BULLETIN DE LA S. M. F.

J. BRIANÇON
M. GRANGER
PH. MAISONOBE

Sur les systèmes différentiels relativement spécialisables et l'existence d'équations fonctionnelles relatives

Bulletin de la S. M. F., tome 124, n° 2 (1996), p. 217-242
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_2_217_0>

Bull. Soc. math. France,
124, 1996, p. 217–242.

SUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS RELATIVEMENT SPÉCIALISABLES ET L'EXISTENCE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES RELATIVES

PAR

J. BRIANÇON, M. GRANGER ET PH. MAISONOBE (*)

RÉSUMÉ. — Nous introduisons la notion de V-filtration relative pour un système différentiel sur une variété analytique complexe et nous définissons les systèmes différentiels relativement spécialisables. Cela généralise le cas absolu étudié par Malgrange, Kashiwara, Mebkhout et Sabbah. Ensuite, pour une fonction F et un système différentiel holonome $\mathcal{M}$, nous donnons des conditions géométriques nécessaires et suffisantes pour l'existence de polynômes de Bernstein relatifs pour mF^s, m étant une section de $\mathcal{M}$. Enfin nous appliquons ces résultats au cas particulier où $\mathcal{M}$ est le module de cohomologie locale sur une intersection complète à lieu singulier de dimension 1.

ABSTRACT. — Consider a smooth hypersurface T in a complex manifold W, and a submersion from W onto a manifold Y whose restriction to T is also a submersion. In this paper we define the notion of a differential system specialisable along T relative to the submersion; this generalises the absolute case studied by Malgrange, Kashiwara, Mebkhout, and Sabbah. From this we deduce necessary and sufficient geometrical conditions for the existence of relative Bernstein polynomials for mF^s, m being a section of a holonomic $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$ and F a holomorphic function on W. As an application we study the case when $\mathcal{M}$ is the local cohomology with support in a complete intersection.

Introduction

Dans ce travail, nous introduisons la notion de système différentiel relativement spécialisable le long d'une hypersurface et nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système ait cette propriété.

(*) Texte recu le 17 octobre 1994, révisé le 18 septembre 1995, accepté le 18 octobre 1995.

J. BRIANÇON et PH. MAISONOBE, Laboratoire J.A. Dieudonné Université de Nice, Parc Valrose, 06108 Nice CEDEX 2 (France).
M. GRANGER, Université d'Angers, 2 Bd. Lavoisier, 49405 Angers (France).

Classification AMS : 32S40 , 32S, 14B.

Nous en déduisons des conditions géométriques nécessaires et suffisantes pour l'existence de polynômes de Bernstein relatifs. En particulier, nous traitons le cas de la cohomologie locale à lieu singulier de dimension 1.

De façon plus précise, la situation est la suivante. On considère une variété analytique complexe W et une hypersurface $T \subset W$. Soit $\omega : W \to Y$ une submersion telle que $\omega_{|T}$ soit aussi une submersion. On considère d'autre part un module $\mathcal{M}$ sur l'anneau $\mathcal{D}_{W/Y}$ des opérateurs différentiels relatifs. Dans une première partie, nous reprenons dans le cas relatif des résultats donnés par Z. Mebkhout et C. Sabbah sur la V filtration et la spécialisation des systèmes différentiels. La théorie de la V filtration avait été développée par M. Kashiwara et B. Malgrange [K2], [Ma2] dans le but suivant : étant donné un module holonome régulier $\mathcal{M}$, déterminer le $\mathcal{D}$ module ayant pour solutions les cycles proches du faisceau des solutions de $\mathcal{M}$. Nous introduisons la notion de V filtration relative le long de T pour un $\mathcal{D}_{W/Y}$ module cohérent, puis la notion de module relativement spécialisable. Nous donnons alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'un $\mathcal{D}_W$-module spécialisable (au sens absolu) le long de T soit relativement spécialisable. Nous donnons aussi, au passage, un exemple de $\mathcal{D}_W$ module holonome régulier relativement cohérent et non relativement spécialisable.

Dans la deuxième partie, nous considérons $F : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur une variété analytique complexe Ω et une submersion $\omega' : \Omega \to Y$. Soit d'autre part $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_\Omega$ module holonome régulier qui soit $\mathcal{D}_{\Omega/Y}$ cohérent. L'objet de cette partie est de généraliser aux sections m de $\mathcal{M}$ les conditions d'existence du polynôme de Bernstein relatif pour mF^s trouvées pour $m = 1 \in \mathcal{O}_\Omega$ dans [B.L.M] (où $\mathcal{O}_\Omega$ est le faisceau des fonctions holomorphes). Nous donnons une condition géométrique portant sur le conormal de la restriction de F à la variété caractéristique de $\mathcal{M}$, nécessaire et suffisante pour que toute section de $\mathcal{M}$ admette un polynôme de Bernstein relatif, c'est-à-dire pour qu'il existe $b(s) \in \mathbb{C}[s] - \{0\}$ et $P \in \mathcal{D}_{\Omega/Y}[s]$ tel que $b(s)mF^s = PmF^{s+1}$. On passe d'abord comme dans le cas absolu par l'intermédiaire d'un système différentiel à support le graphe $t = F(x)$, et de la V filtration le long de $t = 0$. L'existence de polynômes de Bernstein équivaut au caractère relativement spécialisable de ce module. Pour en déduire le résultat principal, on montre ensuite que l'existence de polynôme de Bernstein relatif implique la cohérence de $\mathcal{M}[1/F]$ comme $\mathcal{D}_{\Omega/Y}$-module. D'après le résultat de [B.L.M], on en déduit que la variété caractéristique de $\mathcal{M}[1/F]$ est non caractéristique pour les fibres de ω'. Dans [Gi], Ginsburg montre comment calculer la variété caractéristique de $\mathcal{M}[1/F]$ à partir de celle de $\mathcal{M}$. L'interprétation géométrique de ce résultat qui est donnée avec

M. Merle [B.M.M], permet d'obtenir la condition géométrique mentionnée ci-dessus. Inversement, le fait qu'une telle condition entraîne l'existence de polynômes de Bernstein résulte du calcul de la variété caractéristique de $\mathcal{D}[s]F^s$ (voir [Gi]) et de l'usage des V-filtrations relatives sur le $\mathcal{D}_{\Omega\times\mathbf{C}}$-module $\mathcal{M}[1/(t-F)]$.

Dans la dernière partie, nous appliquons les résultats précédents à la situation suivante : $X \subset \Omega$ est une famille d'intersections complètes à singularités isolées paramétrées par Y, de dimension 1, de même que $X \cap F^{-1}(0)$ où F est holomorphe sur Ω. On désigne par $\mathcal{M} = R\Gamma_X\mathcal{O}_\Omega$ le module de cohomologie locale (en degré $d = \dim X$) de $\mathcal{O}_\Omega$ à support X. Nous montrons alors que la condition nécessaire et suffisante d'existence d'un polynôme de Bernstein relatif, trouvée dans la partie 2, est elle même équivalente à la condition suivante : X et $Z = X \cap F^{-1}(0)$ sont des déformations à nombre de Milnor constant le long d'une courbe Γ lisse au-dessus de Y. Résumons cette démonstration. On peut calculer le cycle caractéristique de $\mathcal{M}$ en utilisant la formule de l'indice de Kashiwara et le fait que les solutions de $\mathcal{M}$ se réduisent à $\mathbf{C}_X[d]$ où $d = \dim X$ et $\mathbb{C}_X$ est le faisceau constant sur X. En appliquant ceci à $\mathcal{M}$ et à $\mathcal{N} = R\Gamma_Z\mathcal{O}_\Omega$, ainsi que les résultats de [B.M.M] sur l'interprétation géométrique du calcul des cycles évanescents de $\mathcal{M}[1/F]$, on en déduit que X et Z sont des déformations à nombre de Milnor constant. On conclut en utilisant un critère discriminant de Looijenga [Loo]. La condition de discriminant peut s'obtenir en fait plus directement en utilisant [B.M.M] pour montrer que la courbe polaire $P_1(F_{|X})$ est vide. Cet exemple généralise le cas $X = \Omega$, $F^{-1}(0)$ déformation d'une hypersurface à singularité isolée, donné dans [B.L.M].

Table des matières

1. Systèmes différentiels relativement spécialisables

1.1. Bonnes V-filtrations relatives.

On se place dans la situation suivante : $w : W \to Y$ est une submersion entre deux variétés analytiques complexes, $T \subset W$ est une hypersurface lisse telle que la restriction de w à T reste une submersion de T dans Y. On désigne par $\mathcal{I}_T \subset \mathcal{O}_W$ le faisceau cohérent d'idéaux définissant T.

On note $\mathcal{D}_W$ le faisceau des opérateurs différentiels sur W, $\mathcal{D}_{W/Y}$ le sous faisceau des opérateurs différentiels relatifs, sous anneau de $\mathcal{D}_W$ engendré par $\mathcal{O}_W$ et par les champs de vecteurs tangents aux fibres de w.

Rappelons que $\mathcal{D}_W$ peut être muni d'une filtration croissante indexée par $\mathbb{Z}$, appelée classiquement la *V-filtration* (voir [Ma2], [K2], [Me], [S]) :

$$V_k(\mathcal{D}_W) = \{P \mid P\mathcal{I}_T^\ell \subset \mathcal{I}_T^{\ell-k} \text{ pour tout } \ell \geq k\}$$

et nous notons de la même façon la filtration induite sur les opérateurs différentiels relatifs :

$$V_k(\mathcal{D}_{W/Y}) = V_k(\mathcal{D}_W) \cap \mathcal{D}_{W/Y}.$$

Définition 1. — Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{W/Y}$-module cohérent muni d'une $\mathbb{Z}$-filtration croissante exhaustive $U_\bullet(\mathcal{M})$, compatible avec $V_\bullet(\mathcal{D}_{W/Y})$. On dit que $U_\bullet(\mathcal{M})$ est une *bonne V-filtration relative* de $\mathcal{M}$ s'il existe, localement, une surjection $\rho : \mathcal{D}_{W/Y}^r \to \mathcal{M}$ et des entiers relatifs $\ell_1, \dots, \ell_r$ tels que :

$$U_k(\mathcal{M}) = \rho\Big(\bigoplus_{j=1}^r V_{\ell_j+k}(\mathcal{D}_{W/Y})\Big).$$

Proposition 1. — *Étant donné un $\mathcal{D}_{W/Y}$-module cohérent $\mathcal{M}$ muni d'une V-filtration relative $U_\bullet(\mathcal{M})$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$U_\bullet(\mathcal{M})$ est une bonne V-filtration relative.*

(2) *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $U_k(\mathcal{M})$ est un $V_0(\mathcal{D}_{W/Y})$-module cohérent et il existe localement un entier naturel k_0 tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{cases} V_k(\mathcal{D}_{W/Y}) \cdot U_{k_0}(\mathcal{M}) = U_{k+k_0}(\mathcal{M}), \\ V_{-k}(\mathcal{D}_{W/Y}) U_{-k_0}(\mathcal{M}) = U_{-k-k_0}(\mathcal{M}). \end{cases}$$

(3) *Le faisceau*

$$\mathcal{R}_U(\mathcal{M}) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} U_k(\mathcal{M})\tau^k$$

est cohérent sur le faisceau d'anneaux $\mathcal{R}_V = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V_k(\mathcal{D}_{W/Y})\tau^k$.

La preuve de la proposition 1 se fait de la même manière que dans le cas absolu (voir [Me, p. 204–205]). Donnons en seulement les grandes lignes :

(1) $\Rightarrow$ (2). Ceci résulte du fait que pour deux entiers k et ℓ de même signe ou nuls on a :

$$V_k(\mathcal{D}_{W/Y})\cdot V_\ell(\mathcal{D}_{W/Y})=V_{k+\ell}(\mathcal{D}_{W/Y}).$$

(2) $\Rightarrow$ (3). On remarque que $\mathcal{R}_U(\mathcal{M})$ est engendré localement comme $\mathcal{R}_V$-module par

$$\bigoplus_{k=-k_0}^{k_0} U_k(\mathcal{M})\tau^k.$$

(3) $\Rightarrow$ (2). Réciproquement, si $\mathcal{R}_U(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{R}_V$-module cohérent, on peut choisir (localement) des générateurs homogènes et on peut prendre pour k_0 le maximum des valeurs absolues des degrés de ces générateurs.

(2) $\Rightarrow$ (1). Pour $-k_0\le k\le k_0$, on choisit (localement) un morphisme surjectif

$$V_0(\mathcal{D}_{W/Y})^{p_k}\longrightarrow U_k(\mathcal{M})$$

et on obtient alors une surjection

$$\rho:\mathcal{D}^p_{W/Y}\longrightarrow\mathcal{M}\quad\text{avec}\quad p=\sum_{k=-k_0}^{k_0}p_k$$

qui permet de récupérer la filtration $U_\bullet(\mathcal{M})$.

Nous avons passé sous silence les questions de cohérence en nous contentant de la finitude. Il faut pour cela utiliser la cohérence de l'anneau de Rees qui se démontre comme dans [Me, p. 204].

Proposition 2. — *Soit* $0\to\mathcal{M}'\xrightarrow{i}\mathcal{M}\xrightarrow{j}\mathcal{M}''\to 0$ *une suite exacte de* $\mathcal{D}_{W/Y}$*-modules cohérents. On suppose que* $U_\bullet(\mathcal{M})$ *est une bonne V-filtration relative sur* $\mathcal{M}$*. Les filtrations induites sur* $\mathcal{M}'$ *et* $\mathcal{M}''$: $U_k(\mathcal{M}')=i^{-1}(U_k(\mathcal{M}))$ *et* $U_k(\mathcal{M}'')=j(U_k(\mathcal{M}))$ *sont de bonnes V-filtrations relatives.*

Preuve. — Les filtrations induites fournissent, pour tout entier relatif k, une suite exacte

$$0\to U_k(\mathcal{M}')\longrightarrow U_k(\mathcal{M})\longrightarrow U_k(\mathcal{M}'')\to 0$$

et donc une suite exacte de modules sur l'anneau de Rees :

$$0\to\mathcal{R}_U(\mathcal{M}')\longrightarrow\mathcal{R}_U(\mathcal{M})\longrightarrow\mathcal{R}_U(\mathcal{M}'')\to 0.$$

D'après la définition, $U_\bullet(\mathcal{M}'')$ est une bonne V-filtration relative. Les $\mathcal{R}_V$-modules $\mathcal{R}_U(\mathcal{M})$ et $\mathcal{R}_U(\mathcal{M}'')$ sont donc cohérents d'après la proposition 1, partie (1) $\Rightarrow$ (3). Donc $\mathcal{R}_U(\mathcal{M}')$ est aussi cohérent et d'après la réciproque (3) $\Rightarrow$ (1), $U_\bullet(\mathcal{M}')$ est donc aussi une bonne V-filtration relative.

La proposition 2, en ce qui concerne $\mathcal{M}'$, est analogue au lemme d'Artin-Rees.

1.2. Modules relativement spécialisables.

On se donne, au voisinage d'un point de T, un champ de vecteurs tangents aux fibres de $w : W \to Y$ de la forme

$$E = t\frac{\partial}{\partial t}$$

où $t = 0$ est une équation locale de T. On peut vérifier que la classe de E dans $V_0(\mathcal{D}_W)/V_{-1}(\mathcal{D}_W) \approx \mathcal{D}_T[E]$ ne dépend pas du choix de l'équation locale.

PROPOSITION 3. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{W/Y}$-module cohérent. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *Il existe localement une bonne V-filtration relative $U_\bullet(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ et un polynôme non nul $c \in \mathbb{C}[s]$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$:*

$$c(E+k)U_k(\mathcal{M}) \subset U_{k-1}(\mathcal{M}).$$

b) *Pour toute bonne V-filtration relative de $\mathcal{M}$ sur un ouvert de W, la propriété* a) *est satisfaite localement.*

c) *Pour toute section locale m de $\mathcal{M}$, il existe un polynôme non nul $c \in \mathbb{C}[s]$ tel que :*

$$c(E)m \in V_{-1}(\mathcal{D}_{W/Y})m.$$

DÉFINITION 2.

• Un $\mathcal{D}_{W/Y}$-module cohérent $\mathcal{M}$ est *relativement spécialisable* le long de l'hypersurface $T \subset W$ si les propriétés de la proposition 3 sont satisfaites.

• Si m est une section locale d'un module $\mathcal{M}$ relativement spécialisable, le polynôme unitaire de degré minimum satisfaisant l'équation fonctionnelle c) de la proposition s'appelle la *c-fonction* relative de m le long de T.

• De même, si $U_\bullet(\mathcal{M})$ est une bonne filtration relative d'un $\mathcal{D}_{W/Y}$-module $\mathcal{M}$ relativement spécialisable, le polynôme unitaire de degré minimum $c \in \mathbb{C}[s]$ tel que $c(E+k)U_k(\mathcal{M}) \subset U_{k-1}(\mathcal{M})$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, s'appelle la *c-fonction* relative de $U_\bullet(\mathcal{M})$

REMARQUE 1. — Pour éviter les confusions, nous avons préféré ne pas donner le nom de « *b*-fonction » relative ou « polynôme de Bernstein relatif » de m le long de T qui est traditionnellement réservé au polynôme unitaire de degré minimum $b \in \mathbb{C}[s]$ tel que $b\Big(-\dfrac{\partial}{\partial t}t\Big)m \in V_{-1}(\mathcal{D}_{W/Y})m$. On a :

$$-\frac{\partial}{\partial t}t = -E - 1.$$

Preuve de la proposition 3. — Nous suivons toujours [Me, p. 205–207].

a) $\Rightarrow$ b). Soient $U_\bullet(\mathcal{M})$ et $U'_\bullet(\mathcal{M})$ deux bonnes V-filtrations relatives de $\mathcal{M}$. Nous supposons que $U_\bullet(\mathcal{M})$ vérifie la propriété a). En utilisant la définition des bonnes V-filtrations relatives, on montre l'existence (localement) d'un entier $\ell \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$U_{k-\ell}(\mathcal{M}) \subset U'_k(\mathcal{M}) \subset U_{k+\ell}(\mathcal{M}).$$

Posons :

$$d(s) = c(s+\ell)c(s+\ell-1)\cdots c(s-\ell)$$

où c est la c-fonction relative de $U_\bullet(\mathcal{M})$. On a :

$$d(E+k)U_{k+\ell}(\mathcal{M}) \subset U_{k-\ell-1}(\mathcal{M}) \subset U'_{k-1}(\mathcal{M})$$

d'où $d(E+k)U'_k(\mathcal{M}) \subset U'_{k-1}(\mathcal{M})$ et la propriété a) est satisfaite pour $U'_\bullet(\mathcal{M})$ avec le polynôme $d \in \mathbb{C}[s]$.

b) $\Rightarrow$ c) Soit $(m_i)_{i\in I}$ un système fini de générateurs de $\mathcal{M}$ au voisinage d'un point de T, avec $m = m_1$. Posons :

$$U_k(\mathcal{M}) = \sum_{i\in I} V_k(\mathcal{D}_{W/Y})m_i.$$

Alors $U_\bullet(\mathcal{M})$ est une bonne V-filtration relative de $\mathcal{M}$ et, par la propriété b), nous savons qu'il existe un polynôme non nul $c \in \mathbb{C}[s]$ tel que :

$$c(E)m_i \in \Big[\sum_{j\in I} V_{-1}(\mathcal{D}_{W/Y})m_j\Big] \cap \big[\mathcal{D}_{W/Y}m_i\big]$$

En itérant cette relation et en utilisant

$$c(E)V_\ell(\mathcal{D}_{W/Y}) \subset V_\ell(\mathcal{D}_{W/Y})c(E-\ell) + V_{\ell-1}(\mathcal{D}_{W/Y}),$$

on obtient :

$$c(E-k+1)\cdots c(E-1)c(E)m_i \in U_{-k}(\mathcal{M}) \cap [\mathcal{D}_{W/Y}m_i].$$

Or $\mathcal{D}_{W/Y}m_i$ possède deux bonnes V-filtrations relatives :

• la filtration induite $U_\bullet(\mathcal{M}) \cap [\mathcal{D}_{W/Y}m_i]$, bonne d'après la proposition 2;

• la filtration naturelle : $U'_\bullet(\mathcal{D}_{W/Y}m_i) = V_\bullet(\mathcal{D}_{W/Y})m_i$.

Par comparaison des bonnes filtrations, il existe un entier naturel k_0 tel que :

$$U_{-k_0}(\mathcal{M}) \cap [\mathcal{D}_{W/Y}m_i] \subset U'_{-1}(\mathcal{D}_{W/Y}m_i) = V_{-1}(\mathcal{D}_{W/Y})m_i.$$

Donc $c(E-k_0+1)\cdots c(E-1)c(E)$ est une c-fonction pour chaque m_i, donc en particulier pour m.

c) $\Rightarrow$ a). Soit $(m_i)_{i\in I}$ un système fini de sections engendrant localement $\mathcal{M}$. Par hypothèse, il existe un polynôme non nul $c \in \mathbb{C}[s]$ vérifiant

$$c(E)m_i \in V_{-1}(\mathcal{D}_{W/Y})m_i$$

pour tout $i \in I$. Soit

$$U_k(\mathcal{M}) = \sum_{i\in I} V_k(\mathcal{D}_{W/Y})m_i$$

la bonne V-filtration relative de $\mathcal{M}$ induite. Vérifions que l'on a bien :

$$c(E+k)U_k(\mathcal{M}) \subset U_{k-1}(\mathcal{M}).$$

En effet :

$$\begin{aligned} c(E+k)U_k(\mathcal{M}) &= \sum_{i\in I} c(E+k)V_k(\mathcal{D}_{W/Y})m_i \\ &\subset \sum_{i\in I}\big[V_k(\mathcal{D}_{W/Y})c(E) + V_{k-1}(\mathcal{D}_{W/Y})\big]m_i \\ &\subset \sum_{i\in I}\big[V_k(\mathcal{D}_{W/Y})V_{-1}(\mathcal{D}_{W/Y})m_i\big] + \sum_{i\in I} V_{k-1}(\mathcal{D}_{W/Y})m_i \\ &\subset \sum_{i\in I} V_{k-1}(\mathcal{D}_{W/Y})m_i = U_{k-1}(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

REMARQUE 2.

α) Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{W/Y}$-module cohérent à support dans T, il est relativement spécialisable. En effet, toute section locale de $\mathcal{M}$ est annulée par une puissance de t.

β) Si $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{D}_{W/Y}$-module cohérents, $\mathcal{M}$ est relativement spécialisable si et seulement si $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ le sont.

On peut démontrer de manière analogue au cas absolu :

PROPOSITION 4. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{W/Y}$-module cohérent relativement spécialisable et soit $G \subset \mathbb{C}$ l'image d'une section de la projection $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Il existe localement une unique bonne filtration relative $U_{\bullet}^{G}(\mathcal{M})$ qui admette localement une c-fonction relative satisfaisant $c^{-1}(0) \subset G$.*

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{W/Y}$-module cohérent spécialisable. Si m est une section locale de $\mathcal{M}$, c_m sa c-fonction, on appelle *ordre relatif* de m :

$$\operatorname{ord}_r(m) = c_m^{-1}(0).$$

La famille $\{\operatorname{ord}_r(m) \mid m \in \mathcal{M}\}$ est localement contenue dans une réunion finie $\mathbb{E} = \bigcup\{\alpha + \mathbb{Z}\}$ de réseaux de $\mathbb{C}$. On note $\leq$ l'ordre lexicographique de $\mathbb{C} \approx \mathbb{R} + i\mathbb{R}$.

DÉFINITION 3. — On appelle *V-filtration relative canonique par l'ordre* en T la filtration indexée par $\mathbb{E}$ définie par :

$$\forall x \in W,\ \ U_\alpha(\mathcal{M})_x = \big\{m \in \mathcal{M}_x \mid \operatorname{ord}_r(m) \subset \{s \in \mathbb{C},\ s \geq -\alpha - 1\}\big\}.$$

Comme dans le cas absolu, on démontre :

PROPOSITION 5. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{W/Y}$-module cohérent relativement spécialisable le long de T. Pour tout $\alpha \in \mathbb{E}$, $(U_{\alpha+k}(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ est une bonne filtration relative, égale à la filtration $U_{\bullet}^{G}(\mathcal{M})$ pour*

$$G = \big\{s \in \mathbb{C} \mid -\alpha - 1 \leq s < -\alpha\big\}.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{E}$, on note :

$$\operatorname{Gr}_\alpha^U(\mathcal{M}) = \frac{U_\alpha(\mathcal{M})}{U_{<\alpha}(\mathcal{M})}\cdot$$

Alors $\operatorname{Gr}_\alpha^U(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{D}_{T/Y}$-module cohérent. En effet c'est un

$$V_0(\mathcal{D}_{W/Y})/V_{-1}(\mathcal{D}_{W/Y}) \approx \mathcal{D}_{T/Y}[E]$$

module cohérent admettant un polynôme minimal pour l'action de E.

1.3. Conditions de spécialisation relative.

LEMME 1. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_W$-module cohérent, $\mathcal{D}_{W/Y}$-cohérent et relativement spécialisable; soit χ un champ de vecteurs tangents qui commute avec t et $\partial/\partial t$. Si $c_m(s)$ désigne la c-fonction relative d'une section locale m de $\mathcal{M}$, il existe un entier ℓ tel que la c-fonction relative de χm divise*

$$c_m(s)c_m(s-1)\cdots c_m(s-\ell).$$

Preuve.— Comme $c_m\Big(t\dfrac{\partial}{\partial t}\Big)m$ appartient à $V^{-1}(\mathcal{D}_{W/Y})m$, nous avons :

$$c_m\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)\chi m \in V^{-1}(\mathcal{D}_{W/Y})m + V^{-1}(\mathcal{D}_{W/Y})\chi m.$$

Ainsi, si $\mathcal{N} = \mathcal{D}_{W/Y}m + \mathcal{D}_{W/Y}\chi m$, $c_m(s)$ est une c-fonction de la V-filtration relative définie par :

$$\mathcal{N}_k = V^k(\mathcal{D}_{W/Y})m + V^k(\mathcal{D}_{W/Y})\chi m.$$

On en déduit, en reproduisant la preuve de la proposition 3, que le polynôme de Bernstein de χm divise l'itéré $c_m(s)c_m(s-1)\cdots c_m(s-\ell)$ pour un entier ℓ convenable.

PROPOSITION 6. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_W$-module cohérent, $\mathcal{D}_{W/Y}$-cohérent et relativement spécialisable. Il existe un $V_0(\mathcal{D}_W)$-module $\mathcal{M}_0$ qui est $V_0(\mathcal{D}_{W/Y})$ cohérent et qui engendre $\mathcal{M}$ comme $\mathcal{D}_W$-module :*

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}_W \cdot \mathcal{M}_0.$$

Preuve. — Soient $G = \{s \in \mathbb{C} \mid -1 \leq s < 0\}$ et $U^G_\bullet(\mathcal{M})$ la V-filtration relative associée à G. Il existe un entier k_0 tel que $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{W/Y}U^G_{k_0}(\mathcal{M})$. Il résulte de la proposition 5 et du lemme que $U^G_{k_0}(\mathcal{M})$ est stable par χ (où χ est un champ de vecteurs tangents qui commute à t et $\partial/\partial t$). On en déduit que $\mathcal{M}_0 = U^G_{k_0}(\mathcal{M})$ convient (en effet dans un système de cordonnées locales adaptées $U^G_{k_0}(\mathcal{M})$ est stable par $V_0(\mathcal{D}_{W/Y})$ donc par $V_0(\mathcal{D}_W)$ qui est engendré par $V_0(\mathcal{D}_{W/Y})$ et les $\partial/\partial y_i$).

La proposition suivante contient une réciproque de ce résultat.

PROPOSITION 7. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_W$-module cohérent spécialisable le long de T. On suppose $\mathcal{M} = \mathcal{D}_W \cdot \mathcal{M}_0$ où $\mathcal{M}_0$ est un $V_0(\mathcal{D}_W)$-module $V_0(\mathcal{D}_{W/Y})$-cohérent. Alors :*

1) *$\mathcal{M}$ est $\mathcal{D}_{W/Y}$-cohérent et relativement spécialisable le long de T.*

2) *Pour toute section locale m de $\mathcal{M}$, si $c_m(s)$ (resp. $b_m(s)$) désigne la c-fonction relative de m (resp. la c-fontion absolue), il existe un entier $\ell \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\begin{cases} b_m(s) \text{ divise } c_m(s), \\ c_m(s) \text{ divise } b_m(s)b_m(s-1)\cdots b_m(s-\ell). \end{cases}$$

3) *La filtration relative canonique de $\mathcal{M}$ par l'ordre en T coïncide avec la filtration canonique (absolue) de $\mathcal{M}$ par l'ordre en T.*

Preuve.

1) Le problème est local. Soit $(m_i)_{i\in I}$ un système fini de générateurs de $\mathcal{M}_0$ comme $V_0(\mathcal{D}_{W/Y})$ module. Soit

$$(x_1, \dots, x_n, t, y_1, \dots, y_p)$$

un système de coordonnées locales telles que $t = 0$ soit une équation de T et que ω soit la projection $(x, t, y) \mapsto y$.

Comme $\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^J$ appartient à $V_0(\mathcal{D}_W)$ pour tout multi-indice $J \in \mathbb{N}^p$, on a :

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}_W \mathcal{M}_0 = \sum_J \mathcal{D}_{W/Y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^J \mathcal{M}_0 = \mathcal{D}_{W/Y}\mathcal{M}_0 = \sum_{i\in I} \mathcal{D}_{W/Y} m_i.$$

Il en résulte que $\mathcal{M}$ est $\mathcal{D}_{W/Y}$-cohérent. Pour montrer qu'il est relativement spécialisable, considérons avec les notations précédentes, la $V_\bullet(\mathcal{D}_{W/Y})$-bonne filtration relative de $\mathcal{M}$:

$$U_k(\mathcal{M}) = \sum_{i\in I} V_k(\mathcal{D}_{W/Y}) m_i = \sum_{i\in I} V_k(\mathcal{D}_W) m_i\,.$$

La dernière égalité est due au fait que $V_k(\mathcal{D}_W) = V_k(\mathcal{D}_{W/Y})V_0(\mathcal{D}_W)$.

Cette filtration relative coïncide donc avec une bonne filtration absolue de $\mathcal{M}$. D'après la caractérisation a) de la proposition 3, appliquée successivement à la spécialisation absolue puis relative, on en déduit que $\mathcal{M}$ est relativement spécialisable.

2) Remarquons d'abord que, sous les hypothèses de la proposition, pour toute bonne V-filtration absolue $L_\bullet(\mathcal{M})$, et tout entier relatif k, $L_k(\mathcal{M})$ est $V_0(\mathcal{D}_{W/Y})$-cohérent. En effet, $V_k(\mathcal{D}_W)\mathcal{M}_0$ est une bonne V-filtration de $\mathcal{M}$ et, par comparaison des bonnes filtrations, nous savons qu'il existe un entier r tel que

$$L_k(\mathcal{M}) \subset V_{k+r}(\mathcal{D}_W) \cdot \mathcal{M}_0 = V_{k+r}(\mathcal{D}_{W/Y}) \cdot \mathcal{M}_0.$$

On en déduit que $L_k(\mathcal{M})$ est contenu dans un $V_0(\mathcal{D}_{W/Y})$-module cohérent et est donc $V_0(\mathcal{D}_{W/Y})$-cohérent.

Pour prouver 2), considérons $\mathcal{N} = \mathcal{D}_W \cdot m$. D'après la remarque qui précède, $V_k(\mathcal{N}) = V_k(\mathcal{D}_W) \cdot m$ est à la fois une bonne filtration absolue et relative de $\mathcal{N}$; il en résulte que $b_m(s)$ est aussi la c-fonction de cette filtration relative et le point 2) de la proposition résulte alors de la comparaison entre les bonnes filtrations relatives $V_k(\mathcal{D}_{W/Y}) \cdot m$ et $V_k(\mathcal{D}_W) \cdot m \cap \mathcal{D}_{W/Y} \cdot m$. Il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$V_{k-\ell}(\mathcal{D}_W) \cdot m \cap \mathcal{D}_{W/Y} \cdot m \subset V_k(\mathcal{D}_{W/Y}) \cdot m \subset V_k(\mathcal{D}_W) \cdot m \cap \mathcal{D}_{W/Y} \cdot m.$$

La partie 3) résulte directement de 2) car les c-fonctions relatives et absolues c_m et b_m de m ont la même plus petite racine (ou, éventuellement, $c_m = b_m = 1$).

Nous avons utilisé le lemme suivant : *soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_W$-module cohérent (resp. $V^0(\mathcal{D}_W)$ cohérent), $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ un sous $\mathcal{D}_{W|Y}$ module de type fini (resp. un sous $V^0(\mathcal{D}_{W|Y})$-module de type fini) ; alors $\mathcal{N}$ est relativement cohérent.*

Donnons pour finir quelques exemples de $\mathcal{D}_W$ modules spécialisables, relativement cohérents et non relativement spécialisables.

EXEMPLE 1.

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{D}\mathrm{e}^{x/y} \quad \text{où} \quad T = Y, \ \text{d'équation } x = 0, \quad W = \mathbb{C}^2.$$

Ici, $\mathcal{M}_1$ est $\mathcal{D}_W$ holonome. Comme

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y} + x\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)\,\mathrm{e}^{x/y} = 0,$$

$\mathcal{M}_1$ est $\mathcal{D}_{W/Y}$ cohérent (mais $y = 0$ est quand même caractéristique pour $\mathcal{M}_1$, voir [B.M, p. 14]). Le module, $\mathcal{M}_1$ est spécialisable le long de T, une équation de spécialisation est :

$$\Big[\Big(x\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2 - \Big(x\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big]\,\mathrm{e}^{x/y} = -\Big(x\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)\,\mathrm{e}^{x/y}.$$

En revanche, $\mathcal{M}_1$ n'est pas relativement spécialisable le long de T. Sinon, il existerait $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ et P un opérateur dépendant de $x, y, x\partial/\partial x$ tel que :

$$b\Big(x\frac{\partial}{\partial x}\Big)\,\mathrm{e}^{x/y} = xP\Big(x, y, x\frac{\partial}{\partial x}\Big)\,\mathrm{e}^{x/y}.$$

On en déduirait une identité :

$$c\Big(\frac{x}{y}\Big)\,\mathrm{e}^{x/y} = xQ\Big(x, y, \frac{x}{y}\Big)\,\mathrm{e}^{x/y}$$

où c serait un polynôme de même degré que b, d'où une impossibilité pour des raisons d'homogénéité.

EXEMPLE 2.

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial/\partial x + \partial/\partial y) \quad \text{où} \quad T = Y, \text{ d'équation } \ x = 0, \quad W = \mathbb{C}^2.$$

Ici, $\mathcal{M}_2$ n'est pas holonome ; il est pourtant spécialisable le long de T puisque dans $\mathcal{M}_2$:

$$x\,\frac{\partial}{\partial x} = -x\,\frac{\partial}{\partial y}\cdot$$

Il n'est pas relativement spécialisable le long de T car isomorphe à l'anneau des opérateurs relatifs qui n'est bien sûr pas relativement spécialisable.

EXEMPLE 3.

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial/\partial x + \partial/\partial y, x - y) \quad \text{où} \quad T = Y, \text{ d'équation } x = 0, \ W = \mathbb{C}^2.$$

Ici, $\mathcal{M}_3$ est isomorphe à $\mathcal{O}[1/x-y]/\mathcal{O}$; il est donc holonome régulier et spécialisable. $\mathcal{M}_3$ est un quotient de $\mathcal{M}_2$ et on a toujours dans $\mathcal{M}_3$:

$$x\,\frac{\partial}{\partial x} = -x\,\frac{\partial}{\partial y}\cdot$$

Mais $\mathcal{M}_3$ n'est pas relativement spécialisable le long de T. Car on aurait une identité dans $\mathcal{M}_3$:

$$b\Big(x\,\frac{\partial}{\partial x}\Big) = xP\Big(x, y, x\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)$$

d'où une identité :

$$b\Big(x\,\frac{\partial}{\partial x}\Big) = xA\Big(x, x\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)$$

où A serait un opérateur de la seule variable x. Une telle identité est impossible car $\mathcal{M}_3$ est isomorphe à l'anneau des opérateurs différentiels de la variable x.

2. Polynôme de Bernstein relatif

Soient $\omega : \Omega \to Y$ une submersion entre deux variétés analytiques complexes, $F : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $\mathcal{P}$ un $\mathcal{D}_\Omega$ module holonome qu'on peut écrire $\mathcal{P} = \mathcal{D}_\Omega \cdot \mathcal{P}_0$ où $\mathcal{P}_0$ est $\mathcal{O}_\Omega$-cohérent. On suppose que 0 est l'unique valeur critique de F. Rappelons que $\mathcal{P}[1/F, s]F^s$ est de façon naturelle un $\mathcal{D}_\Omega$ module ; nous noterons

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{D}_\Omega[s]\mathcal{P}_0 F^s \subset \mathcal{P}[1/F, s]F^s.$$

COROLLAIRE 1. — *Si $\mathcal{M}_0 = \mathcal{D}_\Omega[s]\mathcal{P}_0 F^s$ est $\mathcal{D}_{\Omega/Y}[s]$-cohérent, pour toute section locale u de $\mathcal{P}_0$, uF^s admet un polynôme de Bernstein relatif : il existe $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ non nul tel que $b(s)uF^s \in \mathcal{D}_{\Omega/Y}[s]uF^{s+1}$.*

Preuve. — On peut munir le germe de $\mathcal{P}[1/F, s]F^s$ en un point de Ω où F s'annule d'une structure de $\mathbb{C}\{t\}[\partial/\partial t]$ module en posant (comme dans [Ma1]) :

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)m(s)F^s = -sm(s-1)\Big(\frac{1}{F}\Big)F^s,$$
$$tm(s)F^s = m(s+1)F^{s+1}.$$

On constate en particulier que la multiplication par s coïncide avec l'opérateur $-(\partial/\partial t)t$.

Notons toujours $\omega : W = \Omega \times \mathbb{C} \longrightarrow Y$ la submersion évidente, $T = \Omega \times \{0\}$; considérons dans $\mathcal{P}[1/F, s]F^s$ le sous $\mathcal{D}_W$-module

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}_W \mathcal{P}_0 F^s\ ;$$

c'est un germe de $\mathcal{D}_W$-module holonome car il s'identifie à un quotient de l'image directe de $\mathcal{P}$ par le morphisme graphe de F. Alors $V_0(\mathcal{D}_W)\cdot\mathcal{P}_0F^s$ est égal à $\mathcal{D}_\Omega[s]\cdot\mathcal{P}_0F^s$ et est $V_0(\mathcal{D}_{W/Y})$ cohérent par hypothèse ; la proposition 7 s'applique au couple $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_\Omega[s]\cdot\mathcal{P}_0F^s)$. Le corollaire s'en déduit.

Soit $\mathcal{P}$ un $\mathcal{D}_\Omega$-module holonome régulier. Rappelons certains résultats de la théorie des $\mathcal{D}$ modules. Le module $\mathcal{P}[1/F]$ est encore un $\mathcal{D}_\Omega$-module holonome régulier ; Kashiwara et Malgrange définissent (dans [Ma2] et[K2]) un $\mathcal{D}_\Omega$-module $\Psi_F(\mathcal{P})$ supporté par $F = 0$; ce $\mathcal{D}_\Omega$ module est holonome régulier et ses solutions s'obtiennent à partir des solutions de $\mathcal{P}$ par application du foncteur Ψ_F des cycles évanescents (voir [D.K]).

Notons
$$\mathrm{Car}(\mathcal{P}) = \bigcup T^*_{X_\alpha}\Omega$$
la variété caractéristique de $\mathcal{P}$, réunion des conormaux à certains sous-espaces irréductibles de Ω ; on définit $C_{F|X_\alpha}$ le conormal relatif à la restriction de F à X_α par :

$$C_{F|X_\alpha} = \overline{\big\{(x, \xi + \lambda \mathrm{d}F(x)) \mid (x,\xi) \in T^*_{X_\alpha}\Omega,\ \lambda \in \mathbb{C}\big\}} \subset T^*\Omega.$$

Soit π la projection de $T^*\Omega$ sur Ω ; notons encore $W_0(F|X_\alpha)$ la variété lagrangienne (voir [Gi], [B.M.M])

$$W_0(F|X_\alpha) = C_{F|X_\alpha} \cap \pi^{-1}\big(F^{-1}(0)\big).$$

Enfin, $\mathcal{P}_0$ désigne toujours un $\mathcal{O}_\Omega$-module cohérent qui engendre $\mathcal{P}$ comme $\mathcal{D}_\Omega$-module. A partir de résultats de Ginsburg [Gi, th. 3.3, p. 352 et th. 5.5, p. 361], le calcul des cycles caractéristiques des $\mathcal{D}_\Omega$-Modules

$$\mathcal{D}_\Omega[s]\mathcal{P}_0F^s, \quad \Psi_F(\mathcal{P}), \quad \mathcal{P}[1/F].$$

est donné, à l'aide des espaces conormaux relatifs et des multiplicités des polaires relatives, avec M. Merle dans [B.M.M, th. 3.4.2, p. 539]. Les variétés caractéristiques sont respectivement :

$$\begin{aligned}
\operatorname{car}\big(\mathcal{D}_\Omega[s]\mathcal{P}_0F^s\big) &= \bigcup_{F(X_\alpha)\neq 0} C_{F|X_\alpha},\\
\operatorname{car}\big(\Psi_F(\mathcal{P})\big) &= \bigcup_{F(X_\alpha)\neq 0} W_0(F|X_\alpha),\\
\operatorname{car}\big(\mathcal{P}[1/F]\big) &= \Big[\bigcup_{F(X_\alpha)\neq 0} T^*_{X_\alpha}\Omega\Big] \cup \Big[\bigcup_{F(X_\alpha)\neq 0} W_0(F|X_\alpha)\Big].
\end{aligned}$$

THÉORÈME 1. — *Soient $F:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction holomorphe dont la seule valeur critique est* 0, $\omega:\Omega\to Y$ *une submersion,* $\mathcal{P}$ *un* $\mathcal{D}_\Omega$*-module holonome régulier qui soit aussi* $\mathcal{D}_{\Omega/Y}$ *cohérent tel que* $\mathcal{P}=\mathcal{D}_{\Omega/Y}\mathcal{P}_0$, *où* $\mathcal{P}_0$ *est* $\mathcal{O}_\Omega$ *cohérent. Les proprietés suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathcal{D}_\Omega[s]\mathcal{P}_0F^s$ *est un* $\mathcal{D}_{\Omega/Y}[s]$ *module cohérent;*

(2) *pour toute section locale* u *de* $\mathcal{P}_0$, uF^s *admet un polynôme de Bernstein relatif;*

(3) $\mathcal{P}[1/F]$ *est* $\mathcal{D}_{\Omega/Y}$ *cohérent;*

(4) *au voisinage de tout zéro* x_0 *de* F *dans* Ω :

$$\Big[\bigcup_{F(X_\alpha)\neq 0} W_0(F|X_\alpha)\Big] \cap T^*_{\omega^{-1}(\omega(x_0))}\Omega \subset T^*_\Omega\Omega\,;$$

(5) *au voisinage de tout zéro* x_0 *de* F *dans* Ω :

$$\Big[\bigcup_{F(X_\alpha)\neq 0} C_{F|X_\alpha}\Big] \cap T^*_{\omega^{-1}(\omega(x_0))}\Omega \subset T^*_\Omega\Omega\,;$$

(6) *au voisinage de* $F^{-1}(0)$, $\mathcal{D}_\Omega[s]\mathcal{P}_0F^s$ *est* $\mathcal{D}_{\Omega/Y}$ *cohérent;*

(7) *au voisinage de* $F^{-1}(0)$, $\Psi_F(\mathcal{P})$ *est* $\mathcal{D}_{\Omega/Y}$ *cohérent.*

Preuve. — Avant de commencer la démonstration, rappelons que, d'après un théorème établi avec Y. Laurent [B.L.M], l'hypothèse sur $\mathcal{P}$ est équivalente à «ω est non caractéristique pour $\mathcal{P}$», c'est-à-dire $\operatorname{Car}(\mathcal{P})\cap T^*_{\omega^{-1}(y)}\Omega\subset T^*_\Omega\Omega$ pour tout $y\in Y$.

(1) $\Rightarrow$ (2) résulte du corollaire 1.

(2) $\Rightarrow$ (3). Soit m_i un système fini de générateurs de $\mathcal{P}_0$ sur $\mathcal{O}_\Omega$ au voisinage d'un point $x_0 \in \Omega$; soit $b(s)$ un polynôme de Bernstein relatif commun à tous les m_i et k un entier naturel tel que $b(-\ell) \neq 0$ pour tout $\ell > k$. Posons :

$$\mathcal{L} = \sum_{i \in I} \mathcal{D}_{\Omega/Y}(m_i/F^k) \subset \mathcal{P}[1/F].$$

Il est clair que pour tout i et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, m_i/F^ℓ est une section de $\mathcal{L}$; par récurrence sur le degré d'un opérateur différentiel relatif $P \in \mathcal{D}_{\Omega/Y}$, on en déduit que Pm_i/F^ℓ appartient à $\mathcal{L}$ et par conséquent que $\mathcal{L} = \mathcal{P}[1/F]$; il en résulte que $\mathcal{P}[1/F]$ est relativement cohérent.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) : d'après le théorème établi avec Laurent et le rappel sur la variété caractéristique de $\mathcal{P}[1/F]$.

(4) $\Rightarrow$ (5) : évident par définition.

(5) $\Rightarrow$ (6) : $\mathcal{D}_\Omega[s]\mathcal{P}_0 F^s$ est $\mathcal{D}_\Omega$-cohérent (voir [Gi, prop. 2.14.4, p. 351]) ; grâce au rappel sur les variétés caractéristiques, la condition 5 se traduit par : « ω est non caractéristique pour ce $\mathcal{D}_\Omega$ module » ; il est donc relativement cohérent.

(6) $\Rightarrow$ (1) : évident.

(7) $\Leftrightarrow$ (4) : se montre de la même manière que (3) $\Leftrightarrow$ (4).

Exemple A. — Prenons sur un voisinage Ω de l'origine dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, $\mathcal{M} = \mathcal{O}$, $\omega : \Omega \times \mathbb{C} \to Y = \{0\} \times \mathbb{C}$ la dernière projection et $F : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que le conormal relatif à F, C_F, ne rencontre le conormal à $\omega^{-1}(0)$ que dans la section nulle ; cela peut s'exprimer par $\partial F/\partial y$ entier sur l'idéal $(\partial F/\partial x_1, \dots, \partial F/\partial x_n)$ au voisinage de l'origine (voir [B.L.M]). D'après le théorème 1, pour toute fonction holomorphe u (au voisinage de 0), uF^s admet un polynôme de Bernstein relatif.

Montrons comment nous pouvons obtenir une équation fonctionnelle relative pour uF^s à partir du polynôme de Bernstein relatif de F^s : supposons $u(x,y) = y^\alpha v(x,y)$ avec $v(x,0) \neq 0$ et choisissons un opérateur différentiel relatif Q tel que $Q(v) = 1$ (on peut en trouver un de la forme $Q = \lambda(x,y)(\partial/\partial x_1)^{\ell_1} \cdots (\partial/\partial x_n)^{\ell_n}$ avec $\lambda(x,y)$ une unité). En multipliant par F^{s+k+1} où k est le degré de Q nous obtenons :

$$(*) \qquad F^{s+k+1}Qv = RvF^{s+1} = F^{s+k+1}.$$

D'autre part, en itérant l'équation fonctionnelle $b(s)F^s = PF^{s+1}$ (où P est dans $\mathcal{D}_{\Omega/Y}[s]$), nous avons :

$$(**) \qquad b(s)b(s+1)\cdots b(s+k)F^s = SF^{s+k+1}.$$

En utilisant alors (*) et (**)

$$b(s)b(s+1)\cdots b(s+k)F^s = SRvF^{s+1}$$

et en multipliant par $u = y^\alpha v$:

$$b(s)b(s+1)\cdots b(s+k)uF^s = TuF^{s+1}$$

(où $T = vSR \in \mathcal{D}_{\Omega/Y}[s]$).

EXEMPLE B. — Soient F et G deux fonctions sur Ω (voisinage de 0 assez petit) ; en appliquant le théorème au $\mathcal{D}_\Omega$-module $\mathcal{O}[1/G]$ on obtient l'équivalence des propriétés suivantes :

- $(FG)^s$ admet un polynôme de Bernstein relatif ;
- $\mathcal{O}[1/FG]$ est $\mathcal{D}_{\Omega/Y}$ cohérent ;
- $\mathcal{O}[1/G]$ est $\mathcal{D}_{\Omega/Y}$ cohérent et uF^s admet un polynôme de Bernstein relatif pour toute section u de $\mathcal{O}[1/G]$.

On remarquera que les conditions 1 et 2 sont symétriques de manière évidente contrairement à la condition 3.

3. Application : cohomologie locale d'une déformation d'intersection complète à singularité isolée

Désignons par X un germe d'intersection complète à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, de dimension $d+1$, défini par la suite régulière $(F_1, F_2, \ldots, F_k)$ de fonctions holomorphes au voisinage de 0 ; on a donc $(d+1)+k = n+1$. Nous supposons que le lieu singulier $\Gamma = \operatorname{sing}(X)$ de X, défini dans X par l'annulation des $k \times k$ mineurs de la matrice jacobienne de $(F_1, F_2, \ldots, F_k)$ est une courbe.

Sur un voisinage ouvert Ω de l'origine, on peut définir la cohomologie locale algébrique de $\mathcal{O}_\Omega$ à support X ; celui-ci étant une intersection complète, ce complexe est concentré en degré k. On notera $\mathcal{M}$ son groupe de cohomologie et on a :

$$\mathcal{M} = R^k\Gamma_X\mathcal{O}_\Omega = \frac{\mathcal{O}_\Omega[1/F_1 \cdot F_2 \cdots F_k]}{\sum_{j=1}^k \mathcal{O}_\Omega[1/F_1 \cdots \widehat{F_j} \cdots F_k]}.$$

Le groupe de cohomologie $\mathcal{M}$ est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{D}_\Omega$-module. Ce $\mathcal{D}_\Omega$-module est holonome régulier et ses solutions $R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_\Omega}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_\Omega)$ se réduisent au prolongement par zéro du faisceau constant sur X placé en degré k (voir [Me]).

3.1. Mise en place géométrique et cycle caractéristique de $\mathcal{M} = R^k\Gamma_X\mathcal{O}_\Omega$.

Supposons fixé un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n, y)$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ où la forme linéaire y est assez générale : précisément, telle que $\mathrm{Ker}(y)$ ne soit pas limite d'hyperplans tangents à X ou à Γ. Alors l'application

$$\Phi = (F_1, F_2, \ldots, F_k, y)$$

définit une intersection complète $\Phi^{-1}(0) = X_0$ à singularité isolée de dimension d, et nous pouvons considérer X comme une déformation $X_y = \Phi^{-1}((0, y))$ de X_0 à un paramètre y.

Nous pouvons choisir suivant Looijenga, un « bon représentant propre de Φ » (*cf.* [Loo, p. 26–27] : W, Y, S désignent des boules ouvertes respectivement de $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^k$; $\Omega = (W \times Y) \cap \Phi^{-1}(S \times Y)$; nous notons par les mêmes lettres les représentants dans Ω des germes d'espace ou d'applications : par exemple $X = \Phi^{-1}(\{0\} \times Y)$, $X_0 = \Phi^{-1}((0, 0))$, $X_y = \Phi^{-1}((0, y))$, etc. Rappelons que Φ est transverse à $\partial W \times Y$ et que

$$\Phi : (\overline{W} \times Y) \cap \Phi^{-1}(S \times Y) \longrightarrow S \times Y$$

est propre; on notera encore C_Φ le lieu critique de Φ et D_Φ son lieu discriminant.

Quitte à encore réduire Ω si nécessaire, nous supposons les conditions suivantes réalisées :

• La décomposition $\Gamma = \bigcup_{j \in J} \Gamma_j$ du lieu singulier réduit de X en composantes irreductibles dans les germes à l'origine reste valable dans Ω, et la projection y de $\Gamma'_j = \Gamma_j - \{0\}$ sur $Y - \{0\}$ est un revêtement à ν_j feuillets (ν_j est la multiplicité de Γ_j à l'origine).

• $\{\{0\}, (\Gamma'_j = \Gamma_j - \{0\})_{j \in J}, X' = X - \Gamma\}$ est une stratification de Whitney de X.

Nous pouvons alors parler de la fibre générique X_y pour $y \in Y - \{0\}$, de son nombre de Milnor $\mu_j^{(d)}$ en un point de Γ'_j ; du nombre de Milnor $\mu_j^{(d-1)}$ de la section hyperplane générique de X_y en un point de Γ'_j (puisque ces nombres sont constants le long de Γ'_j et ne dépendent pas de y). Notons enfin $\mu_0^{(d)}$ le nombre de Milnor de X_0.

PROPOSITION 8. — *Le cycle caractéristique de $\mathcal{M}$ est :*

$$\mathrm{Car}(\mathcal{M}) = \Big(\mu_0^{(d)} - \sum_{j\in J} \nu_j \mu_j^{(d)}\Big) T^*_{\{0\}}\Omega + \sum_{j\in J} \mu_j^{(d-1)} T^*_{\Gamma_j}\Omega + T^*_X\Omega.$$

Preuve. — Cette proposition se prouve à l'aide de la formule de l'indice de Kashiwara comme nous l'avions fait avec M. Merle dans [B.M.M, § 6] pour une intersection complète à singularité isolée. Notamment le calcul de la multiplicité de $\mathrm{Car}(\mathcal{M})$ le long de $T^*_{\Gamma_j}\Omega$ est déja contenu dans [B.M.M] Nous donnons les détails de cette preuve en appendice.

REMARQUE 3. — Sous la seule hypothèse que $\mathrm{Ker}(y)$ ne soit pas limite d'hyperplans tangents à X ou à Γ, $\mu_0^{(d)}$ est donc le nombre de Milnor de la section hyperplane générique passant par l'origine de X.

3.2. Cohérence relative de $R^k\Gamma_X\mathcal{O}_\Omega[1/F]$.

Nous restons dans la situation décrite dans la sous section précédente : X désigne un germe d'intersection complète à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, de dimension $d+1$, défini par la suite régulière $(F_1, F_2, \dots, F_k)$ de fonctions holomorphes au voisinage de 0, de sorte que $(d+1)+k = n+1$; le lieu singulier $\Gamma = \mathrm{sing}(X)$ de X est une courbe.

Nous nous donnons de plus une fonction holomorphe F telle que $(F_1, \dots, F_k, F)$ forme encore une suite régulière (c'est-à-dire que F ne s'annule sur aucune composante irréductible de X). Alors $Z = X \cap F^{-1}(0)$ est une intersection complète définie par $(F_1, \dots, F_k, F)$; nous ferons encore l'hypothèse que le lieu singulier $\mathrm{sing}(Z)$ de Z est une courbe. En posant $\mathcal{N} = R^{k+1}\Gamma_Z\mathcal{O}_\Omega$ la cohomologie algébrique de $\mathcal{O}_\Omega$ à support Z, nous avons la suite exacte de $\mathcal{D}_\Omega$-module déduite du triangle de cohomologie à support :

$$0 \to \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}[1/F] \longrightarrow \mathcal{N} \to 0.$$

Nous nous proposons de déterminer les conditions géométriques nécessaires et suffisantes pour que le $\mathcal{D}_\Omega$-module $\mathcal{M}[1/F]$ soit relativement cohérent pour une projection $y : \Omega \to Y$ de Ω sur un axe de coordonnée au voisinage de 0. Nous avons rappelé pourquoi cette condition est équivalente au fait que $\mathrm{Ker}(y)$ soit non caractéristique pour $\mathcal{M}[1/F]$ en 0 (voir [B.L.M]).

PROPOSITION 9. — *$\mathcal{M}[1/F]$ est non caractéristique pour* $\mathrm{Ker}(y)$ *si et seulement si une des propriétés* A *ou* B *équivalentes suivantes est vérifiée :*

Propriété A :

1) $\mathrm{Ker}(y)$ *n'est pas limite d'hyperplans tangents à X ou à Γ, à Z et au lieu singulier de Z ;*

2) *avec les notations de la sous-section précédente* $(X_y)_{y\in Y}$ *est une famille à «* $\sum \mu$ *constant le long de son lieu singulier», c'est-à-dire*

$$\mu_0^{(d)} = \sum_{j\in J} \nu_j \mu_j^{(d)}$$

et de même $(Z_y)_{y\in Y}$ *est une famille à* $\sum \mu$ *constant le long de son lieu singulier.*

Propriété B :

1) $\mathrm{Ker}(y)$ *n'est pas limite d'hyperplans tangents à* X *ou à* Γ, *à* Z *et au lieu singulier de* Z ;

2) F *s'annule sur* Γ *et la courbe polaire générique* $P_1(F|X)$ *est vide.*

Preuve.

Partie A : elle résulte de la proposition 8 appliquée à $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ et de la suite exacte rappelée plus haut.

Partie B : comme $\mathrm{Car}\mathcal{M}$ contient le conormal à X et le conormal à Γ et que $\mathcal{M}$ s'injecte dans $\mathcal{M}[1/F]$, une première condition nécessaire est que nous sommes dans les hypothèses de la sous-section précédente : $\mathrm{Ker}(y)$ n'est pas limite d'hyperplans tangents à X ou à Γ. De même, la variété caractéristique de $\mathcal{M}[1/F]$ contient la variété caractéristique de $\mathcal{N}$ et $\mathrm{Ker}(y)$ ne doit pas être limite d'hyperplans tangents à Z ou à son lieu singulier. Alors $\mathrm{Ker}(y)$ est non caractéristique pour $\mathcal{M}$ si et seulement si le cycle caractéristique de $\mathcal{M}$ est :

$$\mathrm{Car}(\mathcal{M}) = \sum_{j\in J} m_j T^*_{\Gamma_j}\Omega + T^*_X\Omega.$$

D'après le résultat rappelé au paragraphe 2, le cycle caractéristique de $\mathcal{M}[1/F]$ est :

$$\mathrm{Car}\big(\mathcal{M}[1/F]\big) = \sum_{F(\Gamma_j)\neq 0} m_j(T^*_{\Gamma_j}\Omega + \Lambda_j) + T^*_X\Omega + \Lambda$$

où le support du cycle Λ_j (resp Λ) est $C_{F|\Gamma_j} \cap F^{-1}(0)$ (resp. $C_{F|X} \cap F^{-1}(0)$).

Si F n'est pas nul sur Γ_j, $\mathrm{d}F$ n'est pas au voisinage de 0 dans la fibre de $T^*_{\Gamma_j}\Omega$, ce qui impose $C_{F|\Gamma_j} = \Gamma_j \times (\mathbb{C}^{n+1})^*$, et le cycle Λ_j, donc *a fortiori* $\mathrm{Car}\mathcal{M}[1/F]$, contient le conormal à l'origine.

D'autre part la multiplicité de $T^*_{\{0\}}\Omega$ dans Λ est, d'après [B.M.M], celle de la courbe polaire générique $P_1(F|X)$.

Donc la condition B 2) exprime exactement le fait que $\mathrm{Ker}(y)$ est non caractéristique pour $\mathcal{M}[1/F]$.

En utilisant un théorème du type Lazzeri [Laz] démontré par Looienga dans [Loo], on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 10. — *Avec les notations de la proposition précédente, les conditions* A *ou* B *entraînent que* $\Gamma = \operatorname{sing}(X)$ *est une courbe lisse au-dessus de* Y, $X = (X_y)_{y\in Y}$ *et* $Z = (Z_y)_{y\in Y}$ *sont des familles à nombre de Milnor constant le long de* Γ.

Preuve. — On peut au choix utiliser la condition A ou B. Utilisons par exemple A. Pour cela introduisons l'idéal J engendré par $(F_1,\ldots,F_k)$ et les déterminants mineurs extraits $(k+1)\times(k+1)$ de la matrice jacobienne :

$$\frac{\partial(F_1,\ldots,F_k,F)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)},$$

que nous considérons comme une famille $(J_y)_{y\in Y}$ d'idéaux définissant des points dans $W\subset\mathbb{C}^n$; $(Z_y)_{y\in Y}$ est une déformation de l'intersection complète à singularité isolée Z_0. En réduisant encore Ω si nécessaire, on peut supposer que la somme des nombres de Milnor de Z_y en ses points singuliers est constante, égale à $\mu^{(d-1)}(Z_0)$ nombre de Milnor de Z_0 à l'origine.

Appliquons la formule de Greuel-Lê [Gr], [Le] :

- à l'origine : $\mu^{(d)}(X_0)+\mu^{(d-1)}(Z_0) =$ colongueur de (J_0) ;
- en un point $y\in Y$ non nul :

$$\sum_{x\in\Sigma}\big(\mu^{(d)}(X_y,x)+\mu^{(d-1)}(Z_y,x)\big)=\sum_{x\in\Sigma}\text{colongueur}(J_y)_x$$

où Σ désigne l'ensemble des points singuliers de Z_y.

Or, par hypothèse, F s'annule en tous les points singuliers de X_y qui sont donc contenus dans Σ. Par hypothèse de sommes de nombres de Milnor constantes aussi bien pour $(X_y)_{y\in Y}$ que pour $(Z_y)_{y\in Y}$ nous obtenons :

$$\sum_{x\in\Sigma}\text{colongueur de }(J_y)_x=\text{colongueur de }J_0.$$

Nous savons que la colongueur de J_0 est égale à la multiplicité d'intersection du discriminant Δ de $(F_1,\ldots,F_k,F,y)$ avec $y=F_1=\ldots=F_k=0$ puisque le discriminant est défini comme le 0-ième idéal de Fitting de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}}/J$ (voir [T, exercice, p. 589]).

Cette multiplicité est donc constante le long de l'axe Y et nous pouvons utiliser le corollaire 7.6, p. 117 de Looienga [Loo] qui affirme que, dans ces conditions, Z_y n'admet qu'un seul point singulier. Il en résulte en particulier que Γ est lisse sur Y ; puis que $(X_y)_{y\in Y}$ et $(Z_y)_{y\in Y}$ sont des intersections complètes à nombre de Milnor constant le long de Γ au voisinage de l'origine.

REMARQUE 4. — On peut prouver la proposition en utilisant la condition B; en effet, le fait que la polaire générique soit vide se traduit par le fait que si y est de plus assez générale, le discriminant Δ est contenu dans $F = 0$; la fin est comme précédemment. Il faut néanmoins contrôler le «assez générale», ce qui peut se faire par exemple à l'aide de la remarque 3.

Cette proposition compte tenu de la section 2 nous permet d'énoncer le théorème suivant qui assure le caractère «naturel» de la spécialisation relative :

THÉORÈME 2. — *Soient X une intersection complète de codimension k dans un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$; $y : \Omega \to Y$ la projection de Ω sur le dernier axe de coordonnées; F une fonction holomorphe sur Ω ; on suppose que les fibres $X_0 = X \cap y^{-1}(0)$ et $Z_0 = X \cap F^{-1}(0) \cap y^{-1}(0)$ sont des intersections complètes à singularité isolée de codimension respectivement $k+1$ et $k+2$; soit $\mathcal{M} = R^k\Gamma_X\mathcal{O}_\Omega$ le $\mathcal{D}_\Omega$-module de cohomologie locale sur X. Les conditions suivantes sont équivalentes* (*au voisinage de* 0) :

- $\mathcal{M}[1/F]$ *est cohérent relativement à* y ;
- $\mathcal{M}$ *est relativement cohérent et pour tout* $m \in \mathcal{M}$, mF^s *admet un polynôme de Bernstein relatif : il existe* $B(s) \in \mathbb{C}[s]$ *non nul et un opérateur différentiel relatif* $P \in \mathcal{D}_{\Omega/Y}[s]$ *tel que* $B(s)mF^s = PmF^{s+1}$;
- $\mathrm{Ker}(y)$ *est non caractéristique pour* $\mathcal{M}[1/F]$;
- $\Gamma = \mathrm{Sing}(X)$ *est une courbe lisse au-dessus de* Y, $X = (X_y)_{y\in Y}$ *et* $Z = X \cap F^{-1}(0) = (Z_y)_{y\in Y}$ *sont des familles à nombre de Milnor constant le long de* Γ. $\mathrm{Ker}\, y$ *n'est pas limite d'hyperplans tangents à* X *ou* Z.

EXEMPLES.

1) On prend $k = 1$, $n = 2$; $F_1 = x_1$, $\mathcal{M} = \mathcal{O}_\Omega[1/x_1]/\mathcal{O}_\Omega$ où Ω est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^3$, enfin $F = x_1^2 + x_2^2 + yx_1$. Alors $F_1^{-1}(0)$ et $F_1^{-1}(0) \cap F^{-1}(0)$ sont bien des déformations à nombre de Milnor constant le long de l'axe des y et nous pouvons affirmer que $\mathcal{M}[1/F]$ est relativement cohérent; de même il existe un polynôme de Bernstein relatif pour $(1/x_1)F^s$. En effet on vérifie :

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^2 \frac{1}{x_1} F^{s+1} = 2(s+1)(2s+1)\frac{1}{x_1}F^s \quad \text{dans } \mathcal{M}[1/F, s]F^s.$$

On remarquera que F_1 et F ne jouent pas des rôles symétriques : $F^{-1}(0)$ n'est pas une déformation à nombre de Milnor constant; $\mathcal{O}_\Omega[1/F]$ n'est pas relativement cohérent, et il n'existe pas de polynôme de Bernstein relatif pour $(1/F)x_1^s$. Il en est de même dans l'exemple suivant :

2) (J.P.G. Henry) :

$$F_1 = x_1^{15} + x_2^{10} + x_3^6 \quad \text{et} \quad F = x_1x_2 + yx_3.$$

Ici, on a $\mathcal{M} = \mathcal{O}_\Omega[1/F_1]/\mathcal{O}_\Omega$ où Ω désigne un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^4$.

Lorsque qu'on donne aux variables x_1, x_2, x_3 les poids $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{6}$ respectivement, on voit que F_1 et F restent quasi-homogènes de poids 1 et $\frac{1}{6}$; $F_1^{-1}(0)$ et $F_1^{-1}(0) \cap F^{-1}(0)$ sont des déformations à nombre de Milnor constant le long de l'axe des y; $\mathcal{M}[1/F]$ est relatifement cohérent et $(1/F_1)F^s$ admet un polynôme de Bernstein relatif dans $\mathcal{M}[1/F, s]F^s$.

4. Appendice : cycle caractéristique d'une intersection complète dont le lieu singulier est une courbe

Il s'agit donc de prouver la proposition 7. Appliquons pour cela au $\mathcal{D}_\Omega$-module $\mathcal{M}$ la formule de l'indice de Kashiwara dans la situation décrite dans [K1, § 3.1, p. 126]. Rappelons que l'entrelac complexe d'une strate X_β le long d'une strate X_α (dans une stratification de Whitney) est

$$B(x,\epsilon) \cap X_\beta \cap H_\eta$$

où $B(x,\epsilon)$ est une boule centrée en $x \in X_\alpha$ de rayon $\epsilon > 0$ assez petit, et où H_η est un sous espace affine général de codimension $\dim(X_\alpha) + 1$ à la distance η de x (avec $\eta > 0$ assez petit par rapport à ϵ). On note $c(X_\alpha, X_\beta)$ la caractéristique d'Euler Poincaré de cet entrelac; dans notre situation nous trouvons :

$$c(0, \Gamma'_j) = \nu_j,$$

$$c(\Gamma'_j, X') = 1 + (-1)^{d-1}\mu_j^{(d-1)},$$

$$c(0, X') = \chi(X'_y) = 1 + (-1)^d\Big[\mu_0^{(d)} - \sum_{j\in J}\nu_j\mu_j^{(d)}\Big] - \sum_{j\in J}\nu_j.$$

Donnons quelques précisions permettant d'obtenir la dernière formule. Fixons $y \in Y - \{0\}$ et notons $x_{j,\ell}$ (avec $j \in J$ et $1 \leq \ell \leq \nu_j$) les points singuliers de la fibre X_y; notons aussi $B'_{j,\ell} \subset B''_{j,\ell}$ des boules distinctes centrées en $x_{j,\ell}$ de rayons assez petits; alors

- $F' = X_y - \bigcup_{j,\ell}(\overline{B'_{j,\ell}} \cap X_y)$ est difféomorphe à $X'_y - \bigcup_{j,\ell}\{x_{j,\ell}\}$;
- $F'' = \bigcup_{j,\ell}(B''_{j,l} \cap X_y)$ est d'indice $\chi(F'') = \sum_{j\in J}\nu_j$ car $B''_{j,\ell} \cap X_y$ est

homéomorphe au cône de sommet $x_{j,\ell}$ sur $K_{j,\ell} = \partial B''_{j,\ell} \cap X_y$ (le « nœud » de X_y en $x_{j,\ell}$);

• enfin, $X_y \cap (B''_{j,\ell} - \overline{B'_{j,\ell}})$ se rétracte par déformation sur le noeud $K_{j,\ell}$ qui est une variété réelle compacte orientable de dimension impaire, donc d'indice nul; il en résulte $\chi(F' \cap F'') = 0$ et

$$\chi(X_y) = \chi(F') + \chi(F'') = \chi(X'_y) + \sum_{j \in J} \nu_j.$$

Nous pouvons faire le même découpage que précédemment de la fibre G de Φ en un point (s, y) suffisamment près de $(0, y)$ et n'appartenant pas au lieu discriminant D_Φ ; G est alors « la » fibre de Milnor de la singularité isolée X_0 et a pour indice

$$\chi(G) = 1 + (-1)^d \mu_0^{(d)}.$$

D'autre part,

$$G' = G - \bigcup_{j,\ell} (\overline{B'_{j,\ell}} \cap G)$$

est difféomorphe à F'; pour tout (j, ℓ), $B''_{j,\ell} \cap G$ est « la » fibre de Milnor locale de X_y en $X_{j,\ell}$ et son indice est

$$\chi(B''_{j,\ell} \cap G) = 1 + (-1)^d \mu_j^{(d)} ;$$

d'où $G'' = \bigcup_{j,\ell} (B''_{j,l} \cup G)$ a pour indice

$$\chi(G'') = \sum_{j \in J} \nu_j + (-1)^d \sum_{j \in J} \nu_j \mu_j^{(d)}.$$

Enfin $G' \cap G''$ est difféomorphe à $F' \cap F''$ d'indice nul. On obtient :

$$\chi(G) = 1 + (-1)^d \mu_0^{(d)} = \chi(X'_y) + \sum_{j \in J} \nu_j + (-1)^d \sum_{j \in J} \nu_j \mu_j^{(d)}.$$

Les nombres d'Euler dans une stratification de Whitney s'obtiennent par la formule (voir [K1, p. 123])

$$\mathrm{Eu}(X_\alpha, \overline{X_\gamma}) = \sum_{X_\alpha < X_\beta \leq X_\gamma} \mathrm{Eu}(X_\beta, \overline{X_\gamma}) c(X_\alpha, X_\beta),$$

ce qui donne dans notre situation :

$$\mathrm{Eu}(0, \Gamma_j) = \nu_j,$$
$$\mathrm{Eu}(\Gamma'_j, X) = 1 + (-1)^{d-1} \mu_j^{(d-1)},$$
$$\mathrm{Eu}(0, X) = \sum_{j \in J} [1 + (-1)^{d-1} \mu_j^{(d-1)}] \nu_j + c(0, X').$$

On sait que l'indice des solutions du $\mathcal{D}_\Omega$-module holonome $\mathcal{M}$ est $(-1)^k$ en un point de X et 0 en un point de $\Omega - X$; la formule de l'indice appliquée en un point de X' montre que la multiplicité du conormal à X dans le cycle caractétristique de $\mathcal{M}$ est égale à 1 (puisque X' est lisse) ; cherchons la multiplicité m_j du conormal à Γ_j dans ce même cycle en appliquant la formule de l'indice en un point de Γ_j' :

$$(-1)^k = (-1)^n m_j + (-1)^k \mathrm{Eu}(\Gamma_j', X),$$

d'où $m_j = \mu_j^{(d-1)}$.

Enfin, la formule de l'indice appliquée à l'origine donne la multiplicité m_0 du conormal au point 0 dans $\mathrm{car}(\mathcal{M})$:

$$(-1)^k = (-1)^{n+1} m_0 + \sum_{j\in J} (-1)^n m_j \mathrm{Eu}(0, \Gamma_j) + (-1)^k \mathrm{Eu}(0, X),$$

ce qui prouve la formule proposée.

Il résulte de la proposition que le cycle caractéristique de $\mathcal{M}$ ne contient pas le conormal à l'origine si et seulement si la famille $(X_y)_{y\in Y}$ est à « $\sum \mu$ constant » ; dans le cas hypersurface ($k = 1$), on sait que cette condition implique que X_y possède un unique point singulier et donc que la famille $(X_y)_{y\in Y}$ est à « μ constant » (voir [Laz]). C'est aussi, bien sûr le cas pour une famille de points ($k = n$) ; mais nous ignorons toujours si c'est le cas général.

BIBLIOGRAPHIE

[B.L.M] Briançon (J.), Laurent (Y.) et Maisonobe (Ph.). — *Sur les modules différentiels holonomes réguliers, cohérents relativement à une projection*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **313**, série 1, 1991, p. 285–288.

[B.M] Briançon (J.) et Maisonobe (Ph.). — Caractérisation géométriques de l'existence du polynôme de Bernstein relatif, juin 1992, à paraître dans les *Actes du Colloque de La Rabida.*

[B.M.M] Briançon (J.), Maisonobe (Ph.) et Merle (M.). — *Localisation des systèmes différentiels, stratifications de Whitney et conditions de Thom*, Inventiones Math., t. **117**, 1994, p. 531–550.

[D.K] DELIGNE (P.) et pd Katz (N.). — *Groupes de monodromie en Géométrie Algébrique* (S.G.A. 7 1/2), Lecture Notes in Math., Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, t. **340**, 1973.

[Gi] GINSBURG (V.). — *Characteristic varieties and vanishing cycles*, Inventiones Math., t. **84**, 1986, p. 327–402.

[Gr] GREUEL (G.M.). — *Der Gauss Manin Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchsnitten*, Math. Ann., t. **214**, 1975, p. 235–266.

[K1] KASHIWARA (M.). — *Systems of microdifferential equations*, Progress in Math, t. **34**, 1983.

[K2] KASHIWARA (M.). — *Vanishing cycles and holonomic systems of differential equations*, Lecture Notes in Math, t. **1016**, 1983, p. 134–142.

[Lau] LAURENT (Y.). — *Vanishing cycles of $\mathcal{D}$ modules*, Inventiones Math., t. **112**, 1993, p. 491–539.

[Laz] LAZZERI (F.). — A theorem on the monodromy of isolated singularities, *Singularités à Cargèse*, Astérisque **7–8**, 1973.

[Le] LÊ (D.T.). — *Calcul du nombre de Milnor d'une singularité isolée d'intersection complète*, Funk. Anal. i iévo pril., t. **8**, 2, 1974, p. 45–52.

[Loo] LOOIJENGA (E.J.N.). — *Isolated Singular Points on Complete Intersections.* — London Mathematical Society, Lecture Note Series, t. **77**, Cambridge University Press, 1984.

[Ma1] MALGRANGE (B.). — *Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée*, Lecture Notes in Math., t. **459**, Springer-Verlag, 1975, p. 98–119.

[Ma2] MALGRANGE (B.). — *Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente*, Astérisque, t. **101–102**, 1983, p. 233–267.

[Me] MEBKHOUT (Z.). — *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents.* — Travaux en cours n° 35, Hermann, Paris, 1989.

[S] SABBAH (C.). — $\mathcal{D}$ modules et cycles évanescents (d'après B. Malgrange et M. Kashiwara), *Conférence de La Rabida 1984*, t. **3**, Hermann, Paris.

[T] TEISSIER (T.). — The Hunting of Invariants in the Geometry of Discriminants, *Real and complex singularities*, P. Holm editor, Oslo 1976, p. 565–677.