BULLETIN DE LA S. M. F.

DOMINIQUE HULIN

Sous-variétés complexes d'Einstein de l'espace projectif

Bulletin de la S. M. F., tome 124, nº 2 (1996), p. 277-298
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_2_277_0>

Bull. Soc. math. France,
124, 1996, p. 277–298.

SOUS-VARIÉTÉS COMPLEXES D'EINSTEIN DE L'ESPACE PROJECTIF

PAR

DOMINIQUE HULIN (*)

RÉSUMÉ. — On montre qu'un germe de sous-variété complexe $M \subset (\mathbb{C}\mathrm{P}^N, \mathrm{can})$ qui est d'Einstein pour la métrique induite s'étend en une sous-variété complexe complète de $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$. On en déduit en particulier que la constante d'Einstein de M est rationnelle.

ABSTRACT. — We prove that any complex submanifold M of the complex projective space $(\mathbb{C}\mathrm{P}^N, \mathrm{can})$, which is Einstein for the induced metric, extends to a complete complex submanifold of $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$. In particular, the Einstein constant of M is a rational number.

0. Introduction

On s'intéresse ici aux sous-variétés riemanniennes complexes V^n (où n est ≥ 2) de l'espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ qui sont d'Einstein pour la métrique induite ($\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ sera muni de la métrique de Fubini-Study à courbure sectionnelle holomorphe constante 4). Les exemples connus jusqu'ici sont tous des espaces homogènes complexes. Ces exemples homogènes complexes, ainsi que leurs réalisations isométriques dans les espaces projectifs, sont classés dans [Se], ou [Ta] : ce sont des variétés drapeaux (donc à première classe de Chern positive), et les immersions sont fournies par les plongements plurianticanoniques.

À ce jour on ne dispose cependant, pour les sous-variétés Kähler-Einstein de l'espace projectif, que des résultats de classification partiels suivants. Brian Smyth [S] a d'abord décrit les hypersurfaces complètes et simplement connexes. Son résultat a ensuite été étendu par S.S. Chern [Ch]

(*) Texte reçu le 28 décembre 1994, révisé le 27 juillet 1995.

D. HULIN, *Centre de Mathématiques, URA CNRS 169, École Polytechnique, 91128* Palaiseau CEDEX (France).
Email : hulin@orphee.polytechnique.fr.

Classification AMS : 53C25, 53C55.

aux hypersurfaces ouvertes, par Y. Matsuyama [Ma] puis K. Tsukada [Ts] en codimension 2, et par J. Hano [Ha] aux sous-variétés qui sont des intersections complètes.

Nous montrons dans cet article qu'un germe de sous-variété complexe de $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ qui est d'Einstein pour la métrique induite est germe d'une variété kählérienne analytique complète. Le résultat principal est le :

THÉORÈME. — *Une sous-variété riemannienne complexe d'Einstein* $V^n \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^N$ (*avec* $n \geq 2$) *se réalise comme ouvert d'une* (*unique*) *variété kählérienne analytique complète* M^n, *immergée isométriquement sans points doubles dans* $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ (*en tant que sous-variété complexe*). *De plus la constante d'Einstein est rationnelle. Si cette constante est non négative,* M *est compacte.*

Nos résultats sont obtenus en utilisant la notion de diastase introduite par E. Calabi pour étudier le problème de l'immersion isométrique complexe (locale ou globale) des variétés kählériennes dans les espaces à courbure sectionnelle holomorphe constante $\mathbb{C}\mathrm{P}^N_{\pm}$ et $\mathbb{C}^N$ (voir [Ca]). Signalons que M. Umehara avait également utilisé la diastase pour montrer que les sous-variétés complexes d'Einstein de $\mathbb{C}\mathrm{P}^N_{-}$ et de $\mathbb{C}^N$ sont totalement géodésiques (voir [U]).

La définition de la diastase, et les principaux résultats de [Ca] sont brièvement rappelés dans le paragraphe 1. En 2, on introduit les coordonnées de Bochner [Bo]. On décrit en 3 l'application de Gauss d'une sous-variété complexe de l'espace projectif. Le théorème principal est démontré dans les paragraphes 4 à 6. On montre alors en 7 que les constantes d'Einstein positives réalisées par des sous-variétés de dimension n fixée forment un sous-ensemble discret de $]0, n+1]$. Enfin, on donne en 8 une courte preuve du résultat de classification en codimension 2 évoqué cidessus.

1. Immersions isométriques de variétés complexes

Le matériel présenté dans cette section est tiré de [Ca]. On renvoie à cet article pour plus de détails, et d'autres résultats.

Soient (V, g) une variété kählérienne analytique et ω sa forme de Kähler. Au voisinage de tout point $p \in V$, il existe un potentiel de Kähler pour g, *i.e.* une fonction réelle analytique Φ, à valeurs réelles, pour laquelle $\omega = \frac{1}{2} i\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\Phi$. Dans tout système de coordonnées complexes (z) autour de p, on aura :

$$g_{\alpha\bar{\beta}} := 2g\Big(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\Big) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}.$$

Le potentiel Φ est déterminé à $\phi(z) + \overline{\phi(z)}$ près, où ϕ est holomorphe au voisinage de p. En découplant les variables z et $\bar{z}$, on peut étendre Φ en une fonction analytique complexe $\widehat{\Phi}$ définie sur un voisinage U de la diagonale autour de $(p, \bar{p})$ dans $V \times \overline{V}$ (on a noté $\overline{V}$ la variété conjuguée de V).

PROPOSITION-DÉFINITION 1.1. — *Pour tout $p \in V$, il existe un unique potentiel D_p autour de p (la* diastase *de V en p), pour lequel*

$$\widehat{D}_p(q_1, \bar{q}_2) = \mathcal{O}\big(|p - q_1|\big)\mathcal{O}\big(|\bar{p} - \bar{q}_2|\big).$$

Si Φ est un potentiel quelconque autour de p, on obtient D_p par

$$D_p(q) = \widehat{\Phi}(q, \bar{q}) + \widehat{\Phi}(p, \bar{p}) - \widehat{\Phi}(p, \bar{q}) - \widehat{\Phi}(q, \bar{p}).$$

Parmi les potentiels, la diastase est caractérisée par le fait que, dans tout système de coordonnées complexes (z) centré en p,

$$D_p(z, \bar{z}) = \sum_{i,j} a_{i,j} z^i \bar{z}^j,$$

avec $a_{i,0} = a_{0,i} = 0$ pour tout multiindice i.

C'est la remarque suivante qui fait l'intérêt de la diastase dans les problèmes d'immersions isométriques complexes.

PROPOSITION 1.2. — *La diastase en $p \in W$ d'une sous-variété complexe $W \subset V$ est obtenue par restriction à W de celle de la variété ambiante V.*

EXEMPLES 1.3.

(i) La diastase dans $\mathbb{C}^N$ est le carré de la distance géodésique :

$$D_p(q) = |p - q|^2.$$

(ii) La diastase de $\mathbb{C}\mathrm{P}_b^N$, l'espace projectif complexe à courbure sectionnelle holomorphe constante $4b$ est donnée dans de « bonnes » coordonnées (voir § 2) par

$$D(z) = \frac{1}{b} \log\big(1 + b|z|^2\big) \qquad (b \neq 0).$$

(iii) La diastase de la quadrique $\mathcal{Q}^N$ d'équation homogène

$$Z_0^2 + \cdots + Z_{N+1}^2 = 0$$

dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^{N+1}$ s'écrit dans un système de coordonnées idoine :

$$D(z) = \log\Big(1 + |z|^2 + \tfrac{1}{4}\Big|\sum_{\alpha=1}^{N} z_\alpha^2\Big|^2\Big).$$

D'après 1.2 et 1.3, lorsqu'un plongement isométrique complexe

$$h : V \hookrightarrow \mathbb{C}^N$$

est donné au voisinage de $p \in V$ par $h = (h_1, \dots, h_N)$ avec $h(p) = 0$, on a :

$$D_p(q) = \sum_{\sigma=1}^{N} \big|h_\sigma(q)\big|^2. \tag{1.4}$$

Ceci suggère la définition suivante (équivalente à celle de [Ca]).

DÉFINITION 1.5. — Une variété kählérienne analytique V est dite *résoluble de rang* (au plus) N en $p \in V$ si, formellement, on a :

$$D_p(q) = \sum_{\sigma=1}^{N} \big|h_\sigma(q)\big|^2,$$

où les h_σ sont des séries formelles en q.

Nous pouvons maintenant énoncer le critère de Calabi.

THÉORÈME 1.6 (voir [Ca, §§ 3.3 et 3.4]). — *Soit V une variété kählérienne analytique.*

(i) *Si V est résoluble de rang N en un point p, elle l'est en tout autre point.*

(ii) *La variété V peut être localement plongée dans $\mathbb{C}^N$ au voisinage de p si et seulement si V est résoluble de rang N en p.*

Esquisse de preuve.

Partie (i) : c'est une conséquence de (ii).

Partie (ii) : la condition est nécessaire (1.4). Lorsqu'elle est satisfaite, on peut assurer la convergence des séries formelles h_σ sur le domaine de convergence de la série associée à D_p ; l'application $(h_1, \dots, h_N)$ fournit alors le plongement isométrique cherché. □

Ce critère est assorti d'un résultat de rigidité locale.

THÉORÈME 1.7 (voir [Ca, § 3.2]). — *Soit $i : V \hookrightarrow \mathbb{C}^N$ une immersion complexe isométrique et pleine (i.e. l'image n'est contenue dans aucun hyperplan) d'une variété kählérienne (V, g). Alors N est déterminé par la métrique g, et deux telles immersions sont congruentes sous $U(N)$.*

On s'intéresse maintenant aux plongements isométriques dans les espaces $\mathbb{C}\mathrm{P}_b^N$ (où $b \neq 0$).

Soient $p \in \mathbb{C}\mathrm{P}_b^N$ et $\mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(p)$ l'hyperplan à l'infini de p (qui est vide pour $b < 0$). Si l'on remplace la diastase D_p de $\mathbb{C}\mathrm{P}_b^N$ par

$$\widetilde{D}_p = \frac{1}{b}(\mathrm{e}^{bD_p} - 1),$$

on constate que dans le «bon» système de coordonnées (z) mentionné en (1.3), on obtient $\widetilde{D}_p = |z|^2$. Autrement dit, si $\tilde{g}_p$ est la métrique définie sur $\mathbb{C}\mathrm{P}_b^N \setminus \mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(p)$ par le potentiel $\widetilde{D}_p$, l'application carte

$$\big(\mathbb{C}\mathrm{P}_b^N \setminus \mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(p), \tilde{g}_p\big) \xrightarrow{(z)} (\mathbb{C}^N, \mathrm{can})$$

est une isométrie. Puisque nous savons (1.2) que la diastase s'induit aux sous-variétés, la transformation

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} : \big(\mathbb{C}\mathrm{P}_b^N \setminus \mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(p), \mathrm{can}_b\big) &\longrightarrow \big(\mathbb{C}\mathrm{P}_b^N \setminus \mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(p), \tilde{g}_p\big) \simeq (\mathbb{C}^N, \mathrm{can}) \\ D_p &\longmapsto \widetilde{D}_p \end{aligned}$$

permet de ramener un problème d'immersion isométrique dans l'espace $\mathbb{C}\mathrm{P}_b^N$ à un problème d'immersion isométrique dans $\mathbb{C}^N$. On obtient alors comme corollaire immédiat de 1.6 et 1.7 :

THÉORÈME 1.8 (voir [Ca, §§ 4.8 et 4.9]). — *On fixe $b \neq 0$.*

(i) *Soient V une variété kählérienne analytique, $p \in V$ et D la diastase de V en p. La variété V peut être localement plongée au voisinage de p dans $\mathbb{C}\mathrm{P}_b^N$ si et seulement si la diastase modifiée $\widetilde{D} = b^{-1}(\mathrm{e}^{bD} - 1)$ est résoluble de rang au plus N.*

(ii) *Soit $i : V \hookrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}_b^N$ une immersion complexe isométrique et pleine (i.e. l'image n'est contenue dans aucun hyperplan projectif) d'une variété kählérienne (V, g). Alors N est déterminé par la métrique g et la constante b, et deux telles immersions sont congruentes sous le groupe des isométries de $\mathbb{C}\mathrm{P}_b^N$.*

2. Les coordonnées Bochner

Au voisinage de chaque point d'une variété kählérienne analytique, il existe une carte complexe privilégiée, substitut complexe de la carte exponentielle.

PROPOSITION-DÉFINITION 2.1 (voir [Bo]). — *Soient* (V^n, g) *une variété kählérienne analytique et* D *la diastase relative à* $p \in V$. *Il existe une unique carte complexe (maximale) centrée en* p *(appelée* carte Bochner)

$$\beta : U \subset T_pV \longrightarrow V$$

où U *est un ouvert de* (T_pV, g_p), *dans laquelle l'extension* $\widehat{D}$ *de* D *à* $V \times \overline{V}$ *vérifie :*

$$\widehat{D}(X, \overline{Y}) = g_p(X, Y) + \mathcal{O}\big(|X|_p^2\big)\mathcal{O}\big(|Y|_p^2\big) \qquad (X, Y \in T_pV).$$

Un choix de repère unitaire de T_pV fournira un système de coordonnées complexes centré en p (les *coordonnées Bochner*, uniques à l'action de $U(n)$ près), dans lesquelles

$$D(z) = |z|^2 + \Psi(z, \bar{z}),$$

où les valuations partielles de Ψ relatives à z et $\bar{z}$ sont au moins 2.

NOTA. — Dans de telles coordonnées, les coefficients du développement de Taylor de la diastase en p sont des polynômes universels (non uniques) en les composantes du tenseur de courbure complexe et ses dérivées covariantes en p.

Les coordonnées Bochner pour $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ en $p = \mathbb{C}e_0$ sont les coordonnées homogènes $[1, z_1, \ldots, z_N]$ relatives à un repère unitaire $(e_0, \ldots, e_N)$ de $\mathbb{C}^{N+1}$.

2.2. Fixons maintenant quelques notations qui seront utilisées par la suite.

Soient $(V^n, g) \hookrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^N$ une immersion isométrique complexe d'une variété kählérienne (de codimension $r = N - n$), et $p \in V$. On choisit des repères unitaires $(v_1, \ldots, v_n)$ et $(\nu_1, \ldots, \nu_r)$ pour les espaces T_pV et N_pV (tangent et normal à V en p), ou encore un repère unitaire $(e_0, \ldots, e_N)$ de $\mathbb{C}^{N+1}$ tel que, dans les coordonnées homogènes correspondantes pour $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$, l'immersion soit décrite au voisinage de p par un graphe

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \longmapsto \big[1, z, f(z)\big] = \big[1, z_1, \ldots, z_n, f_1(z), \ldots, f_r(z)\big],$$

où z est le système de coordonnées Bochner associé au repère choisi pour T_pV, et les fonctions f_j sont analytiques au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ (et nulles à l'ordre 2 en ce point). La diastase en p de (V, g) s'écrit alors :

$$D(z) = \log\Big(1 + \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 + \sum_{j=1}^{r} \big|f_j(z)\big|^2\Big) = \log\big(1 + |z|^2 + |f|^2\big).$$

Notons Q_j la partie homogène de degré 2 de f_j pour $1 \leq j \leq r$. Si s désigne la seconde forme fondamentale de V en p, on aura :

$$Q_j(X, X) = \tfrac{1}{2}\big\langle s(X, X), \nu_j\big\rangle.$$

LEMME 2.3. — *La courbure de Ricci de g en p vérifie pour $z \in T_pV \simeq \mathbb{C}^n$:*

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{Ric}(z, z) = (n+1)|z|^2 - \sum_{i,j}\big|\partial_i Q_j(z)\big|^2.$$

Preuve. — La forme de Ricci ρ de (V, g) est donnée par

$$\rho = -i\, \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \log\det(g_{\alpha\bar\beta}) = -i\, \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \log\det\Big(\frac{\partial^2 D}{\partial z_\alpha \partial \bar z_\beta}\Big)$$

et l'on conclut en constatant que

$$\det(g_{\alpha\bar\beta}) = 1 - (n+1)|z|^2 + \sum_{i,j}\big|\partial_i Q_j(z)\big|^2 + \mathcal{O}(|z|^3). \quad \square$$

3. Application de Gauss

Les coordonnées de Plücker permettent de plonger la grassmannienne des n-plans projectifs de $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ (ou des $(n+1)$-plans complexes de $\mathbb{C}^{N+1}$) dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\Lambda^{n+1}\mathbb{C}^{N+1})$, que l'on munit de la structure riemannienne naturellement induite par celle de $\mathbb{C}^{N+1}$: si $(e_0, \ldots, e_N)$ est un repère unitaire de $\mathbb{C}^{N+1}$, la famille des $w_I = e_{i_0} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$ indexée par les multi-indices croissants $I = (i_0, \ldots, i_n)$ fournit un repère unitaire pour $\Lambda^{n+1}\mathbb{C}^{N+1}$.

L'application de Gauss

$$\gamma : V \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^{n+1}\mathbb{C}^{N+1})$$

d'une immersion complexe $i : V \hookrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^N$ associera à chaque point $p \in V$ le n-plan projectif de $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ tangent en p à V. On peut déterminer la métrique induite sur V par γ.

PROPOSITION 3.1. — *Soient $i : (V^n, g) \hookrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^N$ une immersion isométrique complexe et $\gamma : V \to \mathbb{P}(\Lambda^{n+1}\mathbb{C}^{N+1})$ son application de Gauss. La pseudo-métrique G induite sur V par γ vérifie*

$$G = (n+1)g - \tfrac{1}{2}\operatorname{Ric}_g,$$

où Ric_g est la courbure de Ricci de la métrique g.

Ce résultat est du à M. Obata [Ob] dans le cadre réel et lorsque l'espace ambiant est à courbure constante. Il a été prouvé dans notre contexte par S. Nishikawa [Ni]. Nous en donnons ici une preuve rapide.

Preuve . — On fixe $p \in V$, des coordonnées Bochner

$$z = (z_1, \dots, z_n)$$

centrées en p, et l'on reprend les notations introduites en 2.2. Le relèvement à $\mathbb{C}^{N+1}$ du $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ tangent en $[1, z, f(z)]$ à V est engendré sur $\mathbb{C}$ par les vecteurs

$$\begin{aligned} v_0(z) &= e_0 + \sum_{i=1}^{n} z_i e_i + \sum_{j=1}^{r} f_j(z) e_{n+j} && \text{et} \\ v_i(z) &= e_i + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_j}{\partial z_i}(z) e_{n+j} && \text{pour} \quad 1 \le i \le n, \end{aligned}$$

avec $\gamma(z) = v_0 \wedge \dots \wedge v_n$. Les coordonnées homogènes relatives à la base (w_I) de $\gamma(z)$ sont donc données au signe près par :

- les $\partial_i f_j$ $(1 \le i \le n, 1 \le j \le r)$;
- les $(E-1)f_j$ $(1 \le j \le r)$ où $E = \sum_i z_i \partial_i$ est l'opérateur d'Euler;
- les sommes alternées sur les indices j des produits q à q des précédents, pris tous $(2 \le q \le \inf(n, r))$, ou tous sauf un $(2 \le q \le \inf(n+1, r))$ parmi les $\partial_i f_j$.

On aura donc au premier ordre :

$$\gamma(z) = \Big[1, \big((-1)^{n-i}\partial_i Q_j(z) + \mathcal{O}(|z|^2)\big)_{(1 \le i \le n; 1 \le j \le r)}, \mathcal{O}(|z|^2)\Big],$$

et la diastase D^G en p relative à la métrique G sera donnée d'après 1.2 par

$$D^G(z) = \log\Big(1 + \sum_{i,j} \big|\partial_i Q_j(z)\big|^2 + \mathcal{O}\big(|z|^3\big)\Big).$$

On conclut avec 2.3. $\square$

En conservant les mêmes notations, on déduit de 3.1 le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.2. — *On suppose maintenant que (V, g) est d'Einstein, de constante $2k$. L'application de Gauss est décrite en coordonnées au voisinage de p par*

$$z \in \mathbb{C}^n \longmapsto \left[1, (\partial_i f_j)_{1\le i\le n, 1\le j\le r}, (\varphi_\alpha)_{1\le\alpha\le D}\right]$$

et l'on a

$$1 + \sum_{i,j} |\partial_i f_j|^2 + \sum_\alpha |\varphi_\alpha|^2 = \left(1 + |z|^2 + |f|^2\right)^{n+1-k}. \tag{3.3}$$

Preuve. — D'après 3.1, les métriques G et $(n+1-k)g$ coïncident ; donc leurs diastases en p sont égales. (En particulier, lorsque $V \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^N$ n'est pas totalement géodésique, l'application de Gauss est immersive.) □

4. Complétion des sous-variétés d'Einstein

La proposition qui suit nous servira à estimer le « temps de vie » d'une sous-variété complexe d'Einstein de l'espace projectif.

PROPOSITION 4.1. — *On fixe $\ell \in \mathbb{R}$. Soient $(f_1, \dots, f_r) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^r$ et (φ_α) des séries formelles sur $\mathbb{C}^n$, solutions formelles de*

$$\begin{cases} 1 + \sum\limits_{i,j} |\partial_i f_j|^2 + \sum\limits_\alpha |\varphi_\alpha|^2 = \Big(1 + \sum\limits_i |z_i|^2 + \sum\limits_j |f_j|^2\Big)^\ell, \\ f_j(0) = 0 \qquad 1 \le j \le r. \end{cases} \tag{4.2}$$

Il existe $R > 0$ et $M > 0$ ne dépendant que des dimensions n, r et du paramètre ℓ tels que les f_j convergent sur le polydisque $|z_i| \le R$ et y satisfont l'estimée a priori $|f_j| \le M$.

Preuve. — La preuve s'appuie sur la méthode des séries majorantes. Lorsque

$$f(z) = \sum_I f_{[I]} z^I \quad \text{et} \quad \phi(z) = \sum_I \phi_{[I]} z^I$$

($z \in \mathbb{C}^n$) sont des séries formelles en une ou plusieurs variables complexes, on note

$$f^+(z) = \sum_I |f_{[I]}| z^I$$

la série formelle à coefficients positifs correspondante, et l'on écrit $f \prec \phi$ lorsque ϕ est une série formelle à coefficients positifs qui domine f, *i.e.* $|f_{[I]}| \le \phi_{[I]}$ pour tout multi-indice I.

• *On suppose que* $n = 1$.

Pour une série formelle ϕ (resp. ψ) d'*une* variable complexe $z \in \mathbb{C}$ (resp. en $(z, \bar{z})$, $z \in \mathbb{C}$), $\phi_{[m]}$ (resp. $\psi_{[m]}$) désignera le coefficient du terme de degré m en z (resp. du terme « diagonal » de degré (m, m) en $(z, \bar{z})$).

On estime les termes « diagonaux » (*i.e.* de même degré $m \in \mathbb{N}$ en z et $\bar{z}$) dans (4.2). On a pour $j = 1, \ldots, r$:

$$\big((f_j^+)'_{[m]}\big)^2 = \big|(f_j')_{[m]}\big|^2 \leq \Big(\Big(1 + |z|^2 + \sum |f_j|^2\Big)^\ell\Big)_{[m]},$$

puis, en notant $C_\ell^q = \ell(\ell - 1) \cdots (\ell - q + 1)/q!$:

$$\begin{aligned}
&\Big(\Big(1 + |z|^2 + \sum |f_j|^2\Big)^\ell\Big)_{[m]} \\
&\qquad \leq \sum_{q \in \mathbb{N}} C_\ell^q \Big(\Big(|z|^2 + \sum |f_j|^2\Big)^q\Big)_{[m]} \\
&\qquad \leq \sum_{q \in \mathbb{N}} |C_\ell^q| \sum_{a+|b|=q} C_q^{a,b} \big(|z^a f_1^{b_1} \cdots f_r^{b_r}|^2\big)_{[m]} \\
&\qquad \leq \sum_{q \in \mathbb{N}} |C_\ell^q| \sum_{a+|b|=q} C_q^{a,b} \big(\big(z^a (f_1^+)^{b_1} \cdots (f_r^+)^{b_r}\big)_{[m]}\big)^2 \\
&\qquad \leq \sum_{q \in \mathbb{N}} |C_\ell^q| \Big(\Big((z + \sum_j f_j^+)^q\Big)_{[m]}\Big)^2 \\
&\qquad \leq \Big(\Big(\sum_{q \in \mathbb{N}} \sqrt{|C_\ell^q|}\, \Big(z + \sum_j f_j^+\Big)^q\Big)_{[m]}\Big)^2,
\end{aligned}$$

(on a utilisé le fait que les coefficients binomiaux — ordinaires — satisfont $C_q^{a,b} \geq 1$, et l'inégalité $\sum_\ell \alpha_\ell^2 \leq (\sum_\ell \alpha_\ell)^2$ lorsque les α_ℓ sont positifs), soit finalement

$$(f_j^+)' \prec \sum_{q \in \mathbb{N}} \sqrt{|C_\ell^q|}\, \big(z + f_1^+ + \cdots + f_r^+\big)^q. \tag{4.3}$$

On note alors F la série formelle en $r + 1$ variables complexes définie par

$$F(z, y_1, \ldots, y_r) = \sum_{q \in \mathbb{N}} \sqrt{|C_\ell^q|}\, \big(z + y_1 + \cdots + y_r\big)^q.$$

On constate que F est convergente au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^{r+1}$ et l'on note Y l'unique fonction analytique (d'une variable complexe) solution au voisinage de l'origine de l'équation différentielle

$$Y'(z) = F(z, Y, \ldots, Y) \quad \text{et} \quad Y(0) = 0. \tag{4.4}$$

On constate alors que $f_j^+ \prec Y$ pour $j = 1, \dots, r$. En effet, la domination annoncée est triviale en degré 0. Si elle est vraie jusqu'au degré m, on la déduit pour le degré suivant en utilisant les (in)-équations 4.3 et 4.4. On en déduit la convergence des f_j sur un domaine Ω contenant le domaine de convergence de Y autour de 0, et les majorations

$$|f_j(z)| \le f_j^+(|z|) \le Y(|z|)$$

pour $1 \le j \le r$ sur ce domaine.

• *La dimension n est quelconque.*

Pour se ramener à la dimension 1, on fixe $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ unitaire, et l'on définit pour $j = 1, \dots, r$ et $t \in \mathbb{C}$:

$$\varphi_j(t) = f_j(tw).$$

On constate alors facilement comme ci-dessus que

$$(\varphi_j^+)' \prec F(z, \varphi_1, \dots, \varphi_r),$$

d'où le résultat. □

La traduction géométrique de cet énoncé dans notre contexte est la suivante.

PROPOSITION 4.5. — *Une sous-variété complexe $V^n \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^N$, qui est d'Einstein pour la métrique induite, s'étend en une variété kählérienne analytique complète (M^n, g) immergée isométriquement dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$. Lorsque la constante d'Einstein est non négative, M est compacte.*

Preuve. — On fixe $p \in V$ et des coordonnées Bochner $z = (z_1, \dots, z_n)$ centrées en p, de telle sorte que, au voisinage de p et en coordonnées homogènes, la sous-variété V soit décrite par un graphe

$$z = (z_1, \dots, z_n) \longmapsto [1, z_1, \dots, z_n, f_1(z), \dots, f_r(z)].$$

D'après 3.2, les fonctions f_j satisfont une équation du type (4.2) sur leur domaine de définition, avec $\ell = n + 1 - k$ (où $2k$ est la constante d'Einstein de V), et sont donc définies (ou se prolongent) sur le polydisque $\Omega_R = \{|z_i| \le R\}$ où elles satisfont l'estimée *a priori* $|f_j| \le M$. La sous-variété V est donc (ou se prolonge en) un graphe au dessus de tout Ω_R. Sur ce domaine, la diastase relative à p pour le métrique induite est donnée (en coordonnées) par

$$D(z) = \log\Big(1 + \sum_i |z|^2 + \sum_j |f_j|^2\Big),$$

et l'on y contrôle la distorsion entre la métrique induite par $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ et la métrique euclidienne de $\Omega_R \subset \mathbb{C}^n \simeq T_pV$ (puisqu'on a des bornes sur Ω_R pour les f_j, et donc pour leurs dérivées d'après 3.2). On en déduit que V

(ou son prolongement) contient un disque riemannien centré en p, dont le rayon $\mathcal{R} > 0$ ne dépend que de n, r et de k (et pas du point p choisi). Par prolongement analytique, on construit une variété kählérienne analytique complète (M, g) (d'Einstein de constante $2k$), immergée dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$, et qui contient (prolonge) V. Cette variété est unique si l'on ne s'intéresse qu'à son image géométrique dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$, *i.e.* on oublie les revêtements éventuels.

Lorsque $k > 0$, M est compacte par le théorème de Bonnet-Myers.

Si $k = 0$, le revêtement riemannien $\widetilde{M}$ de M est complet, Ricci-plat et simplement connexe ; le théorème de Cheeger-Gromoll assure alors que $\widetilde{M}$ est un produit riemannien $\mathbb{C}^q \times N$, où N est une variété kählérienne Ricci-plate compacte (et simplement connexe). Mais $\widetilde{M}$, comme M, doit pouvoir s'immerger localement dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$. D'après Calabi (1.8), il ne peut pas y avoir de facteur plat ; donc $\widetilde{M} = N$ est compacte. □

5. Rationalité de la constante d'Einstein

Cette section est consacrée à la démonstration du résultat suivant.

PROPOSITION 5.1. — *Soit* $i : (M^n, g) \hookrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^N$ *une sous-variété complexe d'Einstein du projectif. Alors sa constante d'Einstein est rationnelle.*

Dans toute cette section, on pourra supposer d'après 4.5 que (M, g) est complète, et l'on notera $2k$ sa constante d'Einstein.

Preuve. — Si $k > 0$, M est compacte. On note $H \to \mathbb{C}\mathrm{P}^N$ le fibré hyperplan au-dessus du projectif, $K_M \to M$ le fibré canonique de M et ω_M la forme de Kähler associée à g. Pour montrer la rationalité de k, il suffit de constater que

$$\mathrm{c}_1(i^*H) = i^*(\mathrm{c}_1(H)) = (1/2\pi)[2\omega_M] \in H^2(M, \mathbb{Z})$$

et

$$\mathrm{c}_1(K_M^*) = (1/2\pi)[\rho] = (k/2\pi)[2\omega_M] \in H^2(M, \mathbb{Z}).$$

Lorsque $k < 0$, la variété M peut être non compacte ; on s'appuiera alors sur quelques lemmes. Pour $p \in \mathbb{C}\mathrm{P}^N$, on notera $\mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(p)$ l'hyperplan à l'infini correspondant, et $M_p = M \cap \mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(p)$ (de codimension complexe 1 dans M si $M \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^N$ est pleine, *i.e.* non contenue dans un hyperplan).

LEMME 5.2. — *Les coordonnées Bochner* $(z) = (z_1, \ldots, z_n)$ *en* $p \in M$ *forment un système de coordonnées locales au voisinage de tout point de* $M \setminus M_p$.

Preuve. — Les $(z_i)_{1 \le i \le n}$ sont les (restrictions à M des) n premières coordonnées homogènes $(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+r})$ sur $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ relatives à un repère unitaire convenable de $\mathbb{C}^{N+1}$, et sont donc holomorphes sur $M \setminus M_p$. Soit $q \in M \setminus M_p$ (connexe) joint à p par un chemin $c \subset M \setminus M_p$. Si les (z_i) cessent d'être des coordonnées locales en un (premier) point $q_0 \in c$, cela signifie que $\gamma(q_0)$ appartient à l'hyperplan à l'infini de $\mathbb{P}(\Lambda^{n+1}\mathbb{C}^{N+1})$ relatif à $\gamma(p)$, ce qui contredit 3.2. $\square$

LEMME 5.3. — *On suppose $k \notin \mathbb{Q}$. Alors M ne rencontre aucun hyperplan à l'infini $\mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(p)$ relatif à un point $p \in M$.*

Preuve. — On fixe $p, q \in M$ et on suppose que $q \in \mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(p)$. Puisque M rencontre $\mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(p) \cup \mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(q)$ selon un ensemble de codimension 1, on peut choisir un point $x \in M$ avec $p, q \notin \mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(x)$. On reprend alors les notations de 2.2, mais en choisissant maintenant « comme origine » le point $x \in M$. Au voisinage de ce point $x \in M$, et en coordonnées, l'équation de Kähler-Einstein (3.3) s'écrit

$$1 + \sum_{\alpha} |h_\alpha|^2 = \big(1 + |z|^2 + |f|^2\big)^{\ell},$$

où les h_α sont des expressions polynomiales en les z_i, f_j et $\partial_i f_j$, et $\ell = n + 1 - k$.

D'après le lemme précédent, on peut alors dissocier les variables z et $\bar{z}$ pour obtenir par prolongement analytique l'identité

$$1 + \sum_{\alpha} h_\alpha(u)\overline{h_\alpha}(\bar{v}) = \Big(1 + \sum_{i} u_i\, \overline{v_i} + \sum_{j} f_j(u)\, \overline{f_j}(\bar{v})\Big)^{\ell},$$

où u (resp. v) désigne l'ensemble des coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_n)$ au voisinage de p (resp. q), et $u \mapsto [1, u, f(u)]$ (resp. $v \mapsto [1, v, f(v)]$) paramètre M au voisinage de p (resp. q). (Les fonctions f_j et h_α sont multiformes sur (un domaine de) $\mathbb{C}^n$.)

Soient, en coordonnées homogènes, $p = [1, u_0, f(u_0)]$ et $q = [1, v_0, f(v_0)]$ avec $q \in \mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(p)$; cela signifie que

$$0 = 1 + u_0 \cdot v_0 + f(u_0) \cdot \bar{f}(\overline{v_0}).$$

On fixe la valeur du paramètre v à v_0 correspondant à q, et on garde flottante la valeur de u au voisinage de u_0 correspondant au point p. L'ordre du zéro d'une fonction analytique d'une variable complexe devant être entier, l'identité entre fonctions holomorphes en u (non identiquement nulles)

$$1 + \sum_{\alpha} h_\alpha(u)\, \overline{h_\alpha}(\bar{v}_0) = \big(1 + u \cdot \overline{v_0} + f(u) \cdot \bar{f}(\overline{v_0})\big)^{\ell},$$

montre que k est rationnel. $\square$

On peut affiner ce résultat.

LEMME 5.4. — *On suppose toujours $k \neq \mathbb{Q}$. Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage de $\mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(x)$ dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ qui ne rencontre pas M.*

Preuve. — On choisit comme ci-dessus des coordonnées homogènes pour $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ centrées en x et «adaptées» à M. Au voisinage de x, M est décrite par un graphe $(z) = (z_1, \ldots, z_n) \mapsto [1, z, f_1(z), \ldots, f_r(z)]$ où, si $M \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^N$ est pleine — ce que l'on supposera — les fonctions $(f_j)_{1\leq j\leq r}$ sont linéairement indépendantes.

• Soit $[0, a, b]$ (avec $a \in \mathbb{C}^n$ non nul et $b \in \mathbb{C}^r$) un point de $\mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(x)$. On définit au voisinage de l'origine l'application

$$\begin{aligned}\big((\lambda, \alpha, \beta), t\big) \in \mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{C} \overset{\Phi}{\longmapsto} &\big\langle (1, ta, f(ta)), (\lambda, a + \alpha, b + \beta)\big\rangle \\ &= \bar{\lambda} + t|a|^2 + t\big\langle a, \alpha\big\rangle + \big\langle f(ta), b + \beta\big\rangle,\end{aligned}$$

(où $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}^n$, $\beta \in \mathbb{C}^r$ et $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit hermitien sur $\mathbb{C}^{N+1}$).

On a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big|_{(0,0,0;0)} = |a|^2 \neq 0$$

et le théorème des fonctions implicites montre que pour tout point π d'un voisinage $\mathcal{U}$ de $[0, a, b]$ dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ il existe un point p dans M (de coordonnées $= [1, ta, f(ta)]$) avec $\pi \in \mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(p)$. Le lemme précédent montre alors que M ne rencontre pas $\mathcal{U}$.

• Soit maintenant $[0, 0, b] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(x)$, avec $b \neq 0$. Puisque M est pleine, il existe une direction $u_0 \in \mathbb{C}^n$ pour laquelle la fonction $t \in \mathbb{C} \mapsto \langle f(tu_0), b\rangle \in \mathbb{C}$ n'est pas identiquement nulle. On définit alors

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \big((\lambda, \alpha, \beta), t\big) &\longmapsto \big\langle (1, tu_0, f(tu_0)), (\lambda, \alpha, b + \beta)\big\rangle\end{aligned}$$

et $\Phi_{(\lambda,\alpha,\beta)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$\Phi_{(\lambda,\alpha,\beta)}(t) = \Phi\big((\lambda, \alpha, \beta), t\big).$$

La fonction Φ_0 définie pour $t \in \mathbb{C}$ par $\Phi_0(t) = \langle f(tu_0), b\rangle$ est holomorphe et non identiquement nulle, donc ouverte au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$: il existe alors un chemin c autour de l'origine dans $\mathbb{C}$ dont l'image par Φ_0 fait m fois ($m \neq 0$) le tour de l'origine dans $\mathbb{C}$. On reste alors dans un domaine de $\mathbb{C}$ où $|tu_0|$ et $|f(tu_0)|$ sont bornées. Pour (λ, α, β) suffisamment proche de l'origine, l'image par $\Phi_{(\lambda,\alpha,\beta)}$ du lacet c fera encore (m fois) le tour de l'origine, et l'image par $\Phi_{(\lambda,\alpha,\beta)}$ du disque bordé par c contiendra 0. On conclut comme précédemment que M évite un voisinage de $[0, 0, b]$ dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$. □

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la preuve de la proposition. Supposons par l'absurde k irrationnel et fixons $x \in M$; on vient de voir que M évite alors un voisinage de $\mathbb{C}\mathrm{P}^{N-1}(x)$ dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$. En coordonnées Bochner centrées en x, M reste donc dans un borné de $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r$ et M $(= M \setminus M_x)$ est, au voisinage de chacun de ses points, un graphe local au dessus de $\mathbb{C}^n$ (*cf.* 5.2). Relevons alors dans M le chemin $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto (t, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$. C'est possible au voisinage de $t = 0$, et l'on note $[0, T[$ l'intervalle maximal de relèvement. On voit d'une part que T est fini (sinon le point relevé $[1, t, f(t)]$ part à l'infini dans $\mathbb{C}^N$ lorsque t tend vers l'infini). D'autre part, quand t tend en croissant vers T :

— soit f reste bornée : l'équation de Gauss montre que

$$|f'|^2 \leq \left(1 + |z|^2 + |f|^2\right)^\ell$$

reste également borné, et la longueur dans M du chemin relevé

$$t \in [0, T[\longmapsto \left[1, t, f(t)\right] \in M$$

est donc finie, d'où une contradiction avec le lemme 5.2 puisque M est complète ;

— soit f n'est pas bornée, mais on part alors à l'infini dans $\mathbb{C}^N$ ce qui contredit de nouveau le lemme 5.4. $\square$

6. Immersion sans points doubles

Pour achever la preuve du théorème principal, il nous reste à montrer qu'une sous-variété riemannienne complexe d'Einstein $i : (M^n, g) \hookrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^N$, complète et de constante d'Einstein rationnelle k, est immergée sans points doubles. On exclut d'emblée le cas trivial où M est totalement géodésique, *i.e.* où $k = n + 1$. L'argument reposera sur le théorème de rigidité de Calabi (1.8).

6.1. Application de Véronèse.

On fixe un repère unitaire $(e_0, \dots, e_N)$ de $\mathbb{C}^{N+1}$. Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}_\ell \mathbb{C}^{N+1}$ l'espace des polynômes homogènes de degré ℓ sur $\mathbb{C}^{N+1}$ que l'on munit du produit scalaire hermitien hérité de celui de $\mathbb{C}^{N+1}$, et pour lequel une base unitaire est fournie par la famille

$$\left(Z_0^{\nu_0} \cdots Z_N^{\nu_N} / (\nu_0\,! \dots \nu_N\,!)^{1/2}\right)_{\nu_0 + \cdots + \nu_N = \ell} ;$$

l'application de Véronèse $v_\ell : \mathbb{C}^{N+1} \to (\mathcal{S}_\ell \mathbb{C}^{N+1})^*$ de degré ℓ est définie par

$$z \in \mathbb{C}^{N+1} \xmapsto{\ v_\ell\ } \left\{v_\ell(z) : P \in \mathcal{S}_\ell \mathbb{C}^{N+1} \mapsto P(z) \in \mathbb{C}\right\}.$$

Cette application est homogène, et passe donc au quotient en une application (plongement de Véronèse de degré ℓ) $v_\ell : \mathbb{C}P^N \to \mathbb{P}(\mathcal{S}_\ell \mathbb{C}^{N+1})^*$ qui induit sur $\mathbb{C}P^N$ l'homothétique de facteur ℓ de la métrique canonique.

6.2. Rigidité.

D'après 3.1, la métrique induite sur M par l'application de Gauss γ associée à l'immersion i est $\ell g = (\ell_1/\ell_2)g$, avec $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N}^*$. Les immersions complexes $v_{\ell_1} \circ i : M \to \mathbb{C}P^{N_1}$ et $v_{\ell_2} \circ \gamma : M \to \mathbb{C}P^{N_2}$ induisent sur M la même métrique $\ell_1 g$. Le théorème de rigidité 1.8 montre alors que les images $v_{\ell_1} \circ i(M)$ et $v_{\ell_2} \circ \gamma(M)$ engendrent dans $\mathbb{C}P^{N_1}$ et $\mathbb{C}P^{N_2}$ des espaces linéaires de même dimension D, et que les immersions $v_{\ell_1} \circ i, v_{\ell_2} \circ \gamma : M \to \mathbb{C}P^D$ correspondantes sont congruentes sous $\mathrm{PU}(D+1)$.

On fixe alors un point $p \in M$ et un repère unitaire $(e_0, \dots, e_N)$ de $\mathbb{C}^{N+1}$ (comme en 2.2) tel que, dans les coordonnées homogènes correspondantes pour $\mathbb{C}P^N$, l'immersion soit décrite au voisinage de tout point de $M \setminus M_p$ par un graphe (voir 5.2)

$$z = (z_1, \dots, z_n) \longmapsto \big[1, z_1, \dots, z_n, f_1(z), \dots, f_r(z)\big].$$

Il suffit de montrer que l'immersion n'a pas de points doubles en dehors de M_p.

Le calcul « en coordonnées » de l'application de Gauss (3.1), et l'argument de rigidité ci-dessus montrent qu'il existe des polynômes $P_{i,j}$ (avec $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le r$) — de degrés au plus ℓ_1 — pour lesquels sur tout $M \setminus M_p$ on ait

$$\text{(5.3)} \quad \partial_i f_j(z) = P_{i,j}(z_1, \dots, z_n, f_1, \dots, f_r), \qquad (1 \le i \le n, 1 \le j \le r).$$

Il faut entendre qu'en chaque point x de $M \setminus M_p$, M est localement le graphe d'une fonction multiforme $(z) \to (f_1, \dots, f_r)$ qui vérifie l'équation différentielle (5.3) ; cette fonction est donc entièrement déterminée par les « conditions initiales » (*i.e.* par les coordonnées homogènes

$$[1, z_1^0, \dots, z_n^0, f_1^0 \dots, f_r^0]$$

du point x), ce qui montre que M est sans self-intersection dans $M \setminus M_p$. □

7. Résultats d'isolement

Nous montrons maintenant que l'ensemble des constantes d'Einstein positives réalisables par des sous-variétés complexes (d'Einstein) $M^n \subset \mathbb{C}P^N$ de dimension n donnée est discret dans $]0, n+1]$. Plus précisément :

THÉORÈME 7.1. — *Soit* $(M^n, g) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{C}\mathrm{P}^N$ *une sous-variété complexe d'Einstein (pleine et complète), de constante d'Einstein* $2k > 0$. *On écrit sous forme de fraction irréductible :* $k = p/q$ *avec* $p, q \in \mathbb{N}^*$. *Alors :*

(i) $p \leq n + 1$;

(ii) *lorsque* $p = n + 1$ *(resp.* $p = n$*), on a* $(M^n, g) = (\mathbb{C}\mathrm{P}^n, q\,\mathrm{can})$ *(resp.* $(M^n, g) = (\mathcal{Q}^n, q\,\mathrm{can})$*) et le plongement* i *est respectivement donné par*

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n \xrightarrow{v_q} \mathbb{C}\mathrm{P}^N = \mathbb{P}(\mathcal{S}_q\mathbb{C}^n)^*,$$

$$\mathcal{Q}^n \hookrightarrow \mathbf{CP}^{n+1} \xrightarrow{v_q} \mathbb{C}\mathrm{P}^N \subset_{t.g.} \mathbf{P}(\mathcal{S}_q\mathbb{C}^{n+1})^*,$$

où v_q *est l'application de Véronèse d'ordre* q.

REMARQUE. — L'inégalité $k \leq n + 1$ est triviale puisque M est une sous-variété complexe. K. Oguie [Og] a démontré dans le cas compact que $k = n + 1$ ou $k \leq n$. Ce résultat a ensuite été étendu par B.Y. Chen et K. Oguie [C-Og] — en utilisant la classification de [Ch] — aux sous-variétés ouvertes, avec description du cas limite.

La preuve découlera du résultat suivant.

THÉORÈME 7.2 (voir [K-O]). — *Soit* M^n *une variété complexe compacte de dimension* n, *munie d'un fibré ample* $\mathcal{F}$. *Si* $\mathrm{c}_1(K_M^*) \geq (n + 1)\mathrm{c}_1(\mathcal{F})$ *(resp. si* $\mathrm{c}_1(K_M^*) = n\mathrm{c}_1(\mathcal{F})$*), alors* $M = \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ *(resp.* $M = \mathcal{Q}^n$*).*

Preuve de 7.1. — Notons $i^*H \to M$ le fibré image réciproque du fibré hyperplan $H \to \mathbb{C}\mathrm{P}^N$ et $\alpha = (1/2\pi)[2\omega_g] \in H^{1,1}(M)$. On sait que

$$\mathrm{c}_1(M) = \mathrm{c}_1(K_M^*) = \frac{p}{q}\alpha \quad \text{et} \quad \mathrm{c}_1(i^*H) = \alpha.$$

On constate (puisque p et q sont supposés sans facteurs communs), que la classe $\beta = \alpha/q \in H^{1,1}(M)$ est, comme α, une classe entière et positive ; c'est donc la classe de Chern d'un (unique) fibré ample $\mathcal{F}$ au-dessus de M, avec $\mathrm{c}_1(K_M^*) = p\mathrm{c}_1(\mathcal{F})$.

Lorsque $p \geq n+1$, le théorème 7.2 montre que M est (biholomorphiquement équivalent à) $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, qui n'admet qu'une métrique de Kähler-Einstein à homothétie et automorphisme près (voir Bando-Mabuchi [B-M]). On conclut en utilisant le critère de Calabi (1.8) que $k = (n + 1)/q$, et que l'immersion est donnée par l'application de Véronèse v_q (rigidité). Le raisonnement est semblable lorsque $p = n$. $\square$

On peut préciser ce résultat : la codimension contrôle la constante d'Einstein.

PROPOSITION 7.3. — *Soit $(V^n, g) \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^N$ une sous-variété complexe d'Einstein, de constante $2k$, et $\ell = n+1-k$, avec $\ell \in]b-1, b]$, où $b \in \mathbb{N}$ et $b \geq 2$. On a alors l'inégalité $C_{N+1}^{n+1} \geq C_{n+b}^{n}$.*

On sait donc minorer la codimension de l'immersion par une fonction (croissante) de l'écart $\ell = (n+1) - k$. Ce résultat découle du lemme suivant, appliqué aux immersions isométriques $i : (V, g) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^N$ et $\gamma : (V, \ell g) \to \mathbb{P}(\Lambda^{n+1}\mathbb{C}^{N+1})$.

LEMME 7.4. — *Soit (V, g) une variété kählérienne analytique qui admet deux immersions isométriques complexes*

$$i_1 : (V, g) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{N_1} \quad et \quad i_2 : (V, g) \to \mathbb{C}\mathrm{P}_\ell^{N_2},$$

avec $\ell \in]b-1, b]$, où $b \in \mathbb{N}$ et $b \geq 2$. Alors $N_2 \geq C_{n+b}^{n} - 1$.

Preuve. — La diastase D en $p \in V$ relative à la métrique g s'écrit en coordonnées sous la forme

$$D(z) = \log\Big(1 + |z|^2 + \sum_{j=1}^{r} |f_j|^2\Big)$$

(considérer l'immersion i_1). Mais la variété $(V, \ell g)$ admet également une immersion isométrique complexe dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^{N_2}$. Le critère de Calabi dit alors que la fonction analytique $\mathrm{e}^{\ell D} - 1 = (1 + |z|^2 + \sum |f_j|^2)^\ell - 1$ est résoluble, de rang au plus N_2. On développe :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\ell D} - 1 = \ell\Big(|z|^2 + \sum |f_j|^2\Big) &+ \frac{\ell(\ell-1)}{2}\Big(|z|^2 + \sum |f_j|^2\Big)^2 \\ &+ \cdots + \frac{\ell(\ell-1)\ldots(\ell-b+1)}{b!}\Big(|z|^2 + \sum |f_j|^2\Big)^b \\ &+ \text{des termes de degrés au moins } b+1 \text{ en } z \text{ et en } \bar{z}. \end{aligned}$$

Les coefficients explicités dans le développement ci-dessus étant tous positifs, on en déduit que le « rang » de $(\mathrm{e}^{\ell D} - 1)$ (qui est au moins égal à celui donné par les termes de degrés au plus b en z et $\bar{z}$) est minoré par celui de $\sum_{\ell=1}^{b} (|z|^2)^\ell$ (où $|z|^2 = \sum_{i=1}^{n} |z|_i^2$), soit $C_{n+b}^{n} - 1$. $\square$

8. Codimension 2

Le point de vue utilisé dans cet article permet de retrouver le résultat suivant.

THÉORÈME 8.1 (*cf.* [Ch] et [Ts]). — *Les seules sous-variétés complexes d'Einstein $V^n \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^{n+2}$ (où $n \geq 2$) sont :*

- *des ouverts des sous-variétés totalement géodésiques $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \subset_{t.g.} \mathbb{C}\mathrm{P}^{n+2}$,*
- *ou de la quadrique complexe $Q^n \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^{n+1} \subset_{t.g.} \mathbb{C}\mathrm{P}^{n+1}$ d'équation homogène $Z_0^2 + \cdots + Z_{n+1}^2 = 0$ dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n+1}$.*

Preuve. — On suppose que M n'est pas totalement géodésique. Les notations sont celles introduites en 2.2 ; on désigne par Q_j et B_j les parties homogènes de degré 2 et 3 dans f_j. On démontrera le résultat annoncé en n'utilisant dans l'équation (3.3) que les termes de degrés au plus 2 en z et $\bar{z}$, soit :

$$\sum_{i,j} |\partial_i Q_j|^2 = \ell |z|^2, \quad \sum_{i,j} \partial_i Q_j \, \overline{\partial_i B_j} = 0\,; \tag{8.2}$$

$$\sum_{i,j} |\partial_i B_j|^2 = (\ell - 1) \sum_{i,j} |Q_j|^2 + \tfrac{1}{2}\ell(\ell-1)|z|^4 - \tfrac{1}{2} \sum_{j,\ell} |\partial Q_j \wedge \partial Q_\ell|^2. \tag{8.3}$$

(On a posé $|\partial Q_j \wedge \partial Q_\ell|^2 = |\partial Q_j|^2 \cdot |\partial Q_\ell|^2 - |\langle \partial Q_j, \overline{\partial Q_\ell} \rangle|^2$.)

Premier cas : les formes quadratiques Q_1 et Q_2 sont indépendantes.

Notre preuve du théorème 8.1 s'appuiera sur le lemme de réduction simultanée suivant.

PROPOSITION 8.4. — *Il existe un repère normal unitaire (ν_1, ν_2) en p et un repère unitaire de T_pM pour lesquels*

$$Q_1(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^2 \qquad (\alpha_i > 0),$$

$$Q_2(z) = \sum_{i=1}^n a_i z_i^2 \qquad (a_i \in \mathbb{C}^*)$$

avec $\alpha_i^2 + |a_i|^2 = \frac{1}{4}\ell$.

Preuve. — Le résultat est vrai lorsque $n = 1$; on le démontre alors par récurrence sur n. Soit (ν_1, ν_2) un repère normal unitaire avec Q_2 (égal à Q_{ν_2}) de rang au plus $(n-1)$ (remarquer que la fonction définie par $t \in \mathbf{C} \mapsto \det(Q_{\nu_1} + tQ_{\nu_2})$ — déterminant de la matrice symétrique associée dans une base de T_pM — est polynomiale et non constante si $\mathrm{rg}\, Q_{\nu_2} = n$).

On choisit un repère unitaire de T_pM avec $Q_1(z) = \sum_i \alpha_i z_i^2$ $(\alpha_i \geq 0)$, *i.e.* on réduit Q_1 sous $\mathrm{U}(n)$. On a alors par (8.2) :

$$\left|\partial Q_2(z)\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\ell - 4\alpha_i^2\right) |z_i|^2.$$

Par hypothèse,

$$Q_2(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\ell_j(z)\right)^2$$

où les ℓ_j sont des formes linéaires sur T_pM. Pour $\xi \in \bigcap_j \mathrm{Ker}\ell_j$, on a $|\partial Q_2(z)|^2 = 0$. On en déduit, quitte à permuter les indices, que

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{\ell}\, z_n^2 = Q_1'(z_1, \dots, z_{n-1}) + \tfrac{1}{2}\sqrt{\ell}\, z_n^2, \\ Q_2 &= Q_2'(z_1, \dots, z_{n-1}). \end{aligned}$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence à (Q_1', Q_2') qui vérifient sur l'espace $\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) \simeq \mathbb{C}^{n-1}$:

$$\left|\partial Q_1'(z')\right|^2 + \left|\partial Q_2'(z')\right|^2 = \ell\, |z'|^2.$$

Ceci montre que Q_1 et Q_2 peuvent être simultanément réduites. On conclut en changeant de repère normal unitaire pour n'obtenir que des coefficients non nuls. $\square$

On regroupe alors les coordonnées par « paquets » pour avoir :

$$\begin{aligned} Q_1(z) &= \alpha_I \sum_{i\in I} z_i^2 + \alpha_J \sum_{j\in J} z_j^2 + \alpha_K \sum_{k\in K} z_k^2 + \cdots, \\ Q_2(z) &= \lambda_I \alpha_I \sum_{i\in I} z_i^2 + \lambda_J \alpha_J \sum_{j\in J} z_j^2 + \lambda_K \alpha_K \sum_{k\in K} z_k^2 + \cdots, \end{aligned}$$

avec $\lambda_I, \lambda_J, \lambda_K, \dots$ tous distincts et non nuls, et $\alpha_I^2(1 + \lambda_I^2) = \frac{1}{4}\ell$; on pourra supposer λ_I réel. Puisque Q_1 et Q_2 sont indépendantes, il y aura au moins deux « paquets ». La seconde partie de (8.2) montre alors que, pour des indices (i, j) appartenant à deux « paquets » différents, on a $\partial^2_{i,j} B_1 = \partial^2_{i,j} B_2 = 0$, soit

$$\left\{\begin{aligned} B_1 &= B_1^I + B_1^J + B_1^K + \cdots, \\ B_2 &= B_2^I + B_2^J + B_2^K + \cdots, \end{aligned}\right. \tag{8.5}$$

où B_1^I est un polynôme homogène de degré 3 en les $(z_i)_{i\in I}$ (de même pour les autres termes).

Écrivons alors l'équation (8.3) :

$$
\begin{aligned}
|\partial B_1|^2 + |\partial B_2|^2 = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^4 \tfrac{3}{4}\ell(\ell-1) &+ \sum_{i\neq j} z_i^2\, \bar{z}_j^2 (\ell-1)(\alpha_i\alpha_j + a_i\bar{a}_j) \\
&+ \sum_{i<j} |z_i z_j|^2 \Big(\ell(\ell-1) - 16\big(\alpha_i^2 |a_j|^2 \\
&\qquad + \alpha_j^2 |a_i|^2 - \alpha_i\alpha_j(a_i\bar{a}_j + a_j\bar{a}_i)\big)\Big).
\end{aligned}
$$

D'après (8.5), on sait que pour deux indices appartenant à deux « paquets » distincts (mettons $i \in I$ et $j \in J$), $|\partial B_1|^2 + |\partial B_2|^2$ ne comporte ni termes en $z_i^2 \bar{z}_j^2$, ni termes en $|z_i z_j|^2$. La première condition donnera, puisque λ_I est réel et $\alpha_I, \alpha_J \neq 0$: $\lambda_J = -{\lambda_I}^{-1}$ (réel), puis $\alpha_J = \lambda_I \alpha_I$. La seconde condition s'écrit alors :

$$
\ell(\ell-1) = 16\, \alpha_I^4 \big(1 + \lambda_I^2\big)^2 = \ell^2,
$$

d'où une contradiction puisque V n'est pas totalement géodésique ($\ell \neq 0$).

Deuxième cas : on peut supposer $Q_1 = 0$.

En réduisant Q_2 sous $\mathrm{U}(n)$, on obtient avec (8.2)

$$
Q_2(z) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\ell} \sum_i z_i^2,
$$

puis $B_2 = 0$. Notons $q_\alpha = \partial_\alpha B_1$ (formes quadratiques, $\alpha = 1, \ldots, n$) et découplons les variables z et $\bar{z}$ en posant $z_i = u_i$ et $\overline{z_i} = v_i$ ($i = 1, \ldots, n$). La relation (8.3) s'écrit alors :

$$
\sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha(u)\, \overline{q_\alpha}(v) = \tfrac{1}{4}\ell(\ell-1)\Big\{\Big(\sum_i u_i^2\Big)\Big(\sum_i v_i^2\Big) + 2\Big(\sum_i u_i v_i\Big)^2\Big\}.
$$

En considérant les (u_i) comme des paramètres, on obtient des identités entre des fonctions des (v_i). Le membre de gauche reste dans le sous-espace de dimension au plus n engendré par les $(\overline{q_\alpha})$, tandis qu'en faisant varier (u_i), on obtient lorsque $k \neq n, n+1$ au moins $n+1$ fonctions indépendantes dans le membre de droite. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[Be] BESSE (A.L.). — *Einstein manifolds.* — Springer, 1987.

[Ast] SÉMINAIRE PALAISEAU. — *Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de Calabi*, Astérisque, Soc. Math. France, Paris, t. **58**, 1978.

[Bo] BOCHNER (S.). — *Curvature in Hermitian metric*, Bull. Amer. Math. Soc., t. **53**, 1947, p. 179–195.

[B-M] BANDO (S.) and MABUCHI (T.). — *Uniqueness of Einstein Kähler metrics modulo connected group actions*, Advanced studies in Pure Math., t. **10**, 1987; *Algebraic geometry*, Sendai, 1985.

[Ca] CALABI (E.). — *Isometric imbedding of complex manifolds*, Ann. of Math., t. **58**, 1953, p. 1–23.

[C-Og] CHEN (B.-Y.) and OGIUE (K.). — *A characterization of the complex sphere*, Michigan Math. J., t. **21**, 1974, p. 231–232.

[Ch] CHERN (S.S.). — *Einstein hypersurfaces in a Kählerian manifold of constant holomorphic curvature*, J. Differential Geom., t. **1**, 1967, p. 21–31.

[Ha] HANO (J.). — *Einstein complete intersections in complex projective space*, Math. Ann., t. **216**, 1975, p. 197–208.

[K-O] KOBAYASHI (S.) and OCHIAI (T.). — *Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics*, J. Math. Kyoto Univ., t. **13**, 1973, p. 31–47.

[Ma] MATSUYAMA (Y.). — *On a 2-dimensional Einstein Kähler submanifold of a complex space form*, Proc. Amer. Math. Soc., t. **95**, 1985, p. 595–603.

[Ni] NISHIKAWA (S.). — *The Gauss map of Kaehler immersions*, Tôhoku Math. J., t. **27**, 1975, p. 453–460.

[Ob] OBATA (M.). — *The Gauss map of immersions of riemannian manifolds in spaces of constant curvature*, J. Differential Geom., t. **2**, 1968, p. 217–223.

[Og] OGUIE (K.). — *Differential geometry of Kähler submanifolds*, Advances in Maths., t. **13**, 1974, p. 73–114.

[Se] SERRE (J.-P.). — *Représentations linéaires et espaces homogènes kählériens des groupes de Lie compacts*, Séminaire Bourbaki, Exposé n° 100, 1954; Benjamin 1966.

[S] SMYTH (B.). — *Differential geometry of complex hypersurfaces*, Ann. of Math., t. **85**, 1967, p. 246–266.

[Ta] TAKEUCHI (M.). — *Homogeneous Kähler submanifolds in complex projective spaces*, Japan J. Math., t. **4**, 1978, p. 171–219.

[Ts] TSUKADA (K.). — *Einstein-Kähler submanifolds with codimension 2 in a complex space form*, Math. Ann., t. **274**, 1986, p. 503–516.

[U] UMEHARA (M.). — *Einstein Kähler submanifolds of a complex linear or hyperbolic space*, Tôhoku Math. J., t. **39**, 1987, p. 385–389.