BULLETIN DE LA S. M. F.

NATHALIE WACH

Représentations p-adiques potentiellement cristallines

Bulletin de la S. M. F., tome 124, nº 3 (1996), p. 375-400

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_3_375_0>

Bull. Soc. math. France,
124, 1996, p. 375–400.

REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES POTENTIELLEMENT CRISTALLINES

PAR

NATHALIE WACH (*)

RÉSUMÉ. — Ce travail fait suite à un article paru il y a quelques années, dans lequel J.-M. Fontaine proposait une nouvelle description, en termes de (φ, Γ)-modules, des représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local dont le corps résiduel est parfait de caractéristique p. On s'intéresse ici plus particulièrement aux représentations cristallines et on établit un critère, qui se lit sur le (φ, Γ)-module, permettant de reconnaître si une représentation p-adique est cristalline ou potentiellement cristalline, dans un cas particulier.

ABSTRACT. — This work follows a paper edited a few years ago in which J.-M. Fontaine proposed a new description in terms of (φ, Γ)-modules for p-adic Galois representations. The Galois group considered is the Galois group of a local field whose residue field is perfect of characteristic p. Here we are most particularly focusing on crystalline representations and obtain a criterion, using (φ, Γ)-modules, for a representation to be crystalline or potentially crystalline in a special case.

Introduction

Dans tout ce travail, p est un nombre premier, K un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, d'indice de ramification absolue e et de corps résiduel k parfait de caractéristique p. On note W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et K_0 son corps des fractions; tous trois sont munis d'une action de Frobenius, notée σ (on a $\sigma(x) = x^p$ pour $x \in k$). On fixe $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et on pose $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

(*) Texte recu le 23 février 1995, révisé le 24 septembre 1995 et le 21 novembre 1995.
N. WACH, U.F.R. de Mathématiques, Université Louis Pasteur et I.R.M.A., 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg CEDEX (France).
Email : wach@math.u-strasbg.fr.

Classification AMS : 11S23, 14F30, 14L05.

Une représentation p-adique de G_K est la donnée d'un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel V de dimension finie muni d'une action continue de G_K ; on note $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ la catégorie des représentations p-adiques.

Dans [F91], J.-M. Fontaine a construit une équivalence entre la catégorie des représentations p-adiques et une catégorie convenable de (φ, Γ)-modules sur un corps $\mathcal{E}$ complet pour une valuation discrète. Il serait très utile, en particulier pour l'étude des déformations de représentations galoisiennes, de savoir caractériser les (φ, Γ)-modules qui correspondent à des représentations de Hodge-Tate, de de Rham, semi-stables, cristallines,... Dans cet article, on s'attaque à ce problème pour les représentations cristallines. Dans le cas où K est contenu dans l'extension de K_0 engendrée par les racines de l'unité, on obtient une condition suffisante pour qu'un (φ, Γ)-module corresponde à une représentation cristalline : celle-ci se décompose en une condition sur l'action de φ et une autre sur l'action de Γ (équivalente dans ce contexte au fait que la représentation soit de de Rham). Dans un autre article (*cf.* [Wa]), on montrera que la réciproque est vraie dans un cas particulier.

Dans la partie A, on rappelle les résultats sur les représentations p-adiques et les (φ, Γ)-modules contenus dans [F91] et utilisés par la suite. On trouvera un énoncé précis du théorème à la fin de cette partie.

La partie B est entièrement consacrée à la démonstration du théorème.

Ce travail représente une partie de ma thèse et, avant de terminer cette introduction, je tiens à remercier J.-M. Fontaine pour l'aide, les conseils et les idées qu'il m'a apportés.

A. Rappels sur les représentations p-adiques et énoncé du résultat

A.1. — Soit $\mathbb{C}$ le complété de $\overline{K}$ et $v_{\mathbb{C}}$ la valuation de $\mathbb{C}$ normalisée par $v_{\mathbb{C}}(p) = 1$. On considère l'ensemble, noté $\operatorname{Fr} R$ (*cf.* [F82, p. 535]), des suites $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ pour tout n, qu'on munit d'une addition et d'une multiplication en posant, pour $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$:

$$xy = (x^{(n)} \cdot y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$$

$$x + y = (z^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad z^{(n)} = \lim_{m\to+\infty} (x^{(m+n)} + y^{(m+n)})^{p^m}.$$

Alors, $\operatorname{Fr} R$ est un corps algébriquement clos de caractéristique p, complet pour la valuation définie par $v(x) = v_{\mathbb{C}}(x^{(0)})$. On note R l'anneau de la valuation, dont le corps résiduel s'identifie au corps résiduel $\bar{k}$ de $\overline{K}$.

Si A est une k-algèbre, $W(A)$ désigne l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans A et $W_{K_0}(A) = K_0 \otimes_W W(A) = W(A)[1/p]$; si $a \in A$, on note $[a] = (a, 0, \cdots, 0, \cdots)$ le représentant de Teichmüller de a dans $W(A)$. On note φ l'endomorphisme de Frobenius de $W(A)$ ainsi que son extension à $W_{K_0}(A)$; ainsi, si $\lambda \in W$, on a $\varphi(\lambda) = \sigma(\lambda)$. En particulier ceci s'applique à $W(R)$, $W(\mathrm{Fr}\, R)$ et $W_{K_0}(\mathrm{Fr}\, R)$.

D'autre part, le groupe G_K, qui opère par continuité sur $\mathbb{C}$, opère par fonctorialité sur $\mathrm{Fr}\, R$, R et $W(R)$ et les anneaux $W(R)$, $W(\mathrm{Fr}\, R)$ et $W_{K_0}(R)$ s'identifient à des sous-anneaux de $W_{K_0}(\mathrm{Fr}\, R)$ stables par G_K et φ.

On note χ le caractère cyclotomique et pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout $\mathbb{Z}_p$-module T muni d'une action de G_K, on définit $T(i)$ de la manière suivante : le $\mathbb{Z}_p$-module sous-jacent à $T(i)$ est T, mais l'action de G_K sur $T(i)$ est l'action de G_K sur T multipliée par χ^i.

A.2. — Le module de Tate $\mathbb{Z}_p(1) = T_p(\mathbb{G}_m)$ s'identifie au sous-$\mathbb{Z}_p$-module du groupe multiplicatif des unités de R congrues à 1 modulo l'idéal maximal, formé des x tels que $x^{(0)} = 1$. Choisissons un générateur de ce module, c'est-à-dire un élément $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in R$ tel que $\varepsilon^{(0)} = 1$ et $\varepsilon^{(1)} \neq 1$, et considérons les éléments $[\varepsilon] = (\varepsilon, 0, \cdots, 0, \cdots)$ et $\pi = [\varepsilon] - 1$ dans $W(R)$. Alors l'adhérence S de la sous W-algèbre de $W(R)$ engendrée par π s'identifie à l'algèbre $W[[\pi]]$ des séries formelles en π à coefficients dans W ; de plus S est indépendant du choix de ε, stable par φ et G_K, avec les relations suivantes :

$$\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1, \quad g(\pi) = (1+\pi)^{\chi(g)} - 1,$$

où χ est le caractère cyclotomique, décrivant l'action de G_K sur les racines de l'unité d'ordre une puissance de p. On note $S[1/p] = K_0 \otimes_W S$.

Remarque. — Ces notations ne sont pas exactement les mêmes que celles de [F91] ou [F94], où π était noté π_ε et de même S était noté S_ε.

Pour tout entier $n \geq 1$, soit K_n le sous-corps de $\overline{K}$ engendré sur K_0 par les racines p^n-ièmes de l'unité. On pose

$$K_\infty = \cup_{n \geq 1} K_n, \quad \Gamma_{K_0} = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_0), \quad H_{K_0} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$$

le noyau de la projection de G_{K_0} sur Γ_{K_0}. On dispose d'une suite exacte :

$$1 \to H_{K_0} \longrightarrow G_{K_0} \longrightarrow \Gamma_{K_0} \to 1.$$

Plus généralement, si L est une extension algébrique de K_0 contenue dans $\overline{K}$ et si $G_L = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$, on pose

$$H_L = G_L \cap H_{K_0}, \quad \Gamma_L = G_L/H_L.$$

On dispose alors d'une suite exacte similaire à la précédente :

$$1 \to H_L \longrightarrow G_L \longrightarrow \Gamma_L \to 1.$$

On note $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ le complété pour la topologie p-adique de $S[1/\pi]$. C'est l'anneau des entiers d'un corps complet pour une valuation discrète, absolument non ramifié, noté $\mathcal{E}$. Comme π est inversible dans $W(\operatorname{Fr} R)$, l'inclusion de S dans $W(R)$ se prolonge en un plongement de $S[1/\pi]$ dans $W(\operatorname{Fr} R)$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ s'identifie à l'adhérence de $S[1/\pi]$ dans $W(\operatorname{Fr} R)$, tandis que $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}[1/p]$ s'identifie à un sous-corps de $W_{K_0}(\operatorname{Fr} R)$. Alors si $E = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}/p\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, on a

$$E = \operatorname{Frac}(S/pS) = k((\widetilde{\pi})), \quad \mathcal{O}_E = S/pS = k[[\widetilde{\pi}]]$$

où $\widetilde{\pi}$ est la réduction modulo p de π. De plus, si $\widehat{\mathcal{E}}_{nr}$ désigne l'adhérence dans $W_{K_0}(\operatorname{Fr} R)$ de l'extension maximale non ramifiée $\mathcal{E}_{nr}$ de $\mathcal{E}$ contenue dans $W_{K_0}(\operatorname{Fr} R)$, $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ est une clôture séparable $E^{\text{sép}}$ de E , avec une identification des groupes de Galois :

$$H_{K_0} = \operatorname{Gal}(E^{\text{sép}}/E) = \operatorname{Gal}(\mathcal{E}_{nr}/\mathcal{E}).$$

De même, pour toute extension finie L de K_0 contenue dans $\bar{K}$, le corps $\mathcal{E}_L = (\mathcal{E}_{nr})^{H_L}$ est un corps complet pour une valuation discrète, absolument non ramifié, d'anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$ et de corps résiduel $E_L = (E^{\text{sép}})^{H_L}$.

A.3. — Soit A un anneau nœthérien, muni d'une topologie, pour laquelle il est séparé et complet, d'un endomorphisme noté σ et d'une action d'un groupe profini Γ continue, compatible à la structure d'anneau et commutant à σ. On suppose en outre que le morphisme $\sigma : A \to A$ est plat. Un φ-module sur A est un A-module muni d'un endomorphisme φ, semi-linéaire par rapport à σ ; on note $\mathbf{\Phi M_A}$ la catégorie formée des φ-modules sur A. Si M est un tel module, on note M^σ le A-module déduit de M par l'extension des scalaires $\sigma : A \to A$ et on dit que M est *étale* s'il est de type fini sur A et si l'application linéaire $\Phi : M^\sigma \to M$, déduite de φ en posant $\Phi(\lambda \otimes x) = \lambda\varphi(x)$ pour $\lambda \in A$ et $x \in M$, est bijective.

Un (φ, Γ)-module sur A est un φ-module sur A muni en plus d'une action de Γ, semi-linéaire par rapport à l'action de Γ sur A, cette action commutant avec l'endomorphisme φ. On dit qu'un (φ, Γ)-module est étale si le φ-module sous-jacent l'est et si l'action de Γ est continue. Les (φ, Γ)-modules étales définissent une catégorie abélienne notée $\mathbf{\Gamma\Phi M_A^{\text{\bf ét}}}$. Dans la suite, on pose $\Gamma = \Gamma_K$.

Soit $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{\mathbf{0}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{K}}}$ la catégorie des (φ, Γ)-modules sur $\mathcal{E}_K$ obtenus à partir de (φ, Γ)-modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ en rendant p inversible. On sait (*cf.* [F91, p. 274]) que le foncteur $\mathbf{V}_{\mathcal{E}}$ défini par

$$\mathbf{V}_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}) = (\widehat{\mathcal{E}}_{nr} \otimes_{\mathcal{E}_K} \mathcal{M})^{\varphi=1}$$

induit une équivalence entre $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{\mathbf{0}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{K}}}$ et la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ des représentations p-adiques de G_K, avec pour quasi-inverse le foncteur

$$\mathbf{D}_{\mathcal{E}} : V \mapsto \mathbf{D}_{\mathcal{E}}(V) = (\widehat{\mathcal{E}}_{nr} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{H_K}.$$

Il existe une version contravariante de ces deux foncteurs, les foncteurs

$$\mathbf{V}^*_{\mathcal{E}} : \mathcal{M} \mapsto \mathbf{V}^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M}_{\mathcal{E}_{\mathbf{K}}}}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{E}}_{nr}),$$

$$\mathbf{D}^*_{\mathcal{E}} : V \mapsto \mathbf{D}^*_{\mathcal{E}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[H_K]}(V, \widehat{\mathcal{E}}_{nr}).$$

A.4. $\boldsymbol{\Gamma}$-modules sur $\boldsymbol{K_0((t))}$ et connexion.

Soit

$$\widehat{S}_{K_0} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} S[1/p]/\pi^n S[1/p]\,;$$

alors $t = \log(1+\pi)$ est un élément de $\widehat{S}_{K_0}$, on a $\widehat{S}_{K_0} = K_0[[t]]$ et, de même, $\widehat{S}_{K_0}[1/t] = K_0((t))$. Pour $g \in \Gamma$, on a $g(t) = \chi(g)t$ où χ est le caractère cyclotomique.

Si N est un $K_0[[t]]$-module de type fini muni d'une action semi-linéaire et continue de Γ, pour g suffisamment proche de 1 dans Γ, la série

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(g-1)^n}{n}$$

converge dans $\mathrm{End}_{K_0} N$ et définit un morphisme $\log g : N \to N$; alors $\nu = \log g / \log \chi(g)$ ne dépend pas du choix de g. On peut définir une connexion régulière

$$\nabla : N[1/t] \to N[1/t] \otimes_{K_0((t))} \Omega^1_{K_0((t))/K_0}$$

comme l'unique connexion telle que $\nabla(x) = \nu(x)\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$, pour tout $x \in N$.

RAPPELS :

- Une connexion $\nabla : M \longrightarrow M \otimes_{K_0((t))} \Omega^1_{K_0((t))/K_0}$, où M est un $K_0((t))$-espace vectoriel, est dite *régulière* s'il existe un $K_0[[t]]$-réseau N de M et une application K_0-linéaire $\nu : N \to N$ tels que $\nabla(x) = \nu(x)\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ pour $x \in N$.

• Une connexion $\nabla : M \longrightarrow M \otimes_{K_0((t))} \Omega^1_{K_0((t))/K_0}$ est dite *triviale* si son noyau $\operatorname{Ker}\nabla$, qui est un K_0-espace vectoriel, engendre M.

Si M est un Γ-module sur $S[1/p]$, le module

$$\widehat{M} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} M/\pi^n M$$

est un $K_0[[t]]$-module muni d'une action semi-linéaire et continue de Γ, donc

$$\widehat{M}[1/t] = \big(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} M/\pi^n M\big)[1/t]$$

est un $K_0((t))$-module muni d'une action semi-linéaire et continue de Γ, d'où une connexion qu'on note $\nabla_{\widehat{M}}$.

A.5. Représentations p-adiques de G_K.

Soient V une représentation p-adique de G_K de dimension d sur $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{M} = \mathbf{D}^*_{\mathcal{E}}(V)$. Rappelons (*cf.* [F91, p. 282–285]) que la réunion $j_*(\mathcal{M})$ des sous-S-modules de type fini de $\mathcal{M}$ stables par φ est un $S[1/p]$-module libre de rang fini $d' \leq d$ stable par φ et Γ ; c'est donc un (φ,Γ)-module sur $S[1/p]$. L'application naturelle

$$\mathcal{E}_K \otimes_{S[1/p]} j_*(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$$

est injective ; c'est un isomorphisme si et seulement si $d' = d$, auquel cas on dit que V est de hauteur finie.

On se propose de montrer le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Supposons $K \subset K_\infty$; soit V une représentation p-adique de G_K de dimension d et de hauteur finie et soit $M = j_*(\mathcal{M})$. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

1) *V est potentiellement cristalline,*

2) *il existe une extension finie L de K contenue dans K_∞ telle que la représentation de G_L déduite de V par restriction soit cristalline,*

3) *V est une représentation de de Rham,*

4) *il existe un entier r et un sous-S-module N libre de rang d de M stable par Γ et tel que l'action de Γ soit finie sur $(N/\pi N)(-r)$,*

5) *la connexion $\nabla_{\widehat{M}}$ est triviale.*

En outre, s'il en est ainsi, pour que V soit cristalline en tant que représentation de G_L, il faut et suffit que Γ_L opère trivialement sur $\operatorname{Ker}\nabla_{\widehat{M}}$.

REMARQUES :

a) On verra au cours de la démonstration que, si l'action de Γ est triviale sur $(N/\pi N)(-r)$, alors V est cristalline,

b) L'implication 2) $\Rightarrow$ 1) est triviale.

c) L'implication 1) $\Rightarrow$ 3) est bien connue (*cf.* par exemple [F-I]),

REMARQUES SUPPLÉMENTAIRES :

a) Ni N, ni r ne sont des invariants attachés à la représentation V. En effet, si l'on remplace N par $N' = \pi N$, on a un isomorphisme compatible avec l'action de Γ entre $N'/\pi N'$ et $(N/\pi N)(1)$. On en déduit que si l'action de Γ est finie sur $(N/\pi N)(-r)$, alors elle est également finie sur $(N'/\pi N')(-r-1)$. En revanche, $(N/\pi N)(-r)$ ne dépend pas du choix de r ni de N et on verra qu'on a une identification $(N/\pi N)(-r) = \operatorname{Ker} \nabla_{\widehat{M}}$.

b) En remplaçant K_0 par une extension finie non ramifiée convenable, on voit que le théorème s'étend au cas où l'extension KK_∞/K_∞ est non ramifiée (c'est-à-dire où KK_n/K_n est non ramifiée pour n assez grand).

c) Inversement, J.-M. Fontaine conjecture que si KK_∞/K_∞ est non ramifiée et si V est une représentation de G_K qui devient cristalline sur une extension finie de K contenue dans une extension non ramifiée de K_∞, alors elle est de hauteur finie. C'est le cas si $K = K_0$, si V est cristalline et s'il existe un entier a tel que les poids de Hodge-Tate de V sont dans l'intervalle $[a, a+p-1]$ (*cf.* [Wa]).

d) En revanche, l'analogue de cette conjecture de J.-M. Fontaine est fausse lorsque l'on omet l'hypothèse KK_∞/K_∞ non ramifiée. On peut en effet montrer que si K' est le sous-corps de K_∞ fixe par l'image de Γ_K dans Γ_{K_0}, toute représentation de hauteur finie de G_K s'étend d'une manière et d'une seule en une représentation de hauteur finie de $G_{K'}$ et on peut montrer qu'il existe des représentations cristallines de G_K qui ne vérifient pas cette propriété.

B. Démonstration du théorème

On suppose désormais $K \subset K_\infty$. L'équivalence entre les cinq assertions sera démontrée en suivant les implications suivantes :

$$2) \Longrightarrow 1) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 5) \Longrightarrow 4) \Longrightarrow 2).$$

En conséquence des remarques déjà faites, il reste à démontrer

$$4) \Longrightarrow 2), \quad 3) \Longrightarrow 5) \quad \text{et} \quad 5) \Longrightarrow 4).$$

B.1. Démonstration de 4) implique 2).

B.1.1. — Soient s un entier ≥ 1 (voire ≥ 2 si $p = 2$) et S_s le sous-W-module libre de $S[1/p]$ de base les éléments $\gamma_m(\pi/p^s)$ pour $m \in \mathbb{N}$ où

$$\gamma_m(\pi/p^s) = \frac{\pi^m}{m!\,p^{sm}}.$$

C'est une sous-W-algèbre de $S[1/p]$ et le W-module I engendré par les $\gamma_m(\pi/p^s)$ avec $m \geq 1$ est un p-d-idéal. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la n-ième puissance divisée $I^{[n]}$ de I est l'idéal engendré par les $\gamma_m(\pi/p^s)$ pour $m \geq n$ et on pose

$$S_s^{PD} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} S_s/I^{[n]}$$

le complété de S_s pour la topologie définie par les idéaux $I^{[n]}$. Alors tout $x \in S_s^{PD}$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme :

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\gamma_n\Big(\frac{\pi}{p^s}\Big) \quad \text{avec} \quad x_n \in W.$$

Soient N un S-module libre de rang d et Λ_0 un sous-W-module libre de N tel que $N = \Lambda_0 \oplus \pi N$; alors tout élément $x \in N$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\pi^n \quad \text{avec } x_n \in \Lambda_0.$$

De même, si on pose

$$N_s^{PD} = S_s^{PD}\widehat{\otimes}_S N = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}}\big((S_s/I^{[n]}) \otimes_S N\big),$$

tout élément x' de N_s^{PD} s'écrit de façon unique sous la forme

$$x' = \sum_{n\in\mathbb{N}} x'_n\gamma_n\Big(\frac{\pi}{p^s}\Big) \quad \text{avec } x'_n \in \Lambda_0.$$

On note Γ_s le sous-groupe fermé de Γ_{K_0} topologiquement engendré par l'élément g de Γ tel que $\chi(g) = 1 + p^s$. Si s est suffisamment grand, on a :

$$\Gamma_s \subset \Gamma = \Gamma_K.$$

B.1.2. — Commençons par établir le lemme suivant :

LEMME 1. — *Soit N un S-module libre de rang d muni d'une action de Γ_s semi-linéaire et triviale modulo π. On note $N_s^{PD} = S_s^{PD}\widehat{\otimes}_S N$ et i^* la projection de N vers $N/\pi N = \Lambda$. On a aussi $\Lambda = N_s^{PD}/I^{[1]}N_s^{PD}$ et on note ρ la projection de N_s^{PD} sur Λ ; on est donc en présence du diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "i^*"'] & & N_s^{PD} \arrow[dl, "\rho"] \\ & \Lambda. & \end{tikzcd}$$

Alors pour tout $x \in N$, il existe un unique $x' \in (N_s^{PD})^{\Gamma_s}$ tel que $i^*(x) = \rho(x')$.

Démonstration. — Soit g le générateur topologique de Γ_s fixé ci-dessus. On rappelle (*cf.* [F94, chap. 5]) que $g(\pi) \equiv \chi(g)\pi$ modulo $\pi^2 S$, ce qui s'écrit également $g(\pi) = \alpha\pi$ où α est une unité de S vérifiant $\alpha \equiv 1 + p^s \bmod \pi S$.

Commençons par montrer l'unicité de x' ; si x'_1 et x'_2 sont deux éléments de N_s^{PD} satisfaisant les conditions du lemme, alors la projection de leur différence dans $I^{[n]}N_s^{PD}/I^{[n+1]}N_s^{PD}$ est non nulle pour un entier $n \geq 1$. D'autre part, on a $g(x'_i) = x'_i$ pour $i = 1, 2$. Dans $I^{[n]}N_s^{PD}/I^{[n+1]}N_s^{PD}$, on peut écrire $x'_1 - x'_2 = \pi^n\beta$, avec $\beta \in N$; on obtient alors :

$$g(\pi^n\beta) = \pi^n\beta \equiv g(\pi)^n\beta \equiv (1+p^s)^n\pi^n\beta \mod I^{[n+1]}.$$

Comme $(1+p^s)^n \neq 1$ si $n \geq 1$, on en déduit que $\beta = 0$, d'où $x'_1 = x'_2$.

Montrons l'existence de x'. Comme S_s^{PD} est complet pour la topologie définie par les idéaux $I^{[n]}$ et comme N_s^{PD} est libre, il suffit de montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un élément $x'_n \in N_s^{PD}$ tel que $g(x'_n) \equiv x'_n \mod I^{[n]}N_s^{PD}$ et $\rho(x'_n) = i^*(x)$. Plus précisément :

SOUS-LEMME. — *S'il existe $x'_n \in N_s^{PD}$ vérifiant*

$$g(x'_n) \equiv x'_n \mod \pi I^{[n]}N_s^{PD},$$

il existe $x'_{n+1} \in N_s^{PD}$ tel que

$$\begin{cases} x'_{n+1} \equiv x'_n & \mod I^{[n+1]}N_s^{PD}, \\ g(x'_{n+1}) \equiv x'_{n+1} & \mod \pi I^{[n+1]}N_s^{PD}. \end{cases}$$

Démonstration. — On peut écrire

$$g(x'_n) \equiv x'_n + \pi\gamma_n\Big(\frac{\pi}{p^s}\Big)y_n \mod \pi I^{[n+1]}N_s^{PD},$$

avec $y_n \in N$, et on cherche x'_{n+1} sous la forme

$$x'_{n+1} = x'_n + \gamma_{n+1}\Big(\frac{\pi}{p^s}\Big)x_n,$$

avec $x_n \in N$. On a alors, modulo $\pi I^{[n+1]}N_s^{PD}$

$$\begin{aligned} g(x'_{n+1}) &\equiv x'_n + \pi\gamma_n\Big(\frac{\pi}{p^s}\Big)y_n + \gamma_{n+1}\Big(\alpha\frac{\pi}{p^s}\Big)g(x_n) \\ &\equiv x'_n + \gamma_{n+1}\Big(\frac{\pi}{p^s}\Big)\big((n+1)p^s y_n + \alpha^{n+1}g(x_n)\big). \end{aligned}$$

Comme $g(x_n) \equiv x_n \mod \pi N$ et $\alpha \equiv 1 + p^s \mod \pi S$:

$$\begin{aligned} \alpha^{n+1}g(x_n) &\equiv (1+p^s)^{n+1}x_n && \mod \pi N \\ &\equiv \big(1+(n+1)p^s v'\big)x_n && \mod \pi N, \end{aligned}$$

où v' est une unité de S, on en déduit que

$$g(x'_{n+1}) \equiv x'_{n+1} \mod \pi I^{[n+1]}N_s^{PD}$$

équivaut à $x_n \equiv -(v')^{-1}y_n$ modulo πN.

Il reste à remarquer que pour $n = 0$, on peut prendre $x'_0 = x$. □

REMARQUE. — On voit que, si N est libre de rang d sur S, $(N_s^{PD})^{\Gamma_s}$ est un W-module libre de rang d et $N_s^{PD} = (N_s^{PD})^{\Gamma_s} \oplus I^{[1]}N_s^{PD}$; par conséquent, tout $x' \in N_s^{PD}$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme

$$x' = \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n\Big(\frac{\pi}{p^s}\Big)x'_n \quad \text{où} \quad g(x'_n) = x'_n.$$

COROLLAIRE. — *Il existe un isomorphisme de W-modules entre Λ et $(N_s^{PD})^{\Gamma_s}$. De plus, si N est muni d'une action de Γ, avec $\Gamma_s \subset \Gamma$ (resp. de φ commutant à Γ_s), l'isomorphisme commute à l'action de Γ (resp. de φ) induite sur Λ et $(N_s^{PD})^{\Gamma_s}$.*

Démonstration. — Le lemme précédent définit une section de l'application ρ, ayant pour image $(N_s^{PD})^{\Gamma_s}$ et induit donc un isomorphisme de W-modules $\Lambda \simeq (N_s^{PD})^{\Gamma_s}$.

Si N est muni d'une action de Γ (resp. de φ), l'action de Γ (resp. de φ) sur Λ est induite par la projection, tandis que celle sur $(N_s^{PD})^{\Gamma_s}$ s'obtient par extension des scalaires. Alors, i^* et ρ commutent à Γ (resp. φ) ; si l'on suppose $\Gamma_s \subset \Gamma$ (resp. φ commutant à Γ_s), $(N_s^{PD})^{\Gamma_s}$ est stable par Γ (resp. par φ) et on en déduit que la section commute à Γ (resp. φ). □

B.1.3. — Si $p \neq 2$, notons :

$$\pi_0 = -p + \sum_{a \in \mathbf{F}_p} [\varepsilon]^{[a]}.$$

Alors (*cf.* [F94, chap. 5]),

$$\begin{cases} \varphi(\pi_0) = u\pi_0 q^{p-1} & \text{où } u \text{ est une unité de } S_0 = W[[\pi_0]] \\ & \qquad\qquad\text{et } q = \pi_0 + p, \\ \gamma(\pi_0) \equiv \chi(\gamma)^{p-1}\pi_0 & \text{modulo } \pi_0^2 \text{ pour } \gamma \in \Gamma_{K_0}. \end{cases}$$

Si $p = 2$, on a $S_0 = W[[\pi_0]]$ avec $\pi_0 = -2 + [\varepsilon] + [\varepsilon]^{-1}$ et

$$\begin{cases} \varphi(\pi_0) = u\pi_0 q^2 & \text{où } u \text{ est une unité de } S_0 \\ & \qquad\qquad\text{et } q = \pi + p = 1 + [\varepsilon], \\ \gamma(\pi_0) \equiv \chi(\gamma)^2\pi_0 & \text{modulo } \pi_0^2 \text{ pour } \gamma \in \Gamma_{K_0}. \end{cases}$$

Rappelons (*cf.* [F94, chap. 5]) que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\gamma_m(\pi_0/p)$ appartient à A_{cris} si $p \neq 2$ (resp. $\gamma_m(\pi_0/8)$ appartient à A_{cris} si $p = 2$). Si $S\langle \pi_0/p \rangle$ (resp. $S\langle \pi_0/8 \rangle$) désigne le sous-S-module, qui est aussi la sous-S-algèbre, de $S[1/p]$ engendré par les $(\gamma_m(\pi_0/p))_{m \in \mathbb{N}}$ (resp. $(\gamma_m(\pi_0/8))_{m \in \mathbb{N}}$), on en déduit un morphisme de $W(R)$-algèbres de $W(R) \otimes_S S\langle \pi_0/p \rangle$ (resp. $W(R) \otimes_S S\langle \pi_0/8 \rangle$) dans A_{cris} qui induit un isomorphisme du séparé complété $W(R)\widehat{\otimes}_S S\langle \pi_0/p \rangle$ (resp. $W(R)\widehat{\otimes}_S S\langle \pi_0/8 \rangle$) de $W(R) \otimes_S S\langle \pi_0/p \rangle$ (resp. $W(R) \otimes_S S\langle \pi_0/8 \rangle$) pour la topologie p-adique sur A_{cris}.

Pour $s \geq 1$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\gamma_m(\pi_0/p) \in S_s^{PD}$ (resp. $\gamma_m(\pi_0/8) \in S_s^{PD}$), d'où un morphisme de $W(R)$-algèbres de $W(R) \otimes_S S\langle \pi_0/p \rangle$ (resp. de $W(R) \otimes_S S\langle \pi_0/8 \rangle$) dans $W(R) \otimes_S S_s^{PD}$ qui s'étend par continuité en un morphisme ν_s de A_{cris} vers $W(R)\widehat{\otimes}_S S_s^{PD}$.

À partir de maintenant, $\varphi^n(x)$ désigne $\underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}(x)$.

LEMME. — *Il existe un et un seul morphisme continu*

$$\psi_s : W(R)\widehat{\otimes}_S S_s^{PD} \longrightarrow A_{\mathrm{cris}}$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} W(R)\widehat{\otimes}_S S_s^{PD} \arrow[rr, "\varphi^s"] \arrow[dr, "\psi_s"'] & & W(R)\widehat{\otimes}_S S_s^{PD} \\ & A_{\mathrm{cris}} \arrow[ur, "\nu_s"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Démonstration.

• Si $p \neq 2$, puisque $\varphi(\pi) = u\pi q$, où u est une unité de S (voir [F94, chap. 5]), on constate que

$$\varphi\Big(\gamma_m\Big(\frac{\pi}{p^s}\Big)\Big) = u^m q^m \gamma_m\Big(\frac{\pi}{p^s}\Big) = u^m p^m \Big(1 + \frac{\pi_0}{p}\Big)^m \gamma_m\Big(\frac{\pi}{p^s}\Big)$$

donc

$$\varphi\Big(\gamma_m\Big(\frac{\pi}{p^s}\Big)\Big) = u^m \Big(1 + \frac{\pi_0}{p}\Big)^m \gamma_m\Big(\frac{\pi}{p^{s-1}}\Big).$$

Si $s \geq 2$, on en déduit que $\varphi(S_s^{PD}) \subset S_{s-1}^{PD}$. Finalement, $\varphi^s(S_s^{PD})$ est contenu dans le séparé complété pour la topologie p-adique de $S[\pi_0/p]$. Comme π_0 est divisible par p dans A_{cris}, on en déduit que l'anneau $\varphi^s(S_s^{PD})$ peut être vu comme une une sous-S-algèbre de A_{cris}. Si x est dans $W(R)$ et y dans S_s^{PD}, on voit qu'on doit avoir

$$\psi_s(x \mathbin{\widehat{\otimes}} y) = \varphi^s(x)\varphi^s(y).$$

Comme $W(R) \otimes_S S_s^{PD}$ est dense dans $W(R) \widehat{\otimes}_S S_s^{PD}$, cela montre l'unicité et l'existence s'en déduit immédiatement.

• Pour $p = 2$, on calcule $\varphi(\gamma_m(\pi/2^s))$ et on montre de manière similaire que $\varphi(\gamma_m(\pi/2^s))$ appartient à S_{s-1}^{PD} si $s \geq 3$ et

$$\varphi^2\big(\gamma_m\big(\tfrac{1}{4}\pi\big)\big) \in A_{\mathrm{cris}} = W(R) \widehat{\otimes}_S S\langle \pi_0/8 \rangle. \quad \square$$

B.1.4. Application aux représentations p-adiques.

Rappelons l'énoncé de la proposition à démontrer.

Proposition 1.

Si V est une représentation p-adique de G_K de hauteur finie et de dimension d telle qu'il existe un entier r et un sous-S-module N libre de rang d de $M = j_*(\mathcal{M})$, où $\mathcal{M} = \mathbf{D}_{\mathcal{E}}^*(V)$, stable par Γ et tel que l'action de Γ soit finie sur $(N/\pi N)(-r)$, alors il existe une extension finie L de K contenue dans K_∞ telle que la représentation de G_L déduite de celle de G_K sur V par restriction soit cristalline.

B.1.4.1. Rappels.

a) Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{E}$-espace vectoriel (resp. un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-module libre) muni d'une action de Γ et d'un Frobenius φ injectif et tel que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\varphi(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, on note $j_*(\mathcal{M})$ la réunion des sous-$S[1/p]$-modules de type fini (resp. des sous-S-modules de type fini) stables par φ; si $\mathcal{M}$ est de dimension finie (resp. de type fini) alors (*cf.* [F91, p. 282]) $j_*(\mathcal{M})$ est un $S[1/p]$-module (resp. S-module) libre de type fini et

$$\mathrm{rang}_{S[1/p]}\, j_*(\mathcal{M}) \leq \dim_{\mathcal{E}} \mathcal{M} \quad \big(\text{resp. } \mathrm{rang}_S\, j_*(\mathcal{M}) \leq \mathrm{rang}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathcal{M}\big).$$

On sait également (*cf.* [F91, p. 293]) que $j_*(W(\mathrm{Fr}\, R))$ est dense dans $A_S^+ = W(R) \cap \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ et si on pose

$$B_S^+ = A_S^+[1/p] = W_{K_0}(R) \cap \widehat{\mathcal{E}}_{nr},$$

on a pour toute représentation p-adique V de G_K

$$j_*\big(\mathbf{D}_{\mathcal{E}}^*(V)\big) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[H_K]}(V, B_S^+).$$

Si T est un $\mathbb{Z}_p$-réseau de V stable par G_K, on a

$$j_*\big(\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}^*(T)\big) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[H_K]}(T, A_S^+)$$

et c'est un réseau de $j_*(\mathbf{D}_{\mathcal{E}}^*(V))$. On voit que V est de hauteur finie si et seulement si

$$\mathrm{rang}_{S[1/p]}\, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[H_K]}(V, B_S^+) = d.$$

De plus, on a $(A_S^+)^\Gamma = W(R) \cap \mathcal{O}_{\mathcal{E}} = S$.

b) *Représentations cristallines* (*cf.* [F79, chap. 3]) : pour toute représentation p-adique V de G_K,

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^*(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V, B_{\mathrm{cris}})$$

est un K_0-espace vectoriel, muni d'une application φ semi-linéaire par rapport à σ (déduite de l'action de φ sur B_{cris}) et

$$K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^*(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V, K \otimes_{K_0} B_{\mathrm{cris}})$$

est muni d'une filtration, déduite de la filtration sur $K \otimes_{K_0} B_{\mathrm{cris}}$. On dispose ainsi d'un foncteur de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ vers la catégorie des modules filtrés sur K (*cf. op. cit*) et on montre que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^*(V)$ est de dimension finie sur K_0, inférieure ou égale à $\dim_{\mathbb{Q}_p} V$; on dit qu'une représentation est *cristalline* si ces deux dimensions sont égales. On note

$$\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p,\mathrm{cris}}(G_K)$$

la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ dont les objets sont les représentations V qui sont cristallines. La catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p,\mathrm{cris}}(G_K)$ est une catégorie stable par sous-objet, somme directe, quotient, produit tensoriel et dualité. La restriction du foncteur $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^*$ à $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p,\mathrm{cris}}(G_K)$, notée toujours $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^*$ est exacte, pleinement fidèle et induit une anti-équivalence entre $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p,\mathrm{cris}}(G_K)$ et son image essentielle.

Remarque. — Si V est une représentation cristalline, alors $V(i)$ est également cristalline.

B.1.4.2. — La proposition à démontrer s'énonce alors ainsi :

PROPOSITION 1′.

Si V est une représentation p-adique de G_K vérifiant les conditions de la proposition 1 ci-dessus, alors il existe une extension finie L de K contenue dans K_∞ telle que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_L]}(V, B^+_{\mathrm{cris}})$$

soit un K_0-espace vectoriel de dimension d.

Démonstration. — Quitte à remplacer V par $V(r)$, on se ramène au cas où l'action de Γ est finie sur $N/\pi N$. On commence par montrer que l'on peut supposer que N est stable par φ ; on montre ensuite que dans ces conditions, φ est injectif sur $N/\pi N$. La proposition se déduit alors de la manière suivante.

Choisissons s suffisamment grand pour que $\Gamma_s \subset \Gamma$ et pour que Γ_s opère trivialement sur $N/\pi N$. Posons $L = (K_\infty)^{\Gamma_s}$, qui est une extension finie de K contenue dans K_∞. On a $H_L = H_K$ et on dispose de la suite exacte :

$$1 \to H_K \longrightarrow G_L \longrightarrow \Gamma_s \to 1.$$

Fixons T un réseau de V stable par G_K et soit

$$N_T = j_*\big(\mathbf{D}^*_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(T)\big) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[H_K]}(T, A^+_S).$$

Quitte à remplacer N par $p^a N$ pour a assez grand, on peut supposer $N \subset N_T$. L'inclusion

$$\begin{aligned} N \subset N_T &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[H_K]}(T, A^+_S) \\ &\subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[H_K]}\big(T, W(R)\big) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}\big(T, W(R)\big) \end{aligned}$$

induit une application injective de $S^{PD}_s \widehat{\otimes}_S N = N^{PD}_s$ vers

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}\big(T, W(R)\big)\widehat{\otimes}_S S^{PD}_s = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}\big(T, W(R)\widehat{\otimes}_S S^{PD}_s\big)$$

qui commute à l'action de G_K et de φ. Comme H_K opère trivialement sur S^{PD}_s, l'image est contenue dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[H_K]}(T, W(R)\widehat{\otimes}_S S^{PD}_s)$. En prenant la partie fixe par Γ_s, on obtient une application injective, commutant à l'action de φ de $(N^{PD}_s)^{\Gamma_s}$ dans

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[H_K]}\big(T, W(R)\widehat{\otimes}_S S^{PD}_s\big)^{\Gamma_s} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_L]}\big(T, W(R)\widehat{\otimes}_S S^{PD}_s\big),$$

d'où (*cf.* remarque b) de B.1.2) une application injective, commutant à l'action de φ,

$$N/\pi N \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_L]}\big(T, W(R)\widehat{\otimes}_S S^{PD}_s\big).$$

En composant avec l'application ψ_s définie en B.1.3, on obtient une application

$$\nu_s : N/\pi N \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_L]}(T, A_{\mathrm{cris}}).$$

On dispose alors du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
N/\pi N \arrow[r] \arrow[dd, "\varphi^s"'] \arrow[dr, "\nu_s"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_L]}\big(T, W(R)\widehat{\otimes}_S S_s^{PD}\big) \arrow[d] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_L]}(T, A_{\mathrm{cris}}) \arrow[d] \\
N/\pi N \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_L]}\big(T, W(R)\widehat{\otimes}_S S_s^{PD}\big).
\end{tikzcd}$$

D'après un lemme ci-dessous (lemme 3), φ^s est injectif sur $N/\pi N$ et ν_s l'est donc aussi ; on en déduit que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_L]}(T, A_{\mathrm{cris}})$ contient un W-module libre de rang d, donc que $\dim_{K_0} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_L]}(V, B^+_{\mathrm{cris}}) = d$, ce qui implique que V est cristalline. $\square$

B.1.5. — Montrons maintenant que l'on peut supposer N stable par φ.

Soit N' le sous-S-module de N_T engendré par les $\varphi^m(x)$ pour $m \in \mathbb{N}$ et $x \in N$. Par construction N' est stable par φ ; il est également stable par Γ, puisque Γ commute à φ et N est muni d'une action de Γ. De plus, si

$$x = \sum_{m\in I} a_m \varphi^m(x_m)$$

appartient à N', où I est un ensemble fini d'entiers, si a_m appartient à S et x_m appartient à N, on a, pour $g \in \Gamma_s$

$$g(x) \equiv x \mod \pi N'.$$

En effet

$$\begin{cases} g(x_m) = x_m + \pi y_m\,, & \text{avec } y_m \in N,\\ g(a_m) = a_m + \pi b_m\,, & \\ \varphi^m(\pi) = \pi \nu_m\,, & \text{avec } b_m \text{ et } \nu_m \in S, \end{cases}$$

d'où, en utilisant le fait que Γ et φ commutent entre eux :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{m\in I} g(a_m) g\big(\varphi^m(x_m)\big)\\ &= \sum_{m\in I} g(a_m)\varphi^m(x_m) + \sum_{m\in I} g(a_m)\pi\nu_m\varphi^m(y_m)\\ &= \sum_{m\in I} a_m\varphi^m(x_m) + \pi\Big(\sum_{m\in I} b_m\varphi^m(x_m) + \sum_{m\in I}\nu_m g(a_m)\varphi^m(y_m)\Big)\\ &\equiv x \mod \pi N'. \end{aligned}$$

LEMME 2. — *Soit $(N')^* = \mathcal{L}_S(N', S)$ le dual de N' dans la catégorie des S-modules. Alors le bidual $(N')^{**}$ de N' est un S-module libre de rang d, stable par φ et par Γ et l'action de Γ_s est triviale sur $N^{**}/\pi N^{**}$.*

Démonstration. — Puisque S est un anneau local régulier de dimension 2 et N' est sans torsion, on sait (*cf.* [S58]) que $(N')^{**}$ est libre. Des inclusions

$$N \subset N' \subset N_T,$$

on déduit les inclusions suivantes :

$$N^{**} \subset (N')^{**} \subset (N_T)^{**}.$$

Comme N et N_T sont libres, on a $N = N^{**}$ et $N_T = N_T^{**}$ (*cf.* [S58]) ; d'autre part, ils sont tous deux des S-modules libres de rang d et on obtient que $(N')^{**}$ est de rang d.

Comme S est contenu dans $W(R)$ et que φ est bijectif sur $W(R)$, on peut poser

$$\varphi^{-1}(S) = S' \subset W(R).$$

Ceci permet de définir une application S-linéaire :

$$\psi : (N')^* \longrightarrow \mathcal{L}_S(N, S')$$

en posant $\psi(u) = \varphi^{-1} \circ u \circ \varphi$. Puisque S' est un S-module libre de rang fini, l'application naturelle

$$S' \otimes_S \mathcal{L}_S(N', S) \to \mathcal{L}(N, S')$$

est un isomorphisme. Ceci permet de munir le bidual $(N')^{**}$ d'une action de φ, en posant $\varphi(v) = \varphi \circ v \circ \psi$ pour $v \in (N')^{**}$.

Comme l'action de Γ est bijective sur N', le module $(N')^*$ est naturellement muni d'une action de Γ. Montrons que l'action de Γ_s est triviale sur $(N')^*/\pi(N')^*$. Sur $(N')^*$, l'action de Γ_s est donnée par :

$$g(u)(x) = g\big(u(g^{-1}(x))\big)$$

si $g \in \Gamma_s$, $x \in N'$ et $u \in (N')^*$. Comme $g^{-1}(x) \equiv x \mod \pi N'$ et u est linéaire, on a $u(g^{-1}(x)) \equiv u(x) \mod \pi S$; de plus, l'action de Γ, *a fortiori* celle de Γ_s, sur S est triviale modulo π et on obtient le résultat souhaité, c'est-à-dire $g(u)(x) \equiv u(x) \mod \pi S$ pour tout $x \in N'$, d'où $g(u) \equiv u \mod \pi(N')^*$. On en déduit que l'action de Γ sur $(N')^{**}$ est triviale modulo π. $\square$

A présent, quitte à remplacer N par $(N')^{**}$, on peut supposer $N \subset N_T$, avec N stable par φ et libre de rang d sur S.

B.1.6. LEMME 3. — *L'application φ est injective sur $N/\pi N$.*

Démonstration. — Puisque N est un S-module libre de rang d, $\overset{d}{\wedge} N$ est un S-module libre de rang 1, muni des actions de φ et de Γ qui se déduisent naturellement de celles sur N ; dire que φ est injectif sur $N/\pi N$ est équivalent à dire que φ est injectif sur $\overset{d}{\wedge} N/\pi \overset{d}{\wedge} N$.

Quitte à remplacer V par $\overset{d}{\wedge}_{\mathbb{Q}_p} V$ et N par $\overset{d}{\underset{S}{\wedge}} N$, on peut supposer que N est un S-module libre de rang 1, soit $N = S \cdot e$. On pose $\varphi(e) = ae$ et $g(e) = be$, où a et b sont dans S et b est inversible. Alors, en utilisant le fait que φ et Γ commutent, on obtient la relation

$$\varphi(b)a = bg(a).$$

Comme b et $\varphi(b)$ sont des unités, l'idéal engendré par a doit être stable par Γ et donc *a fortiori* par Γ_s. Le groupe Γ doit donc permuter les idéaux premiers de hauteur 1 qui contiennent a. Il existe un multiple non nul s' de s tel que $\Gamma_{s'}$ laisse stable les idéaux premiers de hauteur 1 qui contiennent a. Comme $g(e) \equiv e \mod \pi$, on a $b \equiv 1 \mod \pi$ et la relation précédente devient modulo π

$$\frac{g(a)}{a} \equiv \frac{\varphi(b)}{b} \equiv 1.$$

et la fin de la démonstration repose sur le lemme suivant :

SOUS-LEMME. — *Les seuls idéaux premiers de hauteur* 1 *de S stables par Γ_s sont les idéaux engendrés par p, π et $\varphi^m(q)$ pour $m \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. — L'application qui à X associe π induit un isomorphisme de $W[[X]]$ sur S. Les idéaux premiers de l'algèbre d'Iwasawa $W[[X]]$ de hauteur 1 sont bien connus (*cf.* [S58]) : ils sont tous principaux et, en-dehors de l'idéal engendré par p, sont en bijection avec les polynômes irréductibles unitaires à coefficients dans W et distingués (dont tous les coefficients sauf le dominant sont divisibles par p). On est donc ramené à déterminer à quelles conditions l'idéal engendré par $P(\pi)$, où P est un polynôme distingué irréductible, est stable par Γ_s. Soit Q le polynôme défini par $Q(X+1) = P(X)$, de telle sorte que l'on ait

$$P(\pi) = Q\big([\varepsilon]\big) \quad \text{et} \quad g\big(P(\pi)\big) = Q\big([\varepsilon]^{1+p^s}\big),$$

ce qui fait que l'idéal engendré par $P(\pi)$ est stable par Γ_s si et seulement si $P(X) = Q(X+1)$ divise $Q((X+1)^{1+p^s})$ dans $W[[X]]$, et donc aussi dans

$W[X]$ puisque P est un polynôme distingué. Cette condition implique que, si β est une racine de Q, alors β^{1+p^s} est aussi une racine de Q et il existe donc deux entiers r_1 et r_2, avec $r_1 \neq r_2$, tels que $\beta^{r_1(1+p^s)} = \beta^{r_2(1+p^s)}$, ce qui implique que β est soit 0, soit une racine de l'unité. Comme d'autre part P est supposé distingué, on a $v_p(\beta - 1) > 0$ et β est donc une racine de l'unité d'ordre une puissance de p. Ceci implique que Q, supposé irréductible, est un des polynômes cyclotomiques suivants :

1) $Q(X) = X - 1$ et $P(\pi) = [\varepsilon] - 1 = \pi$;

2) il existe $n \geq 0$ tel que l'on ait

$$Q(X) = X^{p^n(p-1)} + X^{p^n(p-2)} + \cdots + X^{p^n} + 1,$$

ce qui nous donne

$$P(\pi) = [\varepsilon]^{p^n(p-1)} + [\varepsilon]^{p^n(p-2)} + \cdots + [\varepsilon]^{p^n} + 1 = \varphi^n(q).$$

Réciproquement, ces polynômes vérifient la condition :

$$Q(X+1) \quad \text{divise} \quad Q\big((X+1)^{1+p^s}\big),$$

ce qui permet de conclure. $\square$

Fin de la démonstration de l'injectivité de φ sur $N/\pi N$.

On peut alors écrire a sous la forme

$$a = up^m\pi^n \prod_{i\in\mathbb{N}} \big(\varphi^i(q)\big)^{r_i}$$

où les r_i sont presque tous nuls et u est une unité de S. Puisque $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \cdot \varphi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_S N) = \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_S N$, nécessairement $m = 0$ et il reste à montrer que $n = 0$. Or

$$\frac{g(q)}{q} \equiv 1 \mod \pi$$

et, par conséquent, pour tout $s \in \mathbb{N}$,

$$\frac{g(\varphi^s(q))}{\varphi^s(q)} \equiv 1 \mod \pi\,;$$

de même , si u est une unité de S,

$$\frac{g(u)}{u} \equiv 1 \mod \pi.$$

On en déduit, si l'on pose $a = \pi^n x$, que $g(x)/x \equiv 1 \mod \pi$; d'autre part, puisque

$$\frac{g(\pi^n)}{\pi^n} \equiv \chi(g)^n \mod \pi,$$

on obtient

$$\frac{g(a)}{a} \equiv \chi(g)^n \mod \pi$$

et comme $\chi(g)$ n'est pas une racine de l'unité, on doit avoir $n = 0$. $\square$

REMARQUE. — Si on ne suppose plus K contenu dans K_∞, on est tenté de généraliser la définition de $S = W(R) \cap \mathcal{O}_E$ en posant

$$S_K = (A_S^+)^{H_K} = \big(W(R) \cap \widehat{\mathcal{E}}_{nr}\big)^{H_K} = W(R)^{H_K} \cap \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}.$$

En fait, on peut montrer que $S_K = S$, ce qui éclaire la dernière remarque de la partie A, à savoir que toute représentation de hauteur finie de G_K s'étend en une représentation de hauteur finie de $G_{K'}$, où K' est le sous-corps de K_∞ fixe par l'image de Γ_K dans Γ_{K_0}.

B.2. Démonstration de 3) implique 5).

B.2.1. — Dans cette partie, il s'agit de montrer le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Si V est une représentation de G_K de hauteur finie de dimension d sur $\mathbb{Q}_p$ et de de Rham, alors la connexion $\nabla_{\widehat{M}}$ définie sur $\widehat{M}[1/t]$, où $M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[H_K]}(V, B_S^+)$ et $\widehat{M} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} M/\pi^n M$, est triviale.*

On rappelle qu'une représentation p-adique V de G_K de dimension finie est dite de *de Rham* si $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V, B_{dR})$ est un espace vectoriel sur K de dimension finie égale à la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$.

B.2.2. Résultats sur B_{dR}^+.

Si D est un K_0-espace vectoriel muni d'une action de Γ, on note D_{fini} la réunion des sous-K_0-espaces vectoriels de dimension finie de D stables par Γ.

PROPOSITION 1.

On a :

$$\big(B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+\big)_{\text{fini}}^{H_{K_0}} = K_\infty[t]/t^n.$$

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur l'entier n.

• Le cas $n = 1$ est un résultat de S. Sen (*cf.* [Se]) : en effet, on a $B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^1 B_{dR}^+ = \mathbb{C}$ et S. Sen montre que $\mathbb{C}_{\text{fini}}^{H_K} = K_\infty$.

Si $n \geq 1$, on a $\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^{n+1} B_{dR}^+ = \mathbb{C}t^n$ et on en déduit que

$$(\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^{n+1} B_{dR}^+)_{\text{fini}}^{H_K} = K_\infty t^n.$$

• Soit $n \geq 1$; de la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Fil}^n B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^{n+1} B_{dR}^+ \longrightarrow B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^{n+1} B_{dR}^+ \longrightarrow B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+ \to 0$$

on déduit l'exactitude de

$$0 \to (\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^{n+1} B_{dR}^+)^{H_{K_0}} \longrightarrow (B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^{n+1} B_{dR}^+)^{H_{K_0}} \longrightarrow (B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+)^{H_{K_0}}.$$

On suppose donc que

$$(B_{dR}^{+}/\operatorname{Fil}^{n} B_{dR}^{+})_{\text{fini}}^{H_{K_0}} = K_{\infty}[t]/t^{n}\ ;$$

si v appartient à D, sous-K-espace vectoriel de dimension finie stable par Γ de $(B_{dR}^{+}/\operatorname{Fil}^{n+1} B_{dR}^{+})^{H_{K_0}}$, son image $\bar{v}$ modulo $\operatorname{Fil}^{n} B_{dR}^{+}$ est un élément de $K_{\infty}[t]/t^{n}$; par la surjectivité de la projection

$$K_{\infty}[t]/t^{n+1} \longrightarrow K_{\infty}[t]/t^{n}$$

on peut relever v en un élément v_1 de $K_{\infty}[t]/t^{n+1}$. Alors

$$v - v_1 \in (\operatorname{Fil}^{n} B_{dR}^{+}/\operatorname{Fil}^{n+1} B_{dR}^{+})_{\text{fini}}^{H_{K_0}} = K_{\infty}t^{n}$$

et par conséquent v est dans $K_{\infty}[t]/t^{n+1}$. $\square$

B.2.3. Application aux représentations de de Rham.

PROPOSITION 2. — *Soient V une représentation de de Rham de dimension d et $n \in \mathbb{N}$; alors*

$$\Delta_n(V) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_p[H_K]}(V, B_{dR}^{+}/\operatorname{Fil}^{n} B_{dR}^{+})_{\text{fini}}$$

est un $K_{\infty}[t]/t^{n}$-module libre de rang d et il existe une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de $\Delta_n(V)$ et des entiers r_i tels que $g(e_i) = \chi^{-r_i}(g)e_i$ pour $1 \leq i \leq d$.

Démonstration. — L'espace $D = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V, B_{dR})$ est un K-espace vectoriel de dimension finie d muni d'une filtration décroissante et l'application naturelle

$$B_{dR} \otimes_K D \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, B_{dR})$$

est un isomorphisme de B_{dR}-modules filtrés. Soit $(u_1, \ldots, u_d)$ une base de D adaptée à la filtration, c'est-à-dire telle que, si on note r_i le plus grand entier tel que $u_i \in \operatorname{Fil}^{r_i} D$, alors

$$\operatorname{Fil}^{r} D = \bigoplus_{r_i \geq r} K u_i.$$

On voit que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, B_{dR}^{+})$ est le B_{dR}^{+}-module libre de base les $t^{-r_i}u_i$; si

$$e_i : V \longrightarrow B_{dR}^{+}/\operatorname{Fil}^{n} B_{dR}^{+}$$

désigne le composé de $t^{-r_i}u_i$ avec la projection de B_{dR}^{+} sur $B_{dR}^{+}/\operatorname{Fil}^{n} B_{dR}^{+}$, alors $(e_1, \ldots, e_d)$ est une base de $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, B_{dR}^{+}/\operatorname{Fil}^{n} B_{dR}^{+})$ qui vérifie

$$g(e_i) = \chi^{-r_i}(g)e_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq d.$$

Le sous-$(B_{dR}^{+}/\operatorname{Fil}^{n} B_{dR}^{+})$-module libre de rang 1 de

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, B_{dR}^{+}/\operatorname{Fil}^{n} B_{dR}^{+})$$

de base e_i pour chaque i est stable par H_K et l'assertion résulte de la proposition précédente. $\square$

REMARQUE. — Il est facile de voir que si V est une représentation p-adique de G_K de dimension finie d, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[H_K]}\big(V, B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+\big)_{\mathrm{fini}}$$

est un $K_\infty[t]/t^n$-module libre de rang d, même si V n'est pas de de Rham. Pour $n = 1$, c'est un résultat de S. Sen (*cf.* [Se]) et le cas général s'en déduit par la même technique que celle utilisée dans la proposition 1 ci-dessus.

B.2.4. — L'inclusion $W_{K_0}(R) \subset B_{dR}^+$ et l'existence du Frobenius sur $W_{K_0}(R)$ permettent de définir des applications I_n, pour n entier, de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} I_n : W_{K_0}(R) & \longrightarrow & \big(W_{K_0}(R)\big)^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & (B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+)^{\mathbb{N}} \\ a & \longmapsto & \big(a, \varphi(a), \ldots, \varphi^m(a), \ldots\big) & & \\ & & (a_0, a_1, \ldots, a_m, \ldots) & \longmapsto & \big(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m, \ldots\big) \end{array}$$

où $\bar{a}$ désigne l'image de a dans $B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+$.

LEMME. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le noyau de l'application*

$$I_n : W_{K_0}(R) \to (B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+)^{\mathbb{N}}$$

définie ci-dessus est l'idéal engendré par π^n. La restriction de I_n à B_S^+ définit une application injective, toujours notée I_n,

$$B_S^+/\pi^n B_S^+ \to (B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+)^{\mathbb{N}}.$$

Démonstration. — Le noyau de I_n dans $W_{K_0}(R)$ est connu (*cf.* [F94, chap. 5]) ; en effet :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} I_n &= \big\{x \in W_{K_0}(R) \text{ tel que } \varphi^m(x) \in \operatorname{Fil}^n W_{K_0}(R) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour tout } m \in N\big\} \\ &= \pi^n W_{K_0}(R). \end{aligned}$$

Le noyau de la restriction à B_S^+ est donc

$$\operatorname{Ker} I_n = \big(\pi^n W_{K_0}(R)\big) \cap B_S^+ = \big(\pi^n W_{K_0}(R)\big) \cap \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} = \pi^n B_S^+$$

puisque π est inversible dans $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$, d'où l'injectivité de I_n. $\square$

B.2.5. Reprenons les hypothèses de B.2.1.

PROPOSITION 3. — *Il existe $s \in \mathbb{N}$, des entiers $r'_i \in \mathbb{Z}$ pour $1 \leq i \leq d$ et une base $(\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_d)$ du $K_\infty[[t]]$-module libre $\widehat{M}$ tels que $\Gamma_s \subset \Gamma$ et $g(\hat{c}_i) = \chi^{-r'_i}(g)\hat{c}_i$ pour $g \in \Gamma_s$ et $1 \leq i \leq d$.*

Démonstration. — Soient r_i, pour $1 \leq i \leq d$ des entiers et $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de $\Delta_n(V)$ comme dans la proposition B.2.3.; choisissons un entier $n > r_i - r_j$, pour i et $j = 1, \ldots, d$. On a

$$M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[H_K]}(V, B_S^+)$$

et on voit que $M/\pi^n M$ s'injecte dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[H_K]}(V, B_S^+/\pi^n B_S^+)$. Comme M est un $S[1/p]$-module libre de rang d, $M/\pi^n M$ est un module libre de rang d sur

$$S[1/p]/\pi^n S[1/p] = K_0[t]/t^n \quad ;$$

en particulier, c'est un K_0-espace vectoriel de dimension finie. L'injection de $B_S^+/\pi^n B_S^+$ dans $(B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+)^{\mathbb{N}}$ définie au numéro précédent induit une injection de $M/\pi^n M$ dans $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[H_K]}(V, B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+))^{\mathbb{N}}$. Comme $\dim_{K_0} M/\pi^n M$ est finie, si l'on choisit α suffisamment grand, on dispose d'une application injective

$$\rho : M/\pi^n M \longrightarrow \left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[H_K]}(V, B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+)\right)^\alpha$$

qui est $K_0[t]/t^n$-linéaire et commute à l'action de Γ. Par la finitude de $\dim_{K_0} M/\pi^n M$, l'image de ρ est contenue dans

$$\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[H_K]}(V, B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+)\right)^\alpha_{\text{fini}} = \left(\bigoplus K_\infty[t]/t^n e_i\right)^\alpha.$$

Toujours en raison de la finitude de $\dim_{K_0} M/\pi^n M$, il existe un entier s tel que l'image de ρ soit contenue dans $\left(\bigoplus K_s[t]/t^n e_i\right)^\alpha$ et on peut choisir s suffisamment grand pour que $K \subset K_s$ et $\Gamma_s \subset \Gamma$. Si $m = [K_s : K]$, on voit que $M/\pi^n M$ s'identifie à un sous-$(K_0[t]/t^n)$-module libre de rang d stable par Γ_s de

$$\left(\bigoplus K_s[t]/t^n e_i\right)^\alpha \simeq \left(\bigoplus K_0[t]/t^n e_i\right)^{\alpha m}$$

et on en déduit facilement qu'il existe des entiers r'_i, pour $1 \leq i \leq d$, appartenant à l'ensemble des valeurs prises par les r_i, et une base $(c_1, \ldots, c_d)$ de $M/\pi^n M$ sur $K_0[t]/t^n$ tels que, pour $1 \leq i \leq d$, $g(c_i) = \chi^{-r'_i}(g)c_i$ si $g \in \Gamma_s$. La proposition se déduit alors immédiatement du lemme suivant :

LEMME. — *Soient m un entier $\geq n$ et $(c'_1, \ldots, c'_d)$ une base de $M/\pi^m M$ sur $K_0[t]/t^m$ telle que $g(c'_i) = \chi^{-r'_i}(g)c'_i$ pour $g \in \Gamma_s$; alors il existe une base $(c''_1, \ldots, c''_d)$ de $M/\pi^{m+1}M$ sur $K_0[t]/t^{m+1}$ relevant la base $(c'_1, \ldots, c'_d)$ telle que pour $1 \leq i \leq d$, $g(c''_i) = \chi^{-r'_i}(g)c''_i$ pour $g \in \Gamma_s$.*

Démonstration. — Choisissons $(f_1, \ldots, f_d)$ une base de $M/\pi^{m+1}M$ relevant la base $(c''_1, \ldots, c''_d)$; alors, pour $1 \leq j \leq d$,

$$g(f_j) = \chi^{-r'_j}(g)f_j + t^m \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} f_i$$

où les a_{ij} sont dans K_0. On recherche c''_j sous la forme

$$c''_j = f_j + t^m \sum_{1 \leq i \leq d} x_{ij} f_i,$$

où les x_{ij} sont dans K_0. Calculons $g(c''_j)$ pour $1 \leq j \leq d$ (on rappelle que l'on s'est placé dans $M/\pi^{m+1}M$ et que toutes les égalités sont par conséquent des égalités modulo π^{m+1}) :

$$\begin{aligned} g(c''_j) &= g\Big(f_j + t^m \sum_{1 \leq i \leq d} x_{ij} f_i\Big) \\ &= \chi^{-r'_j}(g)f_j + t^m \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} f_i + \chi(g)^m t^m \sum_{1 \leq i \leq d} x_{ij}\chi^{-r'_i}(g) f_i \end{aligned}$$

et on cherche à avoir

$$g(c''_j) = \chi^{-r'_j}(g)c''_j = \chi^{-r'_j}(g)\Big(f_j + t^m \sum_{1 \leq i \leq d} x_{ij}(g) f_i\Big),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{1 \leq i \leq d} \big(a_{ij} + x_{ij}\chi^{m-r'_i}(g)\big) f_i = \sum_{1 \leq i \leq d} x_{ij}\chi^{-r'_j}(g) f_i \,;$$

autrement dit, pour i, $j = 1, \ldots, d$:

$$\big(\chi^{m-r'_i}(g) - \chi^{-r'_j}(g)\big)x_{ij} = a_{ij}.$$

Comme $m > r'_i - r'_j$ pour i et j tels que $1 \leq i, j \leq d$, on a

$$\chi^{m-r'_i}(g) - \chi^{-r'_j}(g) \neq 0$$

et c'est un élément inversible de K_0, d'où le lemme. $\square$

Fin de la démonstration.

La connexion $\nabla_{\widehat{M}}$ est triviale, car les $t^{r'_i}\hat{c}_i$ forment une base de $\widehat{M}[1/t]$ qui est dans $\operatorname{Ker}\nabla_{\widehat{M}}$. $\square$

B.3. Démonstration de 5) implique 4).

Les notations sont les mêmes que dans le paragraphe précédent.

PROPOSITION. — *Si V est une représentation de hauteur finie et si la connexion $\nabla_{\widehat{M}}$ est triviale, alors il existe un entier r et un S-module N libre de rang d inclus dans $M = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_p[H_K]}(V, B_S^+)$ stable par Γ tel que l'action de Γ soit finie sur $(N/\pi N)(-r)$.*

Démonstration. — Comme la connexion est triviale, $\operatorname{Ker}\nabla_{\widehat{M}}$ est un K_0-espace vectoriel de dimension d, muni d'une action de Γ finie et

$$K_0((t)) \otimes_{K_0} \operatorname{Ker}\nabla_{\widehat{M}} = \widehat{M}[1/t].$$

Soit Λ un W-réseau de $\operatorname{Ker}\nabla_{\widehat{M}}$, stable par Γ ; alors

$$K_0((t)) \otimes_W \Lambda = \widehat{M}[1/t]$$

et il existe un entier r tel que l'image $\widehat{N}$ de $t^r W[[t]] \otimes_W \Lambda$ soit contenue dans $\widehat{M}$; de plus, comme l'action de Γ est finie sur $\operatorname{Ker}\nabla_{\widehat{M}}$ et donc sur Λ, on voit que l'action de Γ est également finie sur $(\widehat{N}/t\widehat{N})(-r)$ et sur $(\widehat{N}[1/p]/t\widehat{N}[1/p])(-r)$. Il reste à montrer qu'il existe un S-module N libre de rang d contenu dans M tel que $N/\pi N = \widehat{N}/t\widehat{N}$.

Considérons $N = \widehat{N} \cap M$; comme M est libre sur $S[1/p]$ et $S[1/p]$ est un anneau principal, $N[1/p]$ est un module libre. Il existe un entier m tel que

$$t^m\widehat{M} \subset \widehat{N[1/p]} \subset \widehat{M}$$

et t et π sont congrus modulo une unité de $K_0[[t]] = K_0[[\pi]]$. On en déduit $\pi^m M = t^m\widehat{M} \cap M$, d'où

$$\pi^m M \subset N[1/p] \subset M$$

et le fait que $N[1/p]$ et N sont de rang d. Comme $\pi N = t\widehat{N} \cap N$, l'application

$$N/\pi N \longrightarrow \widehat{N}/t\widehat{N}$$

est injective, ce qui implique que l'action de Γ sur $(N/\pi N)(-r)$ est finie et permet de conclure. $\square$

REMARQUES.

a) On voit que $\operatorname{Ker} \nabla_{\widehat{M}}$ engendre $t^{-r}\widehat{N}$ et on a un isomorphisme compatible avec l'action de Γ :

$$\operatorname{Ker} \nabla_{\widehat{M}} \simeq t^{-r}\widehat{N}/t^{-r+1}\widehat{N} \simeq (\widehat{N}/t\widehat{N})(-r) = (N/\pi N)(-r).$$

Ainsi si V est cristalline en tant que représentation de G_L, on a vu en B.1 que l'action de G_L sur $(N/\pi N)(-r)$ est triviale et, par conséquent elle est également triviale sur $\operatorname{Ker} \nabla_{\widehat{M}}$.

Réciproquement, si l'action de G_L est triviale sur $\operatorname{Ker} \nabla_{\widehat{M}}$, elle l'est sur $(N/\pi N)(-r)$ et la démonstration de 1) $\Rightarrow$ 2) implique que V est une représentation cristalline de G_L.

b) Dans la démonstration ci-dessus, r est choisi arbitrairement tel que l'image $\widehat{N}$ de $t^r W[[t]] \otimes_W \Lambda$ soit contenue dans $\widehat{M}$; si r est remplacé par r' et N' est l'image de $t^{r'} W[[t]] \otimes_W \Lambda$ dans $\widehat{M}$, alors on a toujours,

$$\operatorname{Ker} \nabla_{\widehat{M}} = (\widehat{N}'/t\widehat{N}')(-r') = (\widehat{N}/t\widehat{N})(-r).$$

BIBLIOGRAPHIE

[F79] FONTAINE (J.-M.). — Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, *Journées arithmétiques de Rennes III*, Astérisque, t. **65**, 1979, p. 3–80.

[F82] FONTAINE (J.-M.). — *Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate*, Ann. of Math., t. **115**, 1982, p. 529–577.

[F91] FONTAINE (J.-M.). — Représentations p-adiques des corps locaux, *The Grothendieck Festschrift, vol. II.* — Birkhäuser, Boston, 1991, p. 249–309.

[F94] FONTAINE (J.-M.). — *Le corps des périodes p-adiques, exposé II, séminaire I.H.E.S 1988*, Astérisque, t. **223**, 1994, p. 59–111.

[F-I] FONTAINE (J.-M.) et ILLUSIE (L.). — p-adic periods : a survey, exposé Bombay 1989, *Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry*, NBHM Hindustan Book Agency, Delhi, 1993, p. 57–93.

[F-L] FONTAINE (J.-M.) et LAFFAILLE (G.). — *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. École Normale Sup., t. **15**, 1982, p. 547–608.

[Se] SEN (S.). — *Continuous cohomology and p-adic Galois representations*, Inv. Math., t. **62**, 1980, p. 89–116.

[S58] SERRE (J.-P.). — *Classes des corps cyclotomiques, d'après Iwasawa.* — Séminaire Bourbaki, 1958.

[S68] SERRE (J.-P.). — *Corps locaux*, 2e éd. — Hermann, Paris, 1968.

[Wa] WACH (N.). — *Représentations de torsion*, à paraître dans Compositio Math.

[W] WINTENBERGER (J.-P.). — *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications*, Ann. Scient. École Normale Sup., t. **16**, 4e série, 1983, p. 59–89.