction et notations

0.1. — Soient A un anneau noethérien, S son spectre, I un idéal de A, A' le complété I-adique de A, de spectre S', U (resp. U') l'ouvert de S (resp. S') complémentaire du fermé défini par I (resp. IA'). Cet article est consacré aux problèmes du type suivant : si X' est un «objet» sur S' (par exemple un S'-schéma) dont la restriction à U' provient par changement de base d'un objet de même nature X_U sur U, est-ce que X' provient d'un objet sur S prolongeant X_U ? Celui-ci est-il alors unique ?

Comme exemples de problèmes de ce genre considérés dans la littérature, citons le cas où les «objets» sont les Modules quasi-cohérents, qui fait l'objet de l'appendice de [F-R] dont il sera abondamment question plus bas ; le cas des schémas, lorsque A est un anneau de valuation discrète, est étudié dans [B-L-R] (6.2, lemme D.3) ; mentionnons aussi le récent article [B-L] (*cf.* plus bas, remarque 3.10), ainsi que [H], dans une situation un peu différente. Enfin, [J] traite le cas d'un morphisme $S' \to S$ non nécessairement affine, toujours pour les Modules quasi-cohérents ; le

(*) Texte reçu le 15 septembre 1995, révisé le 7 mars 1996 et accepté le 10 avril 1996.
L. MORET-BAILLY, IRMAR (URA 305 du CNRS), Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes CEDEX (France). Email : moret@univ-rennes1.fr.

Classification AMS : 14A20, 14F20, 13B35.

lecteur intéressé par l'historique de ces questions pourra se reporter à la bibliographie de ce dernier article.

Un exemple plus élémentaire est le suivant. Avec les mêmes notations, on se donne un schéma T et un morphisme $u : U \to T$ que l'on souhaite prolonger en un morphisme $S \to T$; est-il suffisant pour cela que le composé $U' \to U \to T$ se prolonge à S' ? La réponse est affirmative (*cf.* théorème 1.2) mais l'auteur n'a pas trouvé ce résultat dans la littérature. (Lorsque T est affine et que A' est, disons, sans IA'-torsion, de sorte qu'il s'identifie à un sous-anneau de $\Gamma(U', \mathcal{O}_{U'})$, l'assertion se réduit facilement au fait que $\Gamma(U, \mathcal{O}_U) \cap A' = A$; sans hypothèse sur A', il s'agit d'un cas particulier des résultats de [F-R] ; enfin la réduction au cas où T est affine nécessite un argument topologique.)

0.2. — Plus généralement, on se donne dans toute la suite un *espace algébrique* S (tous les espaces algébriques considérés sont, sauf mention contraire, des espaces algébriques *quasi-séparés* au sens de [K], et sont à l'occasion appelés «espaces»), un sous-espace fermé de présentation finie Y de S, défini par l'idéal quasi-cohérent de type fini $\mathcal{I}$, et un S-espace $f : S' \to S$, affine sur S, défini par la $\mathcal{O}_S$-Algèbre quasi-cohérente $\mathcal{A}' = f_*\mathcal{O}_{S'}$. On pose

$$Y' = Y \times_S S', \quad U = S - Y, \quad U' = U \times_S S' = S' - Y',$$

de sorte que l'on a le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} U' & \xhookrightarrow{j'} & S' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ U & \xhookrightarrow{j} & S \end{array}$$

où f et g sont des morphismes affines, j et j' des immersions ouvertes quasi-compactes.

Nous serons souvent amenés à supposer S affine ; dans ce cas, on posera toujours :

$$S = \operatorname{Spec}(A), \quad Y = \operatorname{Spec}(A/I), \quad S' = \operatorname{Spec}(A').$$

Il sera commode de considérer le S-espace algébrique

$$\widetilde{S} := S' \amalg U \xrightarrow{p} S.$$

On a deux S-morphismes naturels $U' \rightrightarrows \widetilde{S}$ déduits de g et j'.

Nous poserons aussi

$$\mathcal{A}'' = \mathcal{A}' \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}', \qquad S'' = S' \times_S S' = \operatorname{Spec} \mathcal{A}'',$$
$$U'' = U' \times_U U' = U \times_S S'', \quad Y'' = Y \times_S S''.$$

Soit alors C une catégorie fibrée sur la catégorie ALG des espaces algébriques : on a donc pour tout espace T une « catégorie fibre » notée $C(T)$, et pour tout morphisme $h : T \to T'$ un « foncteur de changement de base » $C(T') \to C(T)$, noté h^*. Nous supposerons toujours que C transforme les sommes finies en produits, et notamment que $C(\widetilde{S})$ est équivalente à $C(S') \times C(U)$; les catégories fibrées que nous considérerons en pratique (*cf.* (0.4) plus bas) seront d'ailleurs des champs pour la topologie étale. On a un diagramme naturel de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} C(S) & \longrightarrow & C(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(S') & \longrightarrow & C(U') \end{array} \tag{0.2.1}$$

Il est commode d'introduire la catégorie « produit fibré » du diagramme ci-dessus :

$$C(U' \rightrightarrows \widetilde{S}) := C(S') \times_{C(U')} C(U). \tag{0.2.2}$$

Un objet de $C(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$ est un triplet (X', X_U, u) où $X' \in \operatorname{ob} C(S')$, $X_U \in \operatorname{ob} C(U)$ et où u est un isomorphisme de $j'^* X'$ avec $g^* X_U$. Cette catégorie, vu l'hypothèse sur C, s'identifie d'ailleurs (d'où la notation) au noyau du couple de foncteurs de $C(\widetilde{S})$ vers $C(U')$ déduit des deux morphismes $U' \rightrightarrows \widetilde{S}$ mentionnés plus haut.

Le diagramme (0.2.1) se résume en un foncteur

$$\Phi_C : C(S) \longrightarrow C(U' \rightrightarrows \widetilde{S}) \tag{0.2.3}$$

noté aussi $\Phi_{C/S}$ s'il peut y avoir confusion sur S.

Rappelons le théorème suivant, dû à Ferrand et Raynaud (et également démontré par Artin [A2, § 2] dans le cas d'une complétion I-adique).

THÉORÈME 0.3 [F-R, Appendice]. — *Sous les hypothèses du* § 0.2, *on suppose que f est plat et induit un isomorphisme de Y' sur Y. Désignons par* QC *la catégorie fibrée des Modules quasi-cohérents sur un S-espace algébrique variable. Alors le foncteur Φ_{QC} de* (0.2.3) *est une équivalence.*

Ce résultat est établi dans [F-R] lorsque S est affine et f fidèlement plat, ce qui entraîne immédiatement le cas général : comme la question est locale on peut supposer S affine et, d'autre part, remplacer S' par la somme disjointe de S' et d'une famille finie d'ouverts affines recouvrant U. (Petite correction : l'hypothèse « U quasi-compact » de [F-R] ne suffit pas ; il faut supposer I de type fini, la démonstration de *loc. cit.* utilisant le fait que $M \otimes_A A' = M$ pour tout A-module M à support dans Y.)

0.4. — Nous considérerons notamment le foncteur Φ_C lorsque C est l'une des catégories fibrées suivantes (où T désigne un espace algébrique variable) :

- $\mathrm{AFF}(T)$: catégorie des T-espaces algébriques *affines* sur T.
- $\mathrm{QPROJ}(T)$: catégorie des couples (X, L) où X est un T-espace algébrique et L un faisceau inversible sur X, ample relativement à T ; un morphisme $(X, L) \to (X', L')$ est un couple (h, ϕ) formé d'un T-morphisme $h : X \to X'$ et d'un isomorphisme ϕ de L avec h^*L'.
- $\mathrm{QAFF}(T)$: catégorie des T-espaces algébriques *quasi-affines* sur T.
- $\mathrm{SCH}(T)$: catégorie des T-espaces algébriques $Z \to T$, non nécessairement quasi-séparés, qui sont « relativement représentables par des schémas », *i.e.* tels que pour tout T-schéma T', le produit fibré $T' \times_T Z$ soit un schéma. (Bien entendu, si T est un schéma, $\mathrm{SCH}(T)$ est simplement la catégorie des T-schémas.)
- $\mathrm{ALG}(T)$: catégorie des T-espaces algébriques quasi-séparés sur T.
- $\mathrm{SEP}(T)$: catégorie des T-espaces algébriques *séparés* sur T.
- $\mathrm{SPF}(T)$: catégorie des T-espaces algébriques *séparés et de présentation finie* sur T ;
- $\mathrm{SLPF}(T)$: catégorie des T-espaces algébriques *séparés et localement de présentation finie* sur T.

Au § 1, on déduira, à peu près formellement, du théorème 0.3 ci-dessus que, sous les mêmes hypothèses, Φ_{AFF}, Φ_{QAFF} et Φ_{QPROJ} sont des équivalences (1.1). De façon légèrement moins immédiate, on en déduira ensuite (1.2) que Φ_{SCH} et Φ_{ALG} sont pleinement fidèles. (Ces résultats ne seront pas utilisés dans la suite de l'article, et on démontrera par ailleurs au § 4 une généralisation de 0.3, de sorte que le présent article peut être lu indépendamment de [F-R].)

On se propose ensuite d'étendre ces résultats, d'une part à d'autres catégories d'espaces algébriques, d'autre part à certains *champs algé-*

briques sur S. Sous les hypothèses de 0.3, nous obtiendrons, entre autres, les résultats suivants :

(1) si S est régulier de dimension 1, ou est excellent, alors Φ_{SLPF} est une équivalence (5.6) ;

(2) si C est un S-champ algébrique au sens de [A3], alors Φ_C est pleinement fidèle (6.2), et est une équivalence dans le cas (1) ci-dessus, et aussi lorsque C est algébrique au sens de [D-M] (6.5.1).

C'est d'ailleurs le cas (2) des champs algébriques qui a motivé le présent travail : le résultat est utilisé dans [MB].

En ce qui concerne le cas (1), on montre en fait que Φ_{SLPF} est une équivalence dès que S' est limite projective filtrante de S-espaces plats, de présentation finie et affines sur S, et l'on applique ce critère, dans le cas excellent, en invoquant le théorème de « lissage » de Popescu-Spivakovsky, qui montre bien plus, à savoir que (S étant supposé affine, noethérien et excellent) S' est limite projective filtrante de S-schémas *lisses*.

Incidemment, ceci conduit à se poser la question suivante : si A est un anneau noethérien, I un idéal de A, A' le complété I-adique de A, quand peut-on affirmer que A' est limite inductive de A-algèbres plates de type fini ? À la déception de l'auteur, O. Gabber [Ga] a montré que ce n'est jamais le cas si A est local de dimension 1, à corps résiduel de caractéristique nulle, et non excellent, et si I est son idéal maximal. On sait que de tels anneaux existent, même parmi les quotients d'anneaux locaux réguliers : *cf.* [N, app. A1, exemple 7, p. 209–211].

0.5. — Les résultats (1) et (2) ci-dessus, contrairement à ceux du § 1 concernant AFF, QPROJ et QAFF, ne sont pas (semble-t-il) des conséquences plus ou moins directes de 0.3. Pour les établir, la méthode consiste, partant d'un objet (X', X_U, u) de $C(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$ (notations de 0.2), à construire sur X' une *donnée de descente* pour C, relativement à f, prolongeant la donnée de descente effective sur $X' \times_{S'} U'$ déduite de l'isomorphisme u. Il revient d'ailleurs au même de construire une donnée de descente relativement à $p : \widetilde{S} \to S$ sur l'objet $\widetilde{X}$ de $C(\widetilde{S})$ « somme » de $X' \in \operatorname{ob} C(S')$ et $X_U \in \operatorname{ob} C(U)$. On conclut ensuite par les critères d'effectivité disponibles sur le marché (noter en particulier que, sous les hypothèses de 0.3, p est fidèlement plat et quasi-compact).

Rappelons qu'une donnée de descente sur X' est un isomorphisme de $p_1{}^*X'$ avec $p_2{}^*X'$ dans $C(S'')$ (on rappelle (0.2) que $S'' = S' \times_S S'$, et p_1 et p_2 désignent les projections naturelles de S'' vers S'), cet isomorphisme étant soumis à une « condition de cocycle ». On dispose déjà d'un tel isomorphisme sur U'', et aussi (trivialement) sur le sous-espace fermé E de S'' image de S' par le morphisme diagonal, les deux isomorphismes en question coïncidant sur $E \cap U''$. On se trouve alors dans une situation analogue à celle de 0.2, où S, U, Y, S' sont remplacés respectivement par S'', U'', Y'', E, et C par la catégorie fibrée des isomorphismes de $p_1{}^*X'$ avec $p_2{}^*X'$ (en un sens évident). C'est là une catégorie *discrète* de sorte que la nouvelle situation est même en un sens plus simple que celle de départ (la « descente de morphismes » ayant remplacé la « descente d'objets »). Cependant, sous les hypothèses de 0.3, si l'on a bien encore $Y'' \times_{S''} E \cong Y''$, il n'est plus vrai en général que E soit plat sur S''. Ceci nous amène à affaiblir comme suit les hypothèses de 0.3.

DÉFINITION 0.6. — Sous les hypothèses de 0.2, nous dirons que (S, Y, S') *vérifie la condition* (TI) si :

(i) le morphisme naturel $Y' \to Y$ est un isomorphisme;

(ii) $\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{A}', \mathcal{O}_Y) = 0$ pour tout $i > 0$.

(On rappelle que $\mathcal{A}' = f_*\mathcal{O}_{S'}$.)

0.7. — Miraculeusement, comme nous le verrons au § 2, la condition (TI) ci-dessus est conservée lors du passage de (S, Y, S') à (S'', Y'', E). Le prix à payer est que le théorème de Ferrand et Raynaud n'est plus valable que pour les $\mathcal{O}_S$-Modules qui sont eux-mêmes tor-indépendants de $\mathcal{A}'$ (« f-plats », suivant la terminologie introduite au § 2). Plus généralement, on aura, pour certaines catégories fibrées C sur $\mathrm{ALG}(S)$, une notion naturelle d'objet « f-plat » de $C(V)$ où V est un ouvert de S, ces objets formant une sous-catégorie de $C(V)$ notée $C_{f\text{-pl}}(V)$, et ayant la propriété que leur restriction à un ouvert W de V soit dans $C_{f\text{-pl}}(W)$. On posera dans ces conditions

$$C_{f\text{-pl}}(U' \rightrightarrows \widetilde{S}) := C(S') \times_{C(U')} C_{f\text{-pl}}(U). \tag{0.7.1}$$

Ainsi un objet de $C_{f\text{-pl}}(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$ est un objet (X', X_U, u) de $C(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$, soumis à la condition que X_U soit dans $C_{f\text{-pl}}(U)$. On a encore un foncteur

$$\Phi_{C,f\text{-pl}} : C_{f\text{-pl}}(S) \longrightarrow C_{f\text{-pl}}(U' \rightrightarrows \widetilde{S}) \tag{0.7.2}$$

qui s'avérera être une équivalence (sous l'hypothèse (TI)) lorsque $C = \mathrm{QC}$ (3.1). Heureusement, il existe suffisamment de Modules f-plats pour nos besoins : en particulier si f est plat et si M est dans $\mathrm{ob}\,\mathrm{QC}(S)$, alors M est évidemment f-plat, mais de plus (2.5.2) l'image réciproque de M sur S'' est tor-indépendante de $\mathcal{O}_E$ (notation de 0.5). On en déduira finalement (5.4.1) le théorème suivant, que l'on peut considérer comme le résultat central de ce travail.

THÉORÈME 0.8. — *Sous les hypothèses de* 0.3, *soit* (X', X_U, u) *un objet de la catégorie* $\mathrm{SEP}(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$. *Alors* X' *possède une unique donnée de descente relative à* f *prolongeant la donnée effective sur* $X' \times_{S'} U'$ *déduite de* u.

Il est à noter que ce résultat est démontré dans [B-L-R, 6.2, lemme D.3] dans le cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète et où X' est un schéma.

0.9. — Dans toute la suite on adopte les notations et conventions de 0.2, et l'on suppose que (S, Y, S') vérifie la condition (TI) de 0.6.

1. Conséquences du théorème de Ferrand et Raynaud

1.0. — Dans tout le § 1 nous supposerons que f est plat, de sorte que le théorème 0.3 s'applique. On rappelle que les résultats du § 1 ne seront pas utilisés dans la suite de l'article.

THÉORÈME 1.1. — *Les foncteurs* Φ_{AFF}, Φ_{QPROJ}, Φ_{QAFF} *de* (0.2.3) *sont des équivalences de catégories.*

Preuve. — (*Cf.* [SGA1, VIII].) Le cas de Φ_{AFF} résulte directement de 0.3, puisque $\mathrm{AFF}(T)$ est la catégorie opposée à celle des $\mathcal{O}_T$-Algèbres quasi-cohérentes. On laisse les détails au lecteur pour Φ_{QPROJ} et Φ_{QAFF} ; on utilise le fait que si (X, L) est un objet de $\mathrm{QPROJ}(T)$, on a une Algèbre graduée quasi-cohérente $\mathcal{S}$ canoniquement associée à (X, L), et que X s'identifie à un ouvert de Proj $(\mathcal{S})$. □

THÉORÈME 1.2. — *Les foncteurs* Φ_{SCH} *et* Φ_{ALG} *sont pleinement fidèles.*

Preuve. — La question étant locale pour la topologie étale sur S, nous supposerons que S est un schéma affine. Par changement de base, il suffit de montrer que si X est un S-schéma, ou un S-espace algébrique quasi-séparé, l'application

$$X(S) \longrightarrow X\big(U' \rightrightarrows \widetilde{S}\big)$$

est bijective. L'injectivité résulte du fait que p est fidèlement plat ; lorsque X est lui-même affine, la conclusion résulte de 1.1.

Dans le cas général, soit $\tilde{x} = (x', x_U) : \widetilde{S} \to X$ un S-morphisme appartenant à $X(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$, *i.e.* tel que $x'j' = x_U g$.

Traitons le cas où X est un schéma. Il est clair que l'on a une unique application x entre les ensembles sous-jacents à S et à X, qui induit par composition l'application sous-jacente à $\tilde{x}$: c'est l'application qui coïncide avec x' sur Y (en un sens évident) et avec x_U sur U. Comme p est fidèlement plat et quasi-compact, il résulte de [SGA1, VIII, 4.3] que

x est continue. En particulier, il existe des recouvrements ouverts affines (S_i) de S et (X_i) de X tels que $x(S_i) \subset X_i$ pour tout i, ce qui entraîne que $\tilde{x}$ induit un morphisme de $\widetilde{S} \times_S Si$ dans X_i. Nous sommes donc ramenés au cas affine déjà traité.

Lorsque X est un S-espace algébrique quasi-séparé, on peut tout d'abord le supposer quasi-compact (quitte à le remplacer par un ouvert quasi-compact contenant l'image de $\tilde{x}$) ; il existe alors un schéma affine Z et un morphisme $\pi : Z \to X$, étale et surjectif; π est automatiquement séparé et en outre, puisque X est quasi-séparé, π est quasi-compact. Il est donc quasi-affine en vertu de [K, II, th. 6.15]. Par produit fibré avec $\tilde{x} : \widetilde{S} \to X$, on obtient donc un $\widetilde{S}$-schéma étale, surjectif et quasi-fini $\widetilde{Z} = Z_U \amalg Z'$ et même, puisque l'on a $x'j' = x_U g$, un objet de la catégorie $\mathrm{QAFF}(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$, encore noté $\widetilde{Z}$. Il résulte donc de 1.1 qu'il existe un unique S-schéma quasi-affine Z_S induisant $\widetilde{Z}$, et que de plus le morphisme $\tilde{z} : \widetilde{Z} \to Z$ déduit de $\tilde{x}$ par changement de base provient d'un unique morphisme $z : Z_S \to Z$. Il ne reste plus qu'à montrer que le composé $\pi \circ z : Z_S \to X$ se factorise par la projection canonique $Z_S \to S$. Comme celle-ci est étale et surjective, il suffit pour cela de voir que les deux morphismes $\pi \circ z \circ \mathrm{pr}_1$ et $\pi \circ z \circ \mathrm{pr}_2 : Z_S \times_S Z_S \to X$ sont égaux, ce qu'il suffit de vérifier après le changement de base $p : \widetilde{S} \to S$; or on obtient les deux morphismes $\widetilde{Z} \times_{\widetilde{S}} \widetilde{Z} \to X$ composés de $\pi \circ \tilde{z} : \widetilde{Z} \to X$ avec les deux projections canoniques de $\widetilde{Z} \times_{\widetilde{S}} \widetilde{Z}$ sur $\widetilde{Z}$, qui sont évidemment égaux puisque, par construction, $\pi \circ \tilde{z}$ se factorise par $\widetilde{S}$. $\square$

2. Généralités sur la condition (TI)

2.0. — Soient C un anneau, C' et C'' deux C-algèbres, M' un C'-module, M'' un C''-module. Nous dirons que M' est *M''-plat* (sur C) si M' et M'' sont tor-indépendants sur C, *i.e.* $\mathrm{Tor}_i^C(M', M'') = 0$ pour tout $i > 0$. Cette notion est locale pour les topologies étales sur $\operatorname{Spec} C'$ et $\operatorname{Spec} C''$, de sorte qu'elle s'étend au cas où M' et M'' sont des Modules quasi-cohérents sur deux espaces algébriques au-dessus d'un même espace algébrique de base.

Ainsi, la condition (TI) (ii) se reformule en disant que $\mathcal{O}_Y$ est $\mathcal{A}'$-plat. Nous dirons aussi « f-plat » ou « (S'/S)-plat » pour « $\mathcal{A}'$-plat ». Si X est un S-espace algébrique, on dira que X est *f-plat* si $\mathcal{O}_X$ est $\mathcal{A}'$-plat sur S.

Les résultats du présent paragraphe reposent sur le lemme suivant.

LEMME 2.1. — *Soient C un anneau, C' une C-algèbre, M un C-module C'-plat, N' un C'-module. Alors pour tout $i \geq 0$, l'homomorphisme* *canonique*

$$\mathrm{Tor}_i^C(M,N') \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^{C'}(M\otimes_C C',N')$$

est bijectif. En particulier, M est N'-plat comme C-module si et seulement si $M\otimes_C C'$ est N'-plat comme C'-module.

Preuve. — Dans la catégorie dérivée $D^-(C'\text{-}\mathrm{Mod})$, on a des isomorphismes canoniques :

$$M\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_C N' \xrightarrow{\sim} (M\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_C C')\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{C'} N' \xrightarrow{\sim} (M\otimes_C C')\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{C'} N'$$

le premier par transitivité et le second parce que M est C'-plat. $\square$

2.2. — Revenons à la condition (TI). Elle peut se résumer en disant que

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\simeq} f_*\mathbb{L}f^*\mathcal{O}_Y$$

dans $D^-_{\mathrm{qc}}(\mathcal{O}_S)$ (catégorie dérivée des complexes bornés supérieurement de $\mathcal{O}_S$-Modules, à cohomologie quasi-cohérente), ou encore que

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}'\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_Y.$$

Elle entraîne que $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} f_*\mathbb{L}f^*\mathcal{M}$ pour tout $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent $\mathcal{M}$ à support dans Y (si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module ceci résulte de l'isomorphisme $\mathcal{M}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_Y \simeq \mathcal{M}$ et de l'associativité du produit tensoriel dérivé ; le cas où $\mathcal{M}$ est de type fini en résulte par dévissage compte tenu du fait que $\mathcal{I}$ est de type fini ; on en déduit le cas général par passage à la limite). Plus généralement, on a $K^\bullet \xrightarrow{\sim} f_*\mathbb{L}f^*K^\bullet$ pour tout $K^\bullet \in D^-_{\mathrm{qc},Y}(\mathcal{O}_S)$.

La condition (TI) entraîne aussi que $p : \widetilde{S} \longrightarrow S$ est surjectif.

2.3. Exemple. — La condition (TI) est vérifiée notamment (dans le cas affine) si A' est plat sur A et $A/I \xrightarrow{\sim} A'/IA'$: c'est la situation de 0.3. Le cas particulier le plus important est celui où A est noethérien et où A' est son complété I-adique (ou un anneau intermédiaire comme l'hensélisé de (A,I)). Les propriétés de permanence énoncées ci-dessous fournissent cependant d'autres exemples.

PROPOSITION 2.4 (changement de base f-plat). — *Soit $h : X \to S$ un S-espace f-plat. Alors $(X, h^{-1}(Y), X\times_S S')$ vérifie encore* (TI).

Preuve.—La condition (i) de (TI) est évidemment satisfaite. Supposant S et X affines, posons $X = \mathrm{Spec}(R)$, $R' = R\otimes_A A'$. Alors R/IR est un A-module à support dans Y donc A'-plat, d'où pour $i>0$

$$0 = \mathrm{Tor}_i^A(A', R/IR) = \mathrm{Tor}_i^R(R', R/IR)$$

d'après le lemme 2.1 appliqué avec $C=A$, $C'=R$, $M=A'$, $N'=R/IR$. $\square$

Proposition 2.5 («changement de S'»). — *Soit S'_1 un S'-espace algébrique affine sur S'.*

(a) *Soit F un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent et f-plat. Pour que $F_{S'}$ soit (S'_1/S')-plat il faut et il suffit que F soit (S'_1/S)-plat.*

(b) *Pour que (S,Y,S'_1) (outre (S,Y,S')) vérifie* (TI), *il faut et il suffit qu'il en soit de même de (S',Y',S'_1).*

Preuve. — L'assertion (a) résulte de 2.1. Pour (b), l'équivalence est claire en ce qui concerne la condition (i) de (TI) et résulte de (a) appliqué à $F = \mathcal{O}_Y$ pour la condition (ii). $\square$

Le cas $S'_1 \simeq S$ donne notamment :

Corollaire 2.5.1. — *Soit $s : S \to S'$ une section de f, et soit E l'image de s vue comme sous-espace fermé de S'. Alors (S',Y',E) vérifie la condition* (TI). *De plus, si F est un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent et f-plat, alors $F_{S'}$ est (E/S')-plat.*

En particulier, comme annoncé en 0.6 :

Proposition 2.5.2. — *Supposons que $\mathcal{A}'$ soit $\mathcal{A}'$-plate (condition vérifiée notamment si f est plat). Soit $S'' = S' \times_S S'$ considéré comme S'-espace par la première projection. Soit Δ l'image de la section diagonale de S'' sur S' (vue comme sous-espace fermé). Alors (S'',Y'',Δ) vérifie la condition* (TI).

De plus, soit F un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent. Si F est à la fois $\mathcal{A}'$-plat et $\mathcal{A}''$-plat (condition encore une fois automatique si f est plat), alors son image réciproque $F_{S''}$ sur S'' est un $\mathcal{O}_{S''}$-Module $\mathcal{O}_\Delta$-plat.

Preuve. — Il résulte de 2.4 que (S',Y',S'') vérifie (TI) et de 2.5.1 que (S'',Y'',Δ) vérifie (TI).

Si F est à la fois $\mathcal{A}'$-plat et $\mathcal{A}''$-plat, alors $F_{S'}$ est (S''/S')-plat d'après 2.5, donc $F_{S''}$ est $\mathcal{O}_\Delta$-plat d'après 2.5.1. $\square$

3. Descente de faisceaux quasi-cohérents

3.0. — Pour tout ouvert V de S, nous noterons $\mathrm{QC}_{f\text{-}\mathrm{pl}}(V)$ la catégorie des $\mathcal{O}_V$-Modules quasi-cohérents et $\mathcal{A}'_V$-plats. Pour abréger, nous désignerons par $\mathcal{C}$ la catégorie $\mathrm{QC}_{f\text{-}\mathrm{pl}}(U' \rightrightarrows \widetilde{S}\,)$ et par

$$\Phi : \mathrm{QC}_{f\text{-}\mathrm{pl}}(S) \longrightarrow \mathcal{C} = \mathrm{QC}_{f\text{-}\mathrm{pl}}(U' \rightrightarrows \widetilde{S}\,)$$

le foncteur $\Phi_{\mathrm{QC},f\text{-}\mathrm{pl}}$ (*cf.* 0.7). Rappelons qu'un objet de $\mathcal{C}$ est de la forme (F',E,u), avec F' quasi-cohérent sur S', E quasi-cohérent sur U et $\mathcal{A}'_U$-plat, et $u : j'^*F' \xrightarrow{\sim} g^*E$.

THÉORÈME 3.1. — *Le foncteur* $\Phi = \Phi_{\mathrm{QC},f\text{-}\mathrm{pl}}$ *ci-dessus est une équivalence de catégories.*

REMARQUE 3.1.1. — Lorsque f est plat, on retrouve le théorème 0.3. La preuve est d'ailleurs adaptée de celle de [F-R].

3.2. — On construit un quasi-inverse Ψ de Φ grâce à la remarque suivante : puisque Φ est censé être pleinement fidèle, on doit avoir, pour F et G dans $\mathrm{ob}\,\mathrm{QC}_{f\text{-}\mathrm{pl}}(S)$, une suite exacte canonique

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(G,F)\\ &\qquad\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S'}}(f^*G,f^*F)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(G_U,F_U)\\ &\qquad\qquad\qquad\rightrightarrows \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{U'}}(G_{U'},F_{U'})\end{aligned}$$

où le terme du milieu s'identifie d'ailleurs à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\tilde S}}(p^*G,p^*F)$. On peut en particulier prendre $G=\mathcal{O}_S$ qui est évidemment f-plat, ce qui (du moins dans le cas affine) permet de calculer F à partir de $\Phi(F)$. Ceci conduit, pour $X=(F',E,u)$ dans $\mathcal{C}$, à définir $\Psi(X)$ dans $\mathrm{QC}(S)$ par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}\Psi(X) & \longrightarrow & f_*F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ j_*E & \longrightarrow & j_*g_*g^*E\simeq f_*j'_*j'^*F'\end{array}\tag{3.2.1}$$

où la définition de l'isomorphisme utilise u. Il est immédiat que Ψ est un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathrm{QC}(S)$ (car les immersions j et j' sont quasi-compactes), et en fait

THÉORÈME 3.3. — *Le faisceau* $\Psi(X)$ *défini ci-dessus est dans* $\mathrm{QC}_{f\text{-}\mathrm{pl}}(S)$, *et* Ψ *est un quasi-inverse de* Φ.

3.4. — Prouvons le théorème 3.3. La question étant locale sur S, nous supposerons S affine.

LEMME 3.4.1. — *Soit* $E\in\mathrm{ob}\,\mathrm{QC}_{f\text{-}\mathrm{pl}}(U)$: *alors* $H^0(U,E)$ *est* A'*-plat, et* $H^0(U,E)\otimes_A A'\xrightarrow{\sim}H^0(U,E\otimes_{\mathcal{O}_U}\mathcal{A}'_U)=H^0(U',g^*E)$.

Preuve. — Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement fini de U par des ouverts affines. Considérons le complexe de Čech alterné $K^\bullet=C^\bullet(\mathcal{U},E)$ de $\mathcal{U}$ à coefficients dans E : c'est un complexe borné à degrés ≥ 0 de A-modules qui calcule la cohomologie $H^\bullet(U,E)$, et dont les termes sont f-plats puisque E l'est. De plus on a aussi $H^i(U',g^*E)=H^i(K^\bullet\otimes_A A')$ pour tout $i\geq 0$. Enfin, pour $i>0$, $H^i(K^\bullet)=H^i(U,E)$ est à support dans Y et donc A'-plat. L'assertion résulte donc du lemme 3.4.2 ci-dessous. □

LEMME 3.4.2. — *Soient C un anneau, C' une C-algèbre, $K^\bullet$ un complexe fini, à degrés ≥ 0, de C-modules C'-plats. On suppose de plus que, pour tout $i > 0$, $H^i(K^\bullet)$ est C'-plat. Alors $H^0(K^\bullet)$ est C'-plat, et l'on a $H^i(K^\bullet) \otimes_C C' \simeq H^i(K^\bullet \otimes_C C')$ pour tout $i \geq 0$.*

Preuve. — Laissée au lecteur, qui pourra soit procéder par récurrence sur la longueur de $K^\bullet$, soit considérer une suite spectrale associée à $K^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_C C'$. $\square$

COROLLAIRE 3.4.3. — *Soit $F \in \operatorname{ob} \mathrm{QC}(S)$. Pour que F soit f-plat, il faut et il suffit que $F_{|U}$ le soit.*

Preuve. — La nécessité est triviale. Réciproquement, supposons que j^*F soit f-plat, et considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow F \longrightarrow j_*j^*F \longrightarrow Q \longrightarrow 0. \tag{3.4.3.1}$$

Il résulte de 3.4.1 que j_*j^*F est $\mathcal{A}'$-plat, et il en est de même de P et Q qui sont à support dans Y. Donc F est bien $\mathcal{A}'$-plat. $\square$

COROLLAIRE 3.4.4. — *Soit $F \in \operatorname{ob} \mathrm{QC}_{f\text{-pl}}(S)$: alors le carré*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes \mathcal{A}' = f_*f^*F \arrow[d] \\
j_*j^*F \arrow[r] & (j_*j^*F) \otimes \mathcal{A}' = f_*j'_*j'^*f^*F
\end{tikzcd}$$

est cartésien. Autrement dit, Φ admet Ψ pour quasi-inverse à gauche (et est en particulier pleinement fidèle).

Preuve. — La suite exacte (3.4.3.1) est formée de faisceaux $\mathcal{A}'$-plats, d'où un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & F \arrow[r] \arrow[d] & j_*j^*F \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \otimes \mathcal{A}' \arrow[r] & F \otimes \mathcal{A}' \arrow[r] & (j_*j^*F) \otimes \mathcal{A}' \arrow[r] & Q \otimes \mathcal{A}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel, puisque P et Q sont à support dans Y, α et β sont des isomorphismes. Le corollaire en résulte (et l'on a même montré que le carré est aussi cocartésien). $\square$

3.4.5. *Fin de la démonstration du théorème 3.3.*

Soit $X = (F', E, u) \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$. Il reste à voir que $\Psi(X)$ est $\mathcal{A}'$-plat et que $\Phi\Psi(X) \simeq X$. Considérons le diagramme cartésien définissant $\Psi(X)$:

$$\begin{tikzcd}
\Psi(X) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"] & f_*F' \arrow[d, "\beta"] \\
j_*E \arrow[r, "\delta"] & j_*g_*g^*E = f_*j'_*j'^*F'.
\end{tikzcd}$$

On a $\operatorname{Ker}\alpha \simeq \operatorname{Ker}\beta$ et $\operatorname{Coker}\alpha \hookrightarrow \operatorname{Coker}\beta$, de sorte que $\operatorname{Ker}\alpha$ et $\operatorname{Coker}\alpha$ sont à support dans Y, et en particulier $\mathcal{A}'$-plats. Comme E est $\mathcal{A}'$-plat par hypothèse il en est de même de j_*E d'après 3.4.1. Donc $\Psi(X)$ est $\mathcal{A}'$-plat par dévissage. D'autre part, α est un isomorphisme sur U donc induit un isomorphisme de $j^*\Psi(X)$ avec E ; il reste à voir que γ induit un isomorphisme de $\Psi(X) \otimes \mathcal{A}'$ avec f_*F'. Or on a

$$\operatorname{Ker}(\alpha) \otimes \mathcal{A}' = \operatorname{Ker}(\alpha) = \operatorname{Ker}(\beta),$$

$$\operatorname{Coker}(\alpha) \otimes \mathcal{A}' = \operatorname{Coker}(\alpha) \longhookrightarrow \operatorname{Coker}(\beta).$$

D'autre part le lemme 3.4.1 implique que δ induit un isomorphisme $(j_*E) \otimes \mathcal{A}' \simeq j_*g_*g^*E$, d'où la conclusion par le lemme des cinq. $\square$

COROLLAIRE 3.5. — *Soient F et G deux Modules quasi-cohérents sur S. On suppose que G est f-plat. Alors la suite naturelle*

$$\operatorname{Hom}_S(F,G) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\widetilde{S}}(p^*F, p^*G) \rightrightarrows \operatorname{Hom}_U(F_{U'}, G_{U'}),$$

où la double flèche provient des deux morphismes naturels de U' vers $\widetilde{S}$, est exacte.

Preuve. — C'est une simple reformulation de 3.4.4 (appliqué au faisceau G). $\square$

LEMME 3.6. — *Soit $u : E \to F$ un morphisme dans $\mathrm{QC}(S)$. Si p^*u est surjectif, alors u est surjectif.*

Preuve. — Si $u_{|U}$ est surjectif, $\operatorname{Coker}(u)$ est à support dans Y donc il s'identifie à $\operatorname{Coker}(u) \otimes \mathcal{A}' = \operatorname{Coker}(u \otimes \mathcal{A}')$ qui est nul si f^*u est surjectif. $\square$

3.7. — *Descente de quotients f-plats.* Pour tout S-espace algébrique $h : X \to S$ et tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent F, notons $\operatorname{Quot}(F)$ l'ensemble des quotients quasi-cohérents de F et $\operatorname{Quot}_{f\text{-pl}}(F) \subset \operatorname{Quot}(F)$ l'ensemble de ceux qui sont f-plats sur S.

PROPOSITION 3.7.1. — *Soit $h : X \to S$ un S-espace algébrique et soit F un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. Notons X', F', X_U, F_U, $X_{U'}$, $F_{U'}$, les objets déduits de X et F par les changements de base f, j, fj'. Alors la suite naturelle d'ensembles*

$$\operatorname{Quot}_{f\text{-pl}}(F) \longrightarrow \operatorname{Quot}(F') \times \operatorname{Quot}_{f\text{-pl}}(F_U) \rightrightarrows \operatorname{Quot}(F_{U'})$$

est exacte.

Preuve. — On se ramène au cas où S et X sont affines, soit $X = \operatorname{Spec}(R)$. Si F correspond au R-module M, la donnée d'un quotient de M, f-plat comme A-module, équivaut à celle d'un A-module quotient f-

plat N de M, tel que l'action de R sur M se descende à N. Il suffit dès lors d'appliquer 3.1, 3.5 et 3.6, les détails étant laissés au lecteur. $\square$

COROLLAIRE 3.7.2 (Descente de sous-espaces fermés f-plats). — *Soit $h : X \to S$ un S-espace algébrique. Soit Z_U (resp. Z') un sous-espace fermé de $X_U = X \times_S U$ (resp. $X' = X \times_S S'$). On suppose que $Z_U \times_S U' = Z' \times_{S'} U'$ comme sous-espaces de $X \times_S U'$ et que Z_U est f-plat comme S-espace algébrique. Alors il existe un unique sous-espace fermé Z de X induisant Z_U sur X_U et Z' sur X'. De plus, Z est f-plat.*

Preuve. — Le sous-espace Z est automatiquement f-plat puisque Z_U l'est (corollaire 3.4.3). L'énoncé n'est que le cas particulier de 3.7.1 où $F = \mathcal{O}_X$. $\square$

Le cas où $X = S$ donne notamment l'énoncé suivant (l'hypothèse entre crochets sera supprimée en 4.3).

COROLLAIRE 3.7.3. — *Soit Z un sous-espace localement fermé de S contenant U et tel que $Z \times_S S' = S'$. Alors $Z = S$.*

En particulier $p : \widetilde{S} \to S$ est schématiquement dominant et est même un épimorphisme dans la catégorie des espaces algébriques (localement séparés).

Preuve. — Le sous-espace Z est automatiquement f-plat (car $Z \cap U = U$ l'est) et a S pour espace sous-jacent (car p est surjectif) donc est fermé. On peut donc appliquer l'assertion d'unicité de 3.7.2. $\square$

PROPOSITION 3.8 (descente de propriétés de finitude). — *Soient $\mathcal{B}$ une $\mathcal{O}_S$-Algèbre quasi-cohérente et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{B}$-Module quasi-cohérent.*

(i) *Pour que $\mathcal{F}$ soit un $\mathcal{B}$-Module de type fini, il faut et il suffit que $p^*\mathcal{F}$ soit un $p^*\mathcal{B}$-Module de type fini.*

(ii) *On suppose que $\mathcal{F}$ est f-plat. Pour que $\mathcal{F}$ soit un $\mathcal{B}$-Module de présentation finie, il faut et il suffit que $p^*\mathcal{F}$ soit un $p^*\mathcal{B}$-Module de présentation finie.*

(iii) *Pour que $\mathcal{B}$ soit une $\mathcal{O}_S$-Algèbre de type fini, il faut et il suffit que $p^*\mathcal{B}$ soit une $\mathcal{O}_{\widetilde{S}}$-Algèbre de type fini.*

(iv) *On suppose que $\mathcal{B}$ est f-plate. Pour que $\mathcal{B}$ soit une $\mathcal{O}_S$-Algèbre de présentation finie, il faut et il suffit que $p^*\mathcal{B}$ soit une $\mathcal{O}_{\widetilde{S}}$-Algèbre de présentation finie.*

Preuve. — Dans chaque cas le « il faut » est trivial; pour la réciproque, la question est locale sur S; nous supposerons donc que $S = \operatorname{Spec}(A)$ et nous noterons B la A-algèbre $\Gamma(S, \mathcal{B})$ et F le B-module $\Gamma(S, \mathcal{F})$.

(i) Soient J un ensemble d'indices et $v : A^{(J)} \to F$ un A-morphisme surjectif. Si $p^*\mathcal{F}$ est un $p^*\mathcal{B}$-Module de type fini, il existe une partie finie J_0 de J telle que si u est la restriction de v à $A^{(J_0)}$, p^*u soit surjectif (on utilise ici le fait que U est quasi-compact). On conclut alors par 3.6.

(ii) Si $p^*\mathcal{F}$ est un $p^*\mathcal{B}$-Module de présentation finie, on sait déjà que F est un B-module de type fini d'après (i). On a donc une suite exacte de B-modules de la forme $0 \to K \to B^n \to F \to 0$, où n est un entier, et il s'agit de voir que K est de type fini. Or comme $\mathcal{F}$ est supposé f-plat, la suite obtenue en appliquant p^* est encore exacte et comme $p^*\mathcal{F}$ est de présentation finie il en résulte que p^*K est de type fini, donc aussi K d'après (i).

(iii) et (iv) : les démonstrations sont analogues à celles de (i) et (ii) respectivement, en remplaçant les modules libres par des algèbres de polynômes. $\square$

Remarque 3.9. — Il est facile de généraliser 3.8 à des faisceaux quasi-cohérents sur un S-espace quelconque, plutôt que sur S ; nous n'en aurons pas besoin.

Remarque 3.10. — Un résultat récent de Beauville et Laszlo [B-L] est apparenté aux nôtres : ils considèrent le cas où S est le spectre d'un anneau A (non nécessairement noethérien), S' le spectre de son complété I-adique A', où I est *engendré par un élément régulier* x. Il est facile de voir que x est encore régulier dans A', de sorte que (TI) est vérifiée. Beauville et Laszlo obtiennent un théorème de descente de modules entièrement analogue à 3.3, la seule différence résidant dans la contrainte imposée aux modules : plutôt que les modules A'-plats, on considère les modules pour lesquels x est régulier. Il semble bien qu'aucune de ces deux conditions n'implique l'autre ; cependant la ressemblance formelle des deux énoncés suggère la possibilité d'une généralisation commune (au moins dans le cas particulier où A et A' sont du type envisagé).

4. Descente de sections et de morphismes d'espaces algébriques

Proposition 4.1. — *Soit $\pi : Z \to S$ un S-espace algébrique f-plat. Soit $\widetilde{\pi}$ le morphisme de $\widetilde{Z} = Z \times_S \widetilde{S}$ vers $\widetilde{S}$ déduit de π par le changement de base $p : \widetilde{S} \longrightarrow S$ et considérons pour un morphisme d'espaces algébriques la propriété d'être :*

(i) *surjectif* ;

(ii) *localement de présentation finie* ;

(iii) *étale* ;

(iv) *un monomorphisme* ;

(v) *un isomorphisme.*

Alors pour que π *possède l'une de ces propriétés, il faut et il suffit que* $\widetilde{\pi}$ *la possède.*

Preuve.

4.1.1. — Dans tous les cas le «il faut» est trivial et la question est locale sur S. On supposera dans chaque cas que $\widetilde{\pi}$ possède la propriété envisagée.

(i) Résulte facilement du fait que p est surjectif.

(ii) On peut supposer S et Z affines (la question étant locale sur Z). L'assertion résulte alors de 3.8 (iv).

(iii) On suppose encore S et Z affines. Comme $\widetilde{\pi}$ est étale, π est localement de présentation finie (cas (ii) ci-dessus) et d'autre part il est clair que π est *non ramifié* car cette propriété se vérifie sur les fibres (*cf.* [EGA IV, 17.4.1 (d)]) et p est surjectif. En particulier on peut, d'après [EGA IV, 18.4.7], supposer que Z est un fermé d'un S-schéma *étale* (et en particulier f-plat) T. Remplaçant alors S par T, nous sommes ramenés au cas où π est de plus une *immersion fermée.* Alors $\widetilde{\pi}$ est une immersion fermée étale donc un isomorphisme de $\widetilde{Z}$ sur un ouvert fermé de $\widetilde{S}$. Si Ω désigne l'ouvert complémentaire de Z dans S, $p^{-1}(\Omega)$ est aussi un ouvert fermé de $\widetilde{S}$ de sorte que l'on peut appliquer 3.7.2 (descente de sous-espaces fermés : remarquer que Ω est ouvert donc f-plat) et conclure qu'il existe un sous-espace fermé W de S tel que $p^{-1}(\Omega) = p^{-1}(W)$. Ensemblistement, on a nécessairement $W = \Omega$ de sorte que Ω est fermé. Remplaçant alors S par l'ouvert $S - \Omega$, nous sommes ramenés au cas où, en outre, $|Z| = S$ de sorte que $\widetilde{\pi}$ est un isomorphisme : on conclut alors en invoquant 3.7.3.

4.1.2. — Avant de passer à (iv), nous pouvons montrer (v) dans le cas où π est déjà un *monomorphisme* : en effet il résulte de (iii) que π est étale, donc une immersion ouverte (*cf.* [EGAIV, 17.9.1]) et comme π est surjectif (cas (i)) c'est bien un isomorphisme.

4.1.3. — Montrons maintenant les deux dernières assertions.

(iv) Il suffit d'appliquer 4.1.2 ci-dessus à la diagonale $\Delta : Z \to Z \times_S Z$ (en remarquant que Δ est déjà un isomorphisme au-dessus de U de sorte que $Z \times_S Z$ est f-plat).

(v) Résulte de (i), (iii) et (iv) compte tenu de [EGAIV, 17.9.1] déjà cité : un monomorphisme étale surjectif est un isomorphisme. $\square$

Remarques 4.2.

(a) Dans (iii) et (v), la f-platitude de π est conséquence de la propriété envisagée pour $\widetilde{\pi}$ puisque celle-ci implique que π_U est plat.

(b) Par changement de base f-plat, 4.1 s'étend immédiatement au cas d'un S-morphisme $Z \to X$ d'espaces algébriques f-plats. On peut aussi « descendre » au sens de 4.1 bien d'autres propriétés de morphismes (par exemple : quasi-compact, localement de type fini, séparé, affine, immersion fermée...), parfois même sans hypothèse de f-platitude. Nous n'aurons pas à utiliser ces énoncés ; le seul qui nous servira est le cas (v) de 4.1, dont la preuve utilise les cas (i) à (iv).

COROLLAIRE 4.3 (généralisation de 3.7.3).

(i) *Soit* $\pi : Z \to S$ *un monomorphisme d'espaces algébriques tel que* $p : \widetilde{S} \to S$ *se factorise par* π. *Alors* π *est un isomorphisme.*

(ii) p *est un épimorphisme d'espaces algébriques.*

Preuve.

(i) $\widetilde{\pi} : \widetilde{Z} \to \widetilde{S}$ est un monomorphisme qui a une section, donc un isomorphisme, et l'on applique 4.1 (v) compte tenu de la remarque 4.2 (a).

(ii) Conséquence immédiate de (i) ; c'est d'ailleurs un cas particulier de 4.4 (i) ci-dessous. $\square$

COROLLAIRE 4.4. — *Soit* $F : \mathrm{SCH}(S)^0 \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ *un foncteur contravariant sur la catégorie des* S*-schémas relatifs de* 0.4.

(i) *On suppose que le morphisme diagonal* $F \to F \times F$ *est représentable. Alors l'application naturelle* $F(p) : F(S) \to F(\widetilde{S})$ *est injective.*

(ii) *On suppose que* F *est représentable par un* S*-espace algébrique séparé. Alors la suite naturelle d'ensembles*

$$F(S) \longrightarrow F(\widetilde{S}) \rightrightarrows F(U')$$

est exacte.

Preuve. — L'assertion (i) résulte immédiatement de 4.3 (i) et contient l'assertion d'injectivité de (ii). Si F est représenté par le S-espace algébrique X, soient $x_U \in X(U)$ et $x' \in X(S')$ ayant la même image dans $X(U')$. Si X est séparé, les images de x_U et x' sont respectivement des sous-espaces fermés Z_U et Z' de X_U et $X' = X \times_S S'$, induisant le même sous-espace de $X \times_S U'$; de plus Z_U est évidemment plat sur U donc f-plat. On peut donc appliquer 3.7.2 : il existe un sous-espace fermé Z de X induisant Z_U et Z'. Appliquant 4.1 à la projection $Z \to S$, on voit alors que celle-ci est un isomorphisme, de sorte que Z est l'image d'une section de x au-dessus de S, qui induit visiblement x_U sur U et x' sur S'. $\square$

THÉORÈME 4.5 (descente de morphismes). — *Soient* Z *et* X *deux* S*-espaces algébriques ; on suppose que* Z *est* f*-plat. Considérons la suite* *naturelle d'ensembles*

$$\mathrm{Hom}_S(Z,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_U(Z_U,X_U) \times \mathrm{Hom}_{S'}(Z_{S'},X_{S'}) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{U'}(Z_{U'},X_{U'}).$$

Alors la première flèche est injective, et la suite est exacte si X est séparé sur S.

Preuve. — On se ramène immédiatement au cas où Z est affine; c'est alors une conséquence de 4.4 moyennant le changement de base $Z \to S$ (lequel est f-plat par hypothèse donc conserve la condition (TI)). $\square$

5. Descente d'espaces algébriques

5.1. — Pour tout S-espace T, rappelons que $\mathrm{SEP}(T)$ est la catégorie des T-espaces algébriques séparés. Si T est un ouvert de S, on a une sous-catégorie $\mathrm{SEP}_{f\text{-pl}}(T)$ formée des espaces f-plats. On s'intéresse au foncteur de (0.7.2) :

(5.1.1) $$\Phi = \Phi_{\mathrm{SEP},f\text{-pl}} : \mathrm{SEP}_{f\text{-pl}(S)} \longrightarrow \mathrm{SEP}_{f\text{-pl}}(U' \rightrightarrows \widetilde{S}).$$

THÉORÈME 5.2.

(i) *Le foncteur Φ ci-dessus est pleinement fidèle.*

(ii) *Si $p : \widetilde{S} \longrightarrow S$ a une section, alors Φ est une équivalence.*

Preuve.

(i) C'est une conséquence immédiate de 4.5.

(ii) Soit $s : S \longrightarrow \widetilde{S}$ une section de p. Alors S est somme des ouverts $s^{-1}(U)$ et $s^{-1}(S')$, de sorte que nous sommes ramenés à deux cas :

• Cas où j a une section : alors $U = S$ et il est immédiat que $(X', X_U, u) \mapsto X_U$ est un quasi-inverse de Φ.

• Cas où f a une section $s : S \longrightarrow S'$: alors Φ a pour quasi-inverse le foncteur $(X', X_U, u) \mapsto s^*X'$. Montrons en effet (les vérifications de routine étant laissées au lecteur) que si (X', X_U, u) est dans $\mathrm{SEP}_{f\text{-pl}}(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$, alors $X'_1 := f^*s^*X'$ s'identifie canoniquement à X'. C'est clair au-dessus de U'; c'est clair aussi pour les restrictions de X' et X'_1 à l'image E de s. Il suffit pour conclure de pouvoir appliquer 4.5 en remplaçant S par S', Y par Y' et S' par E (*cf.* 2.5.1), la seule chose à vérifier étant que X' et X'_1 sont (E/S')-plats. Or ceci se vérifie sur l'ouvert U' (3.4.3) sur lequel X' et X'_1 proviennent tous deux du S-espace f-plat X_U : la conclusion résulte alors de la seconde assertion de 2.5.1. $\square$

5.3. — *Dans la suite du § 5, on suppose que f est plat*, de sorte que tout S-espace algébrique est f-plat.

NOTATION. — Pour tout S-espace algébrique T, nous noterons $\mathrm{FX}(T)$ le topos des faisceaux pour la topologie fpqc sur la catégorie des T-espaces. (En fait, il faudrait se limiter à la catégorie des T-espaces appartenant à un univers $\mathcal{U}$ fixé, et définir $\mathrm{FX}(T)$ comme le $\mathcal{V}$-topos des faisceaux à valeurs dans $\mathcal{V}$ sur le site fpqc correspondant, où $\mathcal{V}$ est un univers tel que $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$; ces subtilités n'auront pas d'incidence sur la suite.)

La catégorie FX est une catégorie fibrée sur $\mathrm{ALG}(S)$. Le foncteur

$$\Phi_{\mathrm{FX}} : \mathrm{FX}(S) \longrightarrow \mathrm{FX}(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$$

de (0.2.3) a un *adjoint à droite* Ψ_{FX}, défini comme en 3.2 : ceci résulte formellement de l'existence des adjoints f_*, j_*, *etc.* aux foncteurs de changement de base f^*, j^*, *etc.* Explicitement, si (X', X_U, u) est un objet de $\mathrm{FX}(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$, son transformé par Ψ_{FX} associe au S-espace T l'ensemble des couples (x', x_U) où $x' \in X'(T \times_S S')$ et $x_U \in X_U(T \times_S U)$ ont des images respectives dans $X'(T \times_S U')$ et $X_U(T \times_S U')$ qui se correspondent par u.

La catégorie $\mathrm{SEP}(S)$ (resp. $\mathrm{SEP}(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$) s'identifie à une sous-catégorie pleine de $\mathrm{FX}(S)$ (resp. $\mathrm{FX}(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$) dont les objets seront dits représentables (abus d'écriture pour « représentables et séparés »). (Le fait que tout espace algébrique quasi-séparé est un faisceau fpqc est établi dans [L-MB].)

Ainsi, le théorème 5.2 (i) peut se reformuler en disant que si X dans $\mathrm{ob}\,\mathrm{FX}(S)$ est représentable, le morphisme d'adjonction $X \to \Psi_{\mathrm{FX}}\Phi_{\mathrm{FX}}(X)$ est un isomorphisme. Notons que s'il est clair que Φ_{FX} respecte la représentabilité, cela ne l'est pas pour Ψ_{FX}.

THÉORÈME 5.4. — *Soit $\mathcal{X} \in \mathrm{ob}\,\mathrm{FX}(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$. On suppose que $\mathcal{X}$ est représentable. Alors le morphisme d'adjonction $\Phi_{\mathrm{FX}}\Psi_{\mathrm{FX}}(\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ est un isomorphisme. En particulier, $\mathcal{X}$ est dans l'image essentielle de Φ_{FX}, et il provient d'un S-espace algébrique si et seulement si $\Psi_{\mathrm{FX}}(x)$ est représentable.*

Preuve. — Comme p est fidèlement plat et quasi-compact, il suffit de montrer l'assertion après le changement de base p, ce qui nous ramène au cas où $p : \widetilde{S} \to S$ a une section : alors il résulte de 5.2 (ii) que $\mathcal{X}$ est de la forme $\Phi_{\mathrm{FX}}(X)$, où X est représentable, de sorte que (5.2 (i)) le morphisme d'adjonction $\alpha : X \to \Psi_{\mathrm{FX}}\Phi_{\mathrm{FX}}(X)$ est un isomorphisme. L'assertion résulte donc du fait général suivant : le composé

$$\Phi_{\mathrm{FX}}(X) \longrightarrow \Phi_{\mathrm{FX}}\Psi_{\mathrm{FX}}\Phi_{\mathrm{FX}}(X) \longrightarrow \Phi_{\mathrm{FX}}(X)$$

est l'identité, où la première flèche est $\Phi_{\mathrm{FX}}(\alpha)$ et où la seconde est le morphisme d'adjonction $\Phi_{\mathrm{FX}}\Psi_{\mathrm{FX}}(\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$. $\square$

COROLLAIRE 5.4.1. — *Sous les hypothèses de* 5.4, *notons*

$$\mathcal{X} = (X', X_U, u).$$

Alors le $\widetilde{S}$*-espace* $\widetilde{X} = X' \amalg X_U$ *est muni d'une donnée de descente naturelle relativement à* p.

Preuve. — Il résulte de 5.4 que $\widetilde{X}$ est image réciproque sur $\widetilde{S}$ du S-faisceau $\Psi_{\mathrm{FX}}(\mathcal{X})$, d'où la conclusion. $\square$

REMARQUES. — Gardons les notations de 5.4.1 et notons ξ la donnée de descente sur $\widetilde{X}$ obtenue ci-dessus.

5.4.2. — L'espace algébrique $\widetilde{S} \times_S \widetilde{S}$ est somme de quatre sous-espaces isomorphes respectivement à U, U', U' et S''. La restriction de ξ au premier est tautologique et sa restriction aux deux suivants est donnée par u, de sorte que le seul fait non trivial est l'existence d'une donnée de descente canonique sur X' relativement à f. Celle-ci peut d'ailleurs se déduire directement de 4.5 (compte tenu de 2.5.2) appliqué aux deux S''-espaces algébriques images réciproques de X' par les deux projections.

5.4.3. — La donnée de descente ξ correspond canoniquement à une S-relation d'équivalence sur le S-faisceau $p_!\widetilde{X}$ représenté par $\widetilde{X}$ vu comme S-espace, compatible à la relation d'équivalence sur $\widetilde{S}$ déduite de p. Bien entendu, le quotient de $p_!\widetilde{X}$ par cette relation s'identifie canoniquement à $\Psi(\mathcal{X})$. Le problème de la « descente de $\mathcal{X}$ en un S-espace algébrique » peut se formuler indifféremment comme celui de la représentabilité de $\Psi(\mathcal{X})$ ou de l'effectivité de ξ. En particulier :

COROLLAIRE 5.4.4. — *Soit* C *une sous-catégorie fibrée pleine de* SEP. *On suppose que* p *est un morphisme de descente effective pour* C. *Alors* Φ_C *est une équivalence.* $\square$

5.4.5. — Comme p est fidèlement plat et quasi-compact, 5.4.4 s'applique notamment lorsque C est la catégorie fibrée des espaces quasi-affines sur d'autres (*cf.* [SGA1, VIII, 7.9]). On retrouve ainsi 1.1.

5.4.6. — Un critère puissant d'effectivité est fourni par le théorème suivant (voir [A3, 6.3], [L-MB, § 7]).

THÉORÈME (Artin). — *Soient* S *un schéma,* Z *un* S*-espace algébrique localement de présentation finie,* $R \to Z \times_S Z$ *une relation d'équivalence de présentation finie telle que les deux projections de* R *sur* Z *soient plates. Alors le quotient* Z/R *est (représentable par) un* S*-espace algébrique localement de présentation finie.*

Dans le cas qui nous occupe, ce théorème s'applique directement lorsque $\widetilde{S}$ (ou, ce qui revient au même, S') est (plat et) de présentation finie sur S, à condition de se limiter aux $\widetilde{X}$ qui sont localement de présentation finie sur $\widetilde{S}$. Cependant ceci implique, compte tenu de (TI), que S' est étale sur S (du moins au voisinage de Y), de sorte que, d'une part, l'effectivité de ξ est triviale par définition d'un espace algébrique, et d'autre part son existence même est très facile à établir en remarquant que la diagonale $S' \to S''$ est une immersion ouverte dont l'image forme avec U'' un recouvrement de S''. Autrement dit, l'application directe du théorème d'Artin ne donne ici rien de bien glorieux.

Plus intéressante pour nous est la variante suivante, où l'on se limite à la catégorie fibrée SPF des espaces algébriques séparés et de présentation finie sur d'autres.

COROLLAIRE 5.4.7. — *Soient T un schéma, $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un système projectif filtrant de T-schémas plats et de présentation finie. On suppose que, pour $\lambda \in \Lambda$ assez grand, les morphismes de transition $T_\mu \to T_\lambda$ $(\mu \geq \lambda)$ sont affines. Alors le morphisme canonique $\varprojlim T_\lambda \to T$ est de descente effective pour* SPF.

Preuve. — Observer d'abord que l'hypothèse « affine » assure l'existence de $T' := \varprojlim T_\lambda$. D'autre part on sait déjà que $\pi : T' \to T$, qui est fidèlement plat et quasi-compact, est un morphisme de descente. Si X' est dans $\mathrm{ob}\,\mathrm{SPF}(T')$, alors, pour λ assez grand, X' provient par changement de base d'un $X_\lambda \to T_\lambda$; toute donnée de descente sur X' relativement à $T' \to T$ provient (toujours pour λ assez grand) d'une donnée de descente ξ_λ sur X_λ relativement à $T_\lambda \to T$. Le théorème d'Artin implique alors que ξ_λ est effective, d'où le résultat. $\square$

THÉORÈME 5.5. — *On suppose que S' est limite projective filtrante de S-schémas affines, plats et de présentation finie sur S. Alors les foncteurs*

$$\Phi_{\mathrm{SPF}} : \mathrm{SPF}(S) \longrightarrow \mathrm{SPF}(U' \rightrightarrows \widetilde{S}\,),$$
$$\Phi_{\mathrm{SLPF}} : \mathrm{SLPF}(S) \longrightarrow \mathrm{SLPF}(U' \rightrightarrows \widetilde{S}\,)$$

de (0.2.3) *sont des équivalences de catégories.*

C'est en effet une conséquence immédiate de 5.4.4 et 5.4.7 en ce qui concerne Φ_{SPF}. Le cas de Φ_{SLPF} s'en déduit, voir 5.7 plus bas. $\square$

COROLLAIRE 5.6. — *Les foncteurs Φ_{SPF} et Φ_{SLPF} sont des équivalences dans chacun des cas suivants :*

(i) *S est régulier de dimension* 1 ;

(ii) *S et S' sont localement noethériens, et le morphisme f est* régulier ;

(iii) *S et S' sont localement noethériens, et S est* excellent.

Preuve.

(i) Comme la question est locale sur S, on peut supposer que S est le spectre d'un anneau de Dedekind A. Comme toute A-algèbre plate est limite inductive de ses sous-algèbres de type fini, automatiquement plates, on peut appliquer 5.5.

(ii) On se ramène au cas où S et S' sont affines et noethériens, et l'on sait alors (voir [P1], [P2], [S]) que S' est limite projective filtrante de S-schémas affines lisses, de sorte que 5.5 s'applique.

(iii) On peut encore supposer $S = \operatorname{Spec} A$ et $S' = \operatorname{Spec} A'$, avec A et A' noethériens. De plus, notant Σ la partie multiplicative de A' formée des éléments inversibles modulo IA', on peut remplacer A' par son localisé $\Sigma^{-1}A'$ (il est immédiat en effet que ceci ne change pas la catégorie $\mathrm{SPF}(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$, à équivalence près). Ceci a pour effet que IA' est désormais contenu dans le radical de A', et que l'image de S' dans S est formée des générisations des points de Y. Montrons qu'alors f est régulier (ce qui permettra de conclure grâce à (ii)). On peut pour cela remplacer A par son localisé en un point de Y et A' par son localisé au point correspondant de Y'. Alors A et A' sont deux anneaux locaux noethériens ayant même complété I-adique, et *a fortiori* même complété (pour l'idéal maximal), noté $\widehat{A}$. Comme $\widehat{A}$ est fidèlement plat sur A' il suffit pour conclure de voir que le morphisme $A \to \widehat{A}$ est régulier, ce qui résulte de l'hypothèse d'excellence. $\square$

Le théorème suivant permet d'achever la preuve de 5.5 en supprimant l'hypothèse quasi-compacte.

THÉORÈME 5.7. — *On suppose que le foncteur Φ_{SPF} est une équivalence. Alors il en est de même de Φ_{SLPF}.*

Preuve. — Si $\mathcal{X} = (X', X_U, u)$ est un objet de $\mathrm{ALG}(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$, on appellera *ouvert* de $\mathcal{X}$ la donnée d'ouverts V' et V_U de X' et X_U respectivement, tels que $u(V' \times_S U) = V_U \times_U U'$. Si X est un S-espace algébrique tel que $\mathcal{X} = \Phi_{\mathrm{ALG}}(X)$, il revient au même de se donner un ouvert de X ou un ouvert de $\mathcal{X}$ (ceci utilise la platitude de f). Sans supposer l'existence d'un tel X, la donnée d'un ouvert (V', V_U) de $\mathcal{X}$ équivaut à celle d'un ouvert W de $\widetilde{X}$ (à savoir $V' \amalg V_U$), soumis à la condition suivante : $W \cap \widetilde{X}_U$ est saturé pour la relation d'équivalence associée au morphisme $\widetilde{X}_U \to X_U$ déduit de u. Nous dirons simplement « saturé » pour évoquer cette propriété.

Ceci étant, le théorème 5.7 est conséquence immédiate de la proposition suivante, qui m'a été indiquée par le referee (et n'utilise pas la platitude de f).

PROPOSITION 5.7.1. — *Soit* $\mathcal{X} = (X', X_U, u)$ *un objet de* $\mathrm{ALG}(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$. *Alors* $\widetilde{X}$ *est réunion d'ouverts saturés quasi-compacts.*

Preuve. — Rappelons (*cf.* [K, II.3.13]) que tout espace algébrique (quasi-séparé !) est réunion d'ouverts quasi-compacts. Il suffit donc de montrer que tout ouvert quasi-compact Ω de $\widetilde{X}$ est contenu dans un ouvert quasi-compact et saturé. Notons $\pi : \widetilde{X}_U \rightarrow X_U$ le morphisme naturel déduit de u. Comme l'inclusion de $\widetilde{X}_U$ dans $\widetilde{X}$ est quasi-compacte (car l'Idéal $\mathcal{I}$ est de type fini), $\Omega_U := \Omega \cap \widetilde{X}_U$ est quasi-compact et la restriction de π à Ω_U se factorise donc par un ouvert quasi-compact V de X_U. Puisque π est affine, $\pi^{-1}(V)$ est quasi-compact et l'ouvert $\Omega \cup \pi^{-1}(V)$ de $\widetilde{X}$ répond à la question. □

6. Descente d'objets d'un champ algébrique

6.1. — Dans tout le § 6, on se donne une catégorie fibrée C sur $\mathrm{ALG}(S)$. On suppose que C est un *champ de groupoïdes* (voir [Gi], [A3], [D-M]) pour la topologie étale, et que de plus le morphisme diagonal

$$\Delta_C : C \longrightarrow C \times C$$

est *représentable* (au sens des espaces algébriques) et *séparé*. Rappelons que cette condition signifie que pour tout S-schéma (ou, ce qui revient au même, tout S-espace algébrique) T et tout couple (x, y) d'objets de $C(T)$ (*i.e.* de 1-morphismes de T dans C), le foncteur $T' \longmapsto \mathrm{Hom}_{C(T')}(x_{T'}, y_{T'})$ de (Sch/T) dans (Ens) est un T-espace algébrique séparé sur T, noté $\underline{\mathrm{Hom}}_{C/T}(x, y)$. Ceci implique notamment que C est un *préchamp* [Gi] pour la topologie fpqc (*i.e.* que le foncteur ci-dessus est un faisceau).

THÉORÈME 6.2.

(i) *Sous les hypothèses de* 6.1, *le foncteur*

$$\Phi_C : C(S) \longrightarrow C(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$$

est pleinement fidèle.

(ii) *Si de plus* p *a une section, alors* Φ_C *est une équivalence.*

Preuve. — La partie (i) résulte immédiatement de 4.4 (ii) appliqué à $F = \underline{\mathrm{Hom}}_{C/S}(x, y)$ pour x et y quelconques dans $C(S)$. La preuve de (ii) est tout analogue à celle de 5.2 (ii) : dans le cas où f a une section s, le foncteur $(x', x_U, u) \mapsto x' \circ s$ est un quasi-inverse de Φ_C, ce que l'on vérifie en appliquant (i) aux objets $x' \circ s \circ f$ et x' de $C(S')$ (qui sont isomorphes sur U' et sur l'image de s) compte tenu de 2.5.1. ▯

COROLLAIRE 6.3. — *Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur* ALG(S), *moins fine que la topologie canonique. On suppose que C est un champ pour $\mathcal{T}$, que f est plat et que p est un* épimorphisme *de $\mathcal{T}$-faisceaux. Alors Φ_C est une équivalence.*

Preuve. — Comme C est un $\mathcal{T}$-champ, la question est $\mathcal{T}$-locale sur S et l'on peut donc supposer, vu l'hypothèse sur p, que p a une section. La conclusion résulte alors de 6.2 (ii). ▯

L'énoncé qui précède est équivalent au

COROLLAIRE 6.4. — *Sous les hypothèses de* 6.1, *on suppose que f est plat. Soit $(x', x_U, u) \in \mathrm{ob}\, C(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$. Alors il existe sur x' une unique donnée de descente pour C, relativement à f, prolongeant la donnée effective sur $x'_{|U'}$ déduite de u.*

En effet, on peut soit montrer 6.4 directement en appliquant 6.2 (i) sur S'', soit le déduire de 6.3 appliqué au champ fpqc associé au pré-champ C. ▯

On suppose dans toute la suite que $f : S' \to S$ est plat.

THÉORÈME 6.5. — *Supposons qu'il existe une sous-catégorie fibrée pleine E de* SEP *vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *pour tout espace algébrique T, $E(T)$ est stable par sommes disjointes finies ;*

(ii) *pour tout espace algébrique T et tout $X \in \mathrm{ob}\, E(T)$, le morphisme structural $X \to T$ est ouvert ; de plus, s'il est surjectif, c'est un morphisme de descente effective pour C ;*

(iii) *il existe une famille $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'espaces algébriques séparés et un 1-morphisme surjectif $\coprod_\lambda X_\lambda \to C$ tel que, pour tout 1-morphisme $T \to C$ et tout $\lambda \in \Lambda$, la projection $T \times_C X_\lambda \to T$ soit dans $E(T)$;*

(iv) *$\Phi_E : E(S) \to E(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$ est une équivalence.*

Alors Φ_C est une équivalence.

COROLLAIRE 6.5.1. — *Sous les hypothèses de 6.1, supposons de plus que C soit un S-*champ algébrique (*quasi-séparé*) *au sens de* [A3]. *Alors Φ_C est une équivalence dans chacun des cas suivants :*

(a) *la diagonale Δ_C est quasi-affine ;*

(b) *C est algébrique au sens de* [D-M] ;

(c) $p : \widetilde{S} \to S$ *est un morphisme de descente* effective *pour la catégorie fibrée des espaces algébriques lisses, séparés et de présentation finie sur d'autres*;

(d) S' *est limite projective filtrante de S-schémas affines, plats et de présentation finie sur S*;

(e) S *est un schéma régulier de dimension 1*;

(f) S *et* S' *sont localement noethériens, et le morphisme* f *est* régulier;

(g) S *et* S' *sont localement noethériens, et* S *est* excellent.

Preuve du corollaire. — Par hypothèse, il existe une famille $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de schémas affines et un 1-morphisme surjectif et lisse $\coprod_\lambda X_\lambda \longrightarrow C$. De plus, la diagonale Δ_C est un morphisme quasi-compact, ce qui implique que les X_λ sont de présentation finie sur C.

Dans le cas (a), prenons pour E la catégorie fibrée des espaces algébriques *lisses et quasi-affines* sur d'autres. La condition (i) de 6.5 est trivialement vérifiée; (ii) l'est parce que C est un champ pour la topologie lisse; (iii) résulte de l'hypothèse (a) et (iv) de 5.4.5.

L'hypothèse (b) signifie que l'on peut prendre les X_λ étales et séparés sur C; c'est donc un cas particulier de (a) d'après [EGA IV, 8.11.2].

Dans les cas (c) à (g), prenons pour E la catégorie fibrée des espaces algébriques *lisses, séparés et de présentation finie* sur d'autres, de sorte que (i), (ii) et (iii) sont évidemment satisfaites. La condition (iv) résulte alors de 5.4.4, 5.5, 5.6 (i), 5.6 (ii), 5.6 (iii) respectivement dans les cas (c), (d), (e), (f) et (g). $\square$

6.6. — Prouvons maintenant 6.5. D'après 6.2, il reste à voir que Φ_C est essentiellement surjectif.

6.6.1. — La question étant locale sur S, nous supposerons S affine. Il résulte des conditions (ii) et (iii) de 6.5 que C est réunion de ses sous-champs ouverts quasi-compacts. Comme tout objet de $C(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$ se factorise (en un sens évident) par un tel ouvert, nous supposerons dorénavant que C est quasi-compact. En particulier, d'après (i), nous pouvons supposer que la famille $(X_\lambda \to C)$ se réduit à un élément $P : X \to C$.

Donnons-nous désormais un objet $x = (x', x_U, u)$ de $C(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$.

6.6.2. *La question est «E-locale» sur S.* — Supposons trouvé un S-espace algébrique $Z \in \operatorname{ob} E(S)$, surjectif sur S, tel que l'objet de $C(U' \times_S Z \rightrightarrows \widetilde{S} \times_S Z)$ déduit de x par changement de base soit dans l'image essentielle de $C(Z)$. Il résulte formellement de la pleine fidélité de Φ_C, appliquée sur $Z \times_S Z$ et sur $Z \times_S Z \times_S Z$ (comme f est plat, les hypothèses de 2.0 sont stables par tout changement de base) que l'objet de $C(Z)$ ainsi obtenu est muni d'une donnée de descente canonique relativement à $Z \to S$. La condition (ii) de 6.5 assure dès lors que ledit objet provient d'un objet de $C(S)$, dont on vérifie, formellement encore, que son image par Φ_C est x.

6.6.3. — Notons $Z' \to S'$ (resp. $Z_U \to U$) l'espace algébrique déduit de $P : X \to C$ par le changement de base x' (resp. x_U). Alors Z' (resp. Z_U) est dans $E(S')$ (resp. $E(U)$) et est surjectif sur S' (resp. U). L'isomorphisme u donne un isomorphisme $v : Z' \times_{S'} U' \simeq Z_U \times_U U'$ dans $E(U')$ d'où un objet de $E(U' \rightrightarrows \widetilde{S})$, dont la condition (iv) implique qu'il provient d'un unique objet Z de $E(S)$, automatiquement surjectif sur S. La pleine fidélité de Φ_{SEP} (jointe à l'hypothèse de séparation de 6.5 (iii)) permet de descendre les projections canoniques de Z' et Z_U sur X en un morphisme de Z dans X, d'où un objet de $C(Z)$ par composition avec $P : X \to C$. Il est alors immédiat que nous sommes dans la situation de 6.6.2, ce qui achève la démonstration. $\square$

L'auteur remercie le referee pour ses remarques utiles et sa lecture attentive du manuscrit.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] Artin (M.). — *Algebraization of formal moduli I*, Global Anal. (volume dédié à K. Kodaira). — Tokyo, 1969.

[A2] Artin (M.). — *Algebraization of formal moduli II*, Ann. of Math., t. **91**, 1970, p. 88–135.

[A3] Artin (M.). — *Versal Deformations and Algebraic Stacks*, Invent. Math., t. **27**, 1974, p. 165–189.

[B-L] Beauville (A.), Laszlo (Y.). — *Un lemme de descente*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **320**, 1995, p. 335–340.

[B-L-R] Bosch (S.), Lütkebohmert (W.), Raynaud (M.). — *Néron Models*, Ergeb. Math., t. **21**, 1990.

[D-M] Deligne (P.), Mumford (D.). — *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., t. **36**, 1969.

[EGA] GROTHENDIECK (A.), DIEUDONNÉ (J.). — *Éléments de géométrie algébrique,* chap. I (Springer, coll. Grundlehren); chap. II, III, IV (Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. n° 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32).

[F-R] FERRAND (D.), RAYNAUD (M.). — *Fibres formelles d'un anneau local noethérien*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **(4) 3**, 1970, p. 295–311.

[Ga] GABBER (O.). — Lettre à l'auteur, juilllet 1995.

[Gi] GIRAUD (J.). — *Cohomologie non abélienne.* — Springer, 1971.

[H] HARBATER (D.). — *Formal patching and adding branch points*, Amer. J. Math., t. **115**, 1993, p. 487–508.

[J] JOYET (J.). — *Poulebèques de modules quasi-cohérents*, Comm. Algebra, t. **24 (3)**, 1996, p. 1035–1049.

[K] KNUTSON (D.). — *Algebraic Spaces*, Lecture Notes in Math., t. **203**, 1971.

[L-MB] LAUMON (G.), MORET-BAILLY (L.). — *Champs algébriques*, en préparation.

[MB] MORET-BAILLY (L.). — *Problèmes de Skolem sur les champs algébriques*, en préparation.

[N] NAGATA (M.). — *Local Rings*, Interscience Tracts in Pure Math., *Wiley*, t. **13**, 1962.

[P1] POPESCU (D.). — *General Néron desingularization and approximation*, Nagoya Math. J., t. **104**, 1986, p. 85–115.

[P2] POPESCU (D.). — *Letter to the Editor : General Néron desingularization and approximation*, Nagoya Math. J., t. **118**, 1990, p. 45–53.

[S] SPIVAKOVSKY (M.). — *Smoothing of ring homomorphisms, approximation theorems, and the Bass-Quillen conjecture*, prépublication, Toronto 1993.

[SGA1] GROTHENDIECK (A.). — *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Math., t. **224**, 1971.