Bulletin de la S. M. F.

Anne Broise

Fractions continues multidimensionnelles et lois stables

Bulletin de la S. M. F., tome 124, nº 1 (1996), p. 97-139

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_1_97_0>

Bull. Soc. math. France,
124, 1996, p. 97–139.

FRACTIONS CONTINUES MULTIDIMENSIONNELLES ET LOIS STABLES

PAR

ANNE BROISE (*)

RÉSUMÉ. — Soit $T : (x_1, \dots, x_d) \mapsto \left(\frac{x_2}{x_1} - a_1, \dots, \frac{x_d}{x_1} - a_{d-1}, \frac{1}{x_1} - a_d\right)$ l'opérateur de Jacobi-Perron sur $[0,1]^d$. On étudie ici le comportement asymptotique du n-ième reste $T^n x$ et celui des variables aléatoires $a_n(x)$ générées par l'algorithme de Jacobi-Perron quand x est uniformément réparti dans $[0,1]^d$.

On montre que $T^n x$ converge en loi vers μ l'unique mesure de probabilité invariante par T et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et que sa densité h est une fonction strictement positive, analytique sur chacun des ensembles $\mathbb{W}_\sigma = \{0 \le x_{\sigma(1)} \le \dots \le x_{\sigma(d)} \le 1\}$, σ dans $\mathfrak{S}_d$.

Ensuite, on montre que les sommes $n^{-\bar\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k^\alpha(x)$, où α est le multi-indice $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ tel que $\alpha_1 + \dots + \alpha_d = \bar\alpha > 1/2$, convergent en loi vers une loi stable symétrique de paramètre $\beta = 1/\bar\alpha$. Ainsi quand x est uniformément réparti dans $[0,1]^d$, les variables aléatoires $(a_n(x))$ sont « presque indépendantes identiquement distribuées » de loi de type de Cauchy.

ABSTRACT. — Let $T : (x_1, \dots, x_d) \mapsto \left(\frac{x_2}{x_1} - a_1, \dots, \frac{x_d}{x_1} - a_{d-1}, \frac{1}{x_1} - a_d\right)$ the Jacobi-Perron operator on $[0,1]^d$. We study the asymptotic behaviour of the n-th rest $T^n x$ and of the random variable $a_n(x)$ generated by the Jacobi-Perron algorithm, when x is uniformly distributed in $[0,1]^d$.

We prove that $T^n x$ converges in law to the unique T-invariant probability μ which has a density h with respect to Lebesgue measure. The function h is strictly positive and analytic on the sets $\mathbb{W}_\sigma = \{0 \le x_{\sigma(1)} \le \dots \le x_{\sigma(d)} \le 1\}$, σ in $\mathfrak{S}_d$.

Then, we prove that the sums $n^{-\bar\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k^\alpha(x)$, where $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ is a multi-indice such that $\alpha_1 + \dots + \alpha_d = \bar\alpha > 1/2$, converge in law to a symetric stable distribution with parameter $\beta = 1/\bar\alpha$. Thus, when x is uniformly distributed in $[0,1]^d$ the random variables $(a_n(x))$ are « near » independent with a common distribution of Cauchy law type.

(*) Texte reçu le 27 juin 1994, révisé le 21 décembre 1994.
A. BROISE, IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes CEDEX. Email : broise@topo.math.u-psud.fr.

Mots clés : algorithme de Jacobi-Perron, mesure invariante, loi stable, théorèmes limites.

Classification AMS : 11 J 70, 58 F 11, 60 F 05.

1. Introduction

Une fois pour toutes, on fixe un entier d strictement positif, I^d désigne le cube unité de $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{B}$ la tribu des boréliens de I^d et m la mesure de Lebesgue sur I^d. Un point de I^d sera noté x ou $(x_1,\ldots,x_d)$. De nombreux algorithmes de fractions continues multidimensionnelles ont été étudiés [Bre] ; celui dont on va traiter ici est l'algorithme original de Jacobi-Perron. Il est défini ainsi :

- On choisit x dans I^d tel que x_1 ne soit pas nul.
- On calcule $\bar{x} = \Big(\dfrac{x_2}{x_1},\ldots,\dfrac{x_d}{x_1},\dfrac{1}{x_1}\Big)$.
- On pose

$$a(x) = [\bar{x}] \quad \text{et} \quad Tx = \{\bar{x}\},$$

où les notations $[x]$ et $\{x\}$ désignent le vecteur des parties entière et fractionnaire des différentes composantes de x dans $\mathbb{R}^d$.

Si $Tx = x'$, on a alors la relation

$$x = \Big(\frac{1}{a_d + x'_d}, \frac{a_1 + x'_1}{a_d + x'_d}, \ldots, \frac{a_{d-1} + x'_{d-1}}{a_d + x'_d}\Big),$$

que l'on écrit plus simplement

$$x = \pi\big(M_{a(x)}(Tx, 1)\big)$$

(les vecteurs sont ici en colonne), où π est la *projection conique* de $\mathbb{R}^{d+1}$ dans $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire :

$$\pi(y_1,\ldots,y_{d+1}) = \Big(\frac{y_1}{y_{d+1}},\ldots,\frac{y_d}{y_{d+1}}\Big).$$

$M_{a(x)}$ est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ I_d & a(x) \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{d+1}(\mathbb{R})$.

- Si $(Tx)_1$ n'est pas nul, on peut recommencer.

Alors si x est choisi de façon à pouvoir itérer l'algorithme une infinité de fois, on obtient : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x = \pi\big(\big[M_{a(x)}M_{a(Tx)}\cdots M_{a(T^{n-1}x)}(T^n x, 1)\big]\big).$$

Ainsi l'itération de l'algorithme de Jacobi-Perron revient à l'étude des itérés de la transformation

$$T : I^d \longrightarrow I^d$$

$$x \longmapsto \{\bar{x}\} = \Big(\Big\{\frac{x_2}{x_1}\Big\},\ldots,\Big\{\frac{x_d}{x_1}\Big\},\Big\{\frac{1}{x_1}\Big\}\Big).$$

Le développement en fractions continues multidimensionnelles donné par l'algorithme de Jacobi-Perron est alors la suite $(r_n)_{n>0}$ de $\mathbb{Q}^d$ définie en remplaçant $T^n x$ par 0 :

$$r_n = \Big(\frac{p_n^1}{q_n}, \dots, \frac{p_n^d}{q_n}\Big) = \pi\big(M_{a(x)} \cdots M_{a(T^{n-1}x)} e_{d+1}\big)$$

où $e_{d+1} = (0, \cdots, 0, 1)$ est dans $\mathbb{R}^{d+1}$.

Si x est bien choisi, la suite $(r_n)_{n>0}$ est infinie et converge vers x.

Pour voir dans quelle mesure cet algorithme possède les propriétés des fractions continues «classiques» ($d = 1$), L. Bernstein [Be] a étudié ses propriétés arithmétiques, F. Schweiger [S] ses propriétés métriques, entre autre, il a montré l'ergodicité de T. Deux problèmes se posent de façon naturelle à propos de cet algorithme : le comportement asymptotique du n-ième reste : $T^n x$ et celui de $a_n(x) = a(T^{n-1}x)$ quand x est uniformément réparti dans I^d.

Dans le cadre des fractions continues «classiques» ($d = 1$), Gauss, le premier, a indiqué que si x est uniformément réparti dans I, alors la loi de $T^n x$ converge quand n tend vers $+\infty$ vers la loi de densité

$$h(x) = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{1+x}.$$

Khintchine [Kh] a d'abord abordé le problème de la taille moyenne des $a_n(x)$. P. Lévy [L1, chap. IX] et [L2] a montré que si $\alpha > \frac{1}{2}$, les sommes $n^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_k^\alpha$ convergent en loi, quand x est uniformément distribué dans I, vers une loi stable de paramètre $\beta = \alpha^{-1} \in\ ]0, 2[$. Ceci traduit à la fois que si x est uniformément réparti sur I, les $a_k(x)$ apparaissent comme des variables aléatoires «presque indépendantes» et identiquement distribuées suivant une loi de type de Cauchy et qu'elles sont grandes.

Dans une première partie, on va montrer que la loi de $T^n x$ converge quand n tend vers $+\infty$ vers $\mu = hm$ l'unique mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et invariante par T. La densité h est une fonction strictement positive, les restrictions de h aux ensembles

$$\mathbb{W}_\sigma = \big\{0 \le x_{\sigma(1)} \le \cdots \le x_{\sigma(d)} \le 1\big\}, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_d$$

sont analytiques.

Pour faire cette démonstration, on a repris en partie le travail de D. Mayer [Ma] ; on montre en fait que

$$I^d = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathbb{W}_\sigma$$

est une partition markovienne finie pour T (il faut cependant noter que la définition de partition markovienne n'est pas celle utilisée habituellement, c'est celle de D. Mayer [Ma], on la rappelle en DÉFINITION 2.11). On a alors, pour tout t dans I^d

$$\lim_{n\to\infty} mT^n[0,t] = \lim_{n\to\infty} m\{x \in I^d : T^n x \in [0,t_1]\times\cdots\times[0,t_d]\} = \mu[0,t].$$

On verra aussi que h n'est qu'analytique par morceaux.

C'est cette dernière propriété de h qui va permettre dans une seconde partie, d'étendre le résultat précédent de P. Lévy. On va montrer que si $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$ est un multi-indice tel que $\bar\alpha = \sum_{i=1}^d \alpha_i > \frac12$ et si $(a_n(x))_{n\geq 0}$ est le développement en fractions continues multidimensionnelles d'un point x uniformément distribué dans I^d, alors les sommes

$$\frac{1}{n^{\bar\alpha}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k^\alpha(x)$$

convergent en loi, quand n tend vers $+\infty$, vers une loi stable symétrique de paramètre $\beta = 1/\bar\alpha$. Il faut remarquer que l'on a choisi de prendre des sommes alternées pour avoir des lois symétriques et que si $\bar\alpha$ est inférieur à $\frac12$, on est dans le cadre du théorème limite central. La preuve de ce résultat est totalement différente de celle de P. Lévy; elle repose sur l'étude spectrale de l'opérateur adjoint de T et de ses perturbations. La compacité de ces opérateurs et l'existence d'une distance δ déduite de la distance de Hilbert et dilatée par T jouent ici un très grand rôle. Des méthodes analogues ont déjà été utilisées dans le cadre plus classique du théorème limite central par Y. Guivarc'h et J. Hardy [G.H] et par J. Rousseau–Egele [R], ainsi que par Y. Guivarc'h et Y. Le Jan pour obtenir le comportement asymptotique du flot géodésique sur les surfaces à courbure constante [G.L]. Il faut cependant noter que les opérateurs que l'on considère ici agissent sur des espaces de Banach constitués de fonctions holomorphes de $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ à valeurs dans $\mathbb{C}^{2d!}$, car h est analytique par morceaux avec $d!$ morceaux.

2. L'opérateur de Jacobi-Perron

2.1. Construction de la distance δ sur I^d.

Dans un premier temps, on va démontrer que T est une transformation dilatante de (I^d,δ) où δ est une distance équivalente à la distance euclidienne sur I^d. On va préciser un peu plus loin l'expression de δ et ce que signifie ici transformation dilatante.

Si x est dans I^d, avec $x_1 \neq 0$, on pose :

$$\bar{x} = \Big(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_d}{x_1}, \frac{1}{x_1}\Big).$$

On a :

$$\bar{x} = [\bar{x}] + \{\bar{x}\} = a(x) + Tx.$$

On remarque que, si x varie dans I^d, alors $a(x)$ varie dans

$$\mathcal{A}_d = \big\{a \in \mathbb{N}^d : a_d > 0,\ 0 \leq a_i \leq a_d,\ i < d\big\}$$

car $a_d = \Big[\dfrac{1}{x_1}\Big] > 0$ et $a_i = \Big[\dfrac{x_{i+1}}{x_d}\Big] \leq \Big[\dfrac{1}{x_d}\Big] = a_d$.

On définit alors pour a de $\mathcal{A}_d$:

$$\begin{aligned} K_a &= \overline{\big\{x \in I^d : a(x) = a\big\}} \\ &= \Big\{x \in I^d : \frac{1}{a_d + 1} \leq x_1 \leq \frac{1}{a_d}, \\ &\qquad\qquad a_1 x_1 \leq x_2 \leq (a_1 + 1)x_1, \dots, \\ &\qquad\qquad\qquad a_{d-1}x_1 \leq x_d \leq (a_{d-1} + 1)x_1\Big\}. \end{aligned}$$

On note aussi :

$$\begin{aligned} \Psi_a x &= \pi\big(Ma(x,1)\big) \\ &= \Big(\frac{1}{x_d + a_d}, \frac{x_1 + a_1}{x_d + a_d}, \dots, \frac{x_{d-1} + a_{d-1}}{x_d + a_d}\Big). \end{aligned}$$

On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. — *L'ensemble* $I^d = \bigcup_{a \in \mathcal{A}_d} K_a$ *est une partition dénombrable fermée telle que si* a *appartient à* $\mathcal{A}_d$, *la restriction de* T *à* K_a *est une bijection de* K_a *sur* TK_a ; *sa réciproque vaut* Ψ_a.

REMARQUE. — Si $a \neq a'$, l'intersection $K_a \cap K_{a'}$ est ou vide ou un polyèdre de dimension $(d-1)$ et donc $m(K_a \cap K_{a'}) = 0$.

Preuve. — Sur K_a, l'application T est l'homographie associée à l'application linéaire

$$L_a z = \big(z_2 - a_1 z_1, \dots, z_{d+1} - a_d z_1, z_1\big)$$

qui est inversible sur $\mathbb{R}^{d+1}$, d'inverse

$$M_a z = \big(z_{d+1}, z_1 + a_1 z_{d+1}, \dots, z_d + a_d z_{d+1}\big).$$

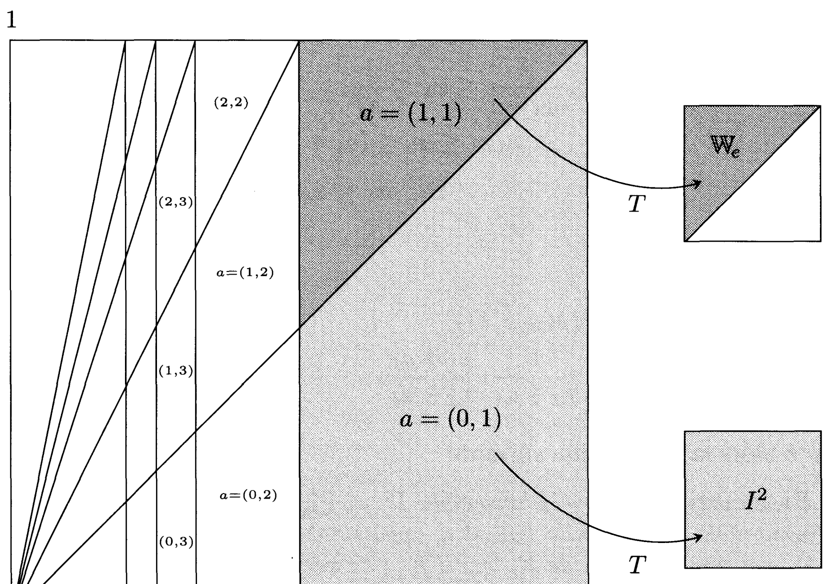
On en déduit alors que $T_{|K_a}$ est inversible. Son inverse est l'homographie associée à M_a :

$$\Psi_a x = \Big(\frac{1}{x_d + a_d}, \frac{x_1 + a_1}{x_d + a_d}, \dots, \frac{x_{d-1} + a_{d-1}}{x_d + a_d}\Big).$$

L'application Ψ_a est définie sur

$$TK_a = I^d \cap \bigcap_{i \in \mathcal{J}_a} \{x_i \le x_d\}$$

où $\mathcal{J}_a = \{i : a_i = a_d\}$. □



Pour fixer les idées (voir figure), on prend le cas $d = 2$; on a :

$$\mathcal{A}_2 = \big\{a \in \mathbb{N}^2 : a_2 > 0,\ 0 \le a_1 \le a_2\big\}.$$

Pour a dans $\mathcal{A}_2$, on a :

$$K_a = \left\{x \in I^2 : \frac{1}{a_2+1} \leq x_1 \leq \frac{1}{a_2},\ a_1x_1 \leq x_2 \leq (a_1+1)x_1\right\}.$$

Si $a_1 \neq a_2$, alors $TK_a = I^2$. Si $a_1 = a_2$, alors

$$TK_a = \{x \in I^2 : x_1 \leq x_2\} = \mathbb{W}_e.$$

La proposition suivante va permettre de définir une distance δ sur I^d, équivalente à la distance euclidienne sur I^d et contractée par tous les Ψ_a : il existe $\rho < 1$, pour tout a de $\mathcal{A}_d$, pour tous x, y de I^d on a :

$$\delta(\Psi_a x, \Psi_a y) \leq \rho\delta(x, y).$$

Alors, on peut dire que T est une transformation dilatante de (I^d, δ).

Proposition 2.2. — *Il existe un domaine $D \subset \mathbb{R}^d$ qui est borné, convexe, fermé qui contient I^d et un domaine D_1 strictement contenu dans D tels que pour tout a de $\mathcal{A}_d$ on ait :*

$$\Psi_a(D) \subset D_1 \subset D.$$

Preuve. — Soit

$$R = [-\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [-\alpha_{d-1}, \beta_{d-1}] \times [-\tfrac{1}{2}, \infty]$$

avec $0 < \alpha_i < 1$ et $\beta_i > 1$. On cherche l'image de R par les Ψ_a.

Comme $a_d \geq 1$ et $x_d \geq -\frac{1}{2}$, on en déduit que

$$0 \leq \frac{1}{x_d + a_d} \leq \frac{1}{a_d - \frac{1}{2}} \leq 2.$$

Pour $k < d$, on pose :

$$X_{k+1} = \frac{a_k + x_k}{a_d + x_d}.$$

- Si a_k n'est pas nul, on a :

$$0 \leq X_{k+1} \leq \frac{a_k + \beta_k}{a_d - \frac{1}{2}} \leq \frac{a_d + \beta_k}{a_d - \frac{1}{2}} \leq 2(1 + \beta_k).$$

- Si a_k est nul, on a :

$$X_{k+1} \geq -\frac{\alpha_k}{a_d - \frac{1}{2}} \geq -2\alpha_k.$$

Donc pour tout a dans $\mathcal{A}_d$,

$$\Psi_a(R) \subset [0,2] \times \big[-2\alpha_1, 2(\beta_1+1)\big] \times \cdots \times \big[-2\alpha_{d-1}, 2(\beta_{d-1}+1)\big] = D_1.$$

L'ensemble D_1 est strictement contenu dans R si :

$$\begin{cases} -\alpha_1 < 0 < 2 < \beta_1, \\ -\alpha_2 < -2\alpha_1 < 2(\beta_1+1) < \beta_2, \\ \quad\cdots \\ -\alpha_{d-1} < -2\alpha_{d-2} < 2(\beta_{d-2}+1) < \beta_{d-1}, \\ -\frac{1}{2} < -2\alpha_{d-1} < 2(\beta_{d-1}+1) < \infty. \end{cases}$$

Ces inégalités sont compatibles et reviennent à :

$$(*) \quad \begin{cases} 0 < 2^{d-1}\alpha_1 < \cdots < 2^2\alpha_{d-2} < 2\alpha_{d-1} < \frac{1}{2}, \\ 2 < \beta_1 < \frac{1}{2}\beta_2 - 1 < \cdots < \dfrac{1}{2^{d-2}}\,\beta_{d-1} - 2\big(1 - \dfrac{1}{2^{d-2}}\big) < \infty. \end{cases}$$

On fixe un $(2(d-1))$-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{d-1})$ qui vérifie (*). On remarque que R est envoyé dans un domaine D_1 de $\mathbb{R}^d$ qui est borné, on choisit un réel K vérifiant : $2(\beta_{d-1}+1) < K$, on prend pour $D = R \cap \{x : x_d < K\}$. L'ensemble D est alors un domaine borné, convexe contenant I^d et $\Psi_a(D) \subset D_1 \subset D$. □

On peut alors définir δ sur D. On note par (x,y,z,t) le birapport des quatre points alignés x, y, z, t. On a :

$$(x,y,z,t) = \frac{z-x}{z-y} : \frac{t-x}{t-y}.$$

DÉFINITION 2.3. — Soit x et y dans D, on note I et J les points d'intersection de la droite xy avec la frontière de D, on pose alors :

$$\delta(x,y) = \begin{cases} \big|\log|(I,J,x,y)|\big| & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

REMARQUE. — La fonction δ est la distance de Hilbert associée à D. C'est une distance non bornée sur D (voir [B-K, chap. IV-28]) ; on a :

$$\lim_{x \to b \in \partial D} \delta(x, x_0) = +\infty.$$

PROPOSITION 2.4.

1) *La distance δ est équivalente à la distance euclidienne sur I^d.*

2) *On pose* $\rho = \operatorname{th}(\frac{1}{4}\Delta) < 1$ *avec* $\Delta = \sup_{x,y \in D_1} \delta(x,y)$.

Alors pour tout a *de* $\mathcal{A}_d$, *pour tout* x, y *de* I^d, *on a :*

$$\delta\big(\Psi_a x, \Psi_a y\big) \leq \rho\delta(x,y).$$

Preuve.

1) Soit x et y dans I^d, alors on a :

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \big|\log|(I,J,x,y)|\big| = \big|\log\big(|1-(I,x,J,y)|\big)\big| \\ &\geq \big|(I,x,J,y)\big| = \frac{\|\overrightarrow{yx}\| \cdot \|\overrightarrow{JI}\|}{\|\overrightarrow{Jx}\| \cdot \|\overrightarrow{Iy}\|}. \end{aligned}$$

Mais I et J sont sur les bords de D, donc $\|\overrightarrow{JI}\| \geq \inf_i\{\beta_i + \alpha_i\} = m_1$. Au pire $\|\overrightarrow{Jx}\|$ et $\|\overrightarrow{Iy}\|$ sont les diamètres de D, donc $\|\overrightarrow{Jx}\| \leq M_1$. Ainsi

$$d(x,y) \geq \frac{m_1}{M_1^2}\|\overrightarrow{xy}\|.$$

Réciproquement, si la droite xy est parallèle à l'un des bords de D, par exemple si $-\alpha_1 < x_1 < y_1 < \beta_1$, $x_i = y_i$, $i \neq 1$, soit $t = |x_1 - y_1| = \|\overrightarrow{xy}\|$

$$\begin{aligned} \delta(x,y) &= -\log\big|(\alpha_1,\beta_1,x_1,y_1)\big| = \log\Big(\frac{x_1+t+\alpha_1}{x_1+\alpha_1}\cdot\frac{x_1-\beta_1}{x_1+t-\beta_1}\Big) \\ &= \log\Big(1+\frac{t}{\beta_1-t-x_1}\Big) + \log\Big(1+\frac{t}{x_1+\alpha_1}\Big) \\ &\leq \|\overrightarrow{xy}\|\Big(\frac{1}{\beta_1-1}+\frac{1}{\alpha_1}\Big). \end{aligned}$$

Si maintenant la droite xy est quelconque on a :

$$d(x,y) \leq d(x,z_1) + \cdots + d(z_{d-1},y),$$

où $z_i = (y_1,\ldots,y_i,x_{i+1},\ldots,x_d)$; si $x = (x_1,\ldots,x_d)$ et $y = (y_1,\ldots,y_d)$ alors

$$\delta(x,y) \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|\Big[\frac{1}{\beta_i-1}+\frac{1}{\alpha_i}\Big] \leq M\|\overrightarrow{xy}\|.$$

2) C'est un résultat classique de Garrett Birkhoff (voir [Bi]). Ceci démontre alors que T est localement dilatante dans (I^d,δ), c'est-à-dire :

$$\delta(Tx,Ty) > \delta(x,y)$$

si x et y sont dans le même K_a et a dans $\mathcal{A}_d$. □

2.2. Codage. Convergence de l'algorithme.

On va maintenant expliquer comment l'algorithme de Jacobi-Perron permet de coder les points de I^d. Le codage repose sur la remarque essentielle suivante : pour tout x de

$$E = \Big[\bigcup_{\substack{a \neq a' \\ a,a' \in \mathcal{A}_d}} [K_a \cap K_{a'}]\Big]^c$$

(autrement dit, si x n'est pas sur la frontière d'un ensemble K_a), il existe un unique a de $\mathcal{A}_d$ tel que x est dans K_a.

L'élément a est donné par l'application $a(x) = [\bar{x}]$.

Pour tout x de $\bigcap_{k \geq 0} T^{-k}(E)$, on peut alors définir la suite d'éléments de $\mathcal{A}_d$ suivante :

$$a_1(x) = a(x),\ a_2(x) = a(Tx), \ldots,\ a_n(x) = a(T^{n-1}x),\ \ldots$$

Comme pour tout n de $\mathbb{N}$, $T^n x$ est dans I^d, certaines séquences

$$a_i(x), \ldots, a_{i+t}(x)$$

ne peuvent jamais avoir lieu ; elles correspondent aux zones où l'on sort de I^d par $\Psi_{a_{i+t}(x)}$. On a (voir aussi [S]) :

PROPOSITION 2.5. — *Les suites possibles $\big(a_s(x)\big)_{s>0}$ vérifient la condition* (C) *suivante. On note $a_s(x) = (a_1^{(s)}, \ldots, a_d^{(s)})$. Si, pour $0 \leq t \leq i-1$,*

$$\begin{cases} a_i^{(s)} = a_d^{(s)}, \\ a_{i-1}^{(s+1)} = a_{d-1}^{(s+1)}, \\ \ldots \\ a_{i-t}^{(s+t)} = a_{d-t}^{(s+t)}, \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} a_{d-(t+1)}^{(s+t+1)} \geq 1 & \text{si } t+1 = i, \\ a_{i-(t+1)}^{(s+t+1)} \leq a_{d-(t+1)}^{(s+t+1)} & \text{si } t+1 < i. \end{cases}$$

Preuve. — On va montrer cette condition de façon plus géométrique que F. Schweiger. La preuve utilise essentiellement le fait que l'image d'un polyèdre par une homographie est encore un polyèdre qui a le même nombre de sommets et qu'elle est entièrement déterminée par l'image de ses sommets. On le fait d'abord pour $d = 2$, puis pour d quelconque ; on remarque qu'il suffit de le faire pour $s = 1$.

On a fait une partition du carré

$$I^2 = \bigcup_{a\in\mathcal{A}_2} K_a,$$

où $a = (a_1, a_2)$, de façon à ce que $T : K_a \to TK_a$ soit bijective; T est alors une homographie.

• Si $a_1^{(1)} \neq a_2^{(1)}$, $K_{a^{(1)}}$ est un trapèze, son image par T est I^2, il n'y a pas de condition sur $a^{(2)}$.

• Si $a_1^{(1)} = a_2^{(1)}$, $K_{a^{(1)}}$ est un triangle, son image par T est le triangle $\mathbb{W}_e = \{x \in I^2 : x_1 \leq x_2\}$ qui correspond à la zone où $a_1^{(2)} \geq 1$.

D'où la condition (C) pour $d = 2$.

En dimension $d \geq 3$, on a fait la partition

$$I^d = \bigcup_{a\in\mathcal{A}_d} K_a, \quad \text{avec } a = (a_1, \cdots, a_d)$$

de façon à ce que $T : K_a \to TK_a$ soit bijective; c'est une homographie.

• Si pour tout $i < d$ on a $a_i^{(1)} \neq a_d^{(1)}$, alors $K_{a^{(1)}}$ est un polyèdre à 2^d sommets; son image par T est I^d, il n'y a donc pas de condition sur $a^{(2)}$.

• S'il existe $i < d$ tel que $a_i^{(1)} = a_d^{(1)}$, alors $K_{a^{(1)}}$ est un polyèdre qui a au plus $(2^d - 2)$ sommets. Son image par T est $\bigcap_{j\in\mathcal{J}_a}\{x_j \leq x_d\}$ où $\mathcal{J}_a = \{j < d : a_j = a_d\}$; elle est donc contenue dans

$$\mathcal{T} = \{x \in I^d : x_i \leq x_d\}$$

qui correspond à la zone $a_{i-1}^{(2)} \leq a_{d-1}^{(2)}$ si $i > 1$ et $a_{d-1}^{(2)} \geq 1$ si $i = 1$.

• Maintenant, si $a_i^{(1)} = a_d^{(1)}$ et $a_{i-1}^{(2)} < a_{d-1}^{(2)}$ ou $a_{d-1}^{(2)} \geq 1$ $(i = 1)$. $K_a(1) \cap T(K_{a^{(2)}})$ est un polyèdre à 2^d sommets; son image par T^2 est I^d, il n'y a donc pas de condition sur $a^{(3)}$.

• Par contre, si $a_i^{(1)} = a_d^{(1)}$ et $a_{i-1}^{(2)} = a_{d-1}^{(2)}$, l'image par T^2 de $K_a^{(1)} \cap T(K_{a^{(2)}})$ est un polyèdre contenu dans $\mathcal{T}' = \{x \in I^d : x_{i-1} \leq x_{d-1}\}$ qui correspond à la zone $a_{i-2}^{(3)} \leq a_{d-2}^{(3)}$ si $i > 2$ ou $a_{d-2}^{(3)} \geq 1$ si $i = 2$. On continue ainsi jusqu'au rang i ou jusqu'à ce qu'on obtienne $a_{i-\ell}^{(\ell+1)} < a_{d-\ell}^{(\ell+1)}$. Ceci prouve la condition (C) pour d quelconque. $\square$

DÉFINITION 2.6. — On appelle *suite admissible* toute suite à valeurs dans $\mathcal{A}_d$ satisfaisant à la condition (C) précédente. On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites admissibles.

On a alors :

PROPOSITION 2.7. — *A toute suite de $\mathcal{S}$ correspond un unique point de* $\bigcap_{k\geq 0} T^{-k}(E)$.

Avant de faire la preuve de cette proposition, on va d'abord faire une remarque qui caractérise les points $\bigcap_{k\geq 0} T^{-k}(E)$.

REMARQUE. — Si x n'est pas dans $\bigcap_{k\geq 0} T^{-k}(E)$, alors il existe un entier $k \geq 0$ tel que $T^k x$ appartienne à la frontière d'un ensemble K_a ; il existe donc un entier $k_0 \geq 0$ tel que :

$$T^{k_0}x = (0, y).$$

Si y est nul, le point x est rationnel, l'algorithme de Jacobi-Perron est fini; comme dans le cas des fractions continues «classiques», il y a ambiguité sur le dernier terme du développement. Si y n'est pas nul, alors les coordonnées du point x vérifient au moins une relation linéaire à coefficients entiers; on peut continuer à construire des approximations simultanées de x en appliquant l'algorithme de Jacobi-Perron à un point x' bien choisi dans $I^{d'}$ avec $d' < d$ et ensuite en déduire des approximations pour x.

Ainsi, si x n'est pas dans $\bigcap_{k\geq 0} T^{-k}(E)$, il existe un entier $k \geq 0$ à partir duquel on ne peut pas définir les $a_{n+k}(x)$ pour $n \geq 0$. Donc si x est un point de I^d tel que pour tout $n \geq 0$, $a_n(x)$ est bien défini alors x est dans $\bigcap_{k\geq 0} T^{-k}(E)$.

Preuve de la Proposition 2.7. — Soit $(a_n)_{n>0}$ une suite de $\mathcal{S}$. Tous les points dont le code commence par a_1 sont dans $K_{a_1} = \Psi_{a_1}(I^d)$; tous les points dont le code commence par $a_1, \dots, a_n$ sont dans

$$K_{a_1} \cap T^{-1}(K_{a_2}) \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(K_{a_n}) = \Psi_{a_1} \circ \dots \circ \Psi_{a_n}(I^d).$$

La suite $(\Psi_{a_1} \circ \dots \circ \Psi_{a_n}(I^d))_{n>0}$ forme une suite de compacts non vides de $\mathbb{R}^d$; ils sont emboîtés. Le diamètre de $\Psi_{a_1} \circ \dots \circ \Psi_{a_n}(I^d)$ est inférieur à $\Delta\rho^n$: il décroît donc strictement vers 0, car $\rho < 1$. L'intersection des $\Psi_{a_1} \circ \dots \circ \Psi_{a_n}(I^d)$ n'est pas donc vide, elle est réduite à un point x. Pour tout $n > 0$, on a $a_n(x) = a_n$; il en résulte que x est donc dans $\bigcap_{k\geq 0} T^{-k}(E)$ et a pour code $(a_n)_{n>0}$ dans $\mathcal{S}$. $\square$

Ainsi, l'application qui à un point x de $\bigcap_{k\geq 0} T^{-k}(E)$ associe son code $(a_n)_{n>0} = (a_n(x))_{n>0}$ dans $\mathcal{S}$ est bijective et l'action de T sur $\bigcap_{k\geq 0} T^{-k}(E)$ correspond au décalage sur les suites de $\mathcal{S}$. On va mettre en évidence un corollaire de la proposition précédente, il donne la convergence des approximations du point par les rationnels obtenus par l'algorithme de Jacobi-Perron.

COROLLAIRE 2.8. — *Pour tout x de $\bigcap_{k\geq 0} T^{-k}(E)$, il existe une suite unique $(a_n)_{n>0}$ de $\mathcal{S}$ telle que :*

$$x = \lim_{x\to\infty} \Psi_{a_1} \circ \cdots \circ \Psi_{a_n}(I^d).$$

Il existe alors une suite

$$r_n = \Big(\frac{p_n^1}{q_n}, \dots, \frac{p_n^d}{q_n}\Big) = \Psi_{a_1} \circ \cdots \circ \Psi_{a_n}(0)$$

telle que r_n converge vers x de manière exponentielle :

$$\|x - r_n\| \leq C\delta(x, r_n) \leq C\rho^n \quad \text{avec} \quad \rho < 1.$$

On va maintenant montrer des résultats qui serviront un peu plus loin :

PROPOSITION 2.9. — *L'ensemble des points T-périodiques est dense dans I^d.*

Preuve. — Soit x un point de $\bigcap_{k\geq 0} T^{-k}(E)$; on va l'approcher par une suite $(x^{(n)})_{n>0}$ de points T-périodiques. Le point x a pour code $(a_s)_{s>0}$ dans $\mathcal{S}$. On construit $(x^{(n)})_{n>0}$ de la manière suivante. On note a_0 ayant pour coordonnées $(1, 2, \dots, d)$;

- $x^{(1)}$ est le point de $\bigcap_{k\geq 0} T^{-k}(E)$ qui a pour code $(\overline{a_1 a_0})$,
- $x^{(2)}$ a pour code $(\overline{a_1 a_2 a_0})$, etc. et
- $x^{(n)}$ a pour code $(\overline{a_1 a_2 \cdots a_n a_0})$.

Pour tout $n > 0$, x et $x^{(n)}$ sont dans $\Psi_{a_1} \circ \cdots \circ \Psi_{a_n}(I^d)$; alors $\delta(x, x^{(n)})$ décroît vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc l'ensemble $\mathrm{Per}(T)$ des points T-périodiques est dense dans $\bigcap_{k\geq 0} T^{-k}(E)$ qui est lui-même dense dans I^d. □

REMARQUE. — On prend a_0 uniquement pour être sûr que les suites périodiques obtenues soient admissibles.

Cette proposition permet de montrer le lemme suivant :

LEMME 2.10. — *Pour tout x de I^d, l'ensemble*

$$F_x = \lim_{n\to\infty} \Big\{ \Psi_{a_1} \circ \cdots \circ \Psi_{a_n}(x),\ (a_1, \dots, a_n) \text{ est le début d'une suite de } \mathcal{S} \Big\}$$

est égal à I^d. On en déduit que si une fonction holomorphe définie sur un domaine Ω de $\mathbb{C}^d$, Ω contenant I^d, est nulle sur F_x, alors elle est nulle sur Ω.

Preuve. — Si y est un point T-périodique, il existe une suite de longueur minimale $r > 0$ d'éléments de $\mathcal{A}_d$ telle que

$$\Psi_{a_1} \circ \cdots \circ \Psi_{a_r}(y) = y.$$

Cette fonction est une contraction de (I^d, δ). Alors d'après le théorème de points fixes pour les contractions on a : pour tout x de I^d,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\Psi_{a_1} \circ \cdots \circ \Psi_{a_r}\right)^n(x) = y.$$

Ainsi pour tout $x \subset I^d$, on a $\mathrm{Per}(T) \subset F_x$. Mais $\mathrm{Per}(T)$ est dense dans I^d, F_x est un fermé dans I^d ; donc $F_x = I^d$. $\square$

2.3. Existence d'une partitition markovienne finie.

Dans ce paragraphe, on va montrer que T admet une partition markovienne finie. On rappelle d'abord [Ma] :

DÉFINITION 2.11. — On dit que la partition $(W\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}}$ de I^d est *markovienne* pour T si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(C_1) Pour tous σ de $\mathfrak{S}$, a de $\mathcal{A}_d$, on a l'alternative suivante :

- il existe un unique σ_a dans $\mathfrak{S}$ tel que $\Psi_a(W_\sigma) \subset W_{\sigma_a} \cap K_a$;
- $\psi_a(W_\sigma) \subset \mathbb{R}^n \setminus I^n$.

(C2) Pour tous σ, σ' de $\mathfrak{S}$, il existe des suites de longueur finie r, $(a_i)_{1 \le i \le r}$ d'éléments de $\mathcal{A}_d$ et $(\sigma_i)_{1 \le i \le r}$ des éléments de $\mathfrak{S}$ tels que :

$$\sigma_1 = \sigma' \quad \text{et} \quad \Psi_{a_\ell} \circ \cdots \circ \Psi_{a_r}(W_\sigma) \subset W_{\sigma_\ell} \quad \text{où} \quad 1 \le \ell \le r.$$

Soit $\mathfrak{S}_d$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, d\}$; pour tout σ de $\mathfrak{S}_d$, on note :

$$\mathbb{W}_\sigma = \left\{x \in I,\ 0 \le x_{\sigma(1)} \le \cdots \le x_{\sigma(d)} \le 1\right\}.$$

Alors on a :

PROPOSITION 2.12. — *La partition finie* $I^d = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathbb{W}_\sigma$ *est une partition markovienne pour* T.

Preuve. — On note

$$\Psi_a(x) = (X_0, X_1, \ldots, X_{d-1})\,;$$

on pose $x_0 = 0$, $a_0 = 1$. Ainsi on a $X_k = \dfrac{a_k + x_k}{x_d + a_d}$ pour $k < d$. On fixe a dans $\mathcal{A}_d$, σ dans $\mathfrak{S}_d$ et x dans W_σ. La démonstration de (C_1) repose sur les quatre remarques faciles suivantes :

(R_1) S'il existe $1 \leq k \leq d-1$ tel qu'on ait à la fois $a_k = a_d$ et $x_k > x_d$ alors :

$$\Psi_a(\mathbb{W}_\sigma) \subset \mathbb{R}^d \setminus I^d.$$

On exclut ce cas par la suite.

(R_2) Si pour $0 < k < d$,

$$\begin{aligned} a_k = 0 \quad &\text{alors} \quad X_k \leq X_0, \\ a_k > 0 \quad &\text{alors} \quad X_0 \leq X_k. \end{aligned}$$

(R_3) Si pour $0 < k \neq i < d$, on a $a_k < a_i$ alors $X_k \leq X_i$.

(R_4) Si pour $0 < k \neq i < d$, on a $a_k = a_i$, on ne peut comparer X_i et X_k que si on sait comparer x_i et x_k. On a $x_i \leq x_k \Rightarrow X_i \leq X_k$.

On en déduit donc que l'ordre des $(X_k)_{0 \leq k \leq d-1}$ dépend fortement des $(a_k)_{0 \leq k \leq d-1}$ et dans un second temps de l'ordre des $(x_k)_{0 \leq k \leq d-1}$.

Si les a_i sont deux à deux distincts, il existe une unique permutation σ_a de $\mathfrak{S}_d$ telle que $a_{\sigma_a(0)} \leq \cdots \leq a_{\sigma_a(d-1)}$ et donc $\Psi_a(\mathbb{W}_\sigma) \subset \mathbb{W}_{\sigma_a} \cap K_a$.

Si certains des a_i sont égaux, il existe une unique permutation σ_a de $\mathfrak{S}_d$ qui réalise l'ordre lexicographique :

$$\left.\begin{array}{c} a_{\sigma_a(0)} \leq \cdots \leq a_{\sigma_a(d-1)} \\ \text{et} \quad a_{\sigma_a(k)} = a_{\sigma_a(k+1)} \end{array}\right\} \Longrightarrow x_{\sigma_a(k)} \leq x_{\sigma_a(k+1)}.$$

On a donc $\Psi_a(\mathbb{W}_\sigma) \subset \mathbb{W}_{\sigma_a} \cap K_a$.

Pour montrer (C_2), on fixe σ et σ' dans $\mathfrak{S}_d$. On suppose que $\sigma'(0) = k$. On note τ le $(k+1)$-cycle $(\sigma'(0), \ldots, \sigma'(k))$ et $\sigma_0 = \tau \circ \sigma'$. On passe de $\mathbb{W}_\sigma$ à $\mathbb{W}_{\sigma_0}$ par Ψ_a où a est l'élément de $\mathcal{A}_d$ qui est déterminé par :

$$a_{\sigma_0(0)} = a_0 = 1, \quad a_{\sigma_0(i)} = i+1 \text{ pour } i < d, \quad a_d = d+1.$$

On a alors

$$1 < a_{\sigma_0(1)} < \cdots < a_{\sigma_0(d-1)} < a_d = d+1.$$

Donc $\Psi_a(\mathbb{W}_\sigma) \subset \mathbb{W}_{\sigma_0}$. On passe de $\mathbb{W}_{\sigma_0}$ à $\mathbb{W}_{\sigma'}$ par Ψ_b où $b_0 = 1$, $b_{\sigma'(i)} = 0$ si $\sigma'(i) < k$ et $b_{\sigma'(i)} = 1$ si $\sigma'(i) > k$, $b_d = 2$. L'action de Ψ_b sur $x \subset \mathbb{W}_{\sigma_0}$ est de replacer le 1^{er} terme à la place k dans Ψ_b sans changer l'ordre des autres. On a alors

$$0 \leq X_{\sigma'(1)} \leq \cdots \leq X_{\sigma'(d)} \leq 1$$

et donc $\Psi_b \circ \Psi_a(\mathbb{W}_\sigma) \subset \Psi_b(\mathbb{W}_{\sigma_0}) \subset \mathbb{W}_{\sigma'}$. $\square$

2.4. Extension au domaine complexe.

Les Ψ_a sont des homographies, on peut donc les étendre au domaine complexe ; en fait on a :

PROPOSITION 2.13. — *Il existe un domaine Ω de $\mathbb{C}^d$ qui est borné, convexe, fermé et qui contient I^d et un domaine Ω_1, strictement contenu dans Ω tel que pour tout a de $\mathcal{A}_d$, le prolongement naturel de Ψ_a en une fonction holomorphe sur Ω vérifie :*

$$\Psi_a(\Omega) \subset \Omega_1 \subset \Omega.$$

Preuve. — Cette proposition est en fait un corollaire de la PROPOSITION 1.2. Le fait que les Ψ_a soient des homographies permet de travailler avec les espaces vectoriels et ensuite de passer aux espaces projectifs associés et ensuite de complexifier.

On définit les cônes $\widetilde{D}_1$ et $\widetilde{D}$ les cônes de $\mathbb{R}^{d+1}$ qui ont pour base D_1 et D. On a :

$$\widetilde{D}_1 = \{(\lambda x, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}, x \in D_1\},$$

$$\widetilde{D} = \{(\lambda x, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}, x \in D\}.$$

Le cône $\widetilde{D}_1$ est contenu dans $\widetilde{D}$. Le cône $\widetilde{D}$ est envoyé dans $\widetilde{D}_1$ par la famille de transformations linéaires M_a car

$$M_a(\lambda x, \lambda) = (\lambda x_n + a_n)(\Psi_a x, 1).$$

On passe alors aux ensembles complexifiés. On pose :

$$\widetilde{\Omega}_1 = \widetilde{D}_1 + i\widetilde{D}_1, \quad \widetilde{\Omega} = \widetilde{D} + i\widetilde{D}.$$

On prolonge naturellement les transformations M_a au domaine complexe, on en déduit $M_a\widetilde{\Omega} \subset \widetilde{\Omega}_1 \subset \widetilde{\Omega}$ pour tout a de $\mathcal{A}_d$.

Maintenant, on passe aux espaces projectifs ; on pose :

$$\Omega = \pi_{\mathbb{C}}(\widetilde{\Omega}), \quad \Omega_1 = \pi_{\mathbb{C}}(\widetilde{\Omega}_1),$$

où $\pi_{\mathbb{C}}$ est la projection :

$$(z_1, \ldots, z_{d+1}) \in \mathbb{C}^{d+1} \longmapsto \Big(\frac{z_1}{z_{d+1}}, \ldots, \frac{z_d}{z_{d+1}}\Big) \in \mathbb{C}^d.$$

Soit Ψ_a le prolongement naturel de Ψ_a au domaine complexe. On a

$$\Psi_a = \pi_{\mathbb{C}} \circ M_a.$$

On en déduit donc que

$$\Psi_a(\Omega) \subset \Omega_1 \subset \Omega.$$

Il reste donc à démontrer que Ω et Ω_1 sont des domaines convexes, bornés, fermés de $\mathbb{C}^n$ et qu'ils contiennent I^d.

Par définition de $\pi_{\mathbb{C}}$ on a :

$$\Omega = \Big\{ \frac{\lambda x + i\mu y}{\lambda + i\mu}, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \mu \in \mathbb{R}, \ x, y \in D \Big\} ;$$

on remarque que

$$\frac{\lambda x_k + i\mu y_k}{\lambda + i\mu} = \frac{\lambda^2 x_k + \mu^2 y_k}{\lambda^2 + \mu^2} + i \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 + \mu^2}(y_k - x_k)$$

est un élément de

$$\big[-\alpha_k, \beta_k\big] + i\big[-\tfrac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k), \tfrac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)\big].$$

Comme les $\dfrac{\lambda x_k + i\mu y_k}{\lambda + i\mu}$ ne dépendent que des coordonnées d'indice k, on a alors :

$$\begin{aligned} \Omega = \Big(\big[-\alpha_1, \beta_1\big] + i\big[-\tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1), \tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_2)\big] \Big) \\ \times \cdots \times \Big(\big[-\alpha_d, \beta_d\big] + i\big[-\tfrac{1}{2}(\alpha_d + \beta_d), \tfrac{1}{2}(\alpha_d + \beta_d)\big] \Big) \end{aligned}$$

où $\alpha_d = \frac{1}{2}$ et $\beta_d = K$.

Ce qui conclut la preuve de la PROPOSITION 2.13. □

PROPOSITION 2.14. — *Pour x et y dans Ω, on définit :*

$$\delta(x, y) = \big|\log |(I, J, x, y)|\big|$$

où I et J sont les intersections de la droite xy avec le bord de Ω. La fonction δ est la distance de Hilbert associée à Ω ; sur Ω_1, δ est équivalente à la distance euclidienne. Alors pour tout x, y de Ω, pour tout a de $\mathcal{A}_d$ on a :

$$\delta(\Psi_a x, \Psi_a y) \leq \rho' \delta(x, y)$$

où

$$\rho' = \operatorname{th}\big(\tfrac{1}{4}\Delta'\big) \quad \text{et} \quad \Delta' = \sup_{x,y \in \Omega_1} \delta(x, y).$$

La preuve de la PROPOSITION 2.14 est exactement celle de la PROPOSITION 2.4.

REMARQUE. — La restriction de δ à I^d est la distance δ définie au 2.3.

2.5. Comportement asymptotique du n-ième reste $T^n x$.

Dans cette partie, on cherche à étudier le comportement asymptotique du reste $T^n x$ quand x est uniformément réparti dans I^d. Cela revient à étudier le comportement asymptotique de la suite de mesures $(m \circ T^n)_{n>0}$. On va montrer qu'il existe une unique fonction $h : I^d \to I^d$ strictement positive, holomorphe sur chacun des $\mathbb{W}_\sigma$ telle que la suite de mesures de probabilité $(m \circ T^n)_{n>0}$ converge vers la mesure de probabilité $\mu = hm$.

Pour faire cela, on va démontrer qu'il existe une unique mesure de probabilité invariante par T et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m. On la note $\mu = hm$ et on vérifiera ensuite que h a bien les propriétés indiquées.

On va passer par l'intermédiaire de l'opérateur de Perron-Frobenius Φ car les fonctions propres associées à 1 donnent les densités des mesures invariantes par T. On s'inspire des travaux de D. Mayer pour faire l'étude de Φ. On donne une nouvelle preuve de l'existence de $\mu = hm$ car le fait que T admette une partition markovienne finie simplifie la démonstration de [Ma].

L'opérateur de Perron-Frobenius associé à T est défini par la relation

$$\langle \Phi f, g\rangle_m = \langle f, g \circ T\rangle_m$$

où $f \in L^1_m(I^d)$, $g \in L^\infty_m(I^d)$ et

$$\langle f, g\rangle_m = \int_{I^d} f \cdot g \,\mathrm{d}m.$$

Comme T est une transformation dilatante, pour tout $f \in L^1_m(I^d)$, on a :

$$\Phi f(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}_d} f(\Psi_a x) \left|\det \Psi'_a x\right| 1_{TK_a}(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}_d} \frac{f(\Psi_a x)}{(x_d + a_d)^{d+1}} 1_{TK_a}(x).$$

L'opérateur Φ est difficilement manipulable, à cause des indicateurs, par exemple ; il ne préserve pas les fonctions continues ; comme T admet une partition markovienne finie, on va pouvoir passer en dimension supérieure (finie) pour faire la décomposition spectrale de Φ. On va construire l'opérateur $\widehat{\Phi}$ associé à Φ, c'est l'opérateur de transfert ou de Ruelle Araki [Ma] associé à T. Pour faire cette construction, l'important est de remarquer :

PROPOSITION 2.15. — *Soit f un élement de $L^1_m(I^d)$. On peut toujours considérer f comme un vecteur $(f_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_d}$ de $\prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} L^1_m(\mathbb{W}_\sigma)$. Réciproquement, tout élément de $\prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} L^1_m(\mathbb{W}_\sigma)$ peut être considéré comme une fonction de $L^1_m(I^d)$.*

On notera :

$$L^1_m(I^d) \xrightarrow{\omega} \prod_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} L^1_m(\mathbb{W}_\sigma) \quad \text{et} \quad \prod_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} L^1_m(\mathbb{W}_\sigma) \xrightarrow{\omega^{-1}} L^1_m(I^d).$$

Preuve. — Si f est dans $L^1_m(I^d)$, alors pour tout σ de $\mathfrak{S}_d$, la restriction f_σ de f à $\mathbb{W}_\sigma$ est dans $L^1_m(\mathbb{W}_\sigma)$. On associe alors à f le vecteur

$$\omega(f) = (f_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}$$

de $\prod_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} L^1_m(\mathbb{W}_\sigma)$. Réciproquement, si $(f_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}$ est dans $\prod_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} L^1_m(\mathbb{W}_\sigma)$, alors

$$\omega^{-1}(f) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} f_\sigma 1_{\mathbb{W}_\sigma}(x)$$

est dans $L^1_m(I^d)$. □

Comme la partition $I^d = \bigcup_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} \mathbb{W}_\sigma$ est markovienne pour T, on peut faire la même construction pour l'opérateur Φ.

PROPOSITION 2.16. — *Pour tout τ de $\mathfrak{S}_d$, pour tout x de $\mathbb{W}_\tau$, on a :*

$$(\Phi f)_\tau(x) = \sum_{a\in\mathcal{A}_d} \frac{A(\tau,a)}{(x_d+a_d)^{d+1}} f_{\tau_a}(\Psi_a x)$$

où $A(\tau,a) = \begin{cases} 0 & si\ \Psi_a(I^d) \subset \mathbb{R}^d \setminus I^d \\ 1 & sinon \end{cases}$ *et* $\tau_a = \tau$ *si* $A(\tau,a) = 0$.

Preuve. — Si x est dans $\mathbb{W}_\tau$, on a :

$$\begin{aligned}(\Phi f)_\tau(x) &= (\Phi f)(x) 1_{\mathbb{W}_\tau}(x) \\ &= \sum_{a\in\mathcal{A}_d} \frac{f(\Psi_a x)}{(x_d+a_d)^{d+1}} 1_{TK_a}(x) 1_{\mathbb{W}_\tau}(x) \\ &= \sum_{a\in\mathcal{A}_d} \frac{1}{(x_d+a_d)^{d+1}} \Big[\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} f_\sigma(\Psi_a x) 1_{\mathbb{W}_\sigma}(\Psi_a x) 1_{TK_a}(x) 1_{\mathbb{W}_\tau}(x)\Big].\end{aligned}$$

Comme la partition $(\mathbb{W}_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}$ est une partition markovienne pour T et comme :

$$1_{\mathbb{W}_\sigma}(\Psi_a x) 1_{TK_a}(x) = 1_{\mathbb{W}_\sigma}(\Psi_a x) 1_{K_a}(\Psi_a x) = 1_{\mathbb{W}_\sigma\cap K_a}(\Psi_a x),$$

$$1_{\mathbb{W}_\tau}(x) = 1_{\Psi_a(\mathbb{W}_\tau)}(\Psi_a x),$$

on en déduit que :

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} f_\sigma(\Psi_a x)1_{\mathbb{W}_\sigma}(\Psi_a x)1_{TK_a}(\Psi_a x)1_{\mathbb{W}_\tau}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Psi_a(\mathbb{W}_\tau)\subset\mathbb{R}^d\backslash I^d,\\ f_{\tau_a}(\Psi_a x) & \text{si } \Psi_a(\mathbb{W}_\tau)\subset\mathbb{W}_{\tau_a}\cap K_a\end{cases}$$

On pose alors

$$A(\tau,a)=\begin{cases}0 & \text{si } \Psi_a(\mathbb{W}_\tau)\subset\mathbb{R}^d\backslash I^d,\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$$

et

$$\tau_a=\tau \quad \text{si} \quad A(\tau,a)=0.$$

On peut alors écrire :

$$(\Phi f)_\tau(x)=\sum_{a\in\mathcal{A}_d}\frac{A(\tau,a)}{(x_d+a_d)^{d+1}}f_{\tau_a}(\Psi_a x). \quad \square$$

L'étude de Φ revient donc à l'étude de l'opérateur « vectoriel » précédent :

$$f\longmapsto\big((\Phi f)_\sigma\big)_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}=\omega(\Phi f).$$

Maintenant on remarque que $(\Phi f)_\sigma$ est dans $L^1_m(\mathbb{W}_\sigma)$. Pour avoir une étude plus systématique et pour que tous ces opérateurs soient définis sur le même espace fonctionnel, on va les prolonger au domaine complexe Ω. On remarque d'abord que pour tout a de $\mathcal{A}_d$ la fonction $x\in\Omega\to(x_d+a_d)^{-(d+1)}\in\mathbb{C}$ est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur Ω ; de plus,

$$\Big|\sum_{a\in\mathcal{A}_d}\frac{1}{(x_d+a_d)^{d+1}}\Big|\le\sum_{a_d=1}^{\infty}\frac{(a_d+1)^{d-1}}{(a_d-\frac12)^{d+1}}$$

est uniformément bornée sur Ω. On pose alors

$$\widehat{H}(\Omega)=\big\{f=(f_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} : f_\sigma:\Omega\to\mathbb{C}\text{ est holomorphe bornée sur }\overline{\Omega}\,\big\}.$$

On le munit de la norme $\|f\|=\sup_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}\sup_{z\in\Omega}|f_\sigma(z)|$ qui en fait un espace de Banach. On pose :

Définition 2.17. — Pour tout f de $H(\Omega)$, pour tous x de Ω, τ de $\mathfrak{S}_d$ on pose :

$$(\widehat{\Phi}f)_\tau(x)=\sum_{a\in\mathcal{A}_d}\frac{A(\tau,a)}{(x_d+a_d)^{d+1}}f_{\tau_a}(\Psi_a x).$$

Alors $\widehat{\Phi}$ préserve $\widehat{H}(\Omega)$.

L'étude spectrale de $\widehat{\Phi}$ donne beaucoup de renseignements sur Φ. En effet, on peut passer de $\widehat{H}(\Omega)$ à $L^1_m(I^d)$ par l'opérateur κ suivant :

DÉFINITION 2.18. — *A toute fonction $f : (f_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}$ de $\widehat{H}(\Omega)$, on associe la fonction $\kappa(f)$ de $L^1_m(I^d)$ par la formule suivante : pour x dans I^d, $(\kappa f)(x) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} f_\sigma(x)1_{\mathbb{W}_\sigma}(x) = f_\tau(x)$ si x est dans $\mathbb{W}_\tau$.*

L'opérateur κ est un opérateur linéaire borné de $\widehat{H}(\Omega)$ dans $L^1_m(I^d)$ de norme 1 car $\kappa 1 = 1$ et si f est dans $\widehat{H}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\|\kappa f\|_1 &= \int_{I^d} |\kappa f(x)|\,\mathrm{d}m(x) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} \int_{\mathbb{W}_\sigma} |\kappa f(x)|\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} \int_{\mathbb{W}_\sigma} |f_\sigma|\,\mathrm{d}m \le \|f\|.\end{aligned}$$

Pour passer de $\widehat{\Phi}$ à Φ, on utilise le lemme suivant :

LEMME 2.19. — *Pour tout f dans $\widehat{H}(\Omega)$, on a $\kappa(\widehat{\Phi} f) = \Phi(\kappa f)$.*

Preuve. — Pour presque tout x dans I^d, il existe un unique τ dans $\mathfrak{S}_d$ tel que x appartient à $\mathbb{W}_\tau$. Alors :

$$\kappa(\widehat{\Phi} f)(x) = (\widehat{\Phi} f)_\tau(x) = \sum_{a\in\mathcal{A}_d} \frac{A(\tau,a)}{(x_d + a_d)^{d+1}} f_{\tau_a}(\Psi_a x).$$

Si $A(\tau,a) = 1$, il existe un unique τ_a tel que $\Psi_a(\mathbb{W}_\tau) \subset \mathbb{W}_{\tau_a} \cap K_a$. Si $A(\tau,a) = 0$, on a $\Psi_a(\mathbb{W}_\tau) \subset \mathbb{R}^d \backslash I^d$. On a donc :

$$A(\tau,a) f_{\tau_a}(\Psi_a x) = (\kappa f)(\Psi_a x) 1_{TK_a}(x).$$

Donc

$$\kappa(\widehat{\Phi} f)(x) = \sum_{a\in\mathcal{A}_d} \frac{1}{(x_d + a_d)^{d+1}} (\kappa f)(\Psi_a x) 1_{TK_a}(x) = \Phi(\kappa f)(x). \quad \square$$

Conséquences.

Si f est dans $\widehat{H}(\Omega)$ et est une fonction propre de $\widehat{\Phi}$ associée à λ, si $\kappa f \not\equiv 0$, alors κf est une fonction propre de Φ associée à λ. En particulier si une fonction h de $\widehat{H}(\Omega)$ a toutes les composantes holomorphes strictement positives sur I^d et vérifie $\widehat{\Phi} h = \lambda h$ alors $\lambda = 1$. En effet κh n'est pas nulle, on a donc $\Phi(\kappa h) = \lambda \kappa h$. On intègre, on trouve

$$\int_{I^d} \Phi(\kappa h)\,\mathrm{d}m = \lambda \int_{I^d} \kappa h\,\mathrm{d}m$$

donc $\lambda = 1$ car

$$\int_{I^d} \Phi(\kappa h)\,\mathrm{d}m = \int_{I^d} \kappa h\,\mathrm{d}m \neq 0.$$

On va démontrer qu'il existe une telle fonction propre h pour $\widehat{\Phi}$. Pour cela on va utiliser une généralisation du théorème de Frobenius, celle par exemple de Krasnolselskii [K, p. 75 et suivantes], voir aussi Krein et Rutman [K-R].

On rappelle d'abord quelques définitions. Soit B un espace de Banach.

On dit que $K \subset B$ est un *cône* s'il vérifie les trois conditions :

- K est fermé dans B,
- $u, v \in K$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ impliquent $\alpha u + \beta v \in K$,
- $u \in K$ et $-u \in K$ impliquent $u = 0$.

On dit que K est un *cône reproductible* de B si chaque point de B est la différence de deux points de K.

Quand B est muni d'un cône, on en déduit une relation d'ordre sur B :

$$u \leq v \Longleftrightarrow v - u \in K.$$

Soit u_0 un point de l'intérieur de K ; on dit que l'opérateur $\mathcal{L} : B \to B$ est *u_0-positif relativement au cône K* si :

$$\forall f \in K,\ f \neq 0,\ \exists\, \alpha, \beta > 0,\ \exists\, p \in \mathbb{N}^* : \beta u_0 \leq \mathbb{L}^p f \leq \alpha u_0.$$

On peut alors énoncer le théorème qui servira par la suite :

THÉORÈME 2.20. — *Soient B est un espace de Banach, K un cône reproductible d'intérieur non vide de B, u_0 un point intérieur à K, $\mathcal{L}$ un opérateur de B dans B, u_0-positif relativement au cône K et compact. Alors $\mathcal{L}$ admet exactement un vecteur propre h qui appartient à l'intérieur de K, associé à $\lambda_1 > 0$. Le nombre λ_1 est une valeur propre simple de $\mathcal{L}$, en module strictement plus grande que toutes les autres valeurs spectrales de $\mathcal{L}$.*

On pose (avec $D = \Omega \cap \mathbb{R}^d$) :

$$B(\Omega) = \big\{ f \in \widehat{H}(\Omega) : \text{chaque } f\sigma \text{ est réelle sur } D \big\}.$$

L'ensemble $B(\Omega)$ est un espace de Banach quand on le munit de la norme

$$\|f\| = \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \sup_{z \in \Omega} \big| f_\sigma(z) \big|$$

et on a

$$\widehat{H}(\Omega) = B(\Omega) + iB(\Omega).$$

On définit :

$$K = \{f \in B(\Omega) : \text{chaque } f_\sigma \text{ est positive sur } D\}.$$

L'ensemble K est un cône de $B(\Omega)$ d'intérieur non vide et reproductible. On remarque que $\widehat{\Phi}$ préserve l'espace $B(\Omega)$. De plus on a :

PROPOSITION 2.21. — *$\widehat{\Phi}$ est un opérateur compact de $B(\Omega)$.*

Preuve. — Il suffit de montrer que de toute suite bornée $(f^{(k)})_{k>0}$ d'éléments de $B(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite convergente de $(\widehat{\Phi} f^{(k)})_{k>0}$. Pour tout τ de $\mathfrak{S}_d$, pour tout z de Ω, on a :

$$\begin{aligned}
\left|(\Phi f^{(k)})_\tau(z)\right| &\leq \sum_{a\in\mathcal{A}_d} \left| \frac{A(\tau,a)}{(z_d+a_d)^{d+1}} f^{(k)}_{\tau_a}(\Psi_a x)\right| \\
&\leq \|f^{(k)}\| \sum_{a\in\mathcal{A}_d} \left| \frac{A(\tau,a)}{(z_d+a_d)^{d+1}} \right|.
\end{aligned}$$

Mais pour tout z de Ω,

$$\sum_{a\in\mathcal{A}_d} \left| \frac{A(\tau,a)}{(z_d+a_d)^{d+1}} \right| \leq \sum_{a\in\mathcal{A}_d} \left| \frac{A(\tau,a)}{(-\frac{1}{2}+a_d)^{d+1)}} \right| = M < \infty.$$

Comme la suite $f^{(k)}$ est bornée dans $B(\Omega)$, on en déduit que la suite $((\widehat{\Phi} f^{(k)})_\tau)_{k>0}$ est une suite de fonctions holomorphes sur Ω (réelles sur $\Omega \cap \mathbb{R}^n$) et uniformément bornée sur Ω. Le théorème de Montel [Mo] entraîne alors l'existence d'une sous-suite $((\widehat{\Phi} f^{(kj)})_\tau)_{j>0}$ qui converge uniformément sur Ω. Comme $\mathfrak{S}_d$ est fini, en répétant $d\,!$ fois ce procédé, on en déduit l'existence d'une sous-suite $(\widehat{\Phi} f^{(kj)})_{j>0}$ qui converge dans $B(\Omega)$. □

PROPOSITION 2.22. — *L'opérateur $\widehat{\Phi} : B(\Omega) \to B(\Omega)$ est un opérateur 1-positif relativement au cône K. Ici, 1 est la fonction de K qui est constante et vaut 1 sur toutes ses composantes.*

Preuve. — Pour montrer que $\widehat{\Phi}$ est un opérateur 1-positif, on doit prouver que pour tout $f \neq 0$ de K, il existe deux réels α et β et un entier p non nul tel que :

$$0 < \beta \leq \widehat{\Phi}^p f \leq \alpha.$$

Cela revient donc à montrer qu'il existe un entier p non nul tel que $\widehat{\Phi}^p f$ appartienne à l'intérieur de K.

En effet, si g est à l'intérieur de K alors pour tout τ de $\mathfrak{G}_d$, pour tout x de D, on a $g_\tau(x) > 0$. L'ensemble D est fermé et g_τ est une fonction continue; il existe donc deux réels α_2 et β_2 tels que :

$$0 < \beta_\tau \leq g_\tau \leq \alpha_\tau.$$

On va le faire par l'absurde mais d'abord, on remarque que si un point g de K n'est pas à l'intérieur de K, alors il existe τ dans $\mathfrak{G}_d$ et x dans D tel que $g_\tau(x) = 0$. Soit $f \not\equiv 0$ fixé dans K; on suppose que pour tout $p > 0$, $\widehat{\Phi}^p f$ n'est pas à l'intérieur de K. Donc pour tout $p > 0$, on suppose qu'il existe $\tau(p)$ et $x(p)$ tel que :

$$\big(\widehat{\Phi}^p f\big)_{\tau(p)}\big(x(p)\big) = 0.$$

Par récurrence, on a :

$$\begin{aligned}(\widehat{\Phi}^p f)_\tau(x) = \sum_{a_1\cdots a_p\in\mathcal{A}_d} &\big|\det(\Psi_{a_1}\circ\cdots\circ\Psi_{a_p})'(x)\big| \\ &\times A(\tau, a_p, \ldots, a_1) f_{\tau_{a_p\cdots a_1}}(\Psi_{a_1}\circ\cdots\circ\Psi_{a_p}x)\end{aligned}$$

où

$$A(\tau, a_p, \ldots, a_1) = A(\tau, a_p)A(\tau_{a_p}, a_{p-1})\cdots A(\tau_{a_p\cdots a_{p-1}}, a_1)$$

et $\tau_{a_p\cdots a_1} = (\tau_{a_p\cdots a_2})_{a_1}$. Comme f est positive et comme $\widehat{\Phi}$ est un opérateur positif, si $(\widehat{\Phi}^p f)_{\tau(p)}(x(p)) = 0$, on en déduit que pour tout $(a_1, \ldots, a_p)$ de $\mathcal{A}_d^p$ tel que $A(\tau, a_p, \ldots, a_1) \neq 0$, on a :

$$f_{\tau_{a_p\cdots a_1}}(\Psi_{a_1}\circ\cdots\circ\Psi_{a_p})\big(x(p)\big) = 0.$$

Soit z quelconque dans I^d; comme z est dans chaque $F_{x(p)}$, il existe donc une suite $(a_i^{(p)})_{i\geq 0}$ telle que

$$A\big(\tau(p), a_p^{(p)}, \ldots, a_1^{(p)}\big) = 1,$$

$$\lim_{N\to\infty} \Psi_{a_1^{(p)}}\circ\cdots\circ\Psi_{a_N^{(p)}}\big(x(p)\big) = z.$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé; par analycité des f_σ, il existe $p_0 > 0$ tel que $p > p_0$ implique :

$$\Big|f_{\tau_{a_p^{(p)}\cdots a_1^{(p)}}}\big(\Psi_{a_1^{(p)}}\circ\cdots\circ\Psi_{a_p^{(p)}}\big(x(p)\big)\big) - f_{\tau_{a_p^{(p)}\cdots a_1^{(p)}}}(z)\Big| < \epsilon.$$

Donc :

$$p > p_0 \implies \big|f_{\tau_{a_p^{(p)}\cdots a_1^{(p)}}}(z)\big| < \epsilon.$$

Mais comme $(\mathbb{W}_\tau)_{\tau\in\mathfrak{S}_d}$ est une partition markovienne pour T, la permutation $\tau_{a_p^{(p)}\cdots a_1^{(p)}}$ parcourt $\mathfrak{S}_d$ quand $p > p_0$. Donc pour tout σ de $\mathfrak{S}_d$, la fonction f_σ est nulle sur $F_{x(p)}$; donc f est nulle sur Ω d'après le LEMME 2.10, ce qui contredit l'hypothèse et donc $\widehat{\Phi}$ est 1-positif relativement à K. On peut alors appliquer le THÉORÈME 2.20, on en déduit alors l'existence d'une valeur propre $\lambda_1 > 0$ pour $\widehat{\Phi}$. Le nombre λ_1 est une valeur propre simple et en module strictement plus grande que toutes les autres valeurs spectrales de $\widehat{\Phi}$, λ_1 est associée à h qui est à l'intérieur de K. On en déduit alors que $\lambda_1 = 1$ et qu'il existe une fonction h de $L_m^1(I^d)$ qui est holomorphe sur chacun des $d!$ morceaux $(\mathbb{W}_\tau)_{\tau\in\mathfrak{S}_d}$ et qui est strictement positive sur I^d vérifiant $\Phi h = h$. h étant définie à une constante multiplicative près, on peut toujours la choisir de façon à avoir $\int_{I^d} h\,\mathrm{d}m = 1$. $\square$

Conséquences.

Dans toute la suite, on note :

$$H(\Omega) = \{f \in L_\mu^1(I^d) : \exists\, g \in \widehat{H}(\Omega),\ f = \kappa g\}.$$

Une des premières conséquences du résultat précédent est la proposition suivante :

PROPOSITION 2.23. — *Pour tout t de I^d, pour tout $n > 0$, on a :*

$$\left|mT^n[0,t] - \mu[0,t]\right| \le r^n$$

où $r < 1$ est le module de la deuxième plus grande valeur propre de Φ dans $H(\Omega)$.

Preuve. — On a :

$$\begin{aligned} mT^n[0,t] &= m\{x : T^n x \in [0,t_1]\times\cdots\times[0,t_d]\} = m[1_{[0,t]}\circ T^n] \\ &= \langle 1, 1_{[0,t]}\circ T^n\rangle_m = \langle \Phi^n(1), 1_{[0,t]}\rangle_m \end{aligned}$$

par définition de Φ car $1_{[0,t]}$ est dans $L_m^\infty(I^d)$ et 1 dans $L_m^1(I^d)$. De plus, comme la fonction 1 est dans $H(\Omega)$, on en déduit que :

$$\Phi^n(1) = \mu(1)h + R^n(1) = h + R^n(1).$$

Alors

$$\left|mT^n[0,t] - \mu[0,t]\right| = \left|m(1_{[0,t]}\cdot R^n(1))\right| \le \left\|R^n(1)\right\| \le r^n\|1\| = r^n,$$

car R est un opérateur de rayon spectral $r < 1$ où r est le module de la deuxième plus grande valeur propre de Φ dans $H(\Omega)$.

Une autre conséquence du résultat précédent est que le système dynamique (T,μ) est mélangeant dans $H(\Omega)$, pour les mêmes raisons que dans la PROPOSITION 2.23, on a pour f et g dans $H(\Omega)$

$$\left|m(f\circ T^n\cdot g)-\mu(f)\mu(g)\right|\le r^n\|f\|\cdot\|g\|.$$

Alors, comme $H(\Omega)$ contient au moins toutes les fonctions polynômes sur I^d, on en déduit par densité que pour tous A, B de $\mathcal{B}$

$$\lim_{n\to\infty}\mu\big(T^{-n}(A)\cap B\big)=\mu(A)\mu(B)$$

et donc pour tout f,g de $L^2_\mu(I^d)$

$$\lim_{n\to\infty}\mu\big(f\circ T^n g\big)=\mu(f)\mu(g).$$

REMARQUE. — Le passage par densité fait perdre la vitesse de mélange dans $L^2_\mu(I^d)$.

On a ainsi démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 2.24. — *T admet une unique mesure de probabilité, invariante, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\mu=hm$, où h est une fonction qui ne s'annule pas sur I^d, et pour tout $\tau\in\mathfrak{S}_d$, la restriction de h à $\mathbb{W}_\tau$ est la restriction d'une fonction holomorphe, bornée sur Ω, positive sur D. Φ n'admet pas d'autre valeur propre de module* 1.

Comme h ne s'annule pas sur I^d on peut normaliser l'opérateur de transfert, on pose pour tout φ de $L^1_\mu(I^d)$

$$P\varphi=\frac{\Phi(\varphi h)}{h}\cdot$$

C'est-à-dire, quand on regarde les restrictions aux ensembles $(\mathbb{W}_\tau)_{\tau\in\mathfrak{S}_d}$, si x est dans $\mathbb{W}_\tau$:

$$(P\varphi)_\tau(x)=\sum_{a\in\mathcal{A}_d}p_\tau(x,a)\varphi_{\tau_a}(\Psi_a x)$$

avec

$$p_\tau(x,a)=\frac{A(\tau,a)}{(x_d+a_d)^{d+1}}\,\frac{h_{\tau_a}(\Psi_a x)}{h_\tau(x)}\cdot$$

L'opérateur P est alors markovien sur $H(\Omega)$, il n'a que 1 comme valeur propre de module 1 associée aux constantes et il admet dans $H(\Omega)$ la décomposition spectrale suivante

$$P\varphi=\langle\varphi,1\rangle_\mu+R(\varphi)$$

où $\langle\varphi,1\rangle_\mu=\int_{I^d}\varphi h\,dm$ et où R est un opérateur borné de $H(\Omega)$ de rayon spectral $r<1$ et $R(1)=0$, $\langle R\varphi,1\rangle_\mu=0$.

REMARQUE. — La fonction h n'est pas analytique globalement. Pour le voir on va montrer que h n'est pas continue au passage de $\mathbb{W}_e$ à $\mathbb{W}_\sigma$ où e est l'unité de $\mathfrak{S}_d$ et σ la permutation (d,p) où $p < d$.

Si x est dans $\mathbb{W}_\tau$, τ dans $\mathfrak{S}_d$, alors

$$h(x) = h_\tau(x) = \sum_{a\in\mathcal{A}_d} \frac{A(\tau,a)}{(x_d + a_d)^{d+1}} h_{\tau_a}(\Psi_a x)$$

où par définition

$$A(\tau,a) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Psi_a(\mathbb{W}_\tau) \subset \mathbb{R}^d \setminus I^d, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après la preuve de la PROPOSITION 1.12, $A(\tau,a) = 0$ s'il existe $k < d$ tel que

$$a_k = a_d \quad \text{et} \quad x_k \geq x_d.$$

On en déduit donc que

$$A(e,a) = 1 \ \text{ pour tout } a \text{ de } \mathcal{A}_d,$$

$$A(\sigma,a) = 1 \ \text{ sauf si } a \text{ vérifie } a_p = a_d.$$

Par définition, τ_a réalise l'ordre lexicographique suivant :

$$a_{\tau_a(0)} \leq \cdots \leq a_{\tau_a(d-1)} \quad \text{et} \quad a_{\tau_a(k)} = a_{\tau_a(k+1)} \implies x_{\tau_a(k)} \leq x_{\tau_a(k+1)}.$$

On en déduit donc que $\sigma_a = e_a$ pour tout a de $\mathcal{A}_d$ tel que $a_p \neq a_d$.

On prend x dans $\mathbb{W}_e$ et x' dans $\mathbb{W}_\sigma$ tels que $x'_d = x_d = t$; alors :

$$\begin{aligned} h(x) - h(x') &= h_e(x) - h_\sigma(x') \\ &= \sum_{a\in\mathcal{A}_d : a_d \neq a_p} \frac{h_{\sigma_a}(\Psi_a x) - h_{\sigma_a}(\Psi_a x')}{(t + a_d)^{d+1}} + \sum_{a\in\mathcal{A}_d : a_d = a_p} \frac{h_{e_a}(\Psi_a x)}{(t + a_d)^{d+1}}. \end{aligned}$$

On fait alors tendre x et x' vers $y \in \mathbb{W}_e \cap \mathbb{W}_\sigma$ avec $y_d = t$; le premier terme tend alors vers 0 car $h_{\sigma_a} \circ \Psi_a$ est continue et car la série converge normalement. Comme pour chaque τ de $\mathfrak{S}_d$, la fonction h_τ ne s'annule pas et est continue sur chaque $\mathbb{W}_\tau$ qui est compact, il existe donc $m_\tau > 0$ tel que $h_\tau(x) > m_\tau$. L'ensemble $\mathfrak{S}_d$ est fini, donc $m = \inf_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} m_\tau$ est strictement positif. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{a\in\mathcal{A}_d : a_d = a_p} \frac{h_{e_a}(\Psi_a x)}{(t + a_d)^{d+1}} &\geq m \sum_{a\in\mathcal{A}_d : a_d = a_p} \frac{1}{(t + a_d)^{d+1}} = m \sum_{a_n=1}^{\infty} \frac{(a_d)^{d-2}}{(a_d + t)^{d+1}} \\ &\geq m \sum_{a_d=1}^{\infty} \frac{1}{(a_d + 1)^3} > 0. \end{aligned}$$

Ainsi :
$$\lim_{\substack{x\in\mathbb{W}_e,x\to y\\ x'\in\mathbb{W}_\tau,x'\to y\\ y\in\mathbb{W}_e\cap\mathbb{W}_\tau}} \big(h(x)-h(x')\big)>0.$$
Dans le cas $d=2$, la fonction h est analytique par morceaux avec exactement deux morceaux, sinon il y a au plus $d!$ morceaux. On ne connaît pas la valeur explicite de h sauf dans le cas des fractions continues classiques :
$$d=1,\quad h(x)=\frac{1}{\log 2}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot$$

3. Algorithme de Jacobi-Perron et lois stables symétriques

Soit α un multi-indice tel que
$$\bar\alpha=\sum_{i=1}^{d}\alpha_i>\tfrac{1}{2}\cdot$$
Le but de cette partie est de démontrer la convergence des sommes
$$\frac{1}{n^{\bar\alpha}}\widetilde{S}_n=\frac{1}{n^{\bar\alpha}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k^\alpha(x)\quad\text{où}\quad a^\alpha=a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_d^{\alpha_d}$$
vers une loi stable symétrique de paramètre $\beta=\bar\alpha^{-1}$ quand x est uniformément réparti dans I^d. On va faire cette démonstration par l'étude spectrale d'opérateurs. Par souci de simplicité, on a choisi une somme alternée : cela permet de ne pas tenir compte des moyennes et d'obtenir des lois stables symétriques. La démonstration est alors plus facile car une loi stable symétrique ν est définie par son paramètre β et par la constante
$$C=\lim_{t\to\infty}t^\beta\nu[t,\infty]$$
tandis qu'une loi stable (non symétrique) est définie par trois coefficients (*cf.* [Br], [F] ou [L]). Mais on aurait très bien pu faire cette démonstration dans un cadre plus général (voir [G-L]) pour le cas des fractions continues « classiques ». D'après la méthode des fonctions caractéristiques de Paul Lévy, il suffit de montrer que :
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\exp\Big(it\frac{\widetilde{S}_n}{n^\alpha}\Big)\,\mathrm{d}m=\mathrm{e}^{-|t/c|^\beta}.$$
On remarque que si P est l'adjoint d'une transformation τ par rapport à la mesure μ et si P_λ est l'opérateur perturbé de P par rapport à f : $P_\lambda(\varphi)=P(\mathrm{e}^{i\lambda f}\cdot\varphi)$ alors on a, avec $S_nf=\sum_{k=0}^{n-1}f\circ\tau^k$:
$$\langle\mathrm{e}^{i\lambda S_nf}\cdot\varphi,1\rangle_\mu=\langle P_\lambda^n(\varphi),1\rangle_\mu=\langle P^n(\mathrm{e}^{i\lambda S_nf}\cdot\varphi),1\rangle_\mu.$$

A cause du changement de signe, l'étude de T et de P ne suffit pas. C'est pourquoi on va construire un nouveau système dynamique $(X, \widetilde{T}, \widetilde{\mu})$ qui permettra l'étude des sommes $\widetilde{S}_n$. La transformation $\widetilde{T}$ sera telle que

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \widetilde{T}^k \quad \text{où } f(x) = a^\alpha(x).$$

3.1. Construction de $(X, \widetilde{T}, \widetilde{\mu})$ et de $\widetilde{P}$.

On pose $X = I^d \times \{-1, 1\}$; on le munit de la tribu produit

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \otimes \{\emptyset, \{-1, 1\}, \{-1\}, \{1\}\}.$$

Sur $(X, \widetilde{\mathcal{B}})$, on met la mesure produit

$$\widetilde{\mu} = \mu \otimes \tfrac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}).$$

La mesure de Lebesgue sur X sera notée

$$\widetilde{m} = m \otimes \tfrac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}).$$

On définit alors la transformation

$$\widetilde{T} : (x, \epsilon) \in X \longmapsto (Tx, -\epsilon) \in X.$$

La mesure $\widetilde{\mu}$ est $\widetilde{T}$-invariante car

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}\big(\widetilde{T}(A \times C)\big) &= \widetilde{\mu}\big(TA \times (-C)\big) \\
&= \mu(TA)\big(\tfrac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})\big)(-C) \\
&= \mu(A)\big(\tfrac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})\big)(C) = \widetilde{\mu}(A \times C).
\end{aligned}$$

On prolonge alors f à X par

$$f : (x, \epsilon) \in X \longmapsto \epsilon f(x) = f(x, \epsilon) \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
S_n f(x, \epsilon) &= \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \widetilde{T}^k(x, \epsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} f\big(T^k x, (-1)^k \epsilon\big) \\
&= \epsilon \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f(T^k x) = \epsilon \widetilde{S}_n(x).
\end{aligned}$$

Ainsi l'étude de l'opérateur $\widetilde{T}$ et de son adjoint $\widetilde{P}$ donnera des renseignements sur les sommes envisagées. L'adjoint $\widetilde{P}$ est défini par :

$$\varphi \in L^1_{\widetilde{\mu}}(X), \psi \in L^\infty_{\widetilde{\mu}}(X), \langle \varphi, \psi \circ \widetilde{T} \rangle_{\widetilde{\mu}} = \langle \widetilde{P}\varphi, \psi \rangle_{\widetilde{\mu}}.$$

On a le résultat suivant pour $\widetilde{P}$:

Proposition 3.1. — *Pour tous φ dans $L^1_{\tilde\mu}(X)$, τ de $\mathfrak{S}_d$, x de $\mathbb{W}_\tau$ et ϵ de $\{-1,1\}$, on a :*

$$(\widetilde{P}\varphi)_\tau(x,\epsilon)=\sum_{a\in\mathcal{A}_d} p_\tau(x,a)\varphi_{\tau_a}(\Psi_a x,-\epsilon)$$

où $\varphi_\tau(\cdot,\epsilon)$ désigne la restriction de φ à $\mathbb{W}_\tau\times\{\epsilon\}$.

Preuve. — L'égalité de définition de $\widetilde{P}$ donne pour φ dans $L^1_{\tilde\mu}(X)$, ψ dans $L^\infty_{\tilde\mu}(X)$,

$$\begin{aligned}\int_{I^d}\varphi(x,-1)\psi(Tx,1)\,\mathrm{d}\mu(x)&+\int_{I^d}\varphi(x,1)\psi(Tx,-1)\,\mathrm{d}\mu(x)\\&=\int_{I^d}\widetilde{P}\varphi(x,1)\psi(x,1)\,\mathrm{d}\mu(x)+\int_{I^d}\widetilde{P}\varphi(x,-1)\psi(x,-1)\,\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

En particulier pour tout ψ de $L^\infty_{\tilde\mu}(X)$ vérifiant $\psi(\cdot,-1)\equiv 0$ on a :

$$\int_{I^d}\varphi(x,-1)\psi(Tx,1)\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_{I^d}\widetilde{P}\varphi(x,1)\psi(x,1)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Comme les fonctions $\varphi(\cdot,-1)$ et $\varphi(\cdot,1)$ sont dans $L^1_\mu(I^d)$ et comme $\psi(\cdot,1)$ est dans $L^\infty_\mu(I^d)$, on en déduit que :

$$\widetilde{P}\varphi(x,1)=P\big[\varphi(\cdot,-1)\big](x).$$

Par symétrie, on a aussi $\widetilde{P}\varphi(x,-1) = P[\varphi(\cdot,1)](x)$. Ce que l'on peut écrire, si x est dans $\mathbb{W}_\tau$ et ϵ est dans $\{-1,1\}$

$$(\widetilde{P}\varphi)_\tau(x,\epsilon)=\sum_{a\in\mathcal{A}_d} p_\tau(x,a)\varphi_{\tau_a}(\Psi_a x,-\epsilon).\quad\square$$

Maintenant, on note :

$$\widetilde{H}(\Omega)=\big\{f=(f(\cdot,1),f(\cdot,-1))\in L^1_{\tilde\mu}(X) : f(\cdot,\epsilon)\in H(\Omega)\big\}.$$

C'est un espace de Banach quand on le munit de la norme :

$$\|f\|=\mathrm{Sup}_{\epsilon\in\{-1,1\}}\big\|f(\cdot,\epsilon)\big\|$$

où

$$\big\|f(\cdot,\epsilon)\big\|=\mathrm{Sup}_{\tau\in\mathfrak{S}_d}\,\mathrm{Sup}_{x\in\mathbb{W}_\tau}\big|f_\tau(x,\epsilon)\big|.$$

La décomposition spectrale de $\widetilde{P}$ sur $\widetilde{H}(\Omega)$ est donnée par :

PROPOSITION 3.2. — *$\widetilde{P}$ envoie $\widetilde{H}(\Omega)$ dans $\widetilde{H}(\Omega)$. En outre, $\widetilde{P}$ admet la décomposition spectrale suivante dans $\widetilde{H}(\Omega)$:*

$$\widetilde{P}\varphi = \langle\varphi, 1\rangle_{\tilde{\mu}} + \langle\varphi, \epsilon\rangle_{\tilde{\mu}}\epsilon + \widetilde{R}(\varphi)$$

où $\widetilde{R}$ est un opérateur borné de $\widetilde{H}(\Omega)$ qui est de rayon spectral $\rho_0 < 1$ et qui vérifie $\widetilde{R}(1) = \widetilde{R}(\epsilon) = 0$, $\langle\widetilde{R}(\varphi), 1\rangle_{\tilde{\mu}} = \langle\widetilde{R}(\varphi), \epsilon\rangle_{\tilde{\mu}} = 0$.

Preuve. — On peut voir $\widetilde{P}$ comme un opérateur sur $H(\Omega) \times H(\Omega)$:

$$\widetilde{P} : \varphi = \big(\varphi(\cdot, 1), \varphi(\cdot, -1)\big) \longmapsto \widetilde{P}\varphi = \big(P\varphi(\cdot, -1), P\varphi(\cdot, 1)\big).$$

Comme P préserve $H(\Omega)$, on en déduit que $\widetilde{P}$ préserve aussi $\widetilde{H}(\Omega)$. Pour avoir la décomposition spectrale de $\widetilde{P}$, on remarque que :

$$\big(\varphi(\cdot, 1), \varphi(\cdot, -1)\big) \overset{\widetilde{P}}{\longmapsto} \big(P\varphi(\cdot, -1), P\varphi(\cdot, 1)\big) \overset{\widetilde{P}}{\longmapsto} \big(P^2\varphi(\cdot, 1), P^2\varphi(\cdot, -1)\big).$$

Comme P^2 n'admet que 1 comme valeur propre de module 1 associée aux fonctions constantes dans $H(\Omega)$, on en déduit que $\widetilde{P}$ n'admet qu'au plus -1 et 1 comme valeurs propres associées à des fonctions de $\widetilde{H}(\Omega)$ du type $u1_{\{\epsilon=1\}} + v1_{\{\epsilon=-1\}}$ avec u et v dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les seules valeurs possibles sont $u = v$ et $u = -v$. Donc $\widetilde{P}$ n'admet que 1 et -1 comme valeurs propres de module 1 dans $\widetilde{H}(\Omega)$. Ce sont des valeurs propres simples et $\widetilde{P}1 = 1$, $\widetilde{P}\epsilon = -\epsilon$. On peut alors décomposer $\widetilde{P}$ de la manière suivante : si φ est dans $\widetilde{H}(\Omega)$

$$\widetilde{P}\varphi = \langle\varphi, 1\rangle_{\tilde{\mu}} + \langle\varphi, \epsilon\rangle_{\tilde{\mu}}\epsilon + \widetilde{R}(\varphi)$$

où

$$\widetilde{R}(\varphi) = R\varphi(\cdot, -1)1_{\{\epsilon=1\}} + R\varphi(\cdot, 1)1_{\{\epsilon=-1\}}.$$

L'opérateur $\widetilde{R}$ est donc un opérateur borné de $\widetilde{H}(\Omega)$, de rayon spectral $\rho_0 < 1$, qui vérifie $\widetilde{R}(1) = \widetilde{R}(\epsilon) = 0$ et $\langle\widetilde{R}(\varphi), 1\rangle_{\tilde{\mu}} = \langle\widetilde{R}(\varphi), \epsilon\rangle_{\tilde{\mu}} = 0$. □

3.2 Étude de l'opérateur pertubé de $\widetilde{P}$.

Soit α un multi-indice tel que $\bar{\alpha} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i > \frac{1}{2}$. On définit alors f sur X par $f(x, \epsilon) = \epsilon a(x)^\alpha$. Soit λ un réel quelconque; on définit alors l'opérateur perturbé de $\widetilde{P}$ par $\widetilde{P}_\lambda(\varphi) = \widetilde{P}(\mathrm{e}^{i\lambda f}\varphi)$ pour tout φ dans $L^1_{\tilde{\mu}}(X)$. On a :

PROPOSITION 3.3. — $\widetilde{P}_\lambda$ *laisse stable* $\widetilde{H}(\Omega)$.

Preuve. — Soient φ dans $\widetilde{H}(\Omega)$, ϵ dans $\{-1,1\}$, τ dans $\mathfrak{G}_d$ et x dans $\mathbb{W}_\tau$. On a :

$$(\widetilde{P}_\lambda\varphi)_\tau(x,\epsilon) = \sum_{a\in\mathcal{A}_d} p_\tau(a,x)\,\mathrm{e}^{-i\lambda\epsilon a^\alpha}\varphi_{\tau_a}(\Psi_a x,-\epsilon).$$

La série écrite est une somme de fonctions holomorphes sur Ω qui est uniformément bornée par $\|\varphi\|$; c'est donc une fonction holomorphe sur Ω et donc $\widetilde{P}_\lambda\varphi$ est dans $\widetilde{H}(\Omega)$. □

PROPOSITION 3.4. — *Pour tout* γ *de* $]0,1]$ *tel que* $\bar{\alpha}\gamma < 1$, *il existe* $k_\gamma > 0$ *tel que*

$$\|\widetilde{P}_\lambda - \widetilde{P}\| \le k_\gamma\,|\lambda|^\gamma.$$

Preuve. — Soient φ dans $\widetilde{H}(\Omega)$, ϵ dans $\{-1,1\}$, τ dans $\mathfrak{G}_d$ et x dans $\mathbb{W}_\tau$. On a :

$$\begin{aligned}\big|\big[(\widetilde{P}_\lambda - \widetilde{P})(\varphi)\big]_\tau\big|(x,\epsilon) &\le \sum_{a\in\mathcal{A}_d} p_\tau(x,a)|\mathrm{e}^{-i\lambda\epsilon a^\alpha}-1|\cdot\big|\varphi_{\tau_a}(\Psi_a x,-\epsilon)\big| \\ &\le \|\varphi\|\frac{K}{k}\sum_{a\in\mathcal{A}_d}\frac{|\mathrm{e}^{-i\lambda\epsilon a^\alpha}-1|}{a_d^{d+1}}\end{aligned}$$

où $K = \mathrm{Sup}_{x\in I^d} h(x)$ et $k = \mathrm{Inf}_{x\in I^d} h(x) > 0$.

Comme pour tout $\gamma\in]0,1]$, la fonction $u\mapsto \sin u/u^\gamma$ est continue bornée sur $\mathbb{R}$, il existe donc $C_\gamma > 0$ tel que :

$$|\mathrm{e}^{iu}-1| \le C_\gamma|u|^\gamma \quad \text{pour tout } u \text{ dans } \mathbb{R}.$$

On en déduit alors que :

$$|\mathrm{e}^{-i\epsilon\lambda a^\alpha}-1| \le C_\gamma(a^\alpha)^\gamma|\lambda|^\gamma \le C_\gamma a_d^{\bar{\alpha}\gamma}|\lambda|^\gamma.$$

Si $\bar{\alpha}\gamma < 1$, alors la série

$$\sum_{a\in\mathcal{A}_d}\frac{a_d^{\bar{\alpha}\gamma}}{a_d^{d+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^{d-1}k^{\bar{\alpha}\gamma}}{k^{d+1}}$$

converge. Donc si γ est dans $]0,1]$, $\bar{\alpha}^\gamma < 1$, alors il existe $k_\gamma > 0$ tel que

$$\big\|(\widetilde{P}_\lambda - \widetilde{P})\varphi\big\| \le k_\gamma\,|\lambda|\,\gamma\,\|\varphi\|. \quad □$$

Et donc on en déduit que l'application $\lambda\mapsto\widetilde{P}_\lambda$ est continue, le théorème des perturbations donne alors :

PROPOSITION 3.5. — *Il existe un voisinage V de $\lambda = 0$ et un réel $r > 0$ tels que si λ est dans V, φ dans $\widetilde{H}(\Omega)$, on a :*

$$\widetilde{P}_\lambda(\varphi) = k_\lambda \pi_\lambda(\varphi) + k'_\lambda \pi'_\lambda(\varphi) + \widetilde{R}_\lambda(\varphi)$$

où k_λ et k'_λ sont les valeurs propres dominantes de $\widetilde{P}_\lambda$. Elles sont simples, associées aux fonctions propres e_λ et e'_λ. Les fonctions $\lambda \mapsto k_\lambda$, $\lambda \mapsto k'_\lambda$, $\lambda \mapsto e_\lambda$ et $\lambda \mapsto e'_\lambda$ sont continues dans V et valent 1, -1, 1 et ϵ au point $\lambda = 0$. On choisit e_λ et e'_λ telles que sur V on ait

$$\langle e_\lambda, 1\rangle_{\tilde{\mu}} = \langle e'_\lambda, \epsilon\rangle_{\tilde{\mu}} = 1.$$

π_λ et π'_λ sont les projecteurs de $\widetilde{H}(\Omega)$ sur e_λ et e'_λ. On a :

$$\pi_\lambda \circ \pi'_\lambda = \pi'_\lambda \circ \pi_\lambda = 0.$$

$\widetilde{R}_\lambda$ est un opérateur borné de $\widetilde{H}(\Omega)$ de rayon spectral $\rho \le \rho_0 < 1$ qui vérifie :

$$\pi_\lambda \circ \widetilde{R}_\lambda = \pi'_\lambda \circ \widetilde{R}_\lambda = \widetilde{R}_\lambda \circ \pi_\lambda = \widetilde{R}_\lambda \circ \pi'_\lambda = 0.$$

Les fonctions $\lambda \mapsto \pi_\lambda$, $\lambda \mapsto \pi'_\lambda$ et $\lambda \mapsto \widetilde{R}_\lambda$ sont continues sur V et on a :

$$\pi_0(\varphi) = \langle \varphi, 1\rangle_{\tilde{\mu}}, \pi'_0(\varphi) = \langle \varphi, \epsilon\rangle_{\tilde{\mu}}, \widetilde{R}_0(\varphi) = \widetilde{R}(\varphi)$$

pour tout φ de $\widetilde{H}(\Omega)$. De plus, k_λ appartient à la boule $B(1,r)$, k'_λ appartient à la boule $B(-1,r)$ avec $B(1,r) \cap B(0,\rho) = \emptyset$ et on a les inégalités suivantes pour tout γ de $]0,1[$ tel que $\bar{\alpha}\gamma < 1$,

$$\|e_\lambda - 1\| \le M_\gamma |\lambda|^\gamma, \quad \|e'_\lambda - \epsilon\| \le M_\gamma |\lambda|^\gamma.$$

REMARQUE. — On fait habituellement la théorie des perturbations dans le cadre analytique. En fait, l'hypothèse la fonction $\lambda \mapsto \widetilde{P}_\lambda$ dépend analytiquement de λ peut-être considérablement affaiblie; il suffit de prendre une dépendance continue (par exemple de classe C^k, $k \ge 0$, Hölder...). En effet tout repose sur la formule de Cauchy :

$$f(P) = \frac{1}{2\pi i} \int_B f(\lambda) R(\lambda, P) \, \mathrm{d}\lambda$$

où $R(\lambda, P)$ est la résolvante de P, B une courbe régulière ayant un ou plusieurs morceaux entourant le spectre de P et sur les théorèmes de continuité sous le signe intégral. La preuve de la PROPOSITION 3.5 est exactement celle donnée habituellement, voir le chapitre VII de [D-S].

3.3. Comportement au voisinage de 0 des valeurs propres k_λ et k'_λ.

Dans toute la suite, on va supposer que λ est dans V.

LEMME 3.6. — *On a les égalités suivantes :*

$$k_\lambda = \langle \widetilde{P}_\lambda e_\lambda, 1\rangle_{\tilde\mu} = \big\langle (\widetilde{P}_\lambda - \widetilde{P})(e_\lambda - 1), 1\big\rangle_{\tilde\mu} + \langle \widetilde{P}_\lambda 1, 1\rangle_{\tilde\mu}$$

$$k'_\lambda = \langle \widetilde{P}_\lambda e'_\lambda, \epsilon\rangle_{\tilde\mu} = \big\langle (\widetilde{P}_\lambda - \widetilde{P})(e'_\lambda - \epsilon), \epsilon\big\rangle_{\tilde\mu} + \langle \widetilde{P}_\lambda \epsilon, \epsilon\rangle_{\tilde\mu}.$$

Preuve. — Comme $\langle e_\lambda, 1\rangle_{\tilde\mu} = 1$, alors $\langle \widetilde{P} e_\lambda, 1\rangle_{\tilde\mu} = 1$ pour λ dans V et comme

$$\widetilde{P}_\lambda e_\lambda = (\widetilde{P}_\lambda - \widetilde{P})(e_\lambda - 1) + \widetilde{P}(e_\lambda - 1) + \widetilde{P}_\lambda 1,$$

on a le résultat voulu en intégrant l'égalité précédente. La seconde égalité s'obtient en remplaçant e_λ par e'_λ et 1 par ϵ. ∎

LEMME 3.7. — *Pour tout γ de $]0,1]$ tel que $\bar\alpha\gamma < 1$, il existe $C_\gamma > 0$ et $C'_\gamma > 0$ tels que :*

$$\big|\big\langle (\widetilde{P}_\lambda - P)(e_\lambda - 1), 1\big\rangle_{\tilde\mu}\big| \le C_\gamma |\lambda|^{2\gamma}$$

$$\big|\big\langle (\widetilde{P}_\lambda - P)(e'_\lambda - \epsilon), \epsilon\big\rangle_{\tilde\mu}\big| \le C'_\gamma |\lambda|^{2\gamma}.$$

Preuve. — On a

$$\big|\big\langle (\widetilde{P}_\lambda - P)(e_\lambda - 1), 1\big\rangle_{\tilde\mu}\big| \le \|\widetilde{P}_\lambda - P\| \cdot \|e_\lambda - 1\| \langle 1, 1\rangle_{\tilde\mu} \le C_\gamma |\lambda|^{2\gamma}$$

d'après les PROPOSITIONS 3.4 et 3.5. ∎

LEMME 3.8. — *On pose $\beta = \bar\alpha^{-1}$. Au voisinage de $\lambda = 0$, on a*

$$\langle \widetilde{P}_\lambda 1, 1\rangle_{\tilde\mu} - 1 \sim -A|\lambda|^\beta,$$

$$\langle \widetilde{P}_\lambda \epsilon, \epsilon\rangle_{\tilde\mu} + 1 \sim A|\lambda|^\beta,$$

avec

$$A = \frac{\pi C}{\sin(\frac{\pi}{2}\beta)\Gamma(\beta)} \quad \textit{et} \quad C = \lim_{t\to\infty} t^\beta \mu[f > t] > 0.$$

Preuve. — On a :

$$\langle \widetilde{P}_\lambda 1, 1\rangle_{\tilde\mu} = \langle \widetilde{P}(\mathrm{e}^{i\lambda f}), 1\rangle_{\tilde\mu} = \langle \mathrm{e}^{i\lambda f}, 1\rangle_{\tilde\mu},$$

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{P}_\lambda \epsilon, \epsilon\rangle_{\tilde\mu} &= \langle \widetilde{P}(\mathrm{e}^{i\lambda f}\epsilon), \epsilon\rangle_{\tilde\mu} = \langle \mathrm{e}^{i\lambda f}\epsilon, \epsilon \circ \bar T\rangle_{\tilde\mu} \\ &= \langle \mathrm{e}^{i\lambda f}\epsilon, -\epsilon\rangle_{\tilde\mu} = -\langle \mathrm{e}^{i\lambda f}, 1\rangle_{\tilde\mu}.\end{aligned}$$

Comme $\langle \mathrm{e}^{i\lambda f}, 1\rangle_{\tilde\mu}$ est la transformée de Fourier de la mesure image $\nu = f(\widetilde\mu)$ au point λ et comme ν est symétrique par rapport à l'origine, son comportement au voisinage de $\lambda = 0$, dépend du comportement au voisinage de $t = +\infty$ de $\nu[t, \infty]$.

La mesure ν est une mesure de probabilité symétrique; en effet :

$$\begin{aligned}\nu[t,\infty] = \widetilde{\mu}[f>t] &= \tfrac{1}{2}\Big[\mu[f(\cdot,1)>t] + \mu[f(\cdot,-1)>t]\Big]\\ &= \tfrac{1}{2}\mu\big[f(\cdot,1)>t\big]\end{aligned}$$

car $f(\cdot,-1) = -f(\cdot,1)$ et $f(\cdot,1)\geq 0$. On a donc

$$\begin{aligned}\nu[-\infty,-t] = \widetilde{\mu}[f<-t] &= \tfrac{1}{2}\Big[\mu[f(\cdot,1)<-t] + \mu[f(\cdot,-1)<-t]\Big]\\ &= \tfrac{1}{2}\mu\big[f(\cdot,-1)<-t\big]\\ &= \tfrac{1}{2}\mu\big[f(\cdot,1)>t\big] = \nu[t,\infty].\end{aligned}$$

Le comportement de $\nu[t,\infty]$ au voisinage de $t=+\infty$ dépend donc très fortement de f et donc du multi-indice α choisi. Le comportement de la transformée de Fourier d'une mesure au voisinage de 0 dépend du comportement de la mesure au voisinage de $+\infty$. On a le résultat suivant :

Si η est une mesure de probabilité symétrique par rapport à l'origine et s'il existe $\alpha\in\,]0,2[$ tel qu'au voisinage de $x=+\infty$ on ait $\eta[x,\infty]\sim C/x^{\alpha}$, alors au voisinage de $\lambda=0$, on a $\hat{\eta}(\lambda)-1\sim K|\lambda|^{\alpha}$ où $K=-C\pi/\Gamma(\alpha)\sin(\alpha\pi/2)$.

(Voir [Z] et le chapitre IV de [B-G-T].) La preuve du Lemme 3.8 dépend donc uniquement de la proposition suivante :

Proposition 3.9. — *Au voisinage de $t=+\infty$, on a :*

$$\mu[f>t]\sim\frac{C}{t^{\beta}}$$

où

$$C=\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_d\\ \sigma(1)=1}}\int_{\mathbb{W}_\sigma\cap[x_1=0]}\big(x_2^{\alpha_1}\cdots x_d^{\alpha_{d-1}}\big)^{\beta}h\big(0,x_2,\dots,x_d\big)\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_d>0.$$

Preuve. — Soit a dans $\mathcal{A}_d$. On remarque que si x est dans K_a, alors :

$$\begin{aligned}a_1\leq \frac{x_2}{x_1}&\leq a_1+1,\\ &\cdots\\ a_{d-1}\leq\frac{x_d}{x_1}&\leq a_{d-1}+1,\\ a_d\leq\frac{1}{x_1}&\leq a_d+1.\end{aligned}$$

On a donc

$$G_1(x) \leq f(x) \leq G_2(x),$$

avec

$$G_1(x) = \Big(\Big(\frac{x_2}{x_1} - 1\Big)1_{\{x_2 > x_1\}}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\Big(\frac{x_d}{x_1} - 1\Big)1_{\{x_d > x_1\}}\Big)^{\alpha_{d-1}} \Big(\frac{1}{x_1} - 1\Big)^{\alpha_d}$$

et

$$G_2(x) = x_2^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_{d-1}} x_1^{-\bar{\alpha}}.$$

On a donc si $G_1 > t$ alors $G_2 > t$ et $f > t$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{a \in \mathcal{A}_d} \int_{K_a \cap [G_1 > t]} h \,\mathrm{d}m &\leq \sum_{a \in \mathcal{A}_d} \mu\big[K_a : a_1^{\alpha_1} \cdots a_d^{\alpha_d} > t\big] \\ &\leq \sum_{a \in \mathcal{A}_d} \int_{K_a \cap [G_2 > t]} h \,\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

Donc :

$$\mu[G_1 > t] \leq \mu[f > t] \leq \mu[G_2 > t].$$

On va maintenant montrer que $\mu[G_1 > t]$ et $\mu[G_2 > t]$ sont tous les deux équivalents à C/t^β au voisinage de $t = +\infty$ avec

$$C = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_d \\ \sigma(1) = 1}} \int_{\mathbb{W}_\sigma \cap [x_1 = 0]} \big(x_2^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_{d-1}}\big)^\beta h\big(0, x_2, \ldots, x_d\big) \,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_d$$

ce qui achèvera la preuve.

D'abord :

$$\begin{aligned}\mu[G_1 > t] = \int_{[G_1 > t]} h \,\mathrm{d}m &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \int_{\mathbb{W}_\sigma \cap [G_1 > t]} h_\sigma \,\mathrm{d}m \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_d \\ \sigma(1) = 1}} \int_{\mathbb{W}_\sigma \cap [G_1 > t]} h_\sigma \,\mathrm{d}m\end{aligned}$$

car $\mathbb{W}_\sigma \cap [G_1 > t] = \phi$ si $\sigma(1) > 1$. On fixe $\sigma \in \mathfrak{S}_d$, $\sigma(1) = 1$. Alors

$$\begin{aligned}[G_1 > t] \cap \mathbb{W}_\sigma = \Big\{x \in I^d : 0 \leq x_1 \leq x_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq x_{\sigma(d)} \leq 1 \text{ et} \\ \Big(\frac{x_2}{x_1} - 1\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{x_d}{x_1} - 1\Big)^{\alpha_{d-1}} \Big(\frac{1}{x_1} - 1\Big)^{\alpha_d} > t\Big\}.\end{aligned}$$

On fait alors le changement de variables :

$$\frac{x_2}{x_1} - 1 = \frac{X_2}{X_1}, \ldots, \ \frac{x_d}{x_1} - 1 = \frac{X_d}{X_1}, \ \frac{1}{x_1} - 1 = \frac{1}{X_1}\cdot$$

Donc

$$x_1 = \frac{X_1}{X_1+1}, \ x_2 = \frac{X_2+X_1}{X_1+1}, \ldots, \ x_d = \frac{X_d+X_1}{X_1+1}.$$

Comme x_1 est dans I, on en déduit que $X_1 \geq 0$. La condition

$$0 \leq x_1 \leq x_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq x_{\sigma(d)} \leq 1$$

entraîne alors

$$0 \leq X_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq X_{\sigma(d)} \leq 1.$$

La condition

$$\Big(\frac{x_2}{x_1} - 1\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{x_d}{x_1} - 1\Big)^{\alpha_{d-1}} \Big(\frac{1}{x_1} - 1\Big)^{\alpha_d} > t$$

devient

$$\Big(\frac{X_2}{X_1}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{X_d}{X_1}\Big)^{\alpha_{d-1}} \Big(\frac{1}{X_1}\Big)^{\alpha_d} > t$$

donc

$$X_1 < (X_2^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_{d-1}})^{\beta} t^{-\beta}.$$

On pose

$$u = (X_2^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_{d-1}})^{\beta} t^{-\beta}.$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned}
B &= \int_{\mathbb{W}_\sigma \cap [G_1 > t]} h_\sigma \,\mathrm{d}m \\
&= \int_0^1 dX_{\sigma(d)} \int_0^{X_{\sigma(d)}} \mathrm{d}X_{\sigma(d-1)} \cdots \int_0^{X_{\sigma(3)}} \mathrm{d}X_{\sigma(2)} \\
&\qquad \int_0^u \frac{1}{(X_1+1)^{d+1}} h_\sigma\Big(\frac{X_1}{X_1+1}, \frac{X_2+X_1}{X_1+1}, \ldots, \frac{X_d+X_1}{X_1+1}\Big) \mathrm{d}X_1.
\end{aligned}$$

Mais comme h_σ est continue sur $\mathbb{W}_\sigma$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{X_1 \to 0} h_\sigma\Big(\frac{X_1}{X_1+1}, \frac{X_1+X_2}{X_1+1}, \ldots, \frac{X_1+X_d}{X_1+1}\Big) &\frac{1}{(X_1+1)^{d+1}} \\
&= h_\sigma(0, X_2, \ldots, X_d)
\end{aligned}$$

pour tout $0 \leq X_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq X_{\sigma(d)} \leq 1$ fixé.

Soit $\epsilon > 0$; si t est assez grand, alors pour tout

$$0 \leq X_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq X_{\sigma(d)} \leq 1$$

fixé, on a :

$$\Big| t^\beta \int_0^u \frac{1}{(X_1+1)^{d+1}} h_\sigma\Big(\frac{X_1}{X_1+1}, \frac{X_2+X_1}{X_1+1}, \ldots, \frac{X_d+X_1}{X_1+1}\Big)\,\mathrm{d}X_1 - h_\sigma(0, X_2, \ldots, X_d)(X_1^{\alpha_2} \cdots X_d^{\alpha_{d-1}})^\beta \Big|$$

$$\leq t^\beta \int_0^u \Big| \frac{1}{(X_1+1)^{d+1}} h_\sigma\Big(\frac{X_1}{X_1+1}, \frac{X_2+X_1}{X_1+1}, \ldots, \frac{X_d+X_1}{X_1+1}\Big) - h_\sigma(0, X_2, \ldots, X_d)\Big|\,\mathrm{d}X_1$$

$$< \epsilon$$

avec $u = (X_2^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_{d-1}})^\beta t^{-\beta}$. Donc en intégrant on obtient :

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} t^\beta \int_{\mathbb{W}_\sigma \cap [G_1 > t]} h_\sigma \,\mathrm{d}m \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}X_{\sigma(n)} \int_0^{X_{\sigma(d)}} \mathrm{d}X_{\sigma(d-1)} \cdots \int_0^{X_{\sigma(3)}} (X_2^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_{d-1}})^\beta \, h_\sigma(0, X_2, \ldots, X_d)\,\mathrm{d}X_{\sigma(2)} \\
&= \int_{\mathbb{W}_\sigma \cap [X_1 = 0]} (X_2^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_{d-1}})^\beta h_\sigma(0, X_2, \ldots, X_d)\,\mathrm{d}X_2 \cdots \mathrm{d}X_d
\end{aligned}$$

qui est un nombre réel strictement positif car h_σ est strictement positif et $(X_2^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_{d-1}})^\beta$ est une fonction positive sur $\mathbb{W}_\sigma \cap [X_1 = 0]$. On en déduit que :

$$\lim_{t\to\infty} t^\beta \int_{[G_1 > t]} h_\sigma \,\mathrm{d}m = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_d \\ \sigma(1)=1}} \int_{\mathbb{W}_\sigma \cap [X_1=0]} (X_2^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_{d-1}})^\beta \, h_\sigma(0, X_2, \ldots, X_d)\,\mathrm{d}X_2 \cdots \mathrm{d}X_d.$$

On s'occupe maintenant de $G_2(x) = x_2^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_{d-1}} \cdot x_1^{-\bar{\alpha}}$:

$$\mu[G_2 > t] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \int_{\mathbb{W}_\sigma \cap [G_2 > t]} h_\sigma \,\mathrm{d}m.$$

Si $\sigma(1) = 1$, on a alors :

$$\mathbb{W}_\sigma \cap [G_2 > t] = \Big\{x \in I^d : 0 \leq x_1 \leq x_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq x_{\sigma(d)} \leq 1 \\ \text{et } x_1 < t^{-\beta}(x_2^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_{d-1}})^\beta\Big\}.$$

Alors :

$$\int_{\mathbb{W}_\sigma \cap [G_2 > t]} h_\sigma \,\mathrm{d}m = \int_0^1 \mathrm{d}x_{\sigma(d)} \int_0^{x_{\sigma(d)}} \cdots \int_0^u h_\sigma(x)\,\mathrm{d}x_1$$

avec

$$u = \inf\{x_{\sigma(2)}, t^{-\beta}(x_2^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_{d-1}})^\beta\}.$$

De la même façon, on a :

$$\lim_{t\to\infty} t^\beta \int_{\mathbb{W}_\sigma \cap [G_2 > t]} h_\sigma \,\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{W}_\sigma \cap [x_1 = 0]} \big(x_2^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_{d-1}}\big)^\beta \\ h_\sigma(0, x_2, \ldots, x_d)\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_d.$$

Si $\sigma(1) = k > 1$, on a alors :

$$\int_{\mathbb{W}_\sigma \cap [G_2 > t]} h_\sigma \,\mathrm{d}m = \int_0^1 \mathrm{d}x_{\sigma(d)} \cdots \int_0^u \mathrm{d}x_{\sigma(k)} \\ \int_{\{0 \leq x_{\sigma(1)} < \cdots < x_{\sigma(k)}\}} h_\sigma(x_1, \ldots, x_d)\,\mathrm{d}x_{\sigma(1)} \cdots \mathrm{d}x_{\sigma(k-1)}$$

avec

$$u = \inf\Big\{x_{\sigma(k+1)}, t^{-\beta}\big(x_2^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_{d-1}}\big)^\beta\Big\}.$$

Mais comme h_σ est une fonction continue sur $\mathbb{W}_\sigma$ qui est un fermé, h_σ est donc bornée par M. Alors :

$$\int_{\mathbb{W}_\sigma \cap [G_2 > t]} h_\sigma \,\mathrm{d}m \leq M \int_0^1 \mathrm{d}x_{\sigma(n)} \cdots \int_0^1 \mathrm{d}x_{\sigma(k+1)} \int_0^{1/t^\beta} \mathrm{d}x_{\sigma(k)} \cdots \int_0^{1/t^\beta} \mathrm{d}x_{\sigma(1)} \\ = \frac{M}{t^{k\beta}}.$$

Donc :

$$\lim_{t\to\infty} t^\beta \int_{\mathbb{W}_\sigma \cap [G_2 > t]} h_\sigma \,\mathrm{d}m = 0 \quad \text{si} \quad k > 1.$$

Ainsi :

$$\lim_{t\to\infty} t^\beta \mu[G_1 > t] = \lim_{t\to\infty} t^\beta \mu[G_2 > t] = C$$
$$= \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_d\\ \sigma(1)=1}} \int_{\mathbb{W}_\sigma\cap[x_1=0]} \left(x_2^{\alpha_1}\cdots x_d^{\alpha_{d-1}}\right)^\beta h_\sigma(0,x_2,\ldots,x_d)\, \mathrm{d}x_2\cdots \mathrm{d}x_d.$$

On a alors prouvé le LEMME 3.8. □

3.4. Conclusion.

Comme $\bar\alpha \in \left]\frac{1}{2},\infty\right[$ on en déduit que $\beta = \bar\alpha^{-1}$ est dans $]0,2[$ et donc que la loi de $\widetilde{S}_n$ est dans le domaine de la loi stable symétrique de paramètre β.

On appelle loi *stable symétrique canonique* de paramètre β celle qui a pour transformée de Fourier la fonction $\lambda \mapsto \mathrm{e}^{-|\lambda|^\beta}$. On va maintenant conclure, les LEMMES 3.6, 3.7 et 3.8 permettent d'avoir directement le comportement de k_λ et k'_λ au voisinage de $\lambda = 0$.

PROPOSITION 3.10. — *Au voisinage de $\lambda = 0$, on a $k_\lambda - 1 \sim -A|\lambda|^\beta$ et $k'_\lambda + 1 \sim A|\lambda|^\beta$.*

Preuve. — D'après le LEMME 3.7, on a :

$$\left|\left\langle (\widetilde{P}_\lambda - \widetilde{P})(e_\lambda - 1), 1\right\rangle_{\tilde\mu}\right| \le C_\beta |\lambda|^{2\gamma} \quad \text{avec} \quad \gamma \in]0,1] \text{ et } \bar\alpha_\gamma < 1.$$

La majoration la plus fine est celle où γ est le plus grand possible. Selon les valeurs de $\bar\alpha$, les choix de γ diffèrent. On prend :

$$\gamma_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar\alpha > 1,\\ 1-\varepsilon & \text{si } \bar\alpha = 1,\\ \bar\alpha^{-1} - \epsilon = \beta - \epsilon & \text{si } \bar\alpha < 1.\end{cases}$$

où ϵ est un réel strictement positif, aussi petit que l'on veut. Mais comme au voisinage $\lambda = 0$, la fonction $\lambda \mapsto |\lambda|^{2\gamma_\alpha}$ est négligeable devant $\lambda \mapsto |\lambda|^\beta$, on en déduit grâce aux LEMMES 2.6 et 2.8 que $k_\lambda - 1 \sim A|\lambda|^\beta$ et $k'_\lambda + 1 \sim -A|\lambda|^\beta$ au voisinage de $\lambda = 0$. □

On peut alors conclure sur le comportement des sommes $S_n f/n^{\bar\alpha}$ et ensuite sur les sommes $\widetilde{S}_n/n^{\bar\alpha}$.

THÉORÈME 3.11. — *Quand n tend vers $+\infty$, si (x,ϵ) est uniformément réparti dans $I^d \times \{-1,1\}$ les sommes $S_n f/(A^{\bar\alpha} n^{\bar\alpha})$ convergent en loi vers la loi stable symétrique canonique de paramètre β.*

Preuve. — D'après la méthode des fonctions caractéristiques de P. Lévy, il suffit de démontrer la convergence des transformées de Fourier des sommes $S_n f/(A^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}})$ vers la fonction $\theta \mapsto \mathrm{e}^{-|\theta|^\beta}$ quand n tend vers l'infini.

Il suffit donc de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \langle \mathrm{e}^{i\theta S_n f/A^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}}}, 1\rangle_{\tilde{m}} = \mathrm{e}^{-|\theta|^\beta}.$$

On fixe un entier $n > 0$; pour tout $\lambda \in V$, on a la relation suivante :

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{e}^{i\lambda S_n f}, 1\rangle_{\tilde{m}} &= \langle \mathrm{e}^{i\lambda S_n f}, h^{-1}\rangle_{\tilde{\mu}} = \langle \widetilde{P}_\lambda^n(h^{-1}), 1\rangle_{\tilde{\mu}} \\ &= (k_\lambda)^n \big\langle \pi_\lambda(h^{-1}), 1\big\rangle_{\tilde{\mu}} + (k'_\lambda)^n \big\langle \pi'_\lambda(h^{-1}), 1\big\rangle_{\tilde{\mu}} \\ &\qquad + \big\langle \widetilde{R}_\lambda^n(h^{-1}), 1\big\rangle_{\tilde{\mu}}.\end{aligned}$$

On fixe $\theta \in \mathbb{R}$ et on pose $\lambda = \theta/(A^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}})$. La relation précédente est alors valable pour n assez grand ; on peut donc faire tendre n vers $+\infty$ et on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \big\langle \widetilde{R}^n_{\theta/A^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}}}(h^{-1}), 1\big\rangle_{\tilde{\mu}} = 0,$$

car $\widetilde{R}_\lambda$ est un opérateur borné de rayon spectral plus petit que 1. On a aussi :

$$\lim_{n\to\infty} \big\langle \pi'_{\theta/A^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}}}(h^{-1}), 1\big\rangle_{\tilde{\mu}} = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}(h^{-1}) \langle e'_{\theta/A^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}}}, 1\rangle_{\tilde{\mu}} \langle e'_{\theta/A^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}}}, \epsilon\rangle_{\tilde{\mu}} = 0,$$

car la fonction $\lambda \mapsto e'_\lambda$ est continue et que l'on a

$$\langle e'_\lambda, 1\rangle_{\tilde{\mu}|\lambda=0} = \langle \epsilon, 1\rangle_{\tilde{\mu}} = 0.$$

Comme la fonction $n \mapsto (k'_{\theta/A^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}}})^n$ est bornée, on en déduit alors que :

$$\lim_{n\to\infty} (k'_{\theta/A^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}}})^n \big\langle \pi'_{\theta/A^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}}}(1), 1\big\rangle_{\tilde{\mu}} = 0.$$

On a :

$$\big\langle \pi_{\theta/A^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}}}(1), 1\big\rangle_{\tilde{\mu}} = \tilde{\mu}(h^{-1}) \langle e_{\theta/A^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}}}, 1\rangle_{\tilde{\mu}} = 1.$$

On a aussi :

$$\lim_{n\to\infty} (k_{\theta/A^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}}})^n = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - A\Big|\frac{\theta}{A^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}}}\Big|^\beta\Big)^p = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{|\theta|^\beta}{n}\Big)^n = \mathrm{e}^{-|\theta|^\beta}.$$

On en déduit alors que :

$$\lim_{n\to\infty} \big\langle \mathrm{e}^{i\theta S_n f/A^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}}}, 1\big\rangle_{\tilde{m}} = \mathrm{e}^{-|\theta|^\beta} \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}$$

et donc les sommes

$$\frac{1}{A^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}}} \sum_{k=0}^{n-1} a^{\bar{\alpha}} \circ \widetilde{T}^k$$

convergent en loi vers la loi stable symétrique de paramètre β. $\square$

On se ramène alors aux sommes $\widetilde{S}_n$ en faisant $\epsilon = 1$ et on a donc le résultat suivant :

Les sommes $\dfrac{\widetilde{S}_n}{n^{\bar\alpha}} = \dfrac{1}{n^{\bar\alpha}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k^\alpha(x)$ *convergent vers une loi stable symétrique de paramètre* β *quand* x *est uniformément réparti dans* I^d.

REMARQUE. — Si $\bar\alpha \le \frac{1}{2}$, on est dans le cadre plus classique du théorème limite central.

CONCLUSION. — Comme dans le cas des fractions continues « classiques » ($d = 1$), on en déduit que les $a_k(x)$ se comportent comme des variables aléatoires presque indépendantes, identiquement distribuées et de « grande taille » et de loi de type de Cauchy.

D'un point de vue statistique, le développement en fractions continues par l'algorithme de Jacobi-Perron exige des a_k « grands » au sens précisé par le théorème précédent.

BIBLIOGRAPHIE

[Be] BERNSTEIN (L.). — *The Jacobi–Perron algorithm, its theory and application*, Lecture Notes in Mathematics **207**, Springer 1971.

[B-G-T] BINGHAM (N.H.), GOLDIE (C.M.) et TEUGELS (J.-L.). — *Regular variation.* — Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 1987.

[Br] BREIMAN (L.). — *Probability.* — Addison-Wesley, 1968.

[Bi] BIRKHOFF (G.). — *Extensions of Jentzsch's theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **104**, 1965, p. 507–512.

[Bre] BRENTJES (A.J.). — *Multi-dimensional continued fraction algorithms.* — Mathematical centre tracts 145, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981.

[B-K] BUSEMANN (H.) and KELLY (P.). — *Projective geometry and projective metrics.* — Academic Press, New York, 1953.

[D-S] DUNFORD (N.) et SCHWARTZ (J.T.). — *Linear operators, part I.* — Interscience New York, 1958.

[F] FELLER (W.). — *An Introduction to probability theory and its applications Vol. II.* — Willey, New York, 1966.

[G-H] GUIVARC'H (Y.) et HARDY (J.). — *Théorèmes limites pour une classe de chaîne de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov*, Ann. Inst. H. Poincaré, t. **24**, 1988, p. 73–98.

[G-L] GUIVARC'H (Y.) and LE JAN (Y.). — *Asymptotic winding of the geodesic flow on modular surfaces and continuous fractions*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **26**, 1993, p. 23–50.

[Kh] KHINTCHINE (A. Ya.). — *Continued Fractions.* — The University of Chicago Press, Chicago, 1964.

[K] KRASNOLSELSKII (M.). — *Positive solutions of operator equations.* — Groningen Noodshoff, 1964.

[K-R] KREIN (M.G.) and RUTMAN (M.A.). — *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, Translations A.M.S., series one, vol. **10**, Functional Analysis and Measure Theory, p. 199–325, 1962.

[L1] LÉVY (P.). — *Théorie de l'addition des variables aléatoires.* — Gauthier-Villars, Paris, 1937.

[L2] LÉVY (P.). — *Sur le développement en fraction continue d'un nombre choisi au hasard*, Compositio Math., t. **3**, 1936, p. 286–303.

[Ma] MAYER (D.). — *Approach to equilibrium for locally expanding maps in* $\mathbb{R}^k$, Comm. Math. Phys., t. **95**, 1984, p. 1–15.

[Mo] MONTEL (P.). — *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leur application*, chap. I et IX. — Gauthier-Villar Paris, 1927.

[R] ROUSSEAU-EGÈLE (J.). — *Un théorème de la limite locale pour une classe de transformations dilatantes et monotones par morceaux*, Ann. Probab., t. **3**, 1983, p. 772–788.

[S] SCHWEIGER (F.). — *The metrical theory of Jacobi–Perron algorithm*, Lecture Notes in Mathematics **334**, Springer 1973.

[Z] ZYGMUND (A.). — *Trigonometrical series, vol. I.* — Second edition, Cambridge University Press, 1959.