BULLETIN DE LA S. M. F.

LAURENT BONAVERO

Sur des variétés de Moishezon dont le groupe de Picard est de rang un

Bulletin de la S. M. F., tome 124, nº 3 (1996), p. 503-521
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_3_503_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
124, 1996, p. 503–521.

SUR DES VARIÉTÉS DE MOISHEZON DONT LE GROUPE DE PICARD EST DE RANG UN

PAR

LAURENT BONAVERO (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous utilisons la théorie de Mori pour analyser la structure des variétés de Moishezon dont le groupe de Picard est $\mathbb{Z}$, dont le fibré canonique est gros et qui deviennent projectives après un éclatement. Dans ce contexte, nous étudions la contraction de Mori sur le modèle projectif, et montrons que le centre de l'éclatement est en général de petite codimension. En dimension 3, le fibré canonique est nef par un résultat de Kollár. Nous montrons que ce résultat devient faux en dimension supérieure ou égale à 4 en construisant explicitement des exemples; ces derniers fournissent de nouvelles variétés de Moishezon ne satisfaisant pas le critère de Demailly et Siu. En dimension 4, nous prouvons que le centre de l'éclatement est alors une surface, et si le fibré canonique n'est pas nef, nous montrons que notre construction est en un sens la seule possible; en particulier, le centre de l'éclatement est nécessairement $\mathbb{P}^2$.

ABSTRACT. — In this paper, we use Mori theory to analyze the structure of Moishezon manifolds with Picard group equal to $\mathbb{Z}$, with big canonical bundle, and which become projective after one blow-up. In this context, we study the Mori contraction on the projective model, and we show that in general the center of the blow-up has «low» codimension. In dimension 3, the canonical bundle is nef by a result of Kollár. We show that this result is no longer true in dimension 4 or larger than 4 by constructing explicitly some examples, which give also new Moishezon manifolds not satisfying the Demailly-Siu criterion. In dimension 4, we show that the center of the blow-up is a surface, and that our construction is the only possible one when the canonical bundle is not nef; in particular, the center of the blow-up must be $\mathbb{P}^2$ in this last case.

(*) Texte recu le 16 juin 1995, révisé le 8 septembre 1995.
L. BONAVERO, Université de Grenoble 1, Laboratoire de Mathématiques associé au C.N.R.S. n° 188, Institut Fourier, B.P. 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères (France) et École Normale Supérieure de Lyon, UMPA, UMR 128, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon CEDEX 07 (France).
Email : bonavero@umpa.ens-lyon.fr.

Mots clés : Variété de Moishezon, groupe de Picard, théorie de Mori, fibré canonique gros, éclatement.

Classification AMS : 32C10, 14J40, 14J05, 32J20.

© Société mathématique de France

Introduction

La motivation des lignes qui suivent a son origine dans le résultat suivant dû à Y.-T. Siu [Siu84], [Siu85] et J.-P. Demailly [Dem85] :

THÉORÈME. — *Une variété analytique complexe compacte X est de Moishezon dès que X possède un fibré E holomorphe en droites muni d'une métrique hermitienne lisse dont la forme de courbure $\Theta(E)$ est partout semi-positive et définie positive en au moins un point.*

Rappelons pour la commodité du lecteur qu'une variété[1] analytique complexe compacte X de dimension n est *de Moishezon* si, par définition, elle possède n fonctions méromorphes algébriquement indépendantes. De façon équivalente, voir [Moi67], une variété est de Moishezon si et seulement si elle peut être rendue projective après un nombre fini d'éclatements de centres lisses projectifs.

Une question naturelle est de savoir si la réciproque au théorème précédent est vraie. La situation est maintenant assez bien comprise :

- la réciproque est *fausse* si on reste dans le cadre défini ci-dessus, *i.e.* dans celui des métriques hermitiennes lisses sur le fibré E : on renvoie à [Kol91], [Ogu94] et [Bo93b] pour des exemples;
- la réciproque devient *vraie* si on considère le contexte plus souple des métriques singulières : on renvoie à [JiS93] et [Bo93b] pour des démonstrations de ces résultats.

Nous explorons dans ce travail le champ des contre-exemples dans le cas hermitien lisse.

Rappelons pour cela la structure des exemples construits par Kollár (voir [Kol91]) et Oguiso respectivement : dans les deux cas, ces derniers considèrent des variétés X, de dimension complexe 3 (plus petite dimension à partir de laquelle il existe des variétés de Moishezon non projectives), dont le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X)$ est $\mathbb{Z}$. Pour de telles variétés, un et un seul générateur de $\mathrm{Pic}(X)$ est gros (rappelons qu'un fibré en droites L sur X est dit *gros* si les dimensions $h^0(X, mL)$ croissent comme $m^{\dim(X)}$). Suivant Kollár [Kol91], nous noterons ce générateur $\mathcal{O}_X(1)$ et nous écrirons $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\cdot\mathcal{O}_X(1)$. Si K_X désigne le fibré canonique de X, nous noterons m_X l'entier défini par la relation $K_X = \mathcal{O}_X(m_X)$.

Remarquons ici que les trois cas $m_X < 0$ (resp. $m_X = 0$, resp. $m_X > 0$) correspondent aux trois possibilités $\kappa(X) = -\infty$ (resp. $\kappa(X) = 0$, resp. $\kappa(X) = 3$), où $\kappa(X)$ désigne la dimension de Kodaira de X.

[1] Avertissement : dans tout ce travail, et sauf mention explicite du contraire, le mot *variété* désignera une variété analytique complexe *non singulière* supposée de plus compacte et connexe.

Dans ce contexte, Kollár (resp. Oguiso) montre qu'*il existe des variétés de Moishezon X de dimension* 3, *avec* $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\cdot\mathcal{O}_X(1)$ *et* $m_X < 0$ (*resp.* $m_X = 0$), *ne possédant pas de fibré gros et nef.*

Rappelons qu'un fibré en droites est dit *nef* (pour *numériquement effectif*) s'il est semi-positif sur toute courbe, et remarquons qu'un fibré satisfaisant au critère de Siu et Demailly est nécessairement gros et nef. Les exemples donnés par le résultat précédent montrent donc que la réciproque à ce critère est fausse.

Évidemment, il reste un cas non couvert par l'énoncé précédent et nous sommes donc amenés à poser la question suivante :

QUESTION. — *Existe-t-il des variétés de Moishezon X, avec*

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\cdot\mathcal{O}_X(1) \quad \textit{et} \quad m_X > 0$$

ne possédant pas de fibré gros et nef ?

Un théorème de Kollár [Kol91] permet de répondre négativement en dimension 3 : autrement dit, si X est une variété de Moishezon de dimension 3, avec $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ et si K_X est gros, alors K_X est nef.

Dans ce texte, nous renforçons ce résultat dans un cas particulier en utilisant la théorie de Mori :

THÉORÈME. — *Soit X une variété de Moishezon de dimension* 3, *avec* $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\cdot\mathcal{O}_X(1)$ *et K_X gros.*

Si X peut être rendue projective après un éclatement seulement, alors soit X est projective, soit X est une petite modification d'une variété singulière projective ayant une singularité nodale ordinaire et un fibré canonique ample.

Nous montrons aussi qu'un tel résultat devient faux en dimension supérieure ou égale à 4 :

THÉORÈME. — *Pour tout entier n supérieur ou égal à* 4, *il existe des variétés de Moishezon X de dimension n vérifiant* :

(i) $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$,

(ii) *K_X est gros,*

(iii) *K_X n'est pas nef.*

Enfin, nous montrons qu'en dimension 4, la construction qui donne le résultat précédent est, en un sens, la seule possible.

THÉORÈME. — *Soit X une variété de Moishezon non projective de dimension* 4, *avec* $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ *et K_X gros*;

(i) *si X peut être rendue projective après éclatement le long d'une sous-variété Y, alors Y est une surface*;

(ii) *si de plus K_X n'est pas nef, alors* $(Y, N_{Y/X}) \simeq (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus 2})$.

Au cours du texte, nous démontrerons quelques propriétés particulières de telles variétés.

Notre travail s'articule de la façon suivante :

- nous rappelons le résultat de Kollár en dimension 3, en mettant en évidence l'un des points clés;
- nous utilisons ensuite la théorie de Mori pour étudier la structure de certaines variétés de Moishezon;
- nous donnons notre famille d'exemples en dimension supérieure ou égale à 4;
- enfin, nous étudions en détail le cas de la dimension 4.

REMERCIEMENTS. — Ces lignes doivent beaucoup à des conversations enrichissantes et particulièrement éclairantes avec Frédéric Campana. Je remercie aussi Michel Brion, Jean-Pierre Demailly et Laurent Manivel.

1. Un théorème de Kollár

Pour cette partie, la référence précise est [Kol91, p. 170 et suivantes]. Rappelons le résultat qui nous intéresse directement :

THÉORÈME 1 (Kollár). — *Soit X une variété de Moishezon de dimension 3. On suppose que* $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ *et que K_X est gros. Alors K_X est nef.*

La démonstration repose sur le lemme essentiel suivant :

LEMME 1. — *Soit X une variété de Moishezon, sans restriction de dimension, avec* $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\cdot\mathcal{O}_X(1)$, *et soit $\widetilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ une modification projective, composée d'un nombre fini d'éclatements de centres lisses, de lieu exceptionnel $\widetilde{S} \subset \widetilde{X} \xrightarrow{\pi} S \subset X$. Alors pour toute courbe C de X, non incluse dans S, on a $\mathcal{O}_X(1) \cdot C > 0$.*

Ce lemme affirme en particulier que les courbes sur lesquelles $\mathcal{O}_X(1)$ est négatif ou nul sont incluses dans S, où S est un ensemble analytique de codimension supérieure ou égale à 2.

2. Un peu de théorie de Mori

Rappelons pour commencer ce paragraphe que les exemples de Kollár et Oguiso déjà cités vérifient la propriété supplémentaire suivante : les variétés X considérées ne sont, bien sûr, pas projectives, mais le deviennent après exactement un éclatement le long d'une sous-variété $Y \subset X$.

Dans toute cette partie, nous nous placerons donc dans la situation suivante :

La variété X est de Moishezon, non projective de dimension n, $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$, K_X est gros, et il existe une sous-variété $Y \subset X$ telle que l'éclatement $\widetilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ de X le long de Y définit une variété projective $\widetilde{X}$.

On note E le diviseur exceptionnel de l'éclatement.

Remarque 1. — D'après le paragraphe précédent, on sait alors que K_X (resp. $K_{\widetilde{X}}$) est positif sur les courbes non incluses dans Y (resp. E). La conséquence suivante sera utilisée dans la suite : si C est une courbe de Y sur laquelle K_X est strictement négatif, cette courbe ne peut pas se déformer (dans X) hors de Y.

Rappelons enfin les faits généraux suivants concernant les éclatements : le diviseur exceptionnel E est isomorphe à la variété $\mathbb{P}(N^*_{Y/X})$ (projectivisé en droites du fibré normal $N_{Y/X}$ suivant la convention de Grothendieck), que le fibré normal $N_{E/\widetilde{X}} = \mathcal{O}(E)_{|E}$ est isomorphe au fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N^*_{Y/X})}(-1)$ et que plus généralement, un fibré vectoriel G sur une variété Z est dit ample si le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(G)}(1)$ est ample sur $\mathbb{P}(G)$.

2.1. Courbe rationnelle extrémale.

Pour les notations et résultats classiques en théorie de Mori, nous renvoyons aux textes [KMM87] ou [CKM88]. Nous nous efforcerons cependant de faire les rappels nécessaires à la compréhension du lecteur.

Rappelons tout d'abord que la notation $N_1(\widetilde{X}, \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies (à coefficients réels) de courbes de $\widetilde{X}$, modulo l'équivalence numérique. Pour une variété projective (et même Moishezon), cet espace vectoriel est de dimension finie et est en dualité naturelle avec le groupe de Néron-Severi

$$\left(\mathrm{Pic}(\widetilde{X}) / \mathrm{Pic}^0(\widetilde{X})\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}\,;$$

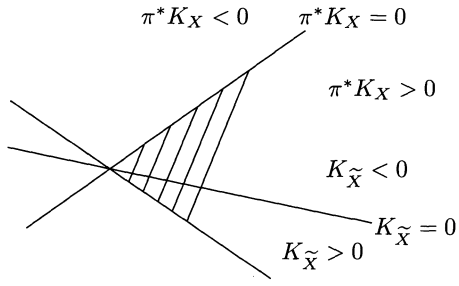
sa dimension est appelée *nombre de Picard* de $\widetilde{X}$. De plus, $N_1(\widetilde{X}, \mathbb{R})$ est naturellement un sous-espace vectoriel de $H_2(\widetilde{X}, \mathbb{R})$. Dans le cadre de notre étude, $N_1(\widetilde{X}, \mathbb{R})$ est donc isomorphe à $\mathbb{R}^2$ car $\mathrm{Pic}(\widetilde{X}) = \mathbb{Z}^2$.

Dans la suite, nous dessinons dans $N_1(\widetilde{X}, \mathbb{R})$ l'adhérence du cône engendré par les classes d'homologie de courbes effectives : dans les figures

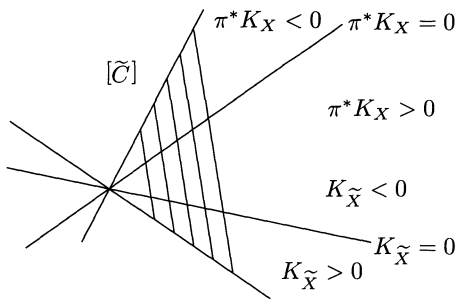
ci-dessous, ce cône est noté $\overline{\mathrm{NE}}(\widetilde{X})$ et correspond à la partie hachurée. Si D est un élément de $\mathrm{Pic}(\widetilde{X})$, on note $D > 0$ (resp. $D = 0$, resp. $D < 0$) les ensembles $\{[C] \in \overline{\mathrm{NE}}(\widetilde{X}) \mid D \cdot C > 0\}$ (resp. $D \cdot C = 0$, resp. $D \cdot C < 0$).

Deux cas se présentent suivant que K_X est nef ou non. Ces deux cas se distinguent naturellement, ils correspondent, comme nous le verrons plus loin, au fait que X admet ou non un morphisme vers une variété (éventuellement singulière) projective de même dimension :

(i) soit K_X est nef et le dessin est le suivant :



(ii) soit K_X n'est pas nef et le dessin est le suivant :



Quelques commentaires sur ces diagrammes.

• Dans les deux cas, le fait que la droite $\{K_{\widetilde{X}} = 0\}$ coupe le cône effectif vient du fait qu'il y a à la fois des courbes sur lesquelles $K_{\widetilde{X}}$ est strictement positif (celles non contenues dans le diviseur exceptionnel) et des courbes sur lesquelles $K_{\widetilde{X}}$ est strictement négatif (toute courbe incluse dans les fibres de l'éclatement),

• Dans le deuxième cas, la position relative de $\{\pi^*K_X = 0\}$ est justifiée par le fait qu'il y a des courbes sur lesquelles π^*K_X et $K_{\widetilde{X}}$ sont strictement positifs (celles non contenues dans le diviseur exceptionnel) et que π^*K_X est nul sur toute courbe incluse dans les fibres de l'éclatement.

Dans ce dernier cas, la théorie de Mori [CKM88] appliquée à la variété projective $\widetilde{X}$ assure que l'arête extrémale du coté $K_{\widetilde{X}} < 0$ est engendrée par la classe d'une courbe rationnelle $\widetilde{C}$ dans $\widetilde{X}$. Cette courbe n'étant pas contractée par π (car $\pi^* K_X \cdot \widetilde{C} < 0$), la courbe rationnelle $C = \pi(\widetilde{C})$ vérifie $K_X \cdot C < 0$. Le résultat suivant en découle :

COROLLAIRE 1. — *Sous les hypothèses précédentes, si K_X n'est pas nef, il existe une courbe rationnelle $C \subset Y \subset X$ sur laquelle K_X est strictement négatif.*

REMARQUE 2. — À notre connaissance, le fait qu'il existe une telle courbe sous les seules hypothèses X Moishezon non projective et K_X non nef est un problème non résolu.

2.2. Contraction de Mori.

Dans la suite, nous étudions la contraction de Mori associée à la courbe extrémale rationnelle $\widetilde{C} \subset \widetilde{X}$ obtenue précédemment.

En effet, la théorie de Mori [CKM88] assure l'existence d'une variété projective Z de sorte que la situation suivante ait lieu :

$$\begin{tikzcd} Z & \widetilde{X} \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "\pi"] & \supset & E \arrow[d] \\ & X & \supset & Y \end{tikzcd}$$

En général, Z est $\mathbb{Q}$-factorielle, à singularités terminales, et une courbe de $\widetilde{X}$ est contractée si et seulement si sa classe d'homologie est positivement proportionnelle à celle de $\widetilde{C}$.

De plus, il y a trois types de contractions :

(a) $\dim \widetilde{X} > \dim Z$ et f est une fibration $\mathbb{Q}$-Fano ;

(b) $\dim \widetilde{X} = \dim Z$ et f est une contraction divisorielle (*i.e.* f est birationnelle et contracte un diviseur) ;

(c) $\dim \widetilde{X} = \dim Z$ et f est une petite contraction (*i.e.* f est birationnelle et contracte un sous-ensemble algébrique de codimension supérieure ou égale à 2).

En fait, sous nos hypothèses, certaines de ces situations ne peuvent pas se produire. On a le :

THÉORÈME 2. — *Sous les hypothèses précédentes :*

(i) *le cas* (a) *ne se produit pas,*

(ii) *dans le cas où* (b) *a lieu, le diviseur exceptionnel de f est égal à celui de π (noté E précédemment). Si de plus K_X n'est pas nef, les*

inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\operatorname{codim} Y < \tfrac{1}{2}(n+1) \quad \textit{et} \quad \operatorname{codim} Y - 1 \leq \dim f(E) < \dim Y.$$

2.3 Démonstration du théorème 2.

Commençons par montrer qu'il n'y a pas de fibration de Fano : sinon, prenons un point x dans $\widetilde{X}\backslash E$ et considérons $\widetilde{F}_x = f^{-1}(f(x))$ la fibre de f passant par x. Prenons alors une courbe $\widetilde{C}_x$ de $\widetilde{F}_x$ passant par x. Cette courbe est contractée par f, donc $K_{\widetilde{X}} \cdot \widetilde{C}_x < 0$. Ceci est contradictoire avec le fait que $\widetilde{C}_x$ n'est pas incluse dans E.

Remarquons que ce raisonnement montre en fait que le lieu exceptionnel de f est toujours inclus dans E. En particulier, dans le cas (b) (celui d'une contraction divisorielle), on en déduit que le diviseur exceptionnel de f est E.

Il reste donc à montrer les inégalités du théorème dans le cas d'une contraction divisorielle. La situation est résumée par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
f(E) \arrow[d, phantom, "\cap"] & & E \arrow[ll] \arrow[dd] \arrow[d, phantom, "\supset"] \\
Z & \widetilde{X} \arrow[l] \arrow[r, phantom, "f"] \arrow[d, "\pi"] & \\
& X \supset & Y
\end{tikzcd}$$

Dans cette situation, on écrit

$$K_{\widetilde{X}} = f^* K_Z + aE = \pi^* K_X + (r-1)E$$

où $r = \operatorname{codim} Y$, et où a est un rationnel.

Les inégalités cherchées sont alors conséquences immédiates du lemme suivant :

LEMME 2. — *Si K_X n'est pas nef, les nombres a et r vérifient les deux inégalités suivantes* :

(i) $a > r - 1$,

(ii) $\operatorname{codim} f(E) + r \leq n + 1$.

L'inégalité suivante est vraie sans hypothèse sur K_X :

(iii) $a \leq \operatorname{codim} f(E) - 1$.

Démonstration du lemme.

• *Inégalité* (i). — Comme Z est projective avec $\operatorname{Pic}(Z) = \mathbb{Z}$ et K_Z gros, on en déduit que K_Z est ample et donc que $f^* K_Z$ est positif et strictement positif sur les courbes de $\widetilde{X}$ non contractées par f. Choisissons

alors une courbe rationnelle R incluse dans une fibre de π (ces dernières sont des $\mathbb{P}^{r-1}$, on peut prendre pour R un $\mathbb{P}^1$ linéaire). L'égalité

$$f^*K_Z \cdot R + aE \cdot R = \pi^*K_X \cdot R + (r-1)E \cdot R$$

donne alors :

$$a - (r-1) = f^*K_Z \cdot R > 0$$

car R n'est pas contractée par f (sinon, une même courbe serait contractée par f et π, ce qui contredit le fait, mis en évidence sur la figure représentant $\overline{\mathrm{NE}}(\widetilde{X})$ dans le cas où K_X n'est pas nef, que π^*K_X est strictement négatif sur les courbes contractées par f !). $\square$

• *Inégalité* (ii). — Cette inégalité découle de suite du fait que les fibres de f et π dans E ne peuvent se couper que sur des points (sinon, à nouveau, une même courbe serait contractée par f et π). De là :

$$\big(n - 1 - \dim f(E)\big) + (r-1) \leq n - 1. \quad \square$$

• *Inégalité* (iii). — Cette dernière se démontre en deux temps. Supposons tout d'abord que $f(E)$ est réduit à un point. Alors, on a

$$aE \cdot \widetilde{C} = K_{\widetilde{X}} \cdot \widetilde{C}$$

et par la formule d'adjonction :

$$K_{\widetilde{X}|E} = K_E - E_{|E}.$$

De là, on en déduit :

$$a + 1 = \frac{K_E \cdot \widetilde{C}}{E \cdot \widetilde{C}}.$$

Or, comme $f(E)$ est un point, l'énoncé (ii) dans le théorème de T. Ando et M. Beltrametti implique que $-K_E$ est ample, autrement dit E est une variété de Fano. Le théorème du cône appliqué à E montre que ce dernier est engendré par des courbes rationnelles R vérifiant

$$0 < -K_E \cdot R \leq \dim E + 1 = n.$$

Or $\mathbb{R}_+[\widetilde{C}]$ étant une arête extrémale de $\overline{\mathrm{NE}}(\widetilde{X})$, elle l'est aussi dans $\overline{\mathrm{NE}}(E)$. Ainsi $\widetilde{C}$ est une courbe rationnelle extrémale dans E satisfaisant l'inégalité

$$-K_E \cdot \widetilde{C} \leq n.$$

De là, comme $E \cdot \widetilde{C}$ est un entier strictement négatif, il vient $a + 1 \leq n$, ce qui termine le cas où $f(E)$ est un point.

Si maintenant, $f(E)$ n'est pas réduit à un point, on procède par récurrence sur la dimension n en prenant des sections hyperplanes de la façon suivante : si Z_H est une section hyperplane générique de Z, le théorème de Bertini implique que

$$\widetilde{X}_H = f^* Z_H$$

est lisse et on a successivement $K_{Z_H} = (K_Z + Z_H)_{|Z_H}$ par la formule d'adjonction, puis

$$f^* K_{Z_H} = (f^* K_Z + \widetilde{X}_H)_{|\widetilde{X}_H} = (K_{\widetilde{X}} - aE + \widetilde{X}_H)_{|\widetilde{X}_H}.$$

À nouveau par la formule d'adjonction, il vient :

$$f^* K_{Z_H} = \big(K_{\widetilde{X}_H} - \widetilde{X}_H - aE + \widetilde{X}_H\big)_{|\widetilde{X}_H}.$$

D'où l'on déduit finalement :

$$K_{\widetilde{X}_H} = f^* K_{Z_H} + aE \cap \widetilde{X}_H.$$

L'hypothèse de récurrence donne alors :

$$\begin{aligned} a &\leq \big(n - 1 - \dim f(E \cap \widetilde{X}_H)\big) - 1 \\ &= n - 1 - \big(\dim f(E) - 1\big) - 1 \\ &= \operatorname{codim} f(E) - 1. \quad \square \end{aligned}$$

2.4. Application à la dimension 3.

On déduit du théorème 2 un résultat précisant celui de Kollár dans notre situation :

COROLLAIRE 2. — *Soit X une variété de Moishezon de dimension* 3, *avec* $\operatorname{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ *et K_X gros. Si X peut être rendue projective après un éclatement seulement, alors soit X est projective, soit X est une petite modification d'une variété singulière projective ayant une unique singularité nodale ordinaire* (*dont le modèle local est* $xy - zt = 0$ *dans* $(\mathbb{C}^4, 0)$).

Démonstration du corollaire. — D'après le théorème 2, les cas (a) et (b) ne se produisent pas (pour le cas (b), on aurait sinon $\operatorname{codim} Y = 1$!).

Par ailleurs, il est bien connu qu'en dimension 3, si la variété est lisse (ce qui est le cas ici de $\widetilde{X}$), une contraction de Mori ne peut donner lieu à une petite contraction [Mor82] (la raison en est à nouveau qu'une courbe sur laquelle le fibré canonique est strictement négatif se déforme en dimension 3). Ainsi, le cas (c) ne se produit pas non plus.

C'est donc que K_X est nef (on retrouve ainsi le résultat de Kollár), et que l'arête extrémale du coté $K_{\widetilde{X}} < 0$ est engendrée par la classe d'homologie des fibres de π. Il y a alors exactement deux possibilités [Mor82] :

• Les fibres de la contraction de Mori (restreinte au diviseur exceptionnel E) sont de dimension 1 et alors cette dernière coïncide avec π. Dans ce cas, X est donc projective.

• La contraction de Mori contracte le diviseur exceptionnel E sur un point. Dans ce cas, ce dernier est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, et $\mathcal{O}_E(E)$ est de bi-degré $(-1,-1)$. La situation est alors la suivante :

$$\widetilde{X} \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{c} Z,$$

où Z est une variété singulière projective ayant une unique singularité nodale ordinaire (dont le modèle local est $xy - zt = 0$ dans $(\mathbb{C}^4, 0)$). Dans ce cas, la contraction de Mori est alors $c \circ \pi$, et correspond à l'éclatement du point singulier. $\square$

3. Une famille de variétés de Moishezon

Le but de cette partie est de montrer le :

THÉORÈME 3. — *Pour tout entier n supérieur ou égal à 4, il existe des variétés de Moishezon X de dimension n vérifiant :*

(i) $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$,

(ii) *K_X est gros,*

(iii) *K_X n'est pas nef.*

REMARQUE 3. — Les variétés obtenues dans cette construction relèvent toutes du cas « contraction divisorielle » évoqué précédemment. Il serait bien sûr intéressant de construire de telles variétés relevant du cas « petite contraction ». Cependant, nous verrons plus loin que ce cas ne peut pas se produire en dimension 4.

3.1. Un résultat intermédiaire.

La démonstration du théorème précédent repose sur la construction suivante.

Pour n entier, nous notons :

• $[x_0 : \ldots : x_{n+1}]$ les coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^{n+1}$;

• $\mathbb{P}^1$ la droite $\{x_0 = \ldots = x_{n-1} = 0\}$.

Choisissons alors n polynômes homogènes $h_0, \ldots, h_{n-1}$ de degré $(2n-2)$ et considérons l'hypersurface Z de degré $(2n-1)$ et d'équation

$$\sigma = x_0 h_0 + \cdots + x_{n-1} h_{n-1} = 0.$$

Cette hypersurface contient $\mathbb{P}^1$ et peut être singulière. On a cependant le résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *Si $n \geq 3$ et si les h_i sont choisis génériquement, alors :*

(i) *l'hypersurface Z est non singulière,*

(ii) *le fibré normal $N_{\mathbb{P}^1/Z}$ est égal à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus(n-1)}$,*

(iii) *K_Z est égal à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(n-3)_{|Z}$,*

(iv) $\mathrm{Pic}(Z) = \mathbb{Z}$.

Démonstration de la proposition.

• On démontre (i) : les points singuliers de Z sont des zéros communs des équations

$$\begin{cases} x_0 h_0 + \cdots + x_{n-1} h_{n-1} = 0\,; \\ x_0 \dfrac{\partial h_0}{\partial x_i} + \cdots + x_{n-1} \dfrac{\partial h_{n-1}}{\partial x_i} + h_i = 0, \quad i = 0, \ldots, n-1. \end{cases}$$

En particulier, Z est lisse au voisinage de $\mathbb{P}^1 = \{x_0 = \ldots = x_{n-1} = 0\}$ dès que les h_i ne s'annulent pas simultanément sur $\mathbb{P}^1$. Ceci est vrai pour un choix générique des h_i dès que n est supérieur ou égal à 2.

On déduit alors du théorème de Bertini que si les h_i sont à nouveau génériques, l'hypersurface Z est non singulière partout : en effet, de façon générale, une relation $\sum_i s_i f_i = 0$ définit une variété non singulière en dehors des zéros communs des s_i dès que les f_i sont génériques dans l'espace des sections holomorphes d'un fibré engendrant en tout point les jets d'ordre inférieur ou égal à 1.

• Le point (ii) est équivalent au fait que le schéma de Hilbert des droites de Z est lisse de dimension 0. On renvoie à [BVV78] pour une démonstration[2].

• Si maintenant les h_i sont choisis de sorte que (i) et (ii) soient satisfaits, alors (iii) est immédiat par adjonction et (iv) découle du théorème de Lefschetz. $\square$

REMARQUE 4. — Le cas $n = 3$ de la proposition précédente correspond à celui des quintiques dans $\mathbb{P}^4$. Il a été considéré par Katz dans [Kat86].

[2] Cette référence nous a été indiquée par le rapporteur de ce travail.

Dans ce cadre, Katz détermine le fibré normal $N_{\mathbb{P}^1/Z}$ dans le cas où les h_i sont génériques, mais analyse aussi la situation non générique. Signalons aussi [Cle83], où Clemens considère des questions analogues, toujours en dimension 3.

REMARQUE 5. — On peut reprendre plus généralement la construction précédente pour les hypersurfaces de $\mathbb{P}^{n+1}$ de degré $2n-2k+1$ passant par un $\mathbb{P}^k$ linéaire. On peut alors à nouveau montrer que (génériquement) $N_{\mathbb{P}^k/Z}$ (qui est de degré $k-n$) n'a pas de sections. Cependant, le fibré $N_{\mathbb{P}^k/Z}$ n'est pas scindé si $k \geq 2$.

Démonstration de la remarque 5. — Considérons la suite exacte des fibrés normaux :

$$\begin{aligned} 0 \to N_{\mathbb{P}^k/Z} \longrightarrow N_{\mathbb{P}^k/\mathbb{P}^{n+1}} &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)^{\oplus(n+1-k)} \\ &\xrightarrow{d\sigma} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(2n-2k+1)_{|\mathbb{P}^k} \to 0. \end{aligned}$$

En dualisant cette suite, il vient :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(-2n+2k-1)_{|\mathbb{P}^k} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(-1)^{\oplus(n+1-k)} \longrightarrow N^*_{\mathbb{P}^k/Z} \to 0.$$

Si $k \geq 2$, comme le fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(-2n+2k-1)_{|\mathbb{P}^k}$ est négatif, la suite exacte longue de cohomologie donne $H^0(\mathbb{P}^k, N^*_{\mathbb{P}^k/Z}) = 0$. Ceci exclut de suite le fait que $N_{\mathbb{P}^k/Z}$ soit scindé car il serait alors égal à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(-1)^{\oplus(n-k)}$. $\square$

3.2. Démonstration du théorème 3.

La construction qui suit nous a évidemment été inspirée par l'analyse précédente, dans le cas où la contraction de Mori est une contraction divisorielle : si une variété de dimension 4 de Moishezon satisfait au cas (ii) du théorème 2, c'est en éclatant une surface, puis en contractant sur une courbe rationnelle que l'on obtient un modèle projectif. Nous donnons cependant la construction générale en toute dimension.

Construction explicite. — On se fixe dorénavant une hypersurface Z donnée par la proposition précédente. La variété X cherchée va être obtenue en effectuant un « flip » (plus exactement, l'inverse d'un flip) à partir de Z.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^1 & & E = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-2} \arrow[ll] \arrow[dd] \\
\cap & & \\
Z & \widetilde{X} \arrow[l] \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d] & \\
 & X \supset & \mathbb{P}^{n-2} \supset \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

Suivant la figure ci-dessus, notons $\widetilde{X}$ la variété projective obtenue en éclatant Z le long de $\mathbb{P}^1$. Le diviseur exceptionnel de l'éclatement est alors $E = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-2}$, et pour pouvoir contracter dans l'autre direction, il s'agit de montrer que $\mathcal{O}(E)_{|\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$. Pour cela, les deux suites exactes suivantes :

$$0 \to N_{\mathbb{P}^1/E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus(n-2)} \longrightarrow N_{\mathbb{P}^1/\widetilde{X}} \longrightarrow N_{E/\widetilde{X}|\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}(E)_{|\mathbb{P}^1} \to 0,$$

$$0 \to T\mathbb{P}^1 \longrightarrow T\widetilde{X}_{|\mathbb{P}^1} \longrightarrow N_{\mathbb{P}^1/\widetilde{X}} \to 0$$

donnent successivement :

$$\deg\big(N_{\mathbb{P}^1/\widetilde{X}}\big) = \deg\big(\mathcal{O}(E)_{|\mathbb{P}^1}\big), \quad \deg\big(K_{\widetilde{X}|\mathbb{P}^1}\big) = -2 - \deg(N_{\mathbb{P}^1/\widetilde{X}}).$$

Comme

$$K_{\widetilde{X}} = f^*K_Z + (n-2)\mathcal{O}(E) \quad \text{et} \quad K_Z = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(n-3)_{|Z},$$

on en déduit bien que $\mathcal{O}(E)_{|\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$.

La contraction de $\mathbb{P}^1$ définit donc une variété de Moishezon X, contenant un $\mathbb{P}^{n-2}$ et telle que $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$.

Montrons maintenant que

$$N_{\mathbb{P}^{n-2}/\widetilde{X}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(-1).$$

Comme

$$E = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-2} = \mathbb{P}(N^*_{\mathbb{P}^{n-2}/\widetilde{X}}),$$

le fibré normal $N_{\mathbb{P}^{n-2}/\widetilde{X}}$ est de la forme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(a)$. Comme précédemment, la suite exacte

$$0 \to T\mathbb{P}^{n-2} \longrightarrow TX_{|\mathbb{P}^{n-2}} \longrightarrow N_{\mathbb{P}^{n-2}/X} \to 0$$

donne $2a = -\deg\big(K_{X|\mathbb{P}^{n-2}}\big) - n + 1$, puis

$$\deg(K_{X|\mathbb{P}^{n-2}}) = \deg\big(K_{\widetilde{X}|\mathbb{P}^{n-2}} - \mathcal{O}(E)_{|\mathbb{P}^{n-2}}\big) = -(n-2) + 1,$$

d'où finalement $a = -1$.

Par ailleurs, nous venons de montrer que

$$K_{X|\mathbb{P}^{n-2}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(3-n).$$

Ainsi, si n est supérieur ou égal à 4, $-K_X$ est ample sur $\mathbb{P}^{n-2}$. Finalement, le fibré K_X bien que gros n'est pas nef et le théorème est démontré. $\square$

Remarque 6. — La construction précédente, en dimension 3, donne un nouvel exemple de variété de Moishezon, de type «Calabi-Yau» satisfaisant $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\cdot\mathcal{O}_X(1)$ (voir Oguiso [Ogu94]).

4. Une classification en dimension 4

Dans cette partie, nous considérons des variétés de Moishezon (non projectives) X de dimension 4. Comme précédemment, nous supposerons que $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$, que K_X est gros et que X est rendue projective après éclatement le long d'une sous-variété lisse Y.

Nous montrons les deux résultats suivants :

THÉORÈME 4. — *Sous les hypothèses précédentes, Y est nécessairement une surface. Autrement dit, et dans cette situation particulière, il ne suffit pas d'éclater une courbe pour rentrer dans le monde projectif.*

Nous avons vu précédemment que K_X n'est pas nécessairement nef à partir de la dimension 4. Le résultat suivant montre que l'exemple construit dans la partie précédente est le seul possible dans le cas où K_X n'est pas nef. Nous reprenons les notations de 2.2 :

- $\pi : \widetilde{X} \to X$ désigne l'éclatement de X le long de Y et
- $f : \widetilde{X} \to Z$ désigne la contraction extrémale de Mori sur $\widetilde{X}$.

THÉORÈME 5. — *Sous les hypothèses précédentes et si K_X n'est pas nef, alors :*

(i) *le couple $(Y, N_{Y/X})$ est isomorphe à $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus 2})$;*

(ii) *f est une contraction divisorielle qui contracte le diviseur exceptionnel de π sur une courbe rationnelle lisse à fibré normal $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 3}$ dans une variété projective lisse Z.*

Ces résultats sont accessibles en dimension 4 car les contractions de Mori sont « bien comprises » : Kawamata [Kaw89] classifie les petites contractions tandis que Ando [And85] et Beltrametti [Bel86] classifient les contractions divisorielles.

Démonstration du théorème 4. — Nous traitons séparément les cas K_X nef et K_X non nef.

(i) *Le cas K_X non nef.* — Si la contraction de Mori f est une contraction divisorielle, le théorème F assure que Y est une surface et que $f(E)$ est une courbe. Il suffit donc de montrer que f ne peut pas être une petite contraction. Sinon, d'après le théorème de Kawamata [Kaw89], le lieu exceptionnel de f est une réunion de $\mathbb{P}^2$ disjoints avec

$$N_{\mathbb{P}^2/\widetilde{X}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus 2}.$$

Dans notre situation, nous savons de plus que ces $\mathbb{P}^2$ doivent être inclus dans E. Or la suite exacte

$$0 \to N_{\mathbb{P}^2/E} \longrightarrow N_{\mathbb{P}^2/\widetilde{X}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus 2} \longrightarrow N_{E/\widetilde{X}|\mathbb{P}^2} \to 0$$

donne :

$$N_{\mathbb{P}^2/E} = N_{E/\widetilde{X}|\,\mathbb{P}^2} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$$

(c'est la seule extension possible du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus 2}$ par des fibrés en droites). Par ailleurs,

$$K_{\widetilde{X}|\,\mathbb{P}^2} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1),$$

d'où l'on déduit par la formule d'adjonction que

$$\deg\big(\pi^* K_{X|\,\mathbb{P}^2}\big) = \operatorname{codim} Y - 2 \geq 0.$$

Cette dernière inégalité contredit le fait que $\pi^* K_X$ est strictement négatif sur les courbes contractées par f. Ceci achève le cas K_X non nef.

(ii) *Le cas K_X nef.* — Dans ce cas, rappelons que la contraction de Mori se factorise par π. Notons $g : X \to Z$, de sorte que $f = g \circ \pi$.

Raisonnons alors par l'absurde en supposant que Y est une courbe. Dans ce cas, il est clair que $f(E)$ (égal à $g(Y)$) est un point. En effet, dans le cas contraire, $f(E)$ est une courbe et l'application g est finie. Comme Z est projective, on en déduit que X est projective, ce que l'on a rejeté. Ainsi $f(E)$ est un point et le diviseur E est une variété de Fano.

Nous allons montrer que E est en fait isomorphe à la quadrique de dimension 3, ce qui fournira la contradiction; une quadrique de dimension 3, dont le nombre de Picard est 1, ne pouvant être égale au projectivisé d'un fibré de rang 3 sur une courbe, pour lequel le nombre de Picard est deux!

Pour cela, remarquons que Z étant $\mathbb{Q}$-factorielle à singularités terminales, il existe un entier m tel que :

$$mK_X = g^*(mK_Z).$$

En particulier, la restriction de K_X à Y est triviale. Il en découle que $K_Y = \det N_{Y/X}$, et par conséquent,

$$K_E = \pi^*\big(K_Y - \det N_{Y/X}\big) + 3\mathcal{O}_E(-1) = 3\mathcal{O}_E(-1).$$

On en déduit que $\mathcal{O}_E(1)$ est ample et que E est une variété (de dimension 3) d'indice 3; c'est donc, d'après le théorème de Kobayashi-Ochiai [KoO73] que E est la quadrique comme annoncé. $\square$

La proposition suivante précise le cas où K_X est nef :

PROPOSITION 2. — *Si K_X est nef, et si $f(E)$ est un point, alors le couple $(Y, N_{Y/X})$ est isomorphe à $(\mathbb{P}^2, T^*\mathbb{P}^2)$, $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2))$ ou $(Q_2, \mathcal{O}(-1,-1)^{\oplus 2})$.*

Nous ne connaissons pas d'exemples explicites où ces possibilités sont effectivement réalisées, mais nous pouvons remarquer qu'aucune n'est exclue *a priori* par les résultats de Ando et Beltrametti.

Démonstration de la proposition. — La démonstration précédente montre que $K_Y = \det N_{Y/X}$ et que le fibré $\mathcal{O}_E(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(N^*_{Y/X})}(1)$ est ample, donc que $N^*_{Y/X}$ l'est aussi. Le résultat découle de suite d'un théorème dû à Peternell [Pet91]. $\square$

Démonstration du théorème 5. — Notons F la fibre générale de f restreinte au diviseur exceptionnel E. Comme $f(E)$ est une courbe, F est de dimension 2. D'après [Bel86], F est alors une variété de Fano, d'indice supérieur ou égal à 2 ; c'est donc que F est $\mathbb{P}^2$ ou la quadrique Q_2. De plus, il a été vu précédemment que F coupe les fibres de π sur des points. Il s'ensuit que $\pi_{|F} : F \to Y$ est une application surjective finie. Deux cas sont à distinguer :

- F est $\mathbb{P}^2$: dans ce cas, Y est aussi isomorphe à $\mathbb{P}^2$ (voir par exemple [BPV84] ou plus généralement [Laz84]). Montrons alors que

$$\pi_{|F} : F \simeq \mathbb{P}^2 \longrightarrow Y \simeq \mathbb{P}^2$$

est un isomorphisme. Pour cela, il suffit de montrer que $\pi_{|F}$ est un isomorphisme local, car alors $\pi_{|F}$ est le revêtement trivial. Pour cela, soit x dans F et L un $\mathbb{P}^1$ quelconque passant par $\pi(x)$. Sa préimage $\pi^{-1}(L)$ est une surface d'Hirzebruch biréglée, donc $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. L'intersection $F \cap \pi^{-1}(L)$ est alors une réunion de $\mathbb{P}^1$ «horizontaux». La restriction de π au $\mathbb{P}^1$ horizontal passant par x est donc un isomorphisme sur son image. Ceci étant vrai pour tout $\mathbb{P}^1$ passant par $\pi(x)$, ceci montre bien que $d\pi_{|F}(x)$ est surjective, donc inversible, et que $\pi_{|F}$ est un isomorphisme local. Ainsi, $\pi_{|F} : F \simeq \mathbb{P}^2 \to Y \simeq \mathbb{P}^2$ est un isomorphisme. On en déduit que le fibré normal $N_{Y/X}$ est scindé : on pose alors

$$N_{Y/X} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b),$$

et le fait que $\pi^{-1}(L) \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ montre même que $a = b$. Comme K_X n'est pas nef, K_X est négatif sur Y ; il vient alors :

$$\deg(K_{X|Y}) = -3 - 2a < 0,$$

d'où $a = -1$ (on sait que a est strictement négatif, car sinon une courbe rationnelle de Y se déformerait hors de Y ; or K_X est positif sur les courbes non incluses dans Y, voir la remarque 1) et f contracte E sur une courbe rationnelle lisse à fibré normal $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 3}$ dans la variété projective lisse Z.

• F est Q_2 : nous montrons que ce cas ne peut pas arriver. En effet, Y est isomorphe à $\mathbb{P}^2$ ou Q_2. Le cas $Y \simeq \mathbb{P}^2$ s'exclut exactement comme précédemment : $\pi_{|F}$ réalise un isomorphisme entre la quadrique et $\mathbb{P}^2$!

Si $Y \simeq Q_2$, le raisonnement est plus simple et il est inutile de montrer que $\pi_{|F} : F \simeq Q_2 \to Y \simeq Q_2$ est un isomorphisme. Choisissons en effet un $\mathbb{P}^1$ dans Y, à savoir un des générateurs de $H_2(Q_2, \mathbb{Z})$, sur lequel K_X est strictement négatif (il en existe car K_X n'est pas nef). Alors $N_{Y/X}$ restreint à $\mathbb{P}^1$ est de la forme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$ (ceci comme précédemment car $\pi^{-1}(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$). La suite exacte :

$$0 \to T_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow T_{X|\mathbb{P}^1} \longrightarrow N_{\mathbb{P}^1/X} \to 0,$$

et le fait que $N_{\mathbb{P}^1/Q_2}$ est trivial entraînent que

$$\deg\bigl(-K_{X|\mathbb{P}^1}\bigr) = 2 + 2a > 0$$

et donc que $a \geq 0$. Ceci est, comme dans le cas précédent, absurde par la remarque 1 car ce $\mathbb{P}^1$ se déformerait alors dans X hors de Y ! $\square$

NOTE. — Dans [Bo95], l'auteur a étendu le théorème 2 au cas où f est une petite contraction.

BIBLIOGRAPHIE

[And85] ANDO (T.). — *On extremal rays of the higher dimensional varieties*, Invent. Math., t. **81**, 1985, p. 347–357.

[BPV84] BARTH (W.), PETERS (C.) and VAN DE VEN (A.). — *Compact complex surfaces.* — Springer, 1984.

[BVV78] BARTH (W.) and VAN DE VEN (A.). — *Fano varieties of lines on hypersurfaces*, Arch. Math., t. **31**, 1978, p. 96–104.

[Bel86] BELTRAMETTI (M.). — *Contractions of non numerically effective extremal rays in dimension* 4, Proc. Alg. Geom. Teubner, Texte Math., Berlin, Teubner, t. **92**, 1986, p. 24–37.

[Bo93a] BONAVERO (L.). — *Inégalités de Morse holomorphes singulières*, C.R. Acad. Sciences Paris, t. **317**, série I, 1993, p. 1163–1166.

[Bo93b] BONAVERO (L.). — *Inégalités de Morse holomorphes singulières*, Prépublication de l'Institut Fourier, t. **259**, 1993, à paraître au Journal of Geometric Analysis.

[Bo95] BONAVERO (L.). — *Inégalités de Morse et variétés de Moishezon*, Thèse de Doctorat de l'Université J. Fourier (Grenoble 1), 1995.

[Bon95] BONAVERO (L.). — *Sur des variétés de Moishezon dont le groupe de Picard est de rang un*, C.R. Acad. Sciences Paris, t. **321**, 1995, p. 443–446.

[Cle83] CLEMENS (H.). — *Homological equivalence, modulo algebraic equivalence, is not finitely generated*, Inst. Haute Études Scient., t. **58**, 1983, p. 19–38.

[CKM88] CLEMENS (H.), KOLLÁR (J.) and MORI (S.). — *Higher dimensional complex geometry*, Astérisque, t. **166**, 1988.

[Dem85] DEMAILLY (J.-P.). — *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d'' cohomologie*, Ann. Inst. Fourier, t. **35**, 1985, p. 189–229.

[JiS93] JI (S.) and Shiffman (B.). — *Properties of compact complex manifolds carrying closed positive currents*, J. Geom. Anal., t. **3**, n° 1, 1993, p. 37–61.

[Kat86] KATZ (S.). — *On the finiteness of rational curves on quintic threefolds*, Comp. Math., t. **60**, 1986, p. 151–162.

[Kaw89] KAWAMATA (Y.). — *Small contractions of four dimendional algebraic manifolds*, Math. Ann., t. **284**, 1989, p. 595–600.

[KMM87] KAWAMATA (Y.), Matsuda (K.) and MATSUKI (K.). — *Introduction to the minimal model problem*, Adv. Studies in Math., t. **10**, 1987, p. 283–360.

[KoO73] KOBAYASHI (S.) and OCHIAI (T.). — *Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics*, J. Math. Kyoto Univ., t. **13**, 1973, p. 31–47.

[Kol91] KOLLÁR (J.). — *Flips, flops, minimal models*, Surveys in Diff. Geom., t. **1**, 1991, p. 113–199.

[Laz84] LAZARSFELD (R.). — *Some applications of the theory of positive bundles*, Complete intersections (ed. S. Greco, R. Strano), Springer Lecture Notes, t. **1092**, 1984, p. 29–61.

[Moi67] MOISHEZON (B.). — *On n dimensional compact varieties with n independent meromorphic functions*, Amer. Math. Soc. Translations, t. **63**, 1967, p. 51–177.

[Mor82] MORI (S.). — *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*, Ann. of Math., t. **116**, 1982, p. 133–176.

[Ogu94] OGUISO (K.). — *Two remarks on Calabi-Yau Moishezon threefolds*, J. Reine angew. Math., t. **452**, 1994, p. 153–161.

[Pet91] PETERNELL (T.). — *Ample vector bundles on Fano manifolds*, Int. J. Math., t. **2**, n° 3, 1991, p. 311–322.

[Siu84] SIU (Y.-T.). — *A vanishing theorem for semi-positive line bundles over non-Kähler manifolds*, J. Diff. Geom., t. **19**, 1984, p. 431–452.

[Siu85] SIU (Y.-T.). — *Some recent results in complex manifolds theory related to vanishing theorems for the semi-positive case*, Lecture Note in Math., t. **1111**, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1985, p. 169–192.