Etienne Blanchard

Déformations de C^*-algèbres de Hopf

Bulletin de la S. M. F., tome 124, nº 1 (1996), p. 141-215
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_1_141_0>

Bull. Soc. math. France,
124, 1996, p. 141–215.

DÉFORMATIONS DE C^*-ALGÈBRES DE HOPF

PAR

ÉTIENNE BLANCHARD (*)

RÉSUMÉ. — Étant donné un espace compact X, nous généralisons la notion d'unitaire multiplicatif introduite par Baaj et Skandalis (*cf.* [4]) au cadre des $C(X)$-modules hilbertiens et en étudions les propriétés de continuité (*cf.* [40]). Nous associons alors à certaines déformations de C^*-algèbres de Hopf construites par Woronowicz (*cf.* [51], [53]) des champs continus d'unitaires multiplicatifs et nous montrons que ces déformations correspondent à des déformations topologiques.

ABSTRACT. — Given a compact space X, we generalize the notion of multiplicative unitary introduced by Baaj and Skandalis (*cf.* [4]) to the framework of Hilbert $C(X)$-modules and we study its continuity properties (*cf.* [40]). We then associate to several deformations of Hopf C^*-algebras constructed by Woronowicz (*cf.* [51], [53]) continuous fields of multiplicative unitaries and we prove that those deformations correspond to topological deformations.

Avant-propos

L'une des constructions de base de l'analyse harmonique est la transformation de Fourier : elle associe à un groupe abélien le groupe abélien de ses caractères et permet d'étudier cette correspondance auto-duale. Cette construction a été généralisée aux groupes localement compacts. Mais dès que l'on sort du cadre commutatif, on est confronté au problème suivant : l'objet dual d'un groupe (l'algèbre de convolution du groupe) n'est plus de même nature. Se pose alors le problème de trouver des objets généralisant les structures des groupes ainsi que celles des objets duaux.

C'est pourquoi a été introduite la notion d'algèbre de Hopf de la manière suivante : à un groupe G (compact), on associe l'algèbre A des fonctions sur le groupe. La loi de multiplication $G \times G \to G$ induit un morphisme

(*) Texte reçu le 4 juillet 1994, révisé le 5 janvier 1995.

Étienne BLANCHARD, Département de Mathématique, Faculté des Sciences de Luminy, 163, Avenue de Luminy, 13288 Marseille CEDEX 9 (France).
Email : blanchard@lmd.univ-mrs.fr.

Classification AMS : 46L05, 46M05, 16W30.

d'algèbres $\delta : A \to A \otimes A$ pour lequel l'associativité s'exprime par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\delta} & A \otimes A \\ {\scriptstyle\delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\delta} \\ A \otimes A & \xrightarrow{\delta\otimes\mathrm{id}} & A \otimes A \otimes A. \end{array}$$

On cherche donc des classes d'algèbres de Hopf pour lesquelles on peut étendre la dualité précédente.

Dans le cadre topologique des algèbres d'opérateurs, cette dualité s'exprime à travers la dualité de Takesaki. Elle a d'abord été démontrée pour les algèbres de von Neumann associées à un groupe localement compact, puis étendue aux C^*-algèbres (*cf.* [28], [47]). Dans [4] et [43], Baaj et Skandalis ont introduit la notion d'unitaire multiplicatif auquel on associe (sous des hypothèses de «régularité») deux C^*-algèbres de Hopf en dualité qui recouvrent la notion de «groupe quantique localement compact». Notons que cette notion était plus ou moins sous-jacente dans [19], [25].

Parallèlement ont été étudiées un certain nombre d'algèbres de Hopf dont les structures plus riches sont proches de celles des groupes de Lie. Notons en particulier [15] : Drinfel'd montre comment définir une quantification au-dessus de $k[[h]]$ d'une algèbre de Poisson qui préserve les structures d'algèbre de Hopf et l'applique aux algèbres enveloppantes de certains groupes de Lie.

Dans [50], Woronowicz a défini la notion de pseudogroupe compact matriciel : le cadre d'étude lui permet de regarder des déformations de groupes de Lie non plus au-dessus de $k[[h]]$ mais au-dessus de $C(X)$ où X est un espace localement compact (*cf.* [51], [39]).

Il est montré dans [4] que les pseudogroupes compacts matriciels sont bien décrits par la théorie des unitaires multiplicatifs. Notre but est d'étendre cette notion d'unitaire multiplicatif au cadre des $C(X)$-modules hilbertiens de manière à recouvrir ces déformations topologiques de groupes quantiques localement compacts et d'en étudier les propriétés.

Cet article s'organise de la manière suivante.

Dans le premier chapitre, nous définissons les $C(X)$-modules de Banach et nous précisons la façon dont se déforment les fibres d'un tel module.

Nous étudions dans les second et troisième chapitres les $C(X)$-algèbres (*cf.* [27]). Nous démontrons l'équivalence entre un certain nombre de propriétés sur les $C(X)$-algèbres stellaires qui caractérisent les champs continus séparables de C^*-algèbres; en particulier, tout champ continu séparable de C^*-algèbres admet un champ continu de représentations fidèles dans un $C(X)$-module hilbertien. Nous établissons ensuite des conditions suffisantes sous-lesquelles les diverses notions de produit tensoriel de deux $C(X)$-algèbres au-dessus de $C(X)$ que l'on peut définir coïncident (Théorème 3.3).

Dans le quatrième chapitre, nous introduisons la notion de champ continu d'unitaires multiplicatifs : étant donné un $C(X)$-module hilbertien $\mathcal{E}$, un unitaire $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ sera dit *multiplicatif* s'il vérifie la relation pentagonale $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$. Nous définissons ensuite les structures adéquates de régularité et d'irréductibilité ; si V est régulier, les algèbres S et $\widehat{S}$ sont des $C(X)$-algèbres munies de champs de coproduits et V est un multiplicateur du produit tensoriel $\widehat{S} \otimes_{C(X)} S$ au-dessus de $C(X)$.

Dans le cinquième chapitre, nous rappelons la notion de moyennabilité pour un unitaire multiplicatif et nous montrons que si V appartenant à $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ est un champ continu d'unitaires multiplicatifs tel que la fibre $V_x \in L(\mathcal{E}_x \otimes \mathcal{E}_x)$ au-dessus de $x \in X$ soit moyennable, alors le champ $\widehat{S}$ est continu au point x (Théorème 5.8). Cela nous permet d'étendre à notre cadre les résultats de [40] : si A est un champ continu de C^*-algèbres muni d'un champ de coactions d'un champ de C^*-algèbres de Hopf associé à un champ continu d'unitaires multiplicatifs comoyennables, alors le champ des produits croisés est encore un champ continu.

Dans le sixième chapitre, nous nous attachons à l'étude des champs continus d'unitaires multiplicatifs de type compact. Nous classifions les champs continus d'unitaires multiplicatifs de type compact réguliers et nous montrons en particulier que le système des mesures de Haar associé à un champ continu de C^*-algèbres de Woronowicz est continu.

Dans le septième chapitre, nous appliquons ces résultats pour montrer que le champ des $\mathrm{SU}_\mu(2)$ (*cf.* [51]) et le champ de ses doubles quantiques (*cf.* [39]) forment des champs continus de C^*-algèbres de Hopf (*cf.* [42], [6], [35]). Nous étudions par ailleurs une déformation du groupe $ax + b$ vers $\mathrm{SU}_\mu(2)$ et envisageons enfin le cas de la déformation $E_\mu(2)$ du groupe des déplacements $\mathrm{E}_2(\mathbb{C})$ (*cf.* [53], [2]).

REMERCIEMENTS.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à G. SKANDALIS sous la direction duquel l'essentiel de cet article a été réalisé en vue d'une thèse de Doctorat soutenue à Paris 7 et qui m'a notamment aidé à clarifier les démonstrations. Je voudrais aussi remercier S. BAAJ, S. WASSERMANN et M.A. RIEFFEL pour les remarques qu'ils ont pu m'apporter au cours de l'élaboration de ce travail, ainsi que J. CUNTZ qui m'a invité par la suite à l'Université de Heidelberg.

1. Préliminaires

1.1. C^*-modules hilbertiens.

Les définitions qui suivent ont été introduites par Paschke [37] et leur utilisation est devenue systématique en K-théorie à partir des travaux de Kasparov (voir [26], [27] et aussi [8], [43] ainsi que leurs références).

DÉFINITION 1.1. — Un *C^*-module préhilbertien* sur une C^*-algèbre A est un A-module à droite $\mathcal{E}$ muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ à valeurs dans A tel que :

- $\langle \xi, \eta a\rangle = \langle \xi, \eta\rangle a$, pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{E}$ et $a \in A$;
- $\langle \eta, \xi\rangle = \langle \xi, \eta\rangle^*$, pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{E}$;
- $\langle \xi, \xi\rangle \geq 0$, pour tout $\xi \in \mathcal{E}$.

Si de plus $\mathcal{E}$ est séparé et complet pour la semi-norme $\|\xi\| = \|\langle \xi, \xi\rangle\|^{1/2}$, on dira que $\mathcal{E}$ est un *A-module hilbertien.*

Si $\mathcal{E}$ est un A-module hilbertien, on définit la C^*-algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ des endomorphismes A-linéaires $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui admettent un adjoint $T^* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tel que $\langle T\xi_1, \xi_2\rangle = \langle \xi_1, T^*\xi_2\rangle$ quels que soient $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{E}$.

Définissons pour ξ_1, ξ_2 dans $\mathcal{E}$ l'opérateur $\theta_{\xi_1,\xi_2} \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ par la formule

$$\theta_{\xi_1,\xi_2}(\xi) = \xi_1\langle \xi_2, \xi\rangle.$$

L'espace vectoriel fermé $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ engendré par ces opérateurs est appelé *espace des opérateurs compacts* : c'est un idéal bilatère fermé de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et l'algèbre des multiplicateurs de $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ est $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ (*cf.* [23, lemme 16]).

REMARQUE.
Si $A = \mathbb{C}$, on notera aussi $L(\mathcal{E})$ et $K(\mathcal{E})$ les algèbres $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{K}(\mathcal{E})$.

Soient A et B deux C^*-algèbres, $\mathcal{E}_1$ un A-module hilbertien, $\mathcal{E}_2$ un B-module hilbertien et $\pi : A \to \mathcal{L}(\mathcal{E}_2)$ un homomorphisme de C^*-algèbres. On définit alors le B-module hilbertien $\mathcal{E}_1 \otimes_\pi \mathcal{E}_2$ (souvent noté $\mathcal{E}_1 \otimes_A \mathcal{E}_2$) séparé complété du produit tensoriel algébrique $\mathcal{E}_1 \otimes_{alg} \mathcal{E}_2$ pour la semi-norme associée au produit scalaire

$$\big\langle \xi_1 \otimes \xi_2, \zeta_1 \otimes \zeta_2\big\rangle = \big\langle \xi_2, \pi(\langle \xi_1, \zeta_1\rangle)\zeta_2\big\rangle, \qquad (\xi_i, \zeta_i \in \mathcal{E}_i).$$

LEMME 1.2. — *Si $\pi : A \to \mathcal{L}(\mathcal{E}_2)$ est injective, l'application $T \mapsto T \otimes 1$ de $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1 \otimes_\pi \mathcal{E}_2)$ est injective.*

Démonstration. — Si l'image de $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1 \otimes_\pi \mathcal{E}_2)$ est nulle, alors quels que soient $\xi_1, \eta_1 \in \mathcal{E}_1$ et $\xi_2, \eta_2 \in \mathcal{E}_2$,

$$\big\langle \eta_1 \otimes \eta_2, (T \otimes 1)\xi_1 \otimes \xi_2\big\rangle = \big\langle \eta_2, \pi(\langle \eta_1, T\xi_1\rangle)\xi_2\big\rangle = 0,$$

ce qui implique $\langle \eta_1, T\xi_1\rangle = 0$ et donc $T = 0$. $\square$

On dira que le B-module hilbertien $\mathcal{E}$ est *dénombrablement engendré* s'il existe un sous-ensemble dénombrable $\Lambda \subset \mathcal{E}$ tel que le plus petit sous-module de $\mathcal{E}$ contenant Λ soit $\mathcal{E}$.

LEMME 1.3. — *Soit $\mathcal{E}$ un A-module hilbertien. Si ξ appartient à $\mathcal{E}$, il existe un unique $\eta \in \mathcal{E}$ tel que $\xi = \eta\langle\eta, \eta\rangle$.*

Démonstration. — Si l'on note $\xi^* \in \mathcal{K}(\mathcal{E}, A)$ l'élément qui à $\zeta \in \mathcal{E}$ associe $\langle\xi, \zeta\rangle$, l'opérateur auto-adjoint $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \xi^* \\ \xi & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{K}(A \oplus \mathcal{E})$ anticommute à $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ dans $\mathcal{L}(A \oplus \mathcal{E})$. Donc quelle que soit la fonction continue impaire $f : [-\|\xi\|, \|\xi\|] \to \mathbb{R}$, l'opérateur auto-adjoint $f\left(\begin{smallmatrix} 0 & \xi^* \\ \xi & 0 \end{smallmatrix}\right)$ anticommute aussi à $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ et est donc de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \eta^* \\ \eta & 0 \end{smallmatrix}\right)$ où $\eta \in \mathcal{E}$. On applique ce résultat à la fonction $f(x) = x^{1/3}$ pour conclure. $\square$

1.2. $C(X)$-modules hilbertiens.

Soient X un espace localement compact et $C_0(X)$ la C^*-algèbre des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$ nulles à l'infini (on désignera aussi cette algèbre par $C(X)$ si X est compact) et définissons pour tout point $x \in X$ le morphisme e_x de $C_0(X)$ dans $\mathbb{C}$ d'évaluation au point x.

DÉFINITION 1.4. — Si $\mathcal{E}$ est un $C_0(X)$-module hilbertien, on note :

- ξ_x l'image de $\xi \in \mathcal{E}$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{E}_x = \mathcal{E} \otimes_{e_x} \mathbb{C}$;
- $T_x = T \otimes_{e_x} 1$ l'image de l'opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ dans $L(\mathcal{E}_x)$.

D'après le théorème de stabilisation de Kasparov (voir [26] et [14, lemme 10.8.5]), si le module hilbertien $\mathcal{E}$ est dénombrablement engendré, on peut toujours supposer que $\mathcal{E} = P(H \otimes_{\mathbb{C}} C_0(X))$ où P est un projecteur de $\mathcal{L}_{C_0(X)}(H \otimes_{\mathbb{C}} C_0(X))$, H désignant l'espace de Hilbert séparable. Par ailleurs, les éléments de $H \otimes_{\mathbb{C}} C_0(X)$ (appelés *champs continus de vecteurs*) sont exactement les familles normiquement continues sur X et nulles à l'infini d'éléments de H. Les éléments de $\mathcal{L}(H \otimes_{\mathbb{C}} C_0(X))$ sont les familles $*$-fortement continues sur X et bornées d'opérateurs de $L(H)$. De plus, un opérateur $T \in \mathcal{L}(H \otimes_{\mathbb{C}} C_0(X))$ appartient à $\mathcal{K}(H \otimes_{\mathbb{C}} C_0(X))$ si et seulement si T_x appartient à $K(H)$ pour tout $x \in X$ et l'application $x \mapsto T_x$ est normiquement continue.

REMARQUE.

Si $\mathcal{E}$ est le $C([0,1])$-module hilbertien $C([0,1]) \oplus C_0([0,1[)$ et T est l'unité de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. L'application $x \mapsto \|T_x\|$ est continue et T_x appartient à $K(\mathcal{E}_x)$ quel que soit x, mais T n'appartient pas à $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ puisqu'il admet une décomposition $T = P + Q$ où

$$P(\xi_1 \oplus \xi_2) = \xi_1 \oplus 0 \quad \text{et} \quad Q(\xi_1 \oplus \xi_2) = 0 \oplus \xi_2$$

(avec $\xi_1 \in C([0,1])$ et $\xi_2 \in C_0([0,1[))$; l'opérateur P est compact tandis que Q ne peut l'être puisque la norme de Q n'est pas continue en 1 : on a $\|Q_1\| = 0$ et $\|Q_x\| = 1$ pour $x \neq 1$.

DÉFINITION 1.5. — Étant donnée une C^*-algèbre A, un A-module hilbertien $\mathcal{E}$ est dit *plein* si l'idéal $\langle \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle$ engendré par les produits scalaires $\langle \xi, \eta \rangle$ est égal à A.

LEMME 1.6. — *Étant donné un espace localement compact X, un $C_0(X)$-module hilbertien $\mathcal{E}$ est plein si et seulement si $\mathcal{E}_x \neq 0$ quel que soit $x \in X$. Si de plus X est compact, il existe une famille finie $\eta_1, \ldots, \eta_n$ d'éléments de $\mathcal{E}$ telle que l'unité de $C(X)$ s'écrive $1 = \sum \langle \eta_i, \eta_i \rangle$.*

Démonstration. — Si $x \in X$ vérifie $\mathcal{E}_x = 0$, alors $\langle \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle$ est inclus dans l'idéal de $C_0(X)$ des fonctions nulles au point x.

Réciproquement, si $\langle \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle$ est inclus dans l'idéal maximal des fonctions nulles au point $x \in X$, alors $\|\xi_x\|^2 = \langle \xi, \xi \rangle(x) = 0$ quel que soit $\xi \in \mathcal{E}$. Notons $U(\xi)$ l'ouvert des $x \in X$ tels que $\langle \xi, \xi \rangle(x) > 0$ pour $\xi \in \mathcal{E}$. Si X est compact et $\mathcal{E}$ est plein, comme les $U(\xi)$ pour ξ dans $\mathcal{E}$ forment un recouvrement ouvert de X, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $U(\xi_1), \ldots, U(\xi_n)$. Définissons la fonction strictement positive

$$g = \sum \langle \xi_i, \xi_i \rangle$$

et posons $\eta_i = g^{-1/2} \xi_i$; on a alors $1 = \sum \langle \eta_i, \eta_i \rangle$. □

1.3. $C(X)$-modules de Banach.

DÉFINITION 1.7. — Soit A une C^*-algèbre.

Un *A-module de Banach* (à gauche) est un espace de Banach E muni d'une structure de A-module (à gauche) telle qu'on ait $\|a\eta\| \leq \|a\| \cdot \|\eta\|$ pour tout $a \in A$ et tout $\eta \in E$.

On dira que le module E est *non-dégénéré* si il existe une unité approchée bornée (u_λ) de A telle que u_λ converge fortement vers 1 dans l'algèbre $L(E)$ des endomorphismes continus de E.

PROPOSITION 1.8 (*cf.* [12], [38]). — *Etant donnés une C^*-algèbre A et un A-module de Banach non-dégénéré E, tout élément $\xi \in E$ admet une décomposition $\xi = a\zeta$ avec $a \in A$ et $\zeta \in E$.*

Démonstration. — Soit $\xi \in E$. Si l'on pose $\xi_0 = \xi$, on peut construire par récurrence une suite (ξ_n) d'éléments de E et une suite (u_n) d'éléments de la boule unité de A telles que :

$$\xi_n - u_n \xi_n = \xi_{n+1} \quad \text{avec} \quad \|\xi_n\| \leq 2^{-2n}.$$

Posons $v_n = 2^{-n}u_n$ et $\eta_n = 2^n\xi_n$. Alors $\xi = \sum v_n\eta_n$ où $\sum \|\eta_n\| < \infty$ et $v = (v_n^*)$ est un élément de $\mathcal{E} = \ell^2(\mathbb{N}) \otimes_{\mathbb{C}} A$. Il existe donc $w = (w_n)$ dans $\mathcal{E}$ tel que $v = w\langle w, w\rangle$ (Lemme— 1.3) et l'on a $\xi = a\zeta$ où $a = \langle w, w\rangle$ et $\zeta = \sum w_n^*\eta_n$. ▯

Corollaire 1.9. — *Si A est une C^*-algèbre et E est un A-module de Banach, l'espace vectoriel $AE = \{a\xi\ ;\ a \in A,\ \xi \in E\}$ est un sous-module fermé de E.*

Démonstration. — Le sous-module fermé de E engendré par AE est un A-module de Banach non-dégénéré auquel on peut appliquer la proposition précédente. ▯

Lemme 1.10. — *Soient A une C^*-algèbre et E un A-module de Banach non-dégénéré. Si J est un idéal bilatère fermé de A et π est l'application quotient $E \to E/(JE)$, alors pour $\xi \in E$,*

$$\big\|\pi(\xi)\big\| = \inf\big\{\|(1-a)\xi\|\ ;\ a \in J\big\}.$$

Démonstration. — Si $\varepsilon > 0$, il existe par définition de la norme quotient un élément $\eta \in E$ tel que $\pi(\eta) = \pi(\xi)$ et $\|\eta\| \leq \|\pi(\xi)\| + \frac{1}{2}\varepsilon$. Comme $(\xi - \eta)$ appartient à JE, on peut trouver $\zeta \in E$ non nul et $a \in J$ tels que $\xi = \eta + a\zeta$.

Soit alors $u \in J$ un élément positif dont la norme est inférieure à 1 et tel que $\|(1-u)a\| \cdot \|\zeta\| < \frac{1}{2}\varepsilon$. On a :

$$\big\|(1-u)\xi\big\| < \|\eta\| + \big\|(1-u)a\zeta\big\| < \big\|\pi(\xi)\big\| + \varepsilon. \quad ▯$$

Si X est un espace localement compact et E un $C_0(X)$-module de Banach à gauche non-dégénéré, le morphisme $C_0(X) \to L(E)$ se prolonge naturellement à l'algèbre $C(\widetilde{X})$ des fonctions continues sur le compactifié d'Alexandroff $\widetilde{X}$ de X, de sorte que l'on pourra se restreindre par la suite à l'étude des $C(X)$-modules de Banach avec X compact.

2. $C(X)$-algèbres de Banach

2.1. $C(X)$-algèbres de Banach.

Définition 2.1. — Une $C_0(X)$-*algèbre de Banach* est une algèbre de Banach A munie d'une structure de $C_0(X)$-module de Banach (à gauche) non dégénéré telle que pour $a, b \in A$, $f \in C_0(X)$, on ait :

$$a(fb) = f(ab) = (fa)b.$$

La condition énoncée ci-dessus signifie que l'image de $C_0(X)$ dans l'algèbre $L(A)$ des endomorphismes continus de A est incluse dans le centre de l'algèbre des multiplicateurs de A.

Si $x \in X$, alors $C_x(X)A$ est un idéal bilatère de A (définition 1.11) et donc l'application $A \to A^x = A/C_x(X)A$ est un morphisme d'algèbres.

DÉFINITION 2.2. — Étant donnés un espace localement compact X dont le compactifié d'Alexandroff est $\widetilde{X}$ et une $C_0(X)$-algèbre de Banach A, on définit la *$C(\widetilde{X})$-algèbre de Banach unifère* $\mathcal{A}_b = A \times C(\widetilde{X})$ de produit

$$(a+f)(b+g) = \big(ab + fb + ga\big) + fg$$

et dont la norme est donnée par $\|a+f\| = \|a\| + \|f\|$.

REMARQUE. — L'application $u : \mathcal{A}_b \to L[A \oplus C(\widetilde{X})]$ définie par

$$u(b)(a \oplus f) = (ba + fb) \oplus 0 \quad \text{et} \quad u(g)(a \oplus f) = ga \oplus gf$$

est une représentation fidèle de $\mathcal{A}_b$.

PROPOSITION 2.3. — *Soient X un espace compact et A une $C(X)$-algèbre unifère. Alors $\mathcal{A}_b \simeq A \oplus C(X)$.*

Démonstration. — Le projecteur $e = 1_{C(X)} - 1_A$ vérifie $ea = ae = 0$ quel que soit $a \in A$. L'isomorphisme est alors donné par :

$$\begin{array}{ccc} A \oplus C(X) & \longrightarrow & \mathcal{A}_b \\ a \oplus f & \longmapsto & a + fe. \end{array} \quad \square$$

PROPOSITION 2.4. — *Soient A une $C(X)$-algèbre de Banach unifère et a un élément de A.*

a) *L'ensemble des $x \in X$ tels que a^x soit inversible est ouvert.*

b) *Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, l'ensemble des $y \in X$ tels que* $\mathrm{Sp}(a^y) \subset U$ *est ouvert.*

Démonstration.

a) Si x appartenant à X est tel que a^x soit inversible, il existe $b \in A$ tel que $b^x a^x = a^x b^x = 1^x$. Soit alors Ω l'ensemble des $y \in X$ tels que $\|(ba-1)^y\| < 1$ et $\|(ab-1)^y\| < 1$. Le Corollaire 1.12 implique que Ω est un voisinage ouvert de x et si $y \in \Omega$, $b^y a^y$ et $a^y b^y$ sont inversibles dans A^y, ce qui implique que a^y l'est aussi.

b) Si K est le compact $\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ |\lambda| \leq \|a\|,\ \lambda \notin U\}$, l'algèbre de Banach unifère $A(K)$ des fonctions continues sur K à valeurs dans A est une $C(X)$-algèbre de Banach pour la structure de $C(X)$-module induite par celle de A. Si $\alpha \in A(K)$ est défini par $\alpha(\lambda) = a - \lambda$ pour $\lambda \in K$, alors $\mathrm{Sp}(a^y)$ est inclus dans U si et seulement si $\mathrm{Sp}(a^y) \cap K = \emptyset$, ce qui revient à dire que α^y est inversible. Le a) appliqué à $\alpha \in A(K)$ permet ainsi de conclure. $\square$

REMARQUE. — Ce lemme est *faux* dans le cas non unifère. Soient en effet $\mathcal{E}$ le $C([0,1])$-module hilbertien $C_0([0,1[)\oplus C([0,1])$ et A la $C([0,1])$-algèbre $\mathcal{K}(\mathcal{E})$. Si $\xi = 0\oplus 1 \in \mathcal{E}$ et $a = \theta_{\xi,\xi} \in A$, l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels a^x est inversible est réduit au singleton $\{1\}$ qui n'est pas ouvert dans $[0,1]$.

COROLLAIRE 2.5. — *Soient A une $C_0(X)$-algèbre de Banach et a un élément de A. Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le point 0, l'ensemble des $y \in X$ tels que $\mathrm{Sp}(a^y) \subset U$ est ouvert.*

Démonstration. — Il suffit de remarquer que $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}_b}(b) = \mathrm{Sp}_A(b) \cup \{0\}$ pour $b \in A$. $\square$

2.2. $C(X)$-algèbres stellaires.

DÉFINITION 2.6. (*cf.* [27]). — Soit X un espace localement compact.

Une $C_0(X)$-*algèbre stellaire* est une C^*-algèbre A munie d'un morphisme non-dégénéré (involutif) de $C_0(X)$ dans le centre $\mathcal{Z}(M(A))$ de l'algèbre des multiplicateurs de A.

L'image de $C_0(X)$ dans $M(A)$ est une C^*-algèbre commutative, de sorte que l'on pourra se restreindre au cas où $C_0(X)$ est une sous-algèbre de $M(A)$.

DÉFINITION 2.7. — Étant donnée une $C_0(X)$-algèbre stellaire A, on définit la $C(\widetilde{X})$-*algèbre stellaire* $\mathcal{A}$ *engendrée* par A et $u[C(\widetilde{X})]$ dans l'algèbre des multiplicateurs de $A \oplus C(\widetilde{X})$, où

$$u : C(\widetilde{X}) \to M[A \oplus C(\widetilde{X})]$$

détermine la structure canonique de $C(\widetilde{X})$-algèbre de $A \oplus C(\widetilde{X})$ (c'est-à-dire $u(g)(a\oplus f) = ga \oplus gf$).

Le morphisme identité de $\mathcal{A}_b$ dans $\mathcal{A}$ est alors un isomorphisme d'algèbres de Banach involutives mais en général, la norme de $\mathcal{A}_b$ est strictement plus grande que celle de $\mathcal{A}$. Par exemple, si l'on considère la $C(\{x\})$-algèbre $A = \mathbb{C}$ et si l'on pose $a = 1$ et $f = -1$, alors :

$$\|a\| + \|f\| = 2 \left\| \begin{pmatrix} a+f & \\ & f \end{pmatrix} \right\| = 1.$$

REMARQUE. — Si A est une $C(X)$-algèbre stellaire, on peut aussi définir la $C(X)$-*algèbre stellaire unifère* $\mathcal{A}_u$ *engendrée* par A et $C(X)$ dans $M(A)$. Si x est dans X, le quotient $(\mathcal{A}_u)^x$ est unifère, mais le morphisme $(\mathcal{A}_u)^x \to M(A^x)$ n'est pas nécessairement injectif. En effet, si A est la $C([0,1])$-algèbre considérée dans la remarque qui suit le Lemme 2.4, en $x = 1$, on a $M(A^x) = A^x = \mathbb{C}$ tandis que $(\mathcal{A}_u)^x = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

PROPOSITION 2.8. — *Si A est une $C_0(X)$-algèbre stellaire, alors*

$$\|a\| = \sup_{x\in X} \|a^x\|$$

quel que soit $a \in A$. De plus, ce sup *est atteint.*

Démonstration. — Il s'agit de voir que le morphisme

$$A \to \bigoplus_{x\in X} A^x$$

est injectif. Fixons un élément $a \in A$ non nul. Il existe alors un état pur φ sur A tel que $\varphi(a^*a) = \|a\|^2$. Si π_φ est la représentation irréductible canonique de $M(A)$ dans l'espace de Hilbert H_φ associé à φ par la construction GNS, $\pi_\varphi(C(X)) \subset \mathbb{C}$, ce qui implique l'existence d'un $x \in X$ tel que $\pi_\varphi(f) = f(x)$ pour tout $f \in C(X)$. La représentation π_φ se factorise alors à travers A^x et donc $\varphi(a^*a) \le \|a^x\|^2$, ce qui implique que $\|a\| = \|a^x\|$. $\square$

REMARQUE. — Si A est une $C_0(X)$-algèbre stellaire et J est un idéal fermé de A (à gauche ou à droite), alors $a \in A$ est dans J si et seulement si $a^x \in J^x$ quel que soit $x \in X$ (*cf.* [14, lemme 10.4.2]).

PROPOSITION 2.9. — *Soit X un espace compact et soit A une $C(X)$-algèbre stellaire unifère non nulle. Si $a \in A$, $\mathrm{Sp}_A(a) = \bigcup_{x\in X} \mathrm{Sp}_{A^x}(a^x)$.*

Démonstration. — Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; alors λ appartient à $\mathrm{Sp}_A(a)$ si et seulement si

$$\big\|\big((a-\lambda)^*(a-\lambda)+1\big)^{-1}\big\| = 1 \quad \text{ou} \quad \big\|\big((a-\lambda)(a-\lambda)^*+1\big)^{-1}\big\| = 1$$

car $\alpha = a - \lambda$ est inversible si et seulement si $\alpha^*\alpha$ et $\alpha\alpha^*$ le sont. Mais ces deux normes sont les sup (atteints) des fonctions

$$x \longmapsto \big\|\big((a^x-\lambda)^*(a^x-\lambda)+1\big)^{-1}\big\| \quad \text{et}$$
$$x \longmapsto \big\|\big((a^x-\lambda)(a^x-\lambda)^*+1\big)^{-1}\big\|,$$

d'où la proposition. $\square$

Étant données une $C_0(X)$-algèbre stellaire A et une partie ouverte Y de X, on définit la sous-algèbre $A_{|Y}$ de $M[C_0(Y)A]$ *restriction* de A à Y par

$$A_{|Y} = \big\{x \in M[C_0(Y)A]\,;\ \forall f \in C_0(Y),\ fx \in C_0(Y)A\big\}.$$

Si x est un point de X et $a \in A^x$, on entendra par *prolongement de a sur un voisinage ouvert Y* de x un élément b dans $A_{|Y}$ tel que, à travers l'isomorphisme $A_{|Y}/[C_x(X)A_{|Y}] \simeq A^x$, on ait $b^x = a$.

REMARQUE. — Avec les notations de Kasparov, $A_{|Y} = M_b[C_0(Y)A]$.

Terminons cette section par le résultat suivant de Dupré qui sera utilisé dans le chapitre 6.

LEMME 2.10 (*cf.* [16, lemmes 3.2 et 3.3]). — *Soient A une $C_0(X)$-algèbre stellaire A et x un point de X.*

a) *Si $s_1, \ldots, s_n$ sont n projecteurs deux à deux orthogonaux de A^x, ils se prolongent dans un voisinage ouvert de x avec les mêmes propriétés.*

b) *Si p et q sont deux projecteurs de A et si $u \in A^x$ est tel que $u^*u = p^x$ et $uu^* = q^x$, il se prolonge dans un voisinage ouvert de x avec les mêmes propriétés.*

Démonstration.

a) L'élément $s = \sum is_i$ se relève dans un voisinage ouvert de x en un élément positif S dont le spectre est inclus dans le voisinage ouvert $\{0, 1, \ldots, n\} + B(0, \frac{1}{4})$ de $\mathrm{Sp}(s)$ (Corollaire 2.5) de sorte que par calcul fonctionnel on peut supposer que son spectre est égal à $\{0, 1, \ldots, n\}$. Si f_i est la fonction caractéristique de l'ensemble $\{i\}$, l'élément $f_i(S)$ est un prolongement de s_i sur ce voisinage qui vérifie les propriétés requises.

b) Prolongeons u dans un voisinage de x en v de sorte que $v = qvp$ et que le spectre de $|v|$ soit inclus dans le voisinage $\Omega = \{0, 1\} + B(0, \frac{1}{4})$ de $\mathrm{Sp}(|u|)$. Soit f la fonction continue sur Ω nulle sur la boule $B(0, \frac{1}{4})$ et qui à $x \in B(1, \frac{1}{4})$ associe x^{-1}. Si l'on pose $w = vf(|v|)$, alors $p - w^*w$ est un champ de projecteurs nul au point x et donc aussi dans un voisinage. De même, comme $w^x = u$ et ww^* est un projecteur majoré par q, on a $(w^*w)^y = p^y$ et $(ww^*)^y = q^y$ sur le voisinage ouvert des y tels que $\|(w^*w - p)^y\| < 1$ et $\|(ww^* - p)^y\| < 1$. ∎

2.3. $C(X)$-représentations.

Rappelons que si X est un espace localement compact, $e_x : C_0(X) \to \mathbb{C}$ est le morphisme d'évaluation au point $x \in X$.

DÉFINITION 2.11. — Soit A une $C_0(X)$-algèbre stellaire.

On appelle $C_0(X)$-*représentation* de A dans le $C_0(X)$-module hilbertien $\mathcal{E}$ un morphisme $C_0(X)$-linéaire $\pi : A \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$, *i.e.* tel que pour tout $x \in X$, la représentation $\pi_x = \pi \otimes e_x : A \to L(\mathcal{E}_x)$ se factorise à travers une représentation de A^x. Si de plus π_x est une représentation fidèle de A^x pour tout $x \in X$, on dit que π est un *champ de représentations fidèles*.

On appelle *champ continu d'états* une application $C_0(X)$-linéaire positive φ de A dans $C_0(X)$ telle que pour tout $x \in X$, l'application $\varphi_x = e_x \circ \varphi$ soit un état sur A^x.

Avec notre définition, notons que l'existence d'un champ continu d'états sur la $C_0(X)$-algèbre stellaire A implique que $A^x \neq 0$ quel que soit $x \in X$. Remarquons par ailleurs que Rieffel et Nagy ont introduit des définitions similaires dans [40] et [35].

Supposons que la $C_0(X)$-algèbre stellaire A soit une sous-$C_0(X)$-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ où $\mathcal{E}$ est un $C(X)$-module hilbertien; notons A_x l'image de A dans $L(\mathcal{E}_x)$ et a_x l'image d'un élément $a \in A$ dans A_x (définition 1.4). Si a est dans A, on a $\langle \xi, a\eta \rangle \in C(X)$ pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{E}$ de norme inférieure à 1; la fonction $x \mapsto \|a_x\|$ qui est leur sup est donc semi-continue inférieurement.

REMARQUES.

1) La définition de A_x dépend du choix du $C_0(X)$-module $\mathcal{E}$: si A est une sous-$C_0(X)$-algèbre stellaire de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et x est un point non isolé de X, comme $C_0(X) \hookrightarrow M(C_x(X))$, A s'injecte dans $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} C_x(X)) = \mathcal{L}(C_x(X)\mathcal{E})$ (Lemme 1.2). Mais $(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} C_x(X)) \otimes_{e_x} \mathbb{C} = 0$, ce qui implique $L[(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} C_x(X)\,)_x] = 0$.

2) Si A est la $C([0,2])$-algèbre $C([0,1]) \oplus C([1,2])$, elle admet une $C([0,2])$-représentation fidèle dans le $C([0,2])$-module hilbertien $C_0([0,2]\backslash\{1\})$ mais elle n'admet pas de champ de représentations fidèles.

Soit en effet θ une $C([0,2])$-représentation de A dans $\mathcal{E}$ et considérons la restriction de θ à $C([0,1])$: elle définit par composition une $C([0,2])$-représentation π de A. Si f est dans $C_0(]1,2])$ et ξ dans $\mathcal{E}$, alors

$$\big\langle \xi, \pi(f)\xi \big\rangle = \big\langle \pi(1)\xi, \pi(1)\xi \big\rangle f = 0,$$

donc $]1,2]$ est inclus dans le fermé des $x \in [0,2]$ tels que $\pi_x(1)\xi_x = 0$. Par conséquent, $\pi_1(1) = (\pi \otimes e_1)(1)$ est nul dans $L(\mathcal{E}_1)$. Si π' est la $C([0,2]$-représentation associée à la restriction de θ à $C([1,2])$, on montre de même que $\pi'_1(1) = 0$ et donc que $\theta_1(1)$ est nul, ce qui veut dire que la représentation θ_1 de A^1 est nulle.

En fait, on va caractériser dans le chapitre suivant l'existence de champ de représentations fidèles pour une $C(X)$-algèbre séparable; mais cet exemple montre que la $C([0,1])$-algèbre stellaire $L^\infty([0,1])$ n'admet pas de $C([0,1])$-représentation non nulle. En effet, si π est une $C([0,1])$-représentation, alors quel que soit $x \in\,]0,1[$, π induit par restriction une $C([0,1])$-représentation de $C([0,x]) \oplus C([x,1])$ et donc $\pi_x(1) = 0$. Il s'en suit que l'on a aussi $\pi_0(1) = 0$ et $\pi_1(1) = 0$ car l'application $x \mapsto \|\pi_x(1)\|$ est semi-continue inférieurement.

PROPOSITION 2.12. — *Soit X un espace compact et soit A une $C(X)$-algèbre stellaire qui admet une $C(X)$-représentation fidèle π dans le $C(X)$-module hilbertien $\mathcal{E}$.*

a) *Si $a \in A$, la fonction $x \mapsto \|a^x\|$ est la régularisée semi-continue supérieurement de $x \mapsto \|\pi_x(a)\|$, i.e. $\|a^x\| = \limsup_{y \to x} \|\pi_y(a)\|$.*

b) *Si $a \in A$, l'ensemble $U(a) = \{x \in X \; ; \; \|a^x\| = \|\pi_x(a)\|\}$ est un G^δ dense.*

c) *Si de plus A est séparable, $\{x \in X \; ; \; A^x \simeq \pi_x(A)\}$ est un G^δ dense.*

Démonstration.

a) Soient $x \in X$ et Ω un voisinage ouvert de x. Donnons-nous $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons un voisinage ouvert $W \subset \Omega$ sur lequel $\|a^y\| < \|a^x\| + 1/n$. Fixons une fonction continue f à valeurs dans $[0,1]$, à support dans W et telle que $f(x) = 1$. Comme $\|fa\| = \sup \|f(y)\pi_y(a)\|$, il existe un point $y \in W$ tel que $\|fa\| - 1/n < f(y)\|\pi_y(a)\|$ et donc $|\,\|a^x\| - \|\pi_y(a)\|\,| < 1/n$.

b) La fonction qui à $x \in X$ associe $\|a^x\| - \|\pi_x(a)\|$ est semi-continue supérieurement ; par conséquent, si n est dans $\mathbb{N}^*$, l'ensemble $U_n(a)$ des $x \in X$ tels que $\|a^x\| - \|\pi_x(a)\| < 1/n$ est ouvert quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, le a) montre que $U_n(a)$ est dense dans X. Il en résulte que leur intersection $U(a)$ est un G^δ dense.

c) Soit a_n une suite dense dans A. L'intersection U des $U(a_n)$ est un G^δ dense. Par ailleurs, si $a \in A$ et $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|a - a_n\| < \frac{1}{2}\varepsilon$; si x appartient à U, on a donc $\|a^x - (a_n)^x\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ et $\|\pi_x(a) - \pi_x(a_n)\| < \frac{1}{2}\varepsilon$, d'où $\|a^x\| < \|\pi_x(a)\| + \varepsilon$. $\square$

PROPOSITION 2.13. — *Soient X un espace compact et A une $C(X)$-algèbre stellaire. Si φ est un champ continu d'états sur A, il existe une $C(X)$-représentation non-dégénérée π_φ de A dans $\mathcal{E}_\varphi$ et un vecteur ξ_φ dans $\mathcal{E}_\varphi$ tels que quel que soit $a \in A$, $\varphi(a) = \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle$.*

Démonstration. — L'application φ étant complètement positive, on va pouvoir lui appliquer la construction de Stinespring Kasparov [26]. Commençons par étendre φ à la $C(X)$-algèbre unifère $\mathcal{A}$ (définition 2.7) en posant $\varphi(f) = f$ pour $f \in C(X)$ et définissons sur $\mathcal{A}$ le produit scalaire $(a,b) \mapsto \varphi(a^*b)$. Si l'on note $\Lambda(a)$ l'image de $a \in \mathcal{A}$ dans le séparé complété $\mathcal{E}_\varphi$ de ce $C(X)$-module préhilbertien, l'opérateur $\pi_\varphi(a)\Lambda(b) = \Lambda(ab)$ se prolonge en un opérateur dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\varphi)$.

Considérons maintenant une unité approchée croissante (u_λ) de A bornée par 1 : $\varphi(u_\lambda)$ converge simplement et donc normiquement (par le théorème de Dini) vers $1 \in C(X)$. Or si $\xi_\varphi = \Lambda(1)$, on a

$$\|\xi_\varphi - \Lambda u_\lambda\|^2 = \big\|\varphi\big((1-u_\lambda)^2\big)\big\| \le \big\|\varphi(1-u_\lambda)\big\|,$$

ce qui implique que la famille filtrante des $(\Lambda(u_\lambda))$ converge normiquement dans $\mathcal{E}_\varphi$ vers ξ_φ (*cf.* [38, th. 3.3.3]). Le champ de vecteurs ξ_φ cyclique pour $\mathcal{A}$ appartient donc à $A\mathcal{E}_\varphi$ (Corollaire 1.9) et par conséquent $\mathcal{E}_\varphi$ est un A-module de Banach non-dégénéré. □

3. $C(X)$-algèbres (suite)

3.1. Caractérisation des champs continus séparables de C^*-algèbres.

DÉFINITION 3.1. (*cf.* [21], [14]). — Soit A une $C_0(X)$-algèbre stellaire. Si pour tout $a \in A$, la fonction $P(a) : x \mapsto \|a^x\|$ est continue, on dit que A est un *champ continu de C^*-algèbres* sur X de *fibres* A^x.

PROPOSITION 3.2. — *Si A est un champ continu de C^*-algèbres sur l'espace localement compact X, la $C(\widetilde{X})$-algèbre $\mathcal{A}$ (déf. 2.7) définit un champ continu unifère de C^*-algèbres sur le compactifié d'Alexandroff $\widetilde{X}$ de X.*

Démonstration. — Si $\alpha \in \mathcal{A}$, $\|(\alpha^x)^*\alpha^x\| = \|\alpha^x\|^2$ quel que soit $x \in X$. Il suffit donc de considérer le cas où α est positif. Mais si $\alpha \in \mathcal{A}_+$ est positif, il existe $b \in A$ auto-adjoint et $f \in C(\widetilde{X})_+$ positif tels que $\alpha = b+f$ et on a alors pour tout $x \in \widetilde{X}$,

$$\mathrm{Sp}(\alpha^x) \cup \{0\} = \big[\mathrm{Sp}(b^x) + f(x)\big] \cup \{0\}.$$

Donc, si l'on écrit $b = b_+ - b_-$ où b_+ et b_- sont positifs,

$$\|\alpha^x\| = \big\|(b_+)^x\big\| + f(x)$$

est une fonction continue de x. □

Si A est une $C_0(X)$-algèbre stellaire, on notera $S(A)$ l'ensemble des états sur A muni de la topologie faible et $\mathcal{S}_X(A)$ le sous-ensemble des états φ dont la restriction à $C_0(X)$ est un caractère, *i.e.* tels qu'il existe un $x \in X$ (que l'on notera $x = p(\varphi)$) vérifiant $\varphi(f) = f(x)$ pour $f \in C_0(X)$. Remarquons que dans ce cas, φ se factorise à travers A^x ; on regardera $S(A^x)$ comme un convexe fermé de $\mathcal{S}_X(A)$. Notons enfin que l'application $p : \mathcal{S}_X(A) \to X$ est par construction continue.

Le résultat principal que nous montrons dans cette section est le suivant.

THÉORÈME 3.3. — *Soient X un espace localement compact et A une $C_0(X)$-algèbre stellaire séparable telle que $A^x \neq \{0\}$ quel soit $x \in X$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *A est un champ continu de C^*-algèbres;*

2) *l'application* $p : \mathcal{S}_X(A) \to X$ *est ouverte*;

3) *il existe une famille* $\{\varphi_\lambda\}$ *de champs continus d'états sur* A *telle que pour tout* $x \in X$, *la famille* $\{e_x \circ \varphi_\lambda\}$ *soit une famille fidèle d'états sur* A^x ;

4) A *admet un champ de représentations fidèles.*

REMARQUE. — Les assertions 1), 2) et 4) sont équivalentes même sans l'hypothèse $A^x \neq \{0\}$ car chacune des trois assertions implique que l'ensemble Y des $y \in X$ tels que A^y soit non nul est ouvert et on peut alors appliquer le théorème à la $C_0(Y)$-algèbre $C_0(Y)A$.

Ce théorème permet en particulier de répondre positivement à la question 3.4 que pose M.A. Rieffel dans [40] pour un champ continu séparable de C^*-algèbres sur un espace localement compact à base dénombrable d'ouverts.

La démonstration du théorème s'organise de la façon suivante : on montre successivement les implications :

1) $\Rightarrow$ 2) (Proposition 3.5), 2) $\Rightarrow$ 3) (Proposition 3.9),
3) $\Rightarrow$ 4) (Proposition 3.10), 4) $\Rightarrow$ 1) (Proposition 3.11).

Remarquons que seule l'implication 2) $\Rightarrow$ 3) suppose la séparabilité de A et que l'on montre plus précisément l'existence d'un champ continu d'états fidèles sur A. Dans le cas non séparable, le théorème 3.2″ de Michael [34] que l'on utilise pour démontrer 2) $\Rightarrow$ 3) n'est plus vrai (*cf.* [34, exemple 6.3]) ; il serait intéressant de construire explicitement un éventuel contre-exemple dans le cas où les fibres du champ continu A ne sont pas séparables.

LEMME 3.4. — *Si* X *est un espace compact et* A *un champ continu unifère de* C^**-algèbres sur* X, *l'application* $p : \mathcal{S}_X(A) \to X$ *est ouverte.*

Démonstration. — Soient Ω un ouvert de $\mathcal{S}_X(A)$ et x un point de $p(\Omega)$. Comme les états fidèles sur A^x sont denses dans $S(A^x)$, il existe un état fidèle $\varphi \in \Omega \cap S(A^x)$. On peut alors trouver un réel strictement positif ε et des champs de vecteurs $a_2, \dots, a_m$ dans A tels que :

$$V = \{\psi \in \mathcal{S}_X(A)\,;\ |\psi(a_k) - \varphi(a_k)| < 2\varepsilon,\ 2 \le k \le m\} \subset \Omega.$$

Comme tout élément de A est une combinaison linéaire de deux éléments auto-adjoints de A, on peut supposer que les a_k sont auto-adjoints. Par ailleurs, on ne change pas V si l'on rajoute à cette famille $a_1 = 1$, l'unité de A. Quitte à réordonner la famille des a_i, on peut enfin supposer que $a_1^x, \dots, a_n^x$ forment une sous-famille libre de rang maximal où n est un entier plus petit que m. Si $n < m$, alors quel que soit $n < j \leq m$,

$$a_j^x = \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k^i a_k^x$$

est une combinaison linéaire des n premiers termes. Notons U l'ouvert des $y \in X$ tels que $\|a_j^y - \sum \lambda_k^j a_k^y\| < \varepsilon$ pour tout $n < j \leq m$ et posons :

$$V' = \big\{\psi \in \mathcal{S}_X(A)\,;\ |\psi(a_k) - \varphi(a_k)| < \varepsilon/(Rn),\ 1 \leq k \leq n\big\}$$

où $R = \sup\{1/n, |\lambda_k^j|\}$. Alors $V' \cap p^{-1}(U)$ est un ouvert de Ω inclus dans V.

Définissons pour $y \in U$ l'application $\alpha_y : \mathbb{R}^n \to A^y$ à valeurs dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les a_k, pour $1 \leq k \leq n$, par $\lambda = (\lambda_k) \mapsto \sum \lambda_k a_k^y$ et soit $\mathbb{S}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme max.

Comme $\{(y, \lambda) \in U \times \mathbb{S}\,;\ \alpha_y(\lambda) = 0\}$ est fermé dans $U \times \mathbb{S}$ et la projection $U \times \mathbb{S} \to U$ est fermée, les a_k^y, pour $1 \leq k \leq n$, restent linéairement indépendants sur un voisinage de x dans X.

Si ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\{(y, \lambda) \in U \times \mathbb{S}\,;\ \alpha_y(\lambda) \geq 0$ et $\lambda \notin \omega\}$ est un fermé de $U \times \mathbb{S}$ et sa projection sur U est fermée (dans une C^*-algèbre, le cône des éléments positifs est fermé). En particulier, si ω est le demi-espace des $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tels que $\varphi \circ \alpha_x(\lambda) > 0$, comme φ est fidèle, le cône C_y des λ tels que $\alpha_y(\lambda) \geq 0$ reste transverse à l'hyperplan $H = \{\lambda \in \mathbb{R}^n\,;\ \varphi \circ \alpha_x(\lambda) = 0\}$ sur un voisinage ouvert $\widetilde{U}$ de x.

Pour $y \in \widetilde{U}$, on définit la forme linéaire positive de norme 1 sur $\alpha_y(\mathbb{R}^n)$ par la formule $\alpha_y(\lambda) \mapsto \varphi \circ \alpha_x(\lambda)$, forme que l'on étend par Hahn-Banach en une forme linéaire ψ de norme $\psi(1) = 1$ sur la partie auto-adjointe de A^y, *i.e.* un état sur A^y, et donc $\widetilde{U} \subset p(\Omega)$. $\square$

PROPOSITION 3.5. — *Si X est un espace localement compact et A est un champ continu* (*non nécessairement unifère*) *de C^*-algèbres non-nulles sur X, alors l'application $p : \mathcal{S}_X(A) \to X$ est ouverte.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{A}$ le champ continu unifère de C^*-algèbres sur $\widetilde{X}$ associé à A (Proposition 3.2) et définissons l'application $\chi : \mathcal{S}_{\widetilde{X}}(\mathcal{A}) \to [0,1]$ qui à un état φ associe la norme de sa restriction à A. Cette application est semi-continue inférieurement car si $\psi \in \mathcal{S}_{\widetilde{X}}(\mathcal{A})$, $\chi(\psi)$ est le sup des $\|\psi(a)\|$ pour a dans la boule unité de A.

Soient $\varphi \in \mathcal{S}_X(A)$ et $V = \{\phi \in \mathcal{S}_X(A)\,;\ |\phi(a_k) - \varphi(a_k)| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\}$ un voisinage élémentaire de φ où les a_i sont dans la boule unité de A et ε est un réel positif. Identifions φ avec son prolongement à $\mathcal{A}$ défini par $a + f \mapsto \varphi(a) + f$.

Si W est l'ouvert

$$\big\{\psi \in \mathcal{S}_{\widetilde{X}}(\mathcal{A})\,;\ |\psi(a_k) - \varphi(a_k)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,\ 0 \leq i \leq n\big\} \cap \chi^{-1}\big(]2/(2+\varepsilon), 1]\big)$$

et $\psi \in W$ alors la forme $\chi(\psi)^{-1}\psi$ restreinte à A est un état $\phi \in \mathcal{S}_X(A)$ appartenant à l'ouvert V et $p(\phi) = p(\psi)$, ce qui signifie que $p(V)$ contient le voisinage ouvert $p(W)$ de $p(\varphi)$ dans X. ∎

On va utiliser le théorème 3.2″ de [34] pour montrer que 2) implique 3).

Étant donnés un espace vectoriel E, une partie V de E et un point a de E, on note $a + V$ l'ensemble $\{a + b\,;\ b \in V\}$ et $\overline{V}$ la fermeture de V.

LEMME 3.6. — *Soient T une partie d'un espace vectoriel topologique E et X un espace paracompact; on se donne une application $p : T \to X$ surjective, ouverte et à fibres convexes.*

a) *Étant donné un voisinage convexe V de 0, il existe une application continue $\phi : X \to E$ telle que pour tout x de X, $\phi(x) \in p^{-1}(\{x\}) + V$.*

b) *Si de plus E est un espace de Fréchet, il existe une application $\phi : X \to E$ continue telle que $\phi(x) \in \overline{p^{-1}(\{x\})}$ pour tout x de X.*

Démonstration.

a) Si l'on note $\overset{\circ}{\overbrace{(t - V)}}$ l'intérieur de $(t - V)$, les $p[\overset{\circ}{\overbrace{(t - V)}} \cap T]$ forment un recouvrement ouvert de X lorsque t décrit T. Soit $\{\eta_t\}$ une partition de l'unité localement finie subordonnée à ce recouvrement. L'application $\phi(x) = \sum \eta_t(x)t$ vérifie alors l'assertion du lemme : en effet, si $\eta_t(x) \neq 0$, on a $t \in p^{-1}(\{x\}) + V$, ce qui implique $\phi(x)$ est bien dans le convexe $p^{-1}(\{x\}) + V$.

b) Soit (V_n) une suite fondamentale de voisinages ouverts convexes équilibrés de $\{0\}$ telle que $V_n + V_n \subset V_{n-1}$ pour $n \geq 1$. On construit par récurrence $\phi_i : X \to E$ telle que pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &\in \phi_{i-1}(x) + V_{i-2} \quad \text{si} \quad i \geq 2,\\ \phi_i(x) &\in p^{-1}\big(\{x\}\big) - V_i \quad \text{si} \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

L'existence de ϕ_1 est assurée par a). Donnons-nous donc $k > 1$ et supposons $\phi_1, \ldots, \phi_k$ construites. Si l'on pose

$$T_{k+1} = \big\{t \in T\,;\ \phi_k \circ p(t) \in t - V_k\big\},$$

l'application $p : T_{k+1} \to X$ vérifie alors les hypothèses de la partie a) : elle est surjective car si $x \in X$, on a $\phi_k(x) \in p^{-1}(\{x\}) - V_k$ et donc il existe $t \in T$ tel que $p(t) = x$ et $\phi_k(x) \in t - V_k$; d'autre part $\phi_k(x) + V_k \cap p^{-1}(\{x\})$ est convexe.

Appelons ϕ_{k+1} l'application déduite de a) pour le voisinage convexe V_{k+1} de $\{0\}$: elle vérifie les propriétés de récurrence requises.

La limite uniforme ϕ des ϕ_i répond alors au problème posé. ∎

COROLLAIRE 3.7. — *Sous les hypothèses du lemme précédent, si $p^{-1}(\{x\})$ est fermé dans E quel que soit $x \in X$ et si t est un point de T, il existe un section ϕ de p telle que $\phi(p(t)) = t$.*

Démonstration. — Il suffit de poser $T' = p^{-1}(X \backslash \{p(t)\}) \cup \{t\}$. □

LEMME 3.8. — *Soit A une $C(X)$-algèbre stellaire séparable et unifère telle que $A^x \neq \{0\}$ quel que soit $x \in X$. Si l'application $p : \mathcal{S}_X(A) \to X$ est ouverte, A admet un champ continu d'états fidèles.*

Démonstration. — Munissons le dual topologique A^* de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes; A^* est alors un espace de Fréchet pour cette topologie et sur la partie compacte $\mathcal{S}_X(A)$, cette topologie coïncide avec la topologie faible ([10, chap. IV]).

Soit (a_n) une suite dense dans la partie positive de la boule unité de A où l'on suppose que $a_1 = 1$ et que les a_n sont strictement positifs. Notons $P(a) \in C(X)$ la fonction $x \mapsto \|a^x\|$ pour tout $a \in A$ et définissons pour n dans $\mathbb{N}$ l'ouvert Ω_n de $\mathcal{S}_X(A)$ constitué des états $\varphi \in \mathcal{S}_X(A)$ tels que $\varphi(a_n - \frac{1}{2}P(a_n))0$. En appliquant le Lemme 3.6 à $p : \Omega_n \to X$, on construit un champ continu d'états Ψ_n sur A tel que $\Psi_n(a_n) \geq \frac{1}{2}P(a_n)$. Le champ continu d'états $\Psi = \sum 2^{-n}\Psi_n$ répond alors à la question.

En effet, si $a \in A_+$ est positif de norme 1 et $x \in X$ vérifie $a^x \neq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|a^x - a_n^x\| < \frac{1}{3}\|a^x\|$. En particulier, $\frac{2}{3}\|a^x\| < \|a_n^x\|$. On a alors

$$\Psi_n(a_n)(x) - \Psi_n(a)(x) < \frac{1}{2}\|a_n^x\|$$

et donc $\Psi(a)(x) \geq 2^{-n}\Psi_n(a)(x) > 0$. □

PROPOSITION 3.9. — *Une $C_0(X)$-algèbre stellaire séparable A telle que l'application $p : \mathcal{S}_X(A) \to X$ soit surjective et ouverte admet un champ continu d'états fidèles.*

Démonstration. — Notons $\mathcal{A}$ la $C(\widetilde{X})$-algèbre unifère séparable associée à A (définition 2.7) et soit φ un champ continu d'états fidèles sur $\mathcal{A}$ (Lemme 3.8). Fixons une suite dénombrable (a_n) dense dans la boule unité de A et posons $\psi(a) = \sum 2^{-n}\varphi(a_n^* a a_n)$ pour a dans A. Le champ continu d'états Φ défini par $\Phi(a) = \psi(1)^{-1}\psi(a)$ convient car si $a \in A_+$ et $x \in X$ vérifient $\Phi_x(a) = 0$, $(a_n^x)^* a^x (a_n^x) = 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, d'où $a^x = 0$. □

PROPOSITION 3.10. — *Soit A une $C_0(X)$-algèbre stellaire telle que $A^x \neq \{0\}$ quel que soit $x \in X$. Si il existe une famille de champs continus d'états $\{\varphi_\lambda\}$ vérifiant l'assertion* 3) *du théorème* 3.3, *alors A admet un champ de représentations fidèles.*

Démonstration. — Prolongeons chaque φ_λ à la $C(\widetilde{X})$-algèbre unifère $\mathcal{A}$ (définition 2.7) en posant $\varphi_\lambda(f) = f$ pour $f \in C(\widetilde{X})$. Si $(\pi_{\varphi_\lambda}, \mathcal{E}_{\varphi_\lambda}, \xi_{\varphi_\lambda})$ est la $C(\widetilde{X})$-représentation cyclique de $\mathcal{A}$ associée à φ_λ (Proposition 2.13), alors π_{φ_λ} restreinte à $\mathcal{E}_\lambda = \pi_{\varphi_\lambda}(A)\mathcal{E}_{\varphi_\lambda}$ est une $C_0(X)$-représentation de A.

Notons $\mathcal{E}$ le $C_0(X)$ module hilbertien $\bigoplus_\lambda \mathcal{E}_\lambda$ et π la $C_0(X)$-représentation $\bigoplus_\lambda \pi_{\varphi_\lambda}$ de A dans $\mathcal{E}$. Si $a \in A_+$ et $x \in X$ vérifient $\pi_x(a) = 0$, alors, pour tout λ et tout $b \in A$,

$$\left\langle \pi_{\varphi_\lambda}(b)\xi_{\varphi_\lambda}, \pi(a)\pi_{\varphi_\lambda}(b)\xi_{\varphi_\lambda}\right\rangle(x) = e_x \circ \varphi_\lambda(b^*ab) = 0,$$

d'où $e_x \circ \varphi_\lambda(a) = 0$ pour tout λ et donc $a^x = 0$. □

Pour terminer la démonstration du théorème, il reste à voir :

PROPOSITION 3.11. — *Si la $C_0(X)$-algèbre stellaire A admet un champ de représentations fidèles π, elle forme un champ continu de C^*-algèbres sur X.*

Démonstration. — Comme $\pi_x(A) \simeq A^x$ quel que soit x, l'application $x \mapsto \|a^x\| = \|\pi_x(a)\|$ est à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement pour tout $a \in A$. □

LEMME 3.12. — *Soit A un champ continu unifère et séparable de C^*-algèbres non-nulles. Si $x \in X$ et $\phi \in S(A^x)$, il existe un champ continu d'états φ sur A tel que $\varphi_x = \phi$.*

Démonstration. — Si l'on pose $T = \mathcal{S}_X(A)$ et $t = \phi$, le Corollaire 3.7 fournit le champ continu d'états recherché. □

PROPOSITION 3.13. — *Soit A un champ continu séparable de C^*-algèbres non-nulles. Si $x \in X$ et $\phi \in S(A^x)$, il existe un champ continu d'états Φ sur A tel que $\Phi_x = \phi$.*

Démonstration. — Il existe un état $\psi \in S(A^x)$ et un élément $d \in A$ tels que $\phi(a) = \psi[(d^x)^*ad^x]$ quel que soit $a \in A^x$. Soient alors Ψ_1 un champ continu d'états sur la $C(\widetilde{X})$-algèbre unifère $\mathcal{A}$ qui prolonge ψ et Ψ_2 un champ continu d'états sur A (Proposition 3.9).

Si f est une fonction sur X à valeurs dans $[0,1]$ nulle hors de l'ouvert $\{y \in X\,;\ d^y \neq 0\}$ et telle que $f(x) = 1$, alors la formule

$$\Phi(a) = f\Psi_1(d^*d)^{-1}\Psi_1(d^*ad) + (1-f)\Psi_2(a), \quad a \in A$$

définit un champ continu d'états sur A qui prolonge ϕ. □

Le cas commutatif.

Soit Ω un espace localement compact. Une structure de $C_0(X)$-algèbre stellaire sur la C^*-algèbre commutative $C_0(\Omega)$ est caractérisée par la restriction de l'application $p : \mathcal{S}_X[C_0(\Omega)] \to X$ à Ω, *i.e.* une application continue $p : \Omega \to X$. La fibre au-dessus de $x \in X$ est alors $C_0(\Omega)^x = C_0(\Omega^x)$ où $\Omega^x = p^{-1}(\{x\})$.

Maintenant si A est une C^*-algèbre commutative, l'application

$$\phi \longrightarrow \ker \pi_\phi$$

de l'espace $P(A)$ des états purs sur A dans l'espace $\operatorname{Prim} A$ des idéaux primitifs est un homéomorphisme [38, Th. 4.3.3], de sorte que l'on peut appliquer un résultat de Lee [32, Th. 4] (*cf.* aussi [18, Th. 2.1]) qui repose sur des travaux de Tomiyama [46, Th. 3.1].

PROPOSITION 3.14. — *Étant donné un espace localement compact X, une $C_0(X)$-algèbre stellaire commutative $A = C_0(\Omega)$ (non nécessairement séparable) définit un champ continu de C^*-algèbres sur X si et seulement si la restriction de p à $P(A) = \Omega$ est ouverte.*

3.2. Produits tensoriels de $C(X)$-algèbres stellaires.

On se restreint au cas où l'espace X est compact.

Soient A_1 et A_2 deux $C(X)$-algèbres stellaires. Si D est un quotient de $A_1 \otimes_{\max} A_2$, la C^*-algèbre D est munie des deux structures de $C(X)$-algèbres stellaires induites par celles de A_1 et A_2 et ces deux structures coïncident si et seulement si l'image de $C_\Delta(A_1 \otimes_{\max} A_2)$ dans D est nulle, où C_Δ désigne l'idéal de $C(X \times X)$ des fonctions nulles sur la diagonale.

Notons $A_1 \overset{M}{\otimes}_{C(X)} A_2$ le quotient de $A_1 \otimes_{\max} A_2$ par $C_\Delta(A_1 \otimes_{\max} A_2)$ que nous munissons de la structure de $C(X)$-module induite par le quotient $C(X \times X)/C_\Delta$. Nous allons construire dans cette section un certain nombre de quotients de la $C(X)$-algèbre $A_1 \overset{M}{\otimes}_{C(X)} A_2$ et nous chercherons des conditions suffisantes pour que ces algèbres coïncident (Proposition 3.25).

Plus précisément, si σ_1^x et σ_2^x désignent les applications quotients $A_1 \to A_1^x$ et $A_1 \to A_2^x$, on étudie les quotients de $A_1 \overset{M}{\otimes}_{C(X)} A_2$ associée aux semi-normes suivantes :

- $\|\alpha\| = \sup\{\|(\sigma_1^x \otimes_{\max} \sigma_2^x)(\alpha)\|\ ;\ x \in X\}$,
- $\|\alpha\| = \sup\{\|(\sigma_1^x \otimes_{\min} \sigma_2^x)(\alpha)\|\ ;\ x \in X\}$,

et dans le cas où A_1 et A_2 admettent des $C(X)$-représentations fidèles π_1 et π_2,

- $\|\alpha\| = \sup\{\|((\pi_1)_x \otimes_{\min} (\pi_2)_x)(\alpha)\|\ ;\ x \in X\}$.

Le Corollaire 3.17 montre que le premier quotient est toujours égal à

$$A_1 \overset{M}{\otimes}_{C(X)} A_2.$$

Si l'une des deux algèbres A_1 et A_2 est nucléaire, alors le second quotient est aussi isomorphe à $A_1 \overset{M}{\otimes}_{C(X)} A_2$ (Proposition 3.24). Enfin, si A_1 admet une $C(X)$-représentation fidèle et A_2 admet un champ de représentations fidèles, les deux derniers quotients coïncident (Proposition 3.21).

PROPOSITION 3.15. — *Si J_1 et J_2 sont des idéaux des C^*-algèbres A_1 et A_2, on a la suite exacte*

$$0 \to J_1 \otimes_{\max} A_2 + A_1 \otimes_{\max} J_2 \longrightarrow A_1 \otimes_{\max} A_2 \longrightarrow (A_1/J_1) \otimes_{\max} (A_2/J_2) \to 0.$$

Démonstration. — Des suites exactes $0 \to J_1 \xrightarrow{i_1} A_1 \xrightarrow{\pi_1} A_1/J_1 \to 0$ et $0 \to J_2 \xrightarrow{i_2} A_1 \xrightarrow{\pi_2} A_2/J_2 \to 0$, on déduit le diagramme commutatif suivant dont les lignes et les colonnes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & J_1 \otimes_{\max} J_2 \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes i_2"] \arrow[d, "i_1 \otimes \mathrm{id}"] & J_1 \otimes_{\max} A_2 \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \pi_2"] \arrow[d, "i_1 \otimes \mathrm{id}"] & J_1 \otimes_{\max} A_2/J_2 \arrow[r] \arrow[d, "i_1 \otimes \mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \otimes_{\max} J_2 \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes i_2"] \arrow[d, "\pi_1 \otimes \mathrm{id}"] & A_1 \otimes_{\max} A_2 \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \pi_2"] \arrow[d, "\pi_1 \otimes \mathrm{id}"] & A_1 \otimes_{\max} A_2/J_2 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1 \otimes \mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1/J_1 \otimes_{\max} J_2 \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes i_2"] \arrow[d] & A_1/J_1 \otimes_{\max} A_2 \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \pi_2"] \arrow[d] & A_1/J_1 \otimes_{\max} A_2/J_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Si $a \in A_1 \otimes_{\max} A_2$ est dans le noyau de $\pi_1 \otimes \pi_2$, alors $(\mathrm{id} \otimes \pi_2)(a)$ est dans le noyau de $\pi_1 \otimes \mathrm{id}$, ce qui implique qu'il existe $b \in J_1 \otimes_{\max} (A_2/J_2)$ tel que $(i_1 \otimes \mathrm{id})(b) = (id \otimes \pi_2)(a)$. Mais comme $\mathrm{id} \otimes \pi_2$ est surjective, il existe $c \in J_1 \otimes_{\max} A_2$ tel que $(i_1 \otimes \pi_2)(c) = (\mathrm{id} \otimes \pi_2)(a)$, ce que l'on peut réécrire $(\mathrm{id} \otimes \pi_2)[(i_1 \otimes \mathrm{id})(c) - a] = 0$. Cela signifie qu'il existe $c' \in A_1 \otimes_{\max} J_2$ tel que $(\mathrm{id} \otimes i_2)(c') = a - (i_1 \otimes \mathrm{id})(c)$. $\square$

COROLLAIRE 3.16. — *Si A est une $C(X)$-algèbre stellaire et B est une $C(Y)$-algèbre stellaire, $A \otimes_{\max} B$ est une $C(X \times Y)$-algèbre stellaire de fibres*

$$\big(A \otimes_{\max} B\big)^{(x,y)} = A^x \otimes_{\max} B^y \quad \forall x \in X,\ \forall y \in Y.$$

Démonstration. — Définissons le noyau

$$C_{(x,y)}(X \times Y) = C_x(X) \otimes C(Y) + C(X) \otimes C_y(Y)$$

de l'application

$$C(X) \otimes C(Y) \longrightarrow C(X)/C_x(X) \otimes C(Y)/C_y(Y),$$

i.e. l'idéal des fonctions continues sur $X \times Y$ nulles au point (x, y). La proposition précédente nous donne alors la suite exacte

$$0 \to C_{(x,y)}(X \times Y)\big[A \otimes_{\max} B\big] \longrightarrow A \otimes_{\max} B \longrightarrow A^x \otimes_{\max} B^y \to 0. \quad \square$$

COROLLAIRE 3.17. — *Soient A_1 et A_2 deux $C(X)$-algèbres stellaires. Alors quel que soit le point $x \in X$, $(A_1 \overset{M}{\otimes}_{C(X)} A_2)^x = (A_1)^x \otimes_{\max} (A_2)^x$.*

Démonstration. — Soit $x \in X$. Posons :

$$D = A_1 \otimes_{\max} A_2, \quad I = C_{(x,x)}(X \times X)D, \quad J = C_\Delta D.$$

Alors I et J sont des idéaux de D. Comme J est inclus dans I, on a $(D/J)/(I/J) \simeq D/I$. $\square$

DÉFINITION 3.18. — Soient A_1 et A_2 deux $C(X)$-algèbres stellaires. Notons σ^x la représentation de $A_1 \otimes_{\max} A_2$ dans $A_1^x \otimes_{\min} A_2^x$ et définissons sur $A_1 \otimes_{\max} A_2$ la semi-norme

$$\|a\| = \sup\big\{\|\sigma^x(a)\|\ ;\ x \in X\big\}.$$

Le séparé complété de $A_1 \otimes_{\max} A_2$ pour cette semi-norme est une $C(X)$-algèbre stellaire que l'on notera $A_1 \overset{m}{\otimes}_{C(X)} A_2$.

Soit Diag : $C(X) \otimes C(X) \to C(X)$ le morphisme transposé de l'application diagonale $X \to X \times X$. Si $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont deux $C(X)$-modules hilbertiens, on a alors $\mathcal{E}_1 \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_2 = (\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2) \otimes_{\mathrm{Diag}} C(X)$.

DÉFINITION 3.19. — Étant données deux $C(X)$-algèbres stellaires A_1 et A_2 admettant des $C(X)$-représentations fidèles dans les $C(X)$-modules hilbertiens $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, on définit la *$C(X)$-algèbre stellaire* $A_1 \otimes_{C(X)} A_2 = (A_1 \otimes_{\min} A_2) \otimes 1$ dans $\mathcal{L}[(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2) \otimes_{\mathrm{Diag}} C(X)]$.

PROPOSITION 3.20. — *La construction de $A_1 \otimes_{C(X)} A_2$ ne dépend pas du choix des $C(X)$-représentations fidèles non-dégénérées.*

Démonstration. — Donnons-nous deux $C(X)$-représentations fidèles non-dégénérées de A_1 et A_2 dans $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Comme A_2 commute à $C(X)$ dans l'algèbre des multiplicateurs $M(A_2)$, A_2 est une sous-algèbre de $\mathcal{L}_{A_2}(\mathcal{E}_1 \otimes_{C(X)} A_2)$. Par ailleurs, si $a_1 \in A_1$ et $a_2 \in A_2$, à travers l'inclusion

$$i : \mathcal{L}_{A_2}(\mathcal{E}_1 \otimes_{C(X)} A_2) \hookrightarrow \mathcal{L}_{C(X)}\big[(\mathcal{E}_1 \otimes_{C(X)} A_2) \otimes_{A_2} \mathcal{E}_2\big] = \mathcal{L}(\mathcal{E}_1 \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_2),$$

on a $i[(a_1 \otimes 1)a_2] = a_1 \otimes a_2$, ce qui montre que $A_1 \otimes_{C(X)} A_2$ se relève dans $\mathcal{L}_{A_2}(\mathcal{E}_1 \otimes_{C(X)} A_2)$.

Si $\mathcal{E}_2'$ est un autre $C(X)$-module hilbertien dans lequel A_2 admet une $C(X)$-représentation fidèle non-dégénérée, l'algèbre $\mathcal{L}_{A_2}(\mathcal{E}_1 \otimes_{C(X)} A_2)$ s'injecte dans $\mathcal{L}[(\mathcal{E}_1 \otimes_{C(X)} A_2) \otimes_{A_2} \mathcal{E}_2'] = \mathcal{L}(\mathcal{E}_1 \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_2')$ (Lemme 1.2), ce qui montre que $A_1 \otimes_{C(X)} A_2$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{E}_2$.

Fixons un tel $C(X)$-module hilbertien $\mathcal{E}_2$; le même argument montre que la construction de $A_1 \otimes_{C(X)} A_2$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{E}_1$. $\square$

REMARQUE. — Si π_1 et π_2 sont deux $C(X)$-représentations fidèles de A_1 et A_2, alors $A_1 \otimes_{C(X)} A_2$ est le séparé complété de $A_1 \otimes_{\min} A_2$ pour la semi-norme

$$\|\alpha\| = \sup\big\{\big\| [(\pi_1)_x \otimes_{\min} (\pi_2)_x](\alpha)\big\| \,;\ x \in X\big\}.$$

PROPOSITION 3.21. — *Si A est un champ continu de C^*-algèbres sur X (non nécessairement séparable) admettant un champ de représentations fidèles π dans le $C(X)$-module hilbertien $\mathcal{E}$ et B est une $C(X)$-algèbre stellaire, le morphisme $a \otimes b \to \pi(a) \otimes b$ induit une représentation $C(X)$-linéaire fidèle de $A \overset{m}{\otimes}_{C(X)} B$ dans le B-module hilbertien$\mathcal{E} \otimes_{C(X)} B$.*

En particulier, si B admet une $C(X)$-représentation fidèle, la $C(X)$-représentation de $A \overset{m}{\otimes}_{C(X)} B$ dans $A \otimes_{C(X)} B$ est fidèle.

Démonstration. — Pour $x \in X$, notons σ^x le morphisme canonique

$$A \overset{m}{\otimes}_{C(X)} B \longrightarrow A^x \otimes_{\min} B^x$$

et remarquons que B s'injecte dans la C^*-algèbre $B_d = \bigoplus_{x \in X} B^x$. Comme

$$(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} B) \otimes_B B^x = \mathcal{E}_x \otimes B^x,$$

$\mathcal{L}_B(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} B)$ s'injecte dans

$$\bigoplus_{x \in X} \mathcal{L}_{B^x}(\mathcal{E}_x \otimes B^x) \subset \mathcal{L}_{B_d}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} B \otimes_B B_d)$$

(Lemme 1.2). Cela implique pour $\alpha \in A \otimes_{\mathrm{alg}} B$ que :

$$\big\|(\pi \otimes \mathrm{id})(\alpha)\big\| = \sup_{x \in X} \big\|(\pi_x \otimes \mathrm{id}) \circ \sigma^x(\alpha)\big\| = \sup_{x \in X} \big\|\sigma^x(\alpha)\big\|. \quad \square$$

Nous en déduisons le corollaire suivant qui sera utilisé pour démontrer le Théorème 5.8 :

COROLLAIRE 3.22. — *Si A est un champ continu de C^*-algèbres (non nécessairement séparable) admettant un champ de représentations fidèles et si la $C(X)$-algèbre B admet une $C(X)$-représentation fidèle, l'application $A \otimes_{\max} B \to A^x \otimes_{\min} B^x$ se factorise à travers $A \otimes_{C(X)} B$.*

Démonstration. — Par définition, l'application $A \otimes_{\max} B \to A^x \otimes_{\min} B^x$ se factorise à travers $A \overset{m}{\otimes}_{C(X)} B$; mais dans le cas présent, la $C(X)$-algèbre $A \overset{m}{\otimes}_{C(X)} B$ est isomorphe à $A \otimes_{C(X)} B$ (Proposition 3.21). ∎

La caractérisation de la nucléarité d'une C^*-algèbre A par l'injectivité du bidual A'' (*cf.* [13], [17], [11]) permet de montrer à travers l'étude des représentations factorielles (qui forment une famille séparant les éléments de A'') :

PROPOSITION 3.23. — *Une $C(X)$-algèbre stellaire A est nucléaire si et seulement si A^x est nucléaire quel que soit $x \in X$.*

On en déduit :

PROPOSITION 3.24. — *Soient A et B deux $C(X)$-algèbres stellaires. Si A ou B est nucléaire, on a l'isomorphisme $A \overset{M}{\otimes}_{C(X)} B \simeq A \overset{m}{\otimes}_{C(X)} B$.*

Démonstration. — Si σ^x désigne la représentation canonique de $A \otimes B$ dans $A^x \otimes_{\max} B^x = A^x \otimes_{\min} B^x$ pour $x \in X$, les deux $C(X)$-algèbres sont le séparé de $A \otimes B$ pour la semi-norme $\|\alpha\| = \sup\{\|\sigma^x(\alpha)\| \,;\, x \in X\}$. ∎

PROPOSITION 3.25. — *Soient A un champ continu de C^*-algèbres sur X admettant un champ de représentations fidèles et B une $C(X)$-algèbre stellaire admettant une $C(X)$-représentation fidèle. Si l'une des deux algèbres est nucléaire, on a $A \overset{M}{\otimes}_{C(X)} B \simeq A \otimes_{C(X)} B$.*

Démonstration. — Elle résulte des Propositions 3.21 et 3.24. ∎

COROLLAIRE 3.26. — *Soient A_1 et A_2 deux champs continus de C^*-algèbres sur X admettant des champs de représentations fidèles π_1 et π_2.*

Si A_2 est nucléaire, alors $A_1 \overset{m}{\otimes}_{C(X)} A_2$ définit un champ continu de C^*-algèbres de fibres $(A_1)^x \otimes (A_2)^x$.

Démonstration. — Si $x \in X$, on a :

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)_x \big(A_1 \otimes_{C(X)} A_2\big) = (\pi_1)_x(A_1) \otimes (\pi_2)_x(A_2) \simeq A_1^x \otimes A_2^x.$$

Mais d'après le Corollaire 3.17 et la Proposition 3.25, on a

$$A_1^x \otimes A_2^x = \big[A_1 \otimes_{C(X)} A_2\big]^x,$$

ce qui montre que $\pi_1 \otimes \pi_2$ est un champ de représentations fidèles de $A_1 \otimes_{C(X)} A_2$. ∎

Étant donnée une $C(X)$-algèbre A, notons comme Bauval dans [7] $I(A)$ l'intersection de tous les noyaux des $C(X)$-représentations de A et $\overline{A}$ la $C(X)$-algèbre $A/I(A)$.

QUESTION. — *Étant données deux $C(X)$-algèbres stellaires A_1 et A_2, a-t-on l'isomorphisme*

$$\overline{A_1 \overset{m}{\otimes}_{C(X)} A_2} \simeq \overline{A_1} \otimes_{C(X)} \overline{A_2}?$$

Regardons le cas particulier où l'une des deux $C(X)$-algèbre est nucléaire.

PROPOSITION 3.27. — *Soient A_1 et A_2 deux $C(X)$-algèbres. Si A_1 est nucléaire, on a l'isomorphisme $\overline{A_1 \overset{m}{\otimes}_{C(X)} A_2} \simeq \overline{A_1} \otimes_{C(X)} \overline{A_2}$.*

Démonstration. — Soit π une $C(X)$-représentation de $A_1 \overset{m}{\otimes}_{C(X)} A_2 = (A_1 \otimes A_2)/C_\Delta(A_1 \otimes A_2)$ dans le $C(X)$-module hilbertien $\mathcal{E}$: elle définit une représentation $\pi_1 \otimes_{\max} \pi_2$ de $A_1 \otimes_{\max} A_2$ et comme

$$\pi(f \otimes 1) = \pi(1 \otimes f) = f$$

pour $f \in C(X)$, π_1 et π_2 sont des $C(X)$-représentations de A_1 et A_2. Par conséquent, $\pi_x(A_1 \overset{m}{\otimes}_{C(X)} A_2)$ est une représentation de

$$(\pi_1)_x(A_1) \otimes_{\max} (\pi_2)_x(A_2) = (\pi_1)_x(A_1) \otimes_{\min} (\pi_2)_x(A_2)$$

quel que soit $x \in X$ puisque $(\pi_1)_x(A_1)$ est nucléaire.

Il en résulte pour $\alpha \in A_1 \otimes_{\mathrm{alg}} A_2$ que

$$\|\pi(\alpha)\| = \sup\|\pi_x(\alpha)\| \leq \|(\pi_1 \otimes \pi_2)(\alpha)\|$$

où $\pi_1 \otimes \pi_2$ est la $C(X)$-représentation de $A_1 \otimes_{C(X)} A_2$ dans $\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E}$; donc $\pi(A_1 \overset{m}{\otimes}_{C(X)} A_2)$ est un quotient de $\overline{A_1} \otimes_{C(X)} \overline{A_2}$. $\square$

3.3. Contre-exemples.

3.3.1. — Soient A et B deux $C(X)$-algèbres stellaires. On a alors des applications naturelles surjectives

$$\begin{gathered}(A \otimes_{\min} B)^{(x,x)} \longrightarrow (A \overset{m}{\otimes}_{C(X)} B)^x,\\ (A \overset{m}{\otimes}_{C(X)} B)^x \longrightarrow A^x \otimes_{\min} B^x,\end{gathered}$$

mais en général, aucun de ces deux morphismes n'est un isomorphisme.

Considérons l'exemple suivant dont la construction m'a été indiquée par S. Wassermann [49]. Soit Γ le groupe discret $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ et $\{\pi_n\}$ l'ensemble de ses classes de représentations irréductibles de dimension finie où π_0 est la représentation triviale. On appelle π la représentation $\bigoplus_n \pi_n$ et K l'idéal de $A = \pi(C^*_{\max}(\Gamma))$ formé des éléments $\pi(a) \in A$ tels que $\|\pi_n(a)\|$ tende vers 0 à l'infini. On notera π_∞ la représentation de $C^*_{\max}(\Gamma)$ dans A/K.

Comme Γ a la propriété T de Kazhdan [24], pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un projecteur central unique $\varepsilon_n \in C^*_{\max}(\Gamma)$ tel que $\pi_n(\varepsilon_n) = 1$ et $\sigma(\varepsilon_n) = 0$ quelle que soit la représentation irréductible σ distincte de π_n. Remarquons en particulier que pour toute représentation σ de Γ, $\sigma(\varepsilon_0)$ est la projection sur les vecteurs invariants par σ.

Notons alors δ le coproduit

$$C^*_{\max}(\Gamma) \to C^*_{\max}(\Gamma) \otimes_{\min} C^*_{\max}(\Gamma).$$

Si n et m sont finis, $(\pi_n \otimes \pi_m)\delta(\varepsilon_0)$ est non-nul si et seulement si π_m est la représentation adjointe $\overline{\pi_n}$ de π_n. Par ailleurs, $(\pi_\infty \otimes \pi)\delta(\varepsilon_0) = 0$: sinon il existerait un opérateur de Hilbert-Schmidt non-nul entrelaçant π_∞ et la représentation adjointe $\bar{\pi}$ de π, ce qui est impossible puisque A/K n'admet pas de représentation non nulle de dimension finie.

Si $\widetilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ désigne le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{N}$, l'application de $C_0(\mathbb{N})$ dans le centre de A qui à f associe $\pi(\sum f(n)\varepsilon_n)$ définit une structure de $C_0(\mathbb{N})$-algèbre stellaire sur A et donc une structure de $C(\widetilde{\mathbb{N}})$-algèbre stellaire sur A de fibres $A^n = \pi_n(C^*_{\max}(\Gamma))$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $A^\infty = A/K$. On construit de même la $C(\widetilde{\mathbb{N}})$-algèbre $B = \bar{\pi}(C^*_{\max}(\Gamma))$ de fibres $B^n = \overline{\pi_n}(C^*_{\max}(\Gamma))$ pour $n \in \mathbb{N}$. Enfin, si l'on pose

$$\theta_n = \overline{\pi_{n+1}} \quad \text{et} \quad \theta = (\oplus \theta_n),$$

$C = \theta(C^*_{\max}(\Gamma))$ est une $C(\widetilde{\mathbb{N}})$-algèbre de fibres $C^n = \overline{\pi_{n+1}}(C^*_{\max}(\Gamma))$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Si n appartient à $\mathbb{N}$, $\delta(\varepsilon_0)$ est non nul, donc de norme 1 dans $A^n \otimes B^n$. Il en résulte que $\|\delta(\varepsilon_0)\| = 1$ dans $(A \overset{m}{\otimes}_{C(\widetilde{\mathbb{N}})} B)^\infty$ mais $\delta(\varepsilon_0) = 0$ dans $A^\infty \otimes_{\min} B^\infty$.

Si σ est une représentation irréductible de dimension finie de Γ qui est équivalente à sa représentation adjointe, le groupe $\sigma(\Gamma)$ est commutatif et comme le sous-groupe engendré par les commutateurs de $\Gamma = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ est égal à Γ, σ est la représentation triviale. Donc si $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $\delta(\varepsilon_0)$ est nul dans $A^n \otimes C^n$, $\delta(\varepsilon_0) = 0$ dans $(A \overset{m}{\otimes}_{C(\widetilde{\mathbb{N}})} C)^\infty$, mais cet élément est de norme 1 dans $(A \otimes_{\min} C)^{(\infty,\infty)}$.

REMARQUE. — Cette construction a en fait permis à E. Kirchberg et S. Wassermann d'exhiber un champ continu séparable de C^*-algèbres A sur un espace compact X et un champ trivial de C^*-algèbres $C(X,B)$ tels que $A \otimes_{C(X)} C(X,B)$ ne soit pas un champ continu sur X de fibres $A^x \otimes_{\min} B$ (*cf.* [30]).

3.3.2. — Le morphisme $A \overset{m}{\otimes}_{C(X)} B \to A \otimes_{C(X)} B$ n'est pas nécessairement un isomorphisme comme le montre l'exemple suivant.

La $C([0,2])$-algèbre stellaire $A = C([0,1]) \oplus C([1,2])$ admet une $C([0,2])$-représentation fidèle dans le $C([0,2])$-module hilbertien

$$\mathcal{E} = C_0\big([0,2]\backslash\{1\}\big) = C_0\big([0,1[\,\big) \oplus C_0\big(\,]1,2]\big).$$

Comme $C_0([0,1[\,) \cdot C_0(\,]1,2]) = 0$, $\mathcal{E} \otimes_{C([0,2])} \mathcal{E} = C_0([0,2]\backslash\{1\})$; donc si $a_1 = f_1 \oplus g_1$ et $a_2 = f_2 \oplus g_2$ sont dans A, on a

$$a_1 \otimes a_2 = (f_1 f_2) \oplus (g_1 g_2)$$

dans $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C([0,2])} \mathcal{E})$, ce qui implique

$$A \otimes_{C([0,2])} A \simeq C\big([0,1]\big) \oplus C\big([1,2]\big).$$

Au point $x = 1$, $A^x = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ et donc comme A est nucléaire,

$$\big(A \overset{m}{\otimes}_{C([0,2])} A\big)^x = (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$$

tandis que $(A \otimes_{C([0,2])} A)^x = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

3.3.3. — Le produit tensoriel $\overset{m}{\otimes}_{C(X)}$ n'est pas en général associatif.

Munissons la C^*-algèbre $D = \mathbb{C}$ de la structure de $C(\widetilde{\mathbb{N}})$-algèbre définie par $f \cdot a = f(\infty)a$. Alors quelle que soit la $C(\widetilde{\mathbb{N}})$-algèbre D', $[D \overset{m}{\otimes}_{C(\widetilde{\mathbb{N}})} D']^n$ est égal à 0 si n est fini et à $(D')^\infty$ si $n = \infty$.

Si A et B sont deux $C(\widetilde{\mathbb{N}})$-algèbres, on a donc

$$\big[(A \overset{m}{\otimes}_{C(\widetilde{\mathbb{N}})} B) \overset{m}{\otimes}_{C(\widetilde{\mathbb{N}})} D\big]^\infty \simeq \big(A \overset{m}{\otimes}_{C(\widetilde{\mathbb{N}})} B\big)^\infty$$

tandis que $[A \overset{m}{\otimes}_{C(\widetilde{\mathbb{N}})} (B \overset{m}{\otimes}_{C(\widetilde{\mathbb{N}})} D)]^\infty \simeq A^\infty \otimes_{\min} B^\infty$. Mais ces deux C^*-algèbres sont en général distinctes (*cf.* 3.3.1).

4. Champs continus d'unitaires multiplicatifs

Nous allons étendre la structure d'unitaire multiplicatif introduite par Baaj et Skandalis dans [4] aux $C(X)$-modules hilbertiens. Les preuves sont similaires à celles de [4] grâce à la Proposition 1.8 ; aussi avons-nous surtout insisté sur les modifications à apporter aux démonstrations données dans [4].

Si A est une C^*-algèbre et J est un idéal bilatère de A, on notera $M(A,J)$ l'ensemble des multiplicateurs $T \in M(A)$ tels que $T \cdot A \subset J$.

DÉFINITION 4.1. — Soient X un espace compact, A une $C(X)$-algèbre stellaire admettant une $C(X)$-représentation fidèle et $\mathcal{A}$ la $C(X)$-algèbre engendrée par A et $u[C(X)]$ dans $M[A \oplus C(X)]$ (définition 2.7).

On appelle *champ de coproduits* sur A un $C(X)$-morphisme non-dégénéré

$$\delta : A \longrightarrow M\big(\mathcal{A} \otimes_{C(X)} A + A \otimes_{C(X)} \mathcal{A}, A \otimes_{C(X)} A\big)$$

tel que, pour tout $a \in A$ on ait dans $M(A \otimes_{C(X)} A \otimes_{C(X)} A)$:

$$(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \delta(a) = (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \delta(a).$$

On dira que le couple (A,δ) est une *$C(X)$-algèbre de Hopf* si δ est un champ de coproduits sur A. Si de plus, A est un champ continu, on dira que (A,δ) est un *champ continu* de C^*-algèbres de Hopf.

Enfin, la $C(X)$-algèbre de Hopf (A,δ) est dite *bisimplifiable* si les $C(X)$-modules engendrés par $\delta(A)(1 \otimes A)$ et par $\delta(A)(A \otimes 1)$ sont tous deux denses dans $A \otimes_{C(X)} A$.

REMARQUES.

1) Si A admet une $C(X)$-représentation fidèle dans $\mathcal{E}$, $A \oplus C(X)$ et donc $\mathcal{A}$ admettent des $C(X)$-représentations fidèles dans $\mathcal{E} \oplus C(X)$.

2) On s'intéresse dans ce chapitre à des champs de représentations régulières d'une famille $\{(A_x,\delta_x)\}$ de C^*-algèbres de Hopf (*cf.* [43, § 6], [4, Introduction]) et les $C(X)$-algèbres A que nous construisons ici sont donc naturellement munies d'un champ de coproduits à valeurs dans $M(A \otimes_{C(X)} A)$. On pourrait également considérer des champs de coproduits à valeurs dans $M(A \overset{M}{\otimes}_{C(X)} A)$ (en particulier pour des champs de C^*-algèbres de Hopf pleines) mais il n'est *a priori* pas possible d'envisager un champ de coproduits à valeurs dans $M(A \overset{m}{\otimes}_{C(X)} A)$ car le produit tensoriel $\overset{m}{\otimes}_{C(X)}$ n'est pas associatif (*cf.* 3.3.3).

Si $\mathcal{E}$ est un $C(X)$-module hilbertien, on définit la *volte* $\Sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ par la formule

$$\Sigma(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi$$

pour $\xi, \eta \in \mathcal{E}$. Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$, on désignera par T_{12}, T_{13} et T_{23} les opérateurs de $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ définis par :

$$T_{12} = T \otimes 1, \quad T_{13} = (\Sigma \otimes 1)(1 \otimes T)(\Sigma \otimes 1), \quad T_{23} = 1 \otimes T.$$

4.1. Définition des champs continus d'unitaires multiplicatifs.

Considérons le $C(X)$-module de Banach $\mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathcal{E}))$ des applications $C(X)$-linéaires continues sur $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ à valeurs dans $C(X)$ muni de la norme d'espace d'opérateurs ; définissons pour ξ et η dans $\mathcal{E}$ l'application $C(X)$-linéaire $\omega_{\xi,\eta} \in \mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathcal{E}))$ par $\omega_{\xi,\eta}(T) = \langle \xi, T\eta \rangle$ et notons $F_*(\mathcal{L}(\mathcal{E}))$ le $C(X)$-module engendré. Donnons-nous :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_{\xi_i,\eta_i} \in F_*\big(\mathcal{L}(\mathcal{E})\big).$$

Si H est un espace de Hilbert et $\mathcal{E} = H \otimes_{\mathbb{C}} C(X)$, alors ω s'identifie à une application continue de X dans $L(H)_*$; si $\mathcal{E}$ est quelconque et $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ est le sous-$C(X)$-module de type fini engendré par les ξ_i et les η_i, comme $\|e_x \circ \omega\| = \|e_x \circ \omega_{|\mathcal{K}(\mathcal{E}')}\|$, l'application $x \mapsto \|e_x \circ \omega\|$ est donc encore continue par le théorème de stabilisation de Kasparov.

Définition 4.2. — Étant donné un $C(X)$-module hilbertien, on munit la famille des $L(\mathcal{E}_x)_*$, $x \in X$ de la *structure de champ continu* d'espaces de Banach définie par l'adhérence normique $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathcal{E}))$ du $C(X)$-module $F_*(\mathcal{L}(\mathcal{E}))$.

Lemme 4.3. — *L'espace de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ est un $\mathcal{L}(\mathcal{E}), \mathcal{L}(\mathcal{E})$-bimodule pour les actions $(\omega a)(T) = \omega(aT)$ et $(a\omega)(T) = \omega(Ta)$, avec $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ et $a \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.*

Démonstration. — Si $\alpha, \beta \in \mathcal{E}$ et $a \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, $(\omega_{\alpha,\beta})a = \omega_{a^*\alpha,\beta} \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$, ce qui implique par linéarité que $\omega a \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ pour ω dans $F_*(\mathcal{L}(\mathcal{E}))$ et l'on a alors dans $\mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathcal{E}))$ l'inégalité $\|\omega a\| \leq \|a\| \cdot \|\omega\|$, d'où la première partie du lemme par densité.

Définissons pour $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ l'élément ω^* de $\mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathcal{E}))$ de même norme par la formule $\omega^*(T) = \overline{\omega(T^*)}$. Comme pour $\alpha, \beta \in \mathcal{E}$, $\omega^*_{\alpha,\beta} = \omega_{\beta,\alpha}$ appartient à $F_*(\mathcal{L}(\mathcal{E}))$, on a $\omega^* \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ quel que soit $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$. Il suffit alors pour conclure de remarquer que l'on a $a\omega = [\omega^* a^*]^*$ quel que soit $a \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$. $\square$

LEMME 4.4. — *Si ω_1 et ω_2 sont dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$, $\omega_1 \otimes \omega_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})_*$.*

Démonstration. — Si x est un point de X, on a l'inégalité

$$\big|(\omega_1 \otimes \omega_2)(T)(x)\big| \leq \|\omega_1\| \cdot \|\omega_2\| \cdot \|T\|$$

pour $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ et il est par ailleurs clair que si ω_1 et ω_2 sont dans $F_*(\mathcal{L}(\mathcal{E}))$, $\omega_1 \otimes \omega_2$ est dans $F_*(\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E}))$. $\square$

LEMME 4.5. — *Si $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})_*$, l'application qui à $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ associe $\omega(T \otimes 1)$ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$.*

Démonstration. — Si $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})_*$, l'application $T \mapsto \omega(T \otimes 1)$ est par définition un élément de $\mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathcal{E}))$ de norme inférieure à $\|\omega\|$. Il reste donc à voir qu'elle est dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ si ω appartient à un sous-ensemble de $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})_*$ dont les combinaisons linéaires sont denses dans $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})_*$. Mais si $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ sont dans $\mathcal{E}$ et $\omega = \omega_{\xi_1 \otimes \xi_2, \eta_1 \otimes \eta_2}$, alors :

$$\omega(T \otimes 1) = \langle \xi_2, \eta_2 \rangle \langle \xi_1, T\eta_1 \rangle = \omega_{\xi_1, \langle \xi_2, \eta_2 \rangle \eta_1}(T). \quad \square$$

Définissons pour ξ dans $\mathcal{E}$ les opérateurs θ_ξ et θ'_ξ dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ par les formules

$$\theta_\xi(\eta) = \xi \otimes \eta, \quad \theta'_\xi(\eta) = \eta \otimes \xi.$$

Si T est dans $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ et $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_{\xi_i, \zeta_i}$, on peut former dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ les opérateurs :

$$(\omega \otimes \mathrm{id})(T) = \sum_i (\theta_{\xi_i})^* T \theta_{\zeta_i} \quad \text{et} \quad (\mathrm{id} \otimes \omega)(T) = \sum_i (\theta'_{\xi_i})^* T \theta'_{\zeta_i}.$$

Comme $\|(\omega \otimes \mathrm{id})(T)\|$ et $\|(\mathrm{id} \otimes \omega)(T)\|$ sont bornés par $\|\omega\| \cdot \|T\|$, on peut étendre ces définitions à tout $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$.

DÉFINITION 4.6. — Étant donné un $C(X)$-module hilbertien $\mathcal{E}$, nous dirons que l'unitaire $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ est un *champ continu d'unitaires multiplicatifs* (ou simplement que V est *multiplicatif*) s'il satisfait à la relation pentagonale :

$$V_{12} V_{13} V_{23} = V_{23} V_{12}.$$

Définissons pour $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ les opérateurs

$$L(\omega) = (\omega \otimes \mathrm{id})(V) \quad \text{et} \quad \rho(\omega) = (\mathrm{id} \otimes \omega)(V)\,;$$

notons :

- $A(V) = \{L(\omega)\,;\ \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*\}$ et $\widehat{A}(V) = \{\rho(\omega)\,;\ \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*\},$;
- S et $\widehat{S}$ leurs adhérences dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, L_x et
- ρ_x leurs représentations canoniques dans $\mathcal{E}_x$.

LEMME 4.7 (*cf.* [4, § 1.4]). — *Les $C(X)$-modules $A(V)$ et $\widehat{A}(V)$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. Les $C(X)$-modules $A(V)\mathcal{E}$ et $\widehat{A}(V)\mathcal{E}$ sont denses dans $\mathcal{E}$.*

Démonstration. — Si ω_1 et ω_2 sont dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$, on a

$$\begin{aligned} L(\omega_1)L(\omega_2) &= \big(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \mathrm{id}\big)\big(V_{13}V_{23}\big) \\ &= \big(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \mathrm{id}\big)\big(V_{12}{}^*V_{23}V_{12}\big) = L(\omega) \end{aligned}$$

où $\omega(T) = (\omega_1 \otimes \omega_2)\,(V^*(1 \otimes T)V)$.

Mais $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})_*$ est un $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$, $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$-bimodule (Lemme 4.3), ce qui implique par le Lemme 4.5 que ω appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ et donc $L(\omega)$ appartient à $A(V)$.

De même, le champ de forme $\psi(T) = (\omega_1 \otimes \omega_2)\,(V(T \otimes 1)V^*)$ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ et il vérifie $\rho(\omega_1)\rho(\omega_2) = \rho(\psi)$.

Soient ξ, η dans $\mathcal{E}$ et $x \in X$; comme $\big[V^*(\xi \otimes \eta)\big]_x \neq 0$, il existe $\alpha, \beta \in \mathcal{E}$ tels que $\langle \xi \otimes \eta, V\alpha \otimes \beta\rangle(x) \neq 0$. Donc $L_x(\omega_{\xi,\alpha})\beta_x$ n'est pas orthogonal à η_x et $\rho_x(\omega_{\eta,\beta})\alpha_x$ n'est pas orthogonal à η_x ; par conséquent, les espaces $A(V_x)\mathcal{E}_x$ et $\widehat{A}(V_x)\mathcal{E}_x$ sont denses dans $\mathcal{E}_x$. Le Lemme 1.13 permet de conclure. □

COROLLAIRE 4.8. — *Si $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ est un unitaire multiplicatif, les $C(X)$-modules $A(V)\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ et $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*A(V)$ (resp. $\widehat{A}(V)\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ et $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*\widehat{A}(V)$) sont tous les deux denses dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$.*

Démonstration. — D'après le Lemme 4.7, $A(V)\mathcal{E}$ et $A(V)^*\mathcal{E} = \widehat{A}(\Sigma V^*\Sigma)\mathcal{E}$ sont tous deux denses dans $\mathcal{E}$. Il en résulte que

$$A(V)F_*\big(\mathcal{L}(\mathcal{E})\big) \subset A(V)\mathcal{L}(\mathcal{E})_* \quad \text{et} \quad F_*\big(\mathcal{L}(\mathcal{E})\big)A(V) \subset \mathcal{L}(\mathcal{E})_*A(V)$$

sont denses dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$.

Si $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ et $a, b \in A(\Sigma V^*\Sigma) = \widehat{A}(V)^*$, on a $[a\omega b]^* = b^*\omega a^*$, d'où la densité des $C(X)$-modules $\widehat{A}(V)\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ et $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*\widehat{A}(V)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$. □

4.2. La régularité.

DÉFINITION 4.9. — Étant donné un champ continu d'unitaires multiplicatif $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$, on définit le $C(X)$-*module* $\mathcal{C}(V)$ engendré par les $(\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma V)$ pour $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$.

PROPOSITION 4.10 (*cf.* [4, § 3.2]). — *$\mathcal{C}(V)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.*

Démonstration. — Si ω_1 et ω_2 sont dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$, alors

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{id} \otimes \omega_1\big)(\Sigma V)\big(\mathrm{id} \otimes \omega_2\big)(\Sigma V) &= \big(\mathrm{id} \otimes \omega_1 \otimes \omega_2\big)\big(\Sigma_{13}V_{13}\Sigma_{12}V_{12}\big) \\ &= \big(\mathrm{id} \otimes \psi\big)(\Sigma V) \end{aligned}$$

où le champ ψ défini par $\psi(T) = (\omega_1 \otimes \omega_2)(V\Sigma(1 \otimes T)V)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ d'après les Lemmes 4.3 et 4.5. $\square$

PROPOSITION 4.11. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *l'algèbre $\mathcal{C}(V)$ est une sous-algèbre nnormiquement dense dans l'algèbre $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ des opérateurs compacts;*

b) *l'adhérence du $C(X)$-module engendré par*

$$\{(\alpha \otimes 1)V(1 \otimes \beta)\ ;\ \alpha, \beta \in \mathcal{K}(\mathcal{E})\}$$

dans $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ est $\mathcal{K}(\mathcal{E}) \otimes_{C(X)} \mathcal{K}(\mathcal{E})$.

On dira alors que V est un unitaire multiplicatif régulier.

Démonstration. — Si ξ, ξ', η, η' sont dans $\mathcal{E}$ et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$, on a :

$$(1 \otimes \theta_{\xi,\xi'})T(1 \otimes \theta_{\eta,\eta'}) = (\mathrm{id} \otimes \omega_{\xi',\eta})(T) \otimes \theta_{\xi,\eta'}.$$

Comme b) est équivalent à dire que l'adhérence du $C(X)$-module engendré par les $\sum(\alpha \otimes 1)V(1 \otimes \beta)$, pour $\alpha, \beta \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ est $\mathcal{K}(\mathcal{E}) \otimes_{C(X)} \mathcal{K}(\mathcal{E})$, il suffit de remarquer que

$$\Sigma(\theta_{\xi,\xi'} \otimes 1)V(1 \otimes \theta_{\eta,\eta'}) = (1 \otimes \theta_{\xi,\xi'})\Sigma V(1 \otimes \theta_{\eta,\eta'}). \quad \square$$

PROPOSITION 4.12 (*cf.* [4, prop. 3.5]). — *Si $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ est un unitaire multiplicatif régulier, les algèbres S et $\widehat{S}$ sont des $C(X)$-algèbres stellaires.*

Démonstration. — On montre comme dans la Proposition 4.3.5 que S est le $C(X)$-module fermé engendrée par les

$$(\omega \otimes \mathrm{id})\big(V^*((\mathrm{id} \otimes \omega')(\Sigma V) \otimes 1)V\big), \quad \omega, \omega' \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*.$$

Il résulte alors de la Proposition 4.11 que S est auto-adjointe. On en déduit $\widehat{S} = S(\Sigma V^* \Sigma)^*$ est une $C(X)$-algèbre car $\Sigma V^* \Sigma$ est régulier. $\square$

PROPOSITION 4.13. — *Si $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ est un unitaire multiplicatif régulier, on a $S\mathcal{K}(\mathcal{E}) = \mathcal{K}(\mathcal{E})S = \widehat{S}\mathcal{K}(\mathcal{E}) = \mathcal{K}(\mathcal{E})\widehat{S} = \mathcal{K}(\mathcal{E})$.*

Démonstration. — Comme S et $\widehat{S}$ sont des C^*-algèbres et $S\mathcal{E} = \widehat{S}\mathcal{E} = \mathcal{E}$ (Lemme 4.7), la proposition résulte du Lemme 1.8. $\square$

PROPOSITION 4.14 (*cf.* [4, th. 3.8]). — *Soit $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ un unitaire multiplicatif régulier, S et $\widehat{S}$ les $C(X)$-algèbres stellaires associées.*

Munie du champ de coproduits $\delta : S \to M(S \otimes_{C(X)} S)$ défini par $\delta(a) = V(a \otimes 1)V^*$, la $C(X)$-algèbre stellaire réduite S de V est une

$C(X)$-algèbre de Hopf bisimplifiable. Munie du champ de coproduits $\widehat{\delta}$ donné par $\widehat{\delta}(b) = V^*(1 \otimes b)V$, la $C(X)$-algèbre stellaire réduite duale $\widehat{S}$ de V est une $C(X)$-algèbre de Hopf bisimplifiable.

De plus, V est un multiplicateur de $\widehat{S} \otimes_{C(X)} S$.

Démonstration. — En adaptant les démonstrations de 4.3 grâce à la Proposition 4.13, on montre que $\delta(S)(1 \otimes S)$ et $\delta(S)(S \otimes 1)$ engendrent des sous-$C(X)$-modules denses de $S \otimes_{C(X)} S$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$.

Soit alors $\mathcal{S}$ la $C(X)$-algèbre stellaire engendrée par S et $u[C(X)]$ dans $M[S \oplus C(X)]$; notons $1_{\mathcal{S}}$ l'unité de $\mathcal{S}$ et 1_S celle de $M(S)$. Comme $\delta(S)$ est inclus dans $M(S \otimes_{C(X)} S)$, on a $\delta(a) = \delta(a)(1_S \otimes 1_S)$ pour tout $a \in S$. Il s'en suit que $\delta(S)(1_{\mathcal{S}} \otimes S) = \delta(S)(1_S \otimes S)$ et de même $\delta(S)(S \otimes 1_{\mathcal{S}})$ engendrent des sous-$C(X)$-modules ddenses de $S \otimes_{C(X)} S$.

On en déduit les mêmes résultats pour $\widehat{S}$ en remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$.

Enfin, on montre comme dans 4.3 que V_{12}, V_{23} et donc V_{13} sont des multiplicateurs de $\widehat{S} \otimes_{C(X)} \mathcal{K}(\mathcal{E}) \otimes_{C(X)} S$. $\square$

REMARQUE. — Je n'ai pas trouvé de champ continu d'unitaires multiplicatifs V dont les fibres V_x sont régulières qui ne soit pas régulier. En fait, la véritable question est de savoir si l'on n'a pas toujours $\mathcal{K}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{C}(V)$.

DÉFINITION 4.15. — Si l'unitaire multiplicatif $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ est tel que les $C(X)$-modules engendrés par les $(\omega \otimes \mathrm{id})(\Sigma V)$ et par les $(\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma V)$ pour $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ soient tous deux des sous-$C(X)$-modules denses de $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, on dira que V est *birégulier.*

4.3. L'irréductibilité.

Pour pouvoir étendre des théorèmes de dualité de Takesaki aux champs continus d'unitaires multiplicatifs, on définit la notion suivante :

DÉFINITION 4.16. — Un unitaire multiplicatif $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ sera dit *irréductible* si il existe un unitaire $U \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ tel que :

a) $U^2 = 1$, $(\Sigma(1 \otimes U)V)^3 = 1$,

b) les unitaires $\widehat{V} = \Sigma(U \otimes 1)V(U \otimes 1)\Sigma$ et $\widetilde{V} = (U \otimes U)\widehat{V}(U \otimes U)$ sont multiplicatifs.

Si de plus V est birégulier, on dira que $(\mathcal{E}, V, U)$ forme un *système de Kac.*

REMARQUE. — La condition $(\Sigma(1 \otimes U)V)^3 = 1$ est équivalente à l'égalité $\widehat{V} V \widetilde{V} = (U \otimes 1)\Sigma$.

Notons L (resp. ρ) la $C(X)$-représentation identité de S (resp. $\widehat{S}$) dans $\mathcal{E}$. On a alors :

PROPOSITION 4.17. — *Si $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ est un unitaire multiplicatif régulier irréductible, l'adhérence normique dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ du $C(X)$-module engendré par $L(S)\rho(\widehat{S})$ est $\mathcal{K}(\mathcal{E})$.*

Démonstration. — Reprenons la démonstration de la Proposition 4.6.3. L'adhérence dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ du $C(X)$-module engendré par les $(\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma \widetilde{V}^*)$ pour $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ est $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ car V est régulier. Il en va de même pour le $C(X)$-module engendré par $\{(\mathrm{id} \otimes \omega)((U \otimes 1)\Sigma \widetilde{V}^*)\,;\ \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*\}$ et par conséquent pour celui engendré par $\{(\mathrm{id} \otimes \omega)(\widehat{V}V)\,;\ \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*\}$. Comme la représentation ρ dans $\mathcal{E}$ est non-dégénérée, l'adhérence de $\{(\mathrm{id} \otimes \omega)(\widehat{V}V)b\,;\ \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*,\ b \in \widehat{S}\}$ est donc un sous-$C(X)$-module dense de $\mathcal{K}(\mathcal{E})$.

Comme V est un multiplicateur de $\widehat{S} \otimes_{C(X)} \mathcal{K}(\mathcal{E})$, l'adhérence du $C(X)$-module considéré est celle de $\{(\mathrm{id} \otimes \omega)(\widehat{V})b\,;\ \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*,\ b \in \widehat{S}\}$. De plus, $(\mathrm{id} \otimes \omega)(\widehat{V}) = L(U\omega U)$, ce qui permet de conclure. □

PROPOSITION 4.18 (*cf.* [4, déf. 6.5]). — *Soit $(\mathcal{E}, V, U)$ un système de Kac. On a alors :*

a) *$(\mathcal{E}, \Sigma V^*\Sigma, U)$ et $(\mathcal{E}, \widehat{V}, U)$ sont des systèmes de Kac;*

b) *les unitaires V_{12} et $\widetilde{V}_{23}$ commutent;*

c) *les unitaires V_{23} et $\widehat{V}_{12}$ commutent.*

Démonstration. — L'unitaire V est birégulier si et seulement si V et $\widehat{V}$ sont réguliers, ce qui implique le a) car si l'on pose $W = \Sigma V^*\Sigma$, on a $\widehat{W} = \Sigma \widetilde{V}^*\Sigma$ et $\widetilde{W} = \Sigma \widehat{V}^*\Sigma$.

Les assertions b) et c) résultent quant-à-elles de la définition 4.6.5 et de la remarque suivante : deux opérateurs a et b de $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ commutent si et seulement si a_x et b_x commutent quel que soit $x \in X$. □

DÉFINITION 4.19. — Soit $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ un unitaire multiplicatif régulier irréductible. Pour $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$, on pose $\lambda(\omega) = (\omega \otimes \mathrm{id})(\widehat{V})$ et $R(\omega) = (\mathrm{id} \otimes \omega)(\widetilde{V})$.

PROPOSITION 4.20 (*cf.* [4, prop. 6.8]). — *Soit $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ un unitaire multiplicatif régulier irréductible. On a :*

a) *$\lambda(\omega) = U\rho(\omega)U$ et $R(\omega) = UL(\omega)U$;*

b) *$[\rho(\omega), \lambda(\psi)] = 0$ et $[L(\omega), R(\psi)] = 0$ pour tous $\omega, \psi \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$.*

Démonsration.

a) On a $\lambda(\omega) = (\mathrm{id} \otimes \omega)((U \otimes 1)V(U \otimes 1)) = U\rho(\omega)U$ et de même $R(\omega) = UL(\omega)U$.

L'assertion b) résulte de la Proposition 4.18. □

5. Le cas moyennable

5.1. Représentations d'un unitaire multiplicatif.

DÉFINITION 5.1 (*cf.* [4, § A.1]). — Soit $V \in L(H \otimes H)$ un unitaire multiplicatif agissant sur le carré tensoriel d'un espace de Hilbert H. Une *représentation* de V dans l'espace de Hilbert K est un unitaire $X \in L(K \otimes H)$ tel que $X_{12}X_{13}V_{23} = V_{23}X_{12}$ (dans $L(K \otimes H \otimes H)$).

Par exemple, V est une représentation de V appelée *représentation régulière*; $1 \in L(\mathbb{C} \otimes H)$ est la *représentation triviale* de V. Si (X, K) et (X', K') sont deux représentations de V, $(X_{13}X'_{23}, K \otimes K')$ est une représentation dite *produit tensoriel* de (X, K) par (X', K').

Considérons l'algèbre $\widehat{A_p}(V)$ dont l'espace sous-jacent est $L(H)_*$ muni du produit $(\omega_1 * \omega_2)(T) = (\omega_1 \otimes \omega_2)(V \ (T \otimes 1) \ V^*)$. Alors toute représentation (X, K) induit une représentation ρ_X de $\widehat{A_p}(V)$ dans K en posant $\rho_X(\omega) = (\mathrm{id} \otimes \omega)(X)$; si de plus V est régulier, l'adhérence normique $\widehat{S}_X$ de $\rho_X(\widehat{A}(V))$ est une C^*-algèbre et X est un multiplicateur de $\widehat{S}_X \otimes S$. Posons

$$\|\omega\|_{\widehat{p}} = \sup\big\{ \|\rho_X(\omega)\| \ ; \ X \text{ représentation de } V \big\}$$

et appelons $\widehat{S}_p$ le *séparé complété* de $\widehat{A_p}(V)$ pour la semi-norme $\| \ \|_{\widehat{p}}$. Si V est régulier, $\widehat{S}_p$ est une C^*-algèbre dont les représentations correspondent exactement aux représentations de V.

Tous ces résultats sont démontrés dans l'appendice de [4].

5.2. Coactions d'une C^*-algèbre de Hopf.

Une *coaction* de la C^*-algèbre de Hopf S dans la C^*-algèbre A est un morphisme non-dégénéré $\delta_A : A \to M(\widetilde{A} \otimes S, A \otimes S)$ satisfaisant la condition d'associativité $(\delta_A \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_A = (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \delta_A$ (où $\widetilde{A}$ est la C^*-algèbre déduite de A par adjonction d'une unité).

Si A est munie d'une coaction de la C^*-algèbre de Hopf S associée à l'unitaire multiplicatif $V \in L(H \otimes H)$, une *représentation covariante* de (A, δ_A) est un couple (π, X) où π est une représentation de A et X est une représentation de V dans le même espace de Hilbert telle que quel que soit $a \in A$, on ait $(\pi \otimes \mathrm{id})\delta_A(a) = X(\pi(a) \otimes 1)X^*$.

PROPOSITION 5.2. — *Si la C^*-algèbre A est munie d'une coaction δ_A de la C^*-algèbre de Hopf (S, δ) associée à l'unitaire multiplicatif $V \in L(H \otimes H)$ et (π, X) est une représentation covariante de (A, δ_A) dans K, alors l'adhérence normique dans $L(K)$ de l'espace engendré par les pproduits $\pi(a)\rho_X(\omega)$, pour $a \in A$ et $\omega \in L(H)_*$, est une C^*-algèbre.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que pour $a \in A$ et $\omega \in L(H)_*$, le produit $\rho_X(\omega)\pi(a)$ est limite de sommes finies $\sum \pi(a_i)\rho_X(\omega_i)$. Or en écrivant $\omega = \omega' s$ avec $s \in S$, on a $\rho_X(\omega)\pi(a) = (\pi \otimes \omega')((1 \otimes s)\delta_A(a)X)$. Comme $\delta_A(a)$ appartient à $M(\widetilde{A} \otimes S, A \otimes S)$, $(1 \otimes s)\delta_A(a)$ est limite de sommes finies $\sum a_i \otimes s_i$ avec $a_i \in A$, $s_i \in S$; donc $\rho_X(\omega)\pi(a)$ est limite de $\sum \pi(a_i)\rho_X(\omega' s_i)$. $\square$

DÉFINITION 5.3. — Soient A une C^*-algèbre munie d'une coaction δ_A de la C^*-algèbre de Hopf S associée à l'unitaire multiplicatif régulier $V \in L(H \otimes H)$. Posons pour $\sum_i a_i \otimes \omega_i \in A \otimes_{\mathrm{alg}} L(H)_*$:

$$\Big\|\sum a_i \otimes \omega_i\Big\| = \sup\Big\{\Big\|\sum \pi(a_i)\rho_X(\omega_i)\Big\| \,;\; (\pi, X) \text{ représentation covariante de } (A, \delta_A)\Big\}.$$

Le séparé complété de $A \otimes_{\mathrm{alg}} L(H)_*$ pour cette semi-norme est une C^*-algèbre $A \rtimes_p \widehat{S}$ appelée *produit croisé plein* de A par la coaction δ_A de S.

Si π_L est la représentation de A dans le C^*-module $A \otimes H$ donnée par la formule $\pi_L = (\mathrm{id}_A \otimes L) \circ \delta_A$, alors (π_L, V_{23}) est une représentation covariante de (A, δ_A) et l'adhérence normique $A \rtimes_r \widehat{S}$ dans $\mathcal{L}_A(A \otimes H)$ de l'espace vectoriel engendré par

$$\big\{\pi_L(a)(1_A \otimes \rho(\omega))\,;\; a \in A,\; \omega \in L(H)_*\big\}$$

est une C^*-algèbre qu'on appelle *produit croisé réduit* de A par la coaction δ_A de S.

5.3. Unitaires multiplicatifs moyennables.

DÉFINITION 5.4. — Étant donné un unitaire multiplicatif $V \in L(H \otimes H)$, on définit sur $A(V)$ la *semi-norme*

$$\|L(\omega)\|_* = \inf\big\{\|\psi\|\,;\; \psi \in L(H)_* \text{ tel que } L(\psi) = L(\omega)\big\}.$$

REMARQUE. — On a $L(\omega) = L(\psi)$ si et seulement si les formes ω et ψ coïncident sur $\widehat{S}$; donc $\|L(\omega)\|_*$ est la norme de la forme ω restreinte à $\widehat{S}$.

PROPOSITION 5.5. — *Étant donné un unitaire multiplicatif régulier $V \in L(H \otimes H)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *la représentation triviale τ est faiblement contenue dans la représentation régulière, i.e.* $\ker(\rho) \subset \ker(\tau)$;

b) *la représentation régulière $\rho : \widehat{S}_p arrow \widehat{S}$ est isométrique*;

c) *il existe une famille filtrante* ξ_λ *de vecteurs unitaires de* H *telle que* $\|V\xi_\lambda \otimes \eta - \xi_\lambda \otimes \eta\|$ *converge vers* 0 *pour tout* $\eta \in H$;

d) *quelle que soit la forme normale positive* ω, *on a* $\|\rho(\omega)\| = \omega(1)$;

e) $A(V)$ *munie de la semi-norme* $\| \ \|_*$ *a une unité approchée à droite bornée.*

Un unitaire multiplicatif qui a ces propriétés sera dit moyennable.

REMARQUE. — Si l'unitaire multiplicatif régulier $\Sigma V^* \Sigma$ est moyennable, on dira que V est *comoyennable.*

Démonstration.

a) $\Rightarrow$ b). Soient X une représentation de V dans l'espace de Hilbert K et $\omega \in L(H)_*$. Si ξ et η sont des vecteurs unitaires de K, l'application $\psi : T \mapsto (\omega_{\xi,\eta} \otimes \omega)(X(1 \otimes T))$ est une forme normale sur $L(H)$, d'où $|\tau(\psi)| \leq \|\rho(\psi)\|$ par a), ce qui s'écrit :

$$\big\|(\omega_{\xi,\eta} \otimes \omega)(X)\big\| \leq \big\|(\omega_{\xi,\eta} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega)(X_{13}V_{23})\big\|.$$

Mais $X_{13}V_{23} = X_{12}{}^*V_{23}X_{12}$ et donc :

$$\big|\langle \xi, \rho_X(\omega)\eta\rangle\big| \leq \big\|(\omega_{\xi,\eta} \otimes \mathrm{id})\big(X^*(1 \otimes \rho(\omega))X\big)\big\| \leq \big\|\rho(\omega)\big\|.$$

b) $\Rightarrow$ c). Sous l'hypothèse b), la représentation triviale de $\widehat{S}_p$ est faiblement contenue dans la représentation régulière; elle induit donc un état pur sur $\rho(\widehat{S}\,)$. Par conséquent, il existe une famille filtrante de vecteurs unitaires $\xi_\lambda \in H$ tels que pour tout $\omega \in L(H)_*$,

$$\big|\langle \xi_\lambda, \rho(\omega)\xi_\lambda\rangle - \omega(1)\big| \longrightarrow 0.$$

En particulier, pour $\omega = \omega_{\eta,\eta}$ où η est un vecteur de H,

$$\big\langle \xi_\lambda \otimes \eta, V(\xi_\lambda \otimes \eta) - \xi_\lambda \otimes \eta\big\rangle$$

tend vers 0; il en résulte que $\|V(\xi_\lambda \otimes \eta) - \xi_\lambda \otimes \eta\|^2$ admet une limite nulle pour tout $\eta \in H$.

c) $\Rightarrow$ d). Si $\omega \in L(H)_*$ est positif, $\|\rho(\omega)\| \leq \|\omega\| = \omega(1)$ et par ailleurs $\|\rho(\omega)\|$ est un majorant de la famille filtrante des $\langle \xi_\lambda, \rho(\omega)\xi_\lambda\rangle$ qui converge vers $\omega(1)$.

d) $\Rightarrow$ e). Si $\omega \in L(H)_*$ est positif et $\varepsilon > 0$, il existe des vecteurs unitaires ξ et η dans H tels que $|\omega(1) - \langle \xi, \rho(\omega)\eta\rangle| < \varepsilon$. Considérons $y = L(\omega_{\xi,\eta}) \in A(V)$: il vérifie $\|y\|_* \leq 1$ et pour tout $a \in A(V)$,

$$\begin{aligned} \big|\omega\big[a(1-y)\big]\big|^2 &\leq \omega(aa^*)\ \omega\big(|1-y|^2\big) \\ &\leq \|a\|^2\omega(1)\cdot 2\big|\omega(1-y)\big| \\ &< 2\varepsilon \cdot \|a\|_*^2\,\omega(1). \end{aligned}$$

Donnons-nous une partie finie $F = \{a_1, \dots a_n\}$ de la boule unité de $A(V)$. Si $\omega \in [A(V)^n]^*$ est de la forme $\sum \omega_i \circ \pi_i$ où les π_i sont les applications coordonnées et les ω_i sont des restrictions de formes normales positives sur $L(H)$, il existe un élément $y \in A(V)$ vérifiant $\|y\|_* \leq 1$ et

$$\Big|\Big(\sum \omega_i\Big)(1-y)\Big| < \varepsilon\Big[2\sum \omega_i(1)\Big]^{-1},$$

ce qui implique $|\,\omega_i[a_i(1-y)]\,| < \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ quel que soit $1 \leq i \leq n$.

Si C est l'image (convexe) de la boule unité de $A(V)$ dans $A(V)^n$ par l'application $y \mapsto (a_i(1-y))_{1 \leq i \leq n}$, comme les combinaisons linéaires de formes linéaires sur $A(V)^n$ du type précédent sont fortement denses dans $[A(V)^n]^*$, le point 0 est faiblement adhérent et donc normiquement adhérent à C par le théorème de séparation de Hahn-Banach. En particulier, si ε est strictement positif, il existe $y_{F,\varepsilon}$ dans $A(V)$ tel que $\|y_{F,\varepsilon}\|_* \leq 1$ et $\|a(1-y_{F,\varepsilon})\|_* < \varepsilon$ quel que soit $a \in F$.

e) $\Rightarrow$ a) Soit $L(\omega_\lambda)$ une unité approchée à droite bornée par M de $A(V)$. Comme pour $\omega, \psi \in L(H)_*$,

$$\big|\psi(L(\omega))\big| = \big|\omega(\rho(\psi))\big| \leq \big\|L(\omega)\big\|_* \cdot \big\|\rho(\psi)\big\| \leq \big\|L(\omega)\big\|_* \cdot \|\psi\|$$

et comme la représentation L de $A(V)$ est non-dégénérée, $L(\omega_\lambda)$ converge fortement vers 1 ; donc si ψ est une forme normale sur $L(H)$, on a

$$M\big\|\rho(\psi)\big\| \geq \big|\omega_\lambda(\rho(\psi))\big| = \big|\psi(L(\omega_\lambda))\big|,$$

d'où par passage à la limite, $M\|\rho(\psi)\| \geq |\psi(1)|$. $\square$

Remarque. — Soient $(H, \mathcal{X}, u)$ et $(K, \mathcal{Y}, v)$ deux systèmes de Kac et supposons qu'ils forment avec l'unitaire $\mathcal{Z} \in L(H \otimes K)$ un couple assorti de systèmes de Kac (*cf.* [4, déf. 8.13]). Si les deux unitaires $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont comoyennables, alors le $\mathcal{Z}$-produit tensoriel $V = (\mathcal{Z}_{12}^* \mathcal{X}_{13} \mathcal{Z}_{12}) \mathcal{Y}_{24}$ est aussi comoyennable.

Fixons en effet deux familles filtrantes de vecteurs unitaires (e_i) et (f_j) vérifiant l'assertion c) de la Proposition 5.5 pour les unitaires multiplicatifs $s_H \mathcal{X}^* s_H$ et $s_K \mathcal{Y}^* s_K$ où $s_H \in L(H \otimes H)$ et $s_K \in L(K \otimes K)$ sont les voltes de $H \otimes H$ et de $K \otimes K$; si l'on pose $\zeta_{i,j} = e_i \otimes f_j \in H \otimes K$, alors $\|V(\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \zeta_{i,j}) - (\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \zeta_{i,j})\|$ converge vers 0 quels que soient les vecteurs $\eta_1 \in H$ et $\eta_2 \in K$.

Proposition 5.6. — *Si V est un unitaire multiplicatif régulier moyennable et si δ_A est une coaction de l'algèbre de Hopf S associée à V dans la C^*-algèbre A, alors les produits croisés $A \rtimes_p \widehat{S}$ et $A \rtimes_r \widehat{S}$ coïncident.*

En particulier, l'algèbre $\widehat{S}$ est nucléaire.

Démonstration. — Fixons une famille filtrante de vecteurs unitaires ξ_λ vérifiant l'assertion c) de la Proposition 5.5 et soit (π, X) une représentation covariante de (A, δ). Si $a \in A$ et $\omega \in L(H)_*$, on a l'égalité :

$$(\pi \otimes L) \circ \delta_A(a)(1 \otimes \rho(\omega^*)^*) = X(\pi(a) \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega)\big({V_{23}}^* {X_{13}}^* {X_{12}}^*\big).$$

On en déduit que :

$$\Big\|\sum \pi_L(a_i)(1 \otimes \rho(\omega_i^*)^*)\Big\| \geq \Big\|\sum \pi(a_i)\big(\mathrm{id} \otimes \omega_{\xi_\lambda, \xi_\lambda} \otimes \omega_i\big)\big({V_{23}}^* {X_{13}}^*\big)\Big\|$$

et donc $\| \sum \pi_L(a_i)(1 \otimes \rho(\omega_i^*)^*)\| \geq \| \sum \pi(a_i)\rho_X(\omega_i^*)^*\|$, ce qui implique que la représentation (π, X) est faiblement contenue dans (π_L, V_{23}). $\square$

5.4. Champs continus d'unitaires multiplicatifs moyennables.

PROPOSITION 5.7. — *Soient $\mathcal{E}$ un $C(X)$-module hilbertien et V dans $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ un unitaire multiplicatif régulier. Si x appartient à X, alors $\widehat{S}^x$ est un quotient de $\rho_x(\widehat{S}\,)_p$.*

Démonstration. — Soient p_x la représentation canonique de $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{E}_x$ et π une représentation de $\widehat{S}$ dans l'espace de Hilbert K nulle sur $C_x(X) \subset M(\widehat{S})$. Comme $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ est nucléaire, on peut définir (Corollaire 3.22)

$$\pi \otimes p_x : \widehat{S} \otimes_{C(X)} \mathcal{K}(\mathcal{E}) \longrightarrow L(K \otimes \mathcal{E}_x).$$

Si l'on pose $X = (\pi \otimes p_x)(V)$, X est une représentation de V_x car :

$$\begin{aligned} X_{12} X_{13} (V_x)_{23} &= \big(\pi \otimes p_x \otimes p_x\big)\big(V_{12} V_{13} V_{23}\big) \\ &= \big(\pi \otimes p_x \otimes p_x\big)(V_{23} V_{12}) = (V_x)_{23} X_{12}. \end{aligned}$$

De plus, on a $\pi(\rho(\omega)) = (\mathrm{id} \otimes \omega_x)(X)$ quel que soit $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$. $\square$

THÉORÈME 5.8. — *Si $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ est un champ continu régulier d'unitaires multiplicatifs moyennables, la $C(X)$-représentation ρ de la $C(X)$-algèbre de Hopf $\widehat{S}$ associée à V est un champ de représentations fidèles.*

Démonstration. — Si x est dans X, $\rho_x(\widehat{S}\,)$ est un quotient de $\widehat{S}^x$ par construction. Comme V_x est moyennable, la Proposition 5.5 montre que $\widehat{S}^x$ est un quotient de $\rho_x(\widehat{S}\,)_p = \rho_x(\widehat{S}\,)$. Donc $\widehat{S}^x = \rho_x(\widehat{S}\,)$ pour tout $x \in X$, ce qui signifie que ρ est un champ de représentations fidèles de $\widehat{S}$ et donc $\widehat{S}$ est un champ continu de C^*-algèbres de Hopf (Théorème 3.3). $\square$

REMARQUE. — Si V est un champ continu régulier d'unitaires multiplicatifs comoyennables, alors $\Sigma V^* \Sigma$ est un champ continu régulier d'unitaires multiplicatifs moyennables, de sorte que le Théorème 5.8 implique que la $C(X)$-représentation L de la $C(X)$-algèbre S associée à V est un champ de représentations fidèles.

DÉFINITION 5.9. — Étant donné un champ régulier d'unitaires multiplicatifs $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ et une $C(X)$-algèbre A admettant une $C(X)$-représentation fidèle, un *champ de coactions* δ^A de la $C(X)$-algèbre de Hopf (S, δ) associé à V dans la $C(X)$-algèbre A est un $C(X)$-morphisme non-dégénéré

$$\delta^A : A \to M\big(\mathcal{A} \otimes_{C(X)} S, A \otimes_{C(X)} S\big)$$

satisfaisant la condition de coassociativité $(\delta^A \otimes \mathrm{id}) \circ \delta^A = (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \delta^A$ (où $\mathcal{A}$ désigne la $C(X)$-algèbre unifère canonique associée à A dans la définition 2.7).

Si la $C(X)$-algèbre de Hopf (S, δ) associée à V est nucléaire et la $C(X)$-représentation L est un champ continu de représentations fidèles, $S \otimes_{C(X)} S$ est un champ continu de fibres $L_x(S) \otimes L_x(S)$ (Corollaire 3.26) et l'on peut considérer plus généralement une coaction δ^A de (S, δ) sur une $C(X)$-algèbre A à valeurs dans $M(A \overset{M}{\otimes}_{C(X)} S)$ car, d'après le Corollaire 3.17, on a :

$$(A \overset{M}{\otimes}_{C(X)} S)^x \otimes S^x = A^x \otimes (S \otimes_{C(X)} S)^x$$

On peut aussi construire la coaction $\delta_x^A : A^x \to M(A^x \otimes S^x)$ par composition pour tout $x \in X$.

COROLLAIRE 5.10 (*cf.* [40]). — *Si $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ est un champ continu régulier d'unitaires multiplicatifs comoyennables et si A est un champ continu de C^*-algèbres sur X muni d'un champ de coactions δ^A de la $C(X)$-algèbre de Hopf (S, δ) associée, alors le $C(X)$-module fermé $D \subset \mathcal{L}_A(A \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ engendré par les $\delta^A(a)(1_A \otimes \rho(\omega))$, pour $a \in A$ et $\omega \in L(\mathcal{E})_*$, définit un champ continu de C^*-algèbres sur X de fibres $A^x \rtimes \widehat{S}^x$.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que la même démonstration que celle de la Proposition 5.2 montre que D est une C^*-algèbre.

Définissons pour $x \in X$ la représentation θ_x de $\mathcal{L}_A(A \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ dans le A^x-module hilbertien $A^x \otimes_A (A \otimes_{C(X)} \mathcal{E}) = A^x \otimes \mathcal{E}_x$ et notons que $\theta_x(D) = A^x \rtimes_r \widehat{S}^x$. En outre, si $T \in D$, la fonction $x \mapsto \|\langle \xi, T^*T\xi \rangle^x\|$ est continue pour tout $\xi \in A \otimes_{C(X)} \mathcal{E}$ tel que $\|\xi\| \leq 1$ et leur sup $x \mapsto \|\theta_x(T)\|^2$ est donc semi-continu inférieurement. Par conséquent, il suffit de montrer que θ_x est une représentation fidèle de D^x pour conclure.

Fixons $x \in X$ et soit Θ une représentation de D^x. On définit alors la représentation $\mathcal{X} = (\Theta \otimes L_x)(V_{23})$ de V_x. La représentation $\Theta \circ \delta^A$ de A se factorise à travers une représentation π de la fibre A^x.

Pour tous $a \in A$ et $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$, on a $\Theta\left(\delta^A(a)[1 \otimes \rho(\omega)]\right) = \pi_x(a)\rho_{\mathcal{X}}(\omega_x)$ et $(\pi \otimes L_x)\delta_x^A(a^x) = \mathcal{X}\left(\pi(a^x) \otimes 1\right)\mathcal{X}^*$. Il s'en suit que Θ définit une représentation covariante de (A^x, δ_x^A) et donc que D^x est un quotient de $A^x \rtimes_p \widehat{S}^x$. Mais $A^x \rtimes_p \widehat{S}^x$ est isomorphe à $A^x \rtimes_r \widehat{S}^x$ (Proposition 5.6), ce qui entraîne que la représentation de D^x dans $A^x \otimes \mathcal{E}_x$ est fidèle. $\square$

5.5. Un contre-exemple.

PROPOSITION 5.11. — *Soient $\mathcal{E}$ un $C(X)$-module hilbertien et V appartenant à $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ un unitaire multiplicatif régulier.*

a) *L'ensemble F des points $x \in X$ tels que $\widehat{S}^x$ contienne la représentation triviale de $\rho_x(\widehat{S}\,)$ est fermé.*

b) *Si la $C(X)$-représentation ρ de $\widehat{S}$ est un champ de représentations fidèles, l'ensemble des points $x \in X$ tels que V_x soit moyennable est fermé.*

Démonstration.

a) Si ω est dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$, l'ensemble F_ω des $x \in X$ tels que

$$\left\|\rho(\omega)^x\right\| - \left|\omega_x(1)\right| \geq 0$$

est fermé, de sorte que leur intersection $F = \bigcap F_\omega$ est aussi fermée.

b) Il suffit de remarquer que dans ce cas, $\widehat{S}^x \simeq \rho_x(\widehat{S}\,)$ quel que soit x et d'appliquer l'assertion a) pour conclure. $\square$

L'hypothèse de moyennabilité est cruciale dans le Théorème 5.8 comme le montre l'exemple qui suit.

Soient Γ un groupe discret et (Γ_n) une suite décroissante de sous-groupes distingués dont l'intersection est réduite à $\{1\}$. On suppose que le groupe Γ n'est pas moyennable mais que le quotient Γ/Γ_n est moyennable pour $n \in \mathbb{N}$ (un exemple est le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ avec les sous-groupes $\mathrm{SL}_2(2^n\mathbb{Z})$). On note Θ_n le morphisme $\Gamma \to \Gamma/\Gamma_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et Θ_∞ le morphisme identité de Γ dans Γ.

Soit $\mathcal{E}$ le $C(\widetilde{\mathbb{N}})$-module hilbertien séparé complété du $C(\widetilde{\mathbb{N}})$-module $E = C_c(\Gamma \times \widetilde{\mathbb{N}})$ des fonctions continues sur $\Gamma \times \widetilde{\mathbb{N}}$ à support compact pour le produit scalaire à valeurs dans $C(\widetilde{\mathbb{N}})$ défini par :

$$\langle \xi, \eta \rangle(n) = \sum_{\substack{\gamma, \nu \in \Gamma \\ \Theta_n(\gamma^{-1}\nu)=1}} \bar{\xi}(\gamma, n)\eta(\nu, n), \qquad n \in \widetilde{\mathbb{N}}.$$

Remarquons que la fibre de $\mathcal{E}$ au-dessus de n est $\ell^2(\Gamma/\Gamma_n)$ pour tout $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$.

Sur le produit tensoriel algébrique $E \otimes_{C(\widetilde{\mathbb{N}})} E = C_c(\Gamma \times \Gamma \times \widetilde{\mathbb{N}})$ au-dessus de $C(\widetilde{\mathbb{N}})$, on définit l'opérateur $C(\widetilde{\mathbb{N}})$-linéaire V par la formule :

$$V(\xi \otimes \eta)(s, t, n) = \xi(st, n)\, \eta(t, n).$$

Si $1_{(\gamma,\nu,n)}$ désigne la fonction caractéristique du point $(\gamma,\nu,n) \in \Gamma\times\Gamma\times\widetilde{\mathbb{N}}$, on a $V1_{(\gamma,\nu,n)} = 1_{(\gamma\nu^{-1},\nu,n)}$, ce qui implique que $VE\otimes_{C(\widetilde{\mathbb{N}})} E = E\otimes_{C(\widetilde{\mathbb{N}})} E$.

Par conséquent, V induit sur $\mathcal{E}\otimes_{C(\widetilde{\mathbb{N}})}\mathcal{E}$ un opérateur $C(\widetilde{\mathbb{N}})$-linéaire isométrique et d'image dense, *i.e.* un unitaire de $\mathcal{L}(\mathcal{E}\otimes_{C(\widetilde{\mathbb{N}})}\mathcal{E})$ que l'on note encore V. Comme de plus chaque V_n vérifie la relation pentagonale, cet unitaire est multiplicatif.

En outre, la fonction caractéristique de l'unité de Γ vue dans $\mathcal{E}$ est un champ de vecteurs cofixes, ce qui implique la birégularité du champ continu d'unitaires multiplicatifs (Proposition 6.13).

Supposons que la $C(\widetilde{\mathbb{N}})$-algèbre de Hopf $\widehat{S}$ soit un champ continu de C^*-algèbres de Hopf de fibres $\rho_n(\widehat{S})$. Alors l'ensemble F des $n\in\widetilde{\mathbb{N}}$ tels que V_n soit moyennable est fermé (Proposition 5.11 *b)*), ce qui est absurde puisque $F=\mathbb{N}$.

6. Le cas compact

Les $C(X)$-modules hilbertiens considérés dans ce chapitre seront toujours dénombrablement engendrés et pleins.

6.1. Champs continus d'unitaires multiplicatifs de type compact.

Définition 6.1. — Étant donné un $C(X)$-module hilbertien $\mathcal{E}$ dénombrablement engendré et plein, un unitaire multiplicatif $V\in\mathcal{L}(\mathcal{E}\otimes_{C(X)}\mathcal{E})$ sera dit de *type compact* (resp. *discret*) si 1 appartient à S (resp. 1 appartient à $\widehat{S}$).

Rappelons que si $\xi\in\mathcal{E}$, les opérateurs θ_ξ et θ'_ξ de $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{E}\otimes_{C(X)}\mathcal{E})$ sont définis par les formules $\theta_\xi(\eta)=\xi\otimes\eta$ et $\theta'_\xi(\eta)=\eta\otimes\xi$ pour $\eta\in\mathcal{E}$.

Définition 6.2. — Étant donné un unitaire multiplicatif V appartenant à $\mathcal{L}(\mathcal{E}\otimes_{C(X)}\mathcal{E})$, un champ de vecteurs $\xi\in\mathcal{E}$ sera dit *fixe* (resp. *cofixe*) si il vérifie $V\theta_\xi=\theta_\xi$ (resp. $V\theta'_\xi=\theta'_\xi$). On notera $\mathcal{E}^f$ (resp. $\mathcal{E}^{cf}$) le sous-$C(X)$-module fermé des champs de vecteurs fixes (resp. cofixes).

Remarque. — Si il existe un champ de vecteurs unitaires fixe pour l'unitaire V, alors V est bien sûr de type compact, mais la réciproque n'est pas vraie : si L est un fibré en droites sur X non-trivial, l'unitaire multiplicatif de type compact $V=1_{C(X;L\otimes L)}$ agissant dans $\mathcal{E}\otimes_{C(X)}\mathcal{E}$ où $\mathcal{E}=C(X;L)$ ne peut pas admettre de champ de vecteurs unitaires fixe car le fibré L n'admet pas de section globale partout non-nulle.

Fixons une $C(X)$-algèbre de Hopf (A,δ) dont les fibres A^x sont toutes non-nulles et donnons-nous deux champs continus d'états ω et ψ sur A.

Considérons alors les constructions de Stinespring Kasparov $(\mathcal{E}_\omega, \pi_\omega, \xi_\omega)$ et $(\mathcal{E}_\psi, \pi_\psi, \xi_\psi)$ associées (Proposition 2.13) et définissons sur $A \otimes_{C(X)} A$ le champ continu d'états :

$$(\omega \otimes \psi)(\alpha) = \big\langle \xi_\omega \otimes \xi_\psi, (\pi_\omega \otimes \pi_\psi)(\alpha)\, \xi_\omega \otimes \xi_\psi \big\rangle, \quad \alpha \in A \otimes_{C(X)} A.$$

Écrivons $\xi_\omega = b\xi'$ où $\xi' \in \mathcal{E}_\omega$ et $b \in A$ (la $C(X)$-représentation π_ω est non dégénérée et donc $A\mathcal{E}_\omega = \mathcal{E}_\omega$). Il en résulte que la formule

$$a \longmapsto \big\langle \xi' \otimes \xi_\psi, (\pi_\omega \otimes \pi_\psi)\big((b^* \otimes 1)\delta(a)(b \otimes 1)\big)\, \xi' \otimes \xi_\psi \big\rangle$$

définit un champ continu d'états sur A que l'on notera $\omega * \psi$ (*cf.* [50, § 4]).

D'autre part, $(\pi_\omega \otimes \mathrm{id})$ définit une $C(X)$-représentation de $\mathcal{A} \otimes_{C(X)} \mathcal{A}$ dans le $\mathcal{A}$-modules hilbertiens $\mathcal{E}_\omega \otimes_{C(X)} \mathcal{A}$; si α est dans $\mathcal{A} \otimes_{C(X)} \mathcal{A}$, on peut donc écrire :

$$(\omega \otimes \mathrm{id})(\alpha) = \big\langle \xi_\omega \otimes 1, (\pi_\omega \otimes \mathrm{id})(\alpha)\, \xi_\omega \otimes 1 \big\rangle \in \mathcal{A}.$$

Pour $a \in A$, on pose :

$$\begin{aligned} a * \omega &= (\omega \circ \pi_\omega \otimes \mathrm{id})\delta(a) \\ &= \langle \xi' \otimes 1, (\pi_\omega \otimes \mathrm{id})\big((b^* \otimes 1)\delta(a)(b \otimes 1)\big)\, \xi' \otimes 1 \rangle \in A \subset \mathcal{A}. \end{aligned}$$

On définit de même $\omega * a = (\mathrm{id} \otimes \omega \circ \pi_\omega)\, \delta(a) \in A$.

Définition 6.3. — Un *champ continu de mesures de Haar* sur une $C(X)$-algèbre de Hopf unifère (A, δ) est un champ continu d'états φ vérifiant l'égalité $\varphi * a = a * \varphi = \varphi(a)1$ pour tout $a \in A$.

Proposition 6.4. — *Un unitaire multiplicatif $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ est de type compact si et seulement si le $C(X)$-module hilbertien $\mathcal{E}^f$ est plein.*

Démonstration. — Supposons que V soit de type compact et raisonnons par l'absurde. Si $\mathcal{E}^f$ n'est pas plein, il existe $x \in X$ tel que l'idéal $\langle \mathcal{E}^f, \mathcal{E}^f \rangle$ soit inclus dans l'idéal maximal $C_x(X)$. Mais $L_x(S)$ est séparable et unifère, d'où l'existence d'un vecteur unitaire fixe pour V_x (*cf.* [4, Prop. 1.10]) car $\mathcal{E}_x \neq 0$, ce qui est impossible d'après le Lemme 10.

Réciproquement, si le $C(X)$-module $\mathcal{E}^f$ est plein, il existe des champs de vecteurs fixes $\xi_1, \ldots, \xi_n$ tels que $1 = \sum \langle \xi_i, \xi_i \rangle$ dans $C(X)$ (Lemme 1.6), ce qui implique que $1 = \sum L(\omega_{\xi_i, \xi_i})$ est dans $A(V)$. □

Corollaire 6.5. — *Si $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ est un unitaire multiplicatif régulier de type compact, la $C(X)$-algèbre de Hopf S associée à V admet un champ continu de mesures de Haar φ qui est fidèle sur S, i.e. tel que si un élément positif $a \in S_+$ vérifie $\varphi(a) = 0$, alors $a = 0$.*

Démonstration. — Conservons les notations de la proposition précédente et posons $\varphi(a) = \sum\langle\xi_i, L(a)\xi_i\rangle$ pour $a \in S$. Ce champ continu de mesures de Haar est bien fidèle sur S puisque chaque φ_x se factorise à travers un état fidèle sur la C^*-algèbre de Hopf séparable $L_x(S)$ (*cf.* [4, lemme 3.11.2]). $\square$

REMARQUE. — Si x appartient à X, l'état φ_x est donc fidèle sur S^x si et seulement si la représentation L_x de S^x est fidèle.

6.2. $C(X)$-algèbres de Woronowicz.

Si (A, δ) est un pseudogroupe compact matriciel séparable (*cf.* [50]) et φ est sa mesure de Haar fidèle, l'opérateur $V_\varphi \in L(H_\varphi \otimes H_\varphi)$ défini par

$$V_\varphi\big(\Lambda(a) \otimes \Lambda(b)\big) = (\Lambda \otimes \Lambda)\big(\delta(a)\, 1 \otimes b\big), \quad a, b \in A$$

est un unitaire multiplicatif régulier irréductible de type compact (*cf.* [4]).

Réciproquement, si H est un espace de Hilbert séparable et si V appartenant à $L(H \otimes H)$ est un unitaire multiplicatif régulier de type compact, la C^*-algèbre S associée est une limite inductive de pseudogroupes compacts matriciels [4, th. 4.2] où ces limites inductives sont appelées *C^*-algèbres de Woronowicz*).

Soit (A, δ) un champ continu séparable unifère de C^*-algèbres de Hopf. Si x appartient à X, comme $A^x \otimes_{\min} A^x$ est un quotient de $(A \otimes_{C(X)} A)^x$ (Corollaire 3.22), on peut définir par composition le morphisme non-dégénéré (mais pas forcement injectif) et co-associatif (Proposition 3.21) $\delta_x : A^x \to A^x \otimes_{\min} A^x$.

DÉFINITION 6.6. — Un *champ continu de C^*-algèbres de Woronowicz* est un champ continu unifère de C^*-algèbres de Hopf (A, δ) qui est bisimplifiable et dont les fibres sont toutes non nulles.

REMARQUE. — Si (A, δ) est un champ continu séparable de C^*-algèbres de Woronowicz, (A^x, δ_x) est une C^*-algèbre de Hopf séparable, unifère et bisimplifiable qui possède donc une mesure de Haar [54] dont le noyau est un idéal bilatère quel que soit $x \in X$, ce qui justifie le changement de définition par rapport à celle adoptée dans [9].

PROPOSITION 6.7. — *Soit (A, δ) un champ continu séparable de C^*-algèbres de Woronowicz sur X dont les mesures de Haar sur les fibres A^x sont φ_x. Alors $\varphi = (\varphi_x)$ est un champ continu d'états.*

Démonstration. — Fixons $x \in X$ et donnons-nous un champ continu d'états ω sur A dont la restriction à la fibre A^x est la mesure de Haar sur A^x (PROPOSITION 3.13). Soit $a \in A$. Si l'on pose $\alpha = \omega * a - \omega(a)1 \in A$, comme

$$(\mathrm{id} \otimes \omega_x) \circ \delta_x(a^x) = \omega_x * a^x = \varphi_x(a^x)1 = (\varphi_x \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_x(a^x),$$

nous avons $\alpha^x = 0$, ce qui implique sur un voisinage que $\|\alpha^y\| < \varepsilon$ et donc :

$$\left|\varphi_y(\alpha^y)\right| = \left|\varphi_y(a) - \omega_y(a)\right| \leq \varepsilon.$$

Comme $\omega(a)$ est continue au point x, $\varphi(a)$ est aussi continu au point x. $\square$

Il est donc naturel de poser :

DÉFINITION 6.8. — Une *$C(X)$-algèbre de Woronowicz* est un triplet (A, δ, φ) où (A, δ) est une $C(X)$-algèbre de Hopf séparable, unifère et bisimplifiable et φ est un champ continu de mesures de Haar sur (A, δ).

Considérons le $C(X)$-module hilbertien $\mathcal{E}_\varphi$ associé à φ par la construction de Stinespring Kasparov (Proposition 2.13) ; notons $\Lambda(a)$ la réalisation de $a \in A$ dans $\mathcal{E}_\varphi$ et π_φ la $C(X)$-représentation de A dans $\mathcal{E}_\varphi$. Définissons enfin l'opérateur V sur $\mathcal{E}_\varphi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_\varphi$ par la formule :

$$V\big(\Lambda(a) \otimes \Lambda(b)\big) = (\Lambda \otimes \Lambda)\big(\delta(a)\, 1 \otimes b\big).$$

Comme le $C(X)$-module engendré par $\delta(A)(1 \otimes A)$ est dense dans $A \otimes_{C(X)} A$, V est un unitaire $C(X)$-linéaire et donc V appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\varphi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_\varphi)$. De plus, cet unitaire est multiplicatif car δ est coassociatif.

REMARQUES.

1) Si x appartient à X, la formule

$$\delta_x\big[(\pi_\varphi)_x(a)\big] = V_x\big((\pi_\varphi)_x(a) \otimes 1\big)V_x^*$$

pour $a \in A$ définit une structure de C^*-algèbre de Woronowicz (séparable) sur $(\pi_\varphi)_x(A)$, ce qui justifie la terminologie adoptée.

2) Si a et b sont dans A,

$$\pi_\varphi(b * \varphi a^*) = (\varphi \otimes \pi_\varphi)\big((a^* \otimes 1)\delta(b)\big) = L(\omega_{\Lambda a, \Lambda b})$$

est dans l'algèbre S associée à V. Comme les combinaisons linéaires des $b * \varphi a^*$ sont denses dans A et celles des $L(\omega_{\Lambda a, \Lambda b})$ sont denses dans S, on a $\pi_\varphi(A) = S$.

Nous allons maintenant étudier les propriétés du champ continu d'unitaires multiplicatifs V que l'on vient de construire (Proposition 6.13).

LEMME 6.9. — *Soit (A, δ, φ) une $C(X)$-algèbre de Woronowicz. Le champ continu d'unitaires multiplicatifs V agissant dans $\mathcal{E}_\varphi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_\varphi$ associé est régulier.*

Démonsttration. — Notons e le champ de vecteurs $\Lambda(1)$ fixe pour V. Comme (A, δ) est simplifiable à droite, on a $V \in M(\mathcal{K}(\mathcal{E}_\varphi) \otimes_{C(X)} S)$ et comme l'algèbre A est unifère, V appartient à $M(\mathcal{K}(\mathcal{E}_\varphi) \otimes_{C(X)} \mathcal{L}(\mathcal{E}_\varphi))$. Donc si k et k' sont dans $\mathcal{K}(\mathcal{E}_\varphi)$, alors $(k \otimes 1)V$ est un élément de $M(\mathcal{K}(\mathcal{E}_\varphi) \otimes_{C(X)} \mathcal{L}(\mathcal{E}_\varphi))$ et par conséquent $(k \otimes 1)V(1 \otimes k')$ appartient à $\mathcal{K}(\mathcal{E}_\varphi) \otimes_{C(X)} \mathcal{K}(\mathcal{E}_\varphi)$. Il résulte alors de la proposition 4.11 que $\mathcal{C}(V)$ est contenu dans $\mathcal{K}(\mathcal{E}_\varphi)$.

Or, pour $x \in X$, on a $\mathcal{C}(V)^x = \mathcal{K}(\mathcal{E}_\varphi)^x$ ([4, prop. 3.4.4]), donc $\mathcal{C}(V) = \mathcal{K}(\mathcal{E}_\varphi)$ (*cf.* Lemme 1.13). □

Définissons l'isométrie $C(X)$-linéaire $\widehat{V}^*$ agissant dans $\mathcal{E}_\varphi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_\varphi$ par la formule

$$\widehat{V}^*\big(\xi \otimes \pi_\varphi(y)e\big) = (\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)\big(\delta(y)(\xi \otimes e\big), \quad \xi \in \mathcal{E}_\varphi,\ y \in A.$$

Comme A est simplifiable à gauche, $\widehat{V}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\varphi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_\varphi)$ est un unitaire.

Remarquons que $\Sigma\widehat{V}^*\Sigma$ est le champ continu d'unitaires multiplicatifs associé à la $C(X)$-algèbre de Woronowicz $(A, \sigma \circ \delta, \varphi)$ où σ est la volte de $A \otimes_{C(X)} A$.

PROPOSITION 6.10. — *Soit (A, δ, φ) une $C(X)$-algèbre de Woronowicz. Si ω appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\varphi)_*$, $\rho(\omega)$ et $\lambda(\omega) = (\omega \otimes \mathrm{id})(\widehat{V})$ sont dans $\mathcal{K}(\mathcal{E}_\varphi)$.*

Démonstration. — Si ξ appartient à $\mathcal{E}$, $\rho(\omega_{\xi,e}) = (\mathrm{id} \otimes \omega_{\xi,e})(\widehat{V}^*\Sigma)$ est un élément de $\mathcal{K}(\mathcal{E}_\varphi)$ car $\Sigma\widehat{V}^*\Sigma$ est régulier d'après le Lemme 6.9. Il en résulte que si $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\varphi)_*$ est défini par

$$\psi(T) = \big\langle V^*(\eta_1 \otimes e), (T \otimes 1)V^*(\eta_2 \otimes \xi)\big\rangle,$$

on a :

$$(\mathrm{id} \otimes \psi)(V^*) = (\mathrm{id} \otimes \omega_{e,\xi})(V^*)(\mathrm{id} \otimes \omega_{\eta_1,\eta_2})(V^*) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_\varphi).$$

Comme $V^*\mathcal{E}_\varphi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_\varphi = \mathcal{E}_\varphi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_\varphi$, si on définit ψ' dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\varphi)_*$ par la formule

$$\psi'(T) = \big\langle V^*(\xi_1 \otimes e), (T \otimes 1)(\eta_2 \otimes \xi_2)\big\rangle = \big\langle (\mathrm{id} \otimes \omega_{\xi_1,\xi_2})(\Sigma V)^* e, T\eta_2\big\rangle,$$

on a $(\mathrm{id} \otimes \psi')(V) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_\varphi)$. En remarquant alors que $\mathcal{C}(V)$ est dense dans $\mathcal{K}(\mathcal{E}_\varphi)$, il vient que $\rho(\omega_{\eta_1,\eta_2})$ appartient à $\mathcal{K}(\mathcal{E}_\varphi)$ quels que soient η_1 et η_2 dans $\mathcal{E}_\varphi$.

En remplaçant V par $\Sigma\widehat{V}^*\Sigma$, on obtient que $\lambda(\omega)$ appartient à $\mathcal{K}(\mathcal{E}_\varphi)$ pour tout $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\varphi)_*$. □

PROPOSITION 6.11. — *Soit (A, δ, φ) une $C(X)$-algèbre de Woronowicz et soit V l'unitaire multiplicatif associé agissant dans $\mathcal{E}_\varphi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_\varphi$. Le centre $\mathcal{Z}(\widehat{S})$ de $\widehat{S}$ est un champ continu de C^*-algèbres commutatives sur X de fibres $\mathcal{Z}(\widehat{S}^x)$.*

Démonstration. — Il s'agit de voir que l'application $\mathcal{Z}(\widehat{S}) \to \mathcal{Z}(\widehat{S}^x)$ est surjective. Comme la C^*-algèbre $\mathcal{Z}(\widehat{S}^x)$ est engendrée comme espace vectoriel par ses projecteurs, il suffit de montrer qu'un projecteur $p^x \in \mathcal{Z}(\widehat{S}^x)$ admet un prolongement dans un voisinage.

Soit $q^x \in \mathcal{Z}(\widehat{S}^x)$ tel que $\rho_x(p^x) = \lambda_x(q^x)$; considérons un relevé p de p^x dans $\rho(\widehat{S})$ et un relevé q de q^x dans $\lambda(\widehat{S})$. Comme $\mathrm{Sp}(p^x)$ est contenu dans $\{0, 1\}$, il existe un voisinage de x dans X sur lequel le spectre de p^y ne rencontre pas la droite $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$. Par calcul fonctionnel, on peut donc supposer que $\rho_y(p)$ (et de même $\lambda_y(q)$) est un projecteur dans un voisinage ouvert Ω de x. Considérons alors l'ouvert des $y \in \Omega$ tels que $\|\rho_y(p) - \lambda_y(q)\| < 1$: comme $\rho_y(p)$ et $\lambda_y(q)$ commutent, il sont égaux et donc p^y est central sur cet ouvert. ∎

Avant d'énoncer la Proposition 6.13, nous avons encore besoin de préciser quelques points de la démonstration de la proposition 5.2 de [4].

LEMME 6.12. — *Soient H un espace de Hilbert séparable, $V \in L(H \otimes H)$ un unitaire multiplicatif régulier irréductible et $e \in H$ un vecteur fixe pour V de norme 1. Si p est un projecteur central de $\rho(\widehat{S})$, l'espace vectoriel K engendré par les $L(\omega_{\xi,\eta})e$, ξ et η dans pH est égal à pH.*

Démonstration. — Définissons pour $\xi \in H$ l'opérateur $\lambda_\xi \in L(H)$ en posant $\lambda_\xi = \theta_e'^* V^* \theta_\xi$. Les opérateurs λ_ξ forment alors une sous-algèbre non dégénérée de $\lambda(\widehat{S})$ (*cf.* [4, lemme 4.5]). Pour $\xi, \eta \in pH$, on a :

$$L(\omega_{\xi,\eta})e = \theta_\xi^* V(\eta \otimes e) = \lambda_\xi^* \eta = p\lambda_\xi^* \eta\,;$$

donc K est contenu dans pH.

Si η est dans pH, il existe $\xi \in H$ tel que $\zeta = \lambda_\xi \eta \in pH$ soit non nul puisque l'algèbre des λ_α, $\alpha \in H$ est non dégénérée. Mais alors :

$$\|\zeta\|^2 = \langle \eta, \lambda_\xi^* \zeta \rangle = \big\langle \eta, L(\omega_{p\xi,\zeta})e \big\rangle \neq 0.$$

Il s'en suit que K est dense et donc égal à l'espace de dimension finie pH. ∎

REMARQUE. — Sous les hypothèses du lemme et avec les notations du lemme 4.6 de [4], si T_0 est l'opérateur fermable défini par $T_0(L(\omega)e) = L(\omega^*)^* e$ pour $\omega \in \mathcal{F} \subset L(H)_*$, la phase de la fermeture de T_0 est l'unitaire U [4, Prop. 5.2] et donc si $\xi \in \rho(p)H$ où p est un projecteur central de $\widehat{S}$, on a $T_0\xi \in \lambda(p)H$. Notons enfin que la restriction de T_0 au sous-espace de dimension finie $\rho(p)H + \lambda(p)H$ est inversible puisque U est unitaire.

PROPOSITION 6.13. — *Soit (A, δ, φ) une $C(X)$-algèbre de Woronowicz. L'unitaire multiplicatif associé V agissant dans $\mathcal{E}_\varphi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_\varphi$ est birégulier et irréductible.*

Démonstration. — Par construction, il existe des unitaires U_x appartenant à $L((\mathcal{E}_\varphi)_x)$ rendant les unitaires V_x irréductibles [4, prop. 5.2]. Pour avoir l'irréductibilité de V, il s'agit donc de voir que $U = (U_x)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\varphi)$.

Fixons un point $x \in X$ et un projecteur central $p^x \in \mathcal{Z}(\widehat{S}^x)$ que l'on relève par calcul fonctionnel holomorphe sur un voisinage ouvert Ω de x en un champ de projecteurs centraux p (Proposition 6.11) et posons $q = \rho(p) + \lambda(p) - \rho(p)\lambda(p)$.

Définissons sur le $C(X)$-module hilbertien $E_q = C_0(\Omega)q\mathcal{E}_\varphi$ l'opérateur T par la formule $T[L(\omega_{\xi,\eta})e] = L(\omega_{\eta,\xi})^*e$ pour ξ et η dans E_q (où e désigne le champ de vecteurs fixes $\Lambda(1)$).

Alors l'opérateur T est bien défini dans $\mathcal{L}(E_q)$ d'après le lemme précédent et il est inversible car E_q est de type fini quitte à restreindre le voisinage Ω. On a alors $U\xi = T|T|^{-1}\xi \in \mathcal{E}_\varphi$ pour tout $\xi \in E_q$.

Maintenant, quel que soit le point x de X, la fibre $(\mathcal{E}_\varphi)_x$ est somme hilbertienne d'espaces du type $(E_q)_x$, ce qui permet de conclure que l'image par U de $\mathcal{E}_\varphi$ est incluse dans $\mathcal{E}_\varphi$.

Le Lemme 6.9 appliqué à $\Sigma\widehat{V}^*\Sigma$ montre que le $C(X)$-module engendré par les $(\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma^2\widehat{V}^*\Sigma) = (\omega U \otimes \mathrm{id})(V^*\Sigma)U$, avec $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\varphi)_*$ est un sous-$C(X)$-module dense de $\mathcal{K}(\mathcal{E}_\varphi)$, d'où la birégularité de V. $\square$

6.3 Le champ continu des C^*-algèbres duales.

Soit V appartenant à $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ un unitaire multiplicatif régulier de type compact irréductible. Comme la $C(X)$-algèbre stellaire engendrée par les produits ab, $a \in S$ et $b \in \widehat{S}$, est $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ (Proposition 4.17), $\rho(\widehat{S})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ et forme donc un champ continu de C^*-algèbres. Par ailleurs, la Proposition 6.11 montre que le centre $\mathcal{Z}(\widehat{S})$ de $\widehat{S}$ est un champ continu de C^*-algèbres. On va voir que le champ continu $\widehat{S}$ est « presque constant ». De manière plus précise, on a :

PROPOSITION 6.14. — *Soit $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ un unitaire multiplicatif régulier de type compact irréductible.*

a) *Si p^x est un projecteur central minimal de $\widehat{S}^x$, il se relève dans un voisinage en un champ de projecteurs centraux minimaux ;*

b) *si p^x est un projecteur central quelconque de $\widehat{S}^x$, la C^*-algèbre de dimension finie $p^x\widehat{S}^x$ se prolonge dans un voisinage en un sous-champ constant de $\widehat{S}$.*

Démonstration.

a) On peut supposer que $\mathcal{E}$ est un sous-$C(X)$-module de $H \otimes C(X)$ où H est l'espace de Hilbert séparable grâce au théorème de stabilisation de Kasparov [26]. Notons tr la trace sur $L(H)$ et fixons un projecteur $p \in \mathcal{Z}(\widehat{S})_{|Y}$ qui relève p^x sur un voisinage Y de x. Il s'agit de voir que le projecteur p^y reste minimal sur un voisinage de x.

Remarquons d'abord que $\operatorname{rang}(\rho_y(p)) = \operatorname{tr}(\rho_y(p))$ est localement constant : si $\|\rho_y(p) - \rho_x(p)\| < 1$, il existe un unitaire u_y tel que l'on ait $\rho_y(p) = {u_y}^* \rho_x(p) u_y$. On sait par ailleurs d'après la Proposition 6.11 qu'il existe $q \in \mathcal{Z}(\widehat{S})_{|Y}$ tel que $\rho(p) = \lambda(q)$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier naturel non-nul strictement plus petit que $\operatorname{rang}(\rho_x(p))$ tel que pour tout voisinage ouvert ω de x, il existe $y_\omega \in \omega$ et un projecteur $\epsilon_\omega \in \rho_{y_\omega}(p\widehat{S})$ de rang k central dans $\rho_{y_\omega}(\widehat{S})\lambda_{y_\omega}(\widehat{S})$. Comme la boule unité de H est faiblement compacte, il existe un filtre convergeant Ω tel que $(\epsilon_\omega)_{\omega\in\Omega}$ converge faiblement et donc normiquement dans $L(H)$ vers un projecteur central de rang k de $\rho_x(p)L(H)\rho_x(p) = \rho_x(p\widehat{S})\lambda_x(q\widehat{S})$. Mais les seuls projecteurs centraux de $\rho_x(p)L(H)\rho_x(p)$ sont $\rho_x(p)$ et 0.

b) Décomposons le projecteur central p^x en une somme finie $\sum p_i^x$ de projecteurs centraux minimaux et relevons les p_i^x sur un voisinage ouvert Y en des projecteurs $p_i \in \mathcal{Z}(\widehat{S})_{|Y}$ deux à deux orthogonaux (Lemme 2.10 a). Le a) montre que quitte à restreindre Y, on peut supposer que les p_i^y sont des projecteurs centraux minimaux pour tout $y \in Y$. Par conséquent, pour démontrer b), il suffit de traiter le cas où p^x est un projecteur central minimal.

Mais dans ce cas, il existe $d \in \mathbb{N}$ non-nul tel que $p^x\widehat{S}^x$ soit isomorphe à l'algèbre $M_d(\mathbb{C})$. La proposition résulte alors du Lemme 2.10. $\square$

PROPOSITION 6.15. — *Si le projecteur $q \in \mathcal{Z}(\widehat{S})_{|Y}$ relève le projecteur central minimal non nul $q^x \in \mathcal{Z}(\widehat{S}^x)$ sur l'ouvert Y, l'ensemble des $y \in Y$ tels que $\rho_y(q)$ soit un projecteur central minimal de même rang que $\rho_x(q^x)$ est une partie ouverte et fermée de Y.*

Démonstration. — Si Ω est le spectre de la C^*-aglèbre commutative $C_0(Y)q\mathcal{Z}(\widehat{S})$, l'isomorphisme $\Theta : C_0(Y)q\mathcal{Z}(\widehat{S}) \xrightarrow{\sim} C_0(\Omega)$ détermine une application continue surjective et ouverte $\pi : \Omega \to Y$ (Proposition 3.14).

Comme l'application $y \mapsto \operatorname{rang}[\rho_y(q)]$ est continue, l'ensemble U des

$y \in Y$ tels que $\mathrm{rang}[\rho_y(q)] = \mathrm{rang}[\rho_x(q)]$ est ouvert et fermé dans Y. De plus, pour $y \in U$, le cardinal $\sharp\,\Omega_y$ de $\Omega_y = \pi^{-1}(\{y\})$ est un entier strictement positif inférieur à $\mathrm{rang}[\rho_y(q)] = \mathrm{rang}[\rho_x(q)]$ et le projecteur central (non nul) $\rho_y(q)$ est minimal si et seulement si $\sharp\,\Omega_y = 1$.

La démonstration de l'assertion a) de la Proposition 6.14 montre alors que cet ensemble est ouvert dans U. Par ailleurs, l'application définie sur U par $y \mapsto \sharp\,U_y$ est semi-continue inférieurement (Proposition 6.14 b) ; donc l'image réciproque de 1 dans U est aussi fermée. $\square$

6.4. Classification.

PROPOSITION 6.16. — *Soient $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ un unitaire multiplicatif régulier de type compact et (S, δ) la $C(X)$-algèbre de Hopf associée. Si l'on note V_S le champ continu d'unitaires multiplicatifs associé à (S, δ)* (*cf.* 6.2), *alors V est équivalent au champ continu d'unitaires multiplicatifs*

$$(V_S)_{13} \in \mathcal{L}\big((\mathcal{E}_\phi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}^f) \otimes_{C(X)} (\mathcal{E}_\phi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}^f)\big).$$

Démonstration. — Soit ϕ le champ continu de mesures de Haar fidèle sur la $C(X)$-algèbre de Hopf (S, δ) associé à V (Corollaire 6.5). Notons $\mathcal{E}_\phi$ le $C(X)$-module hilbertien associé, $\xi_\phi \in \mathcal{E}_\phi$ le champ de vecteurs représentant $1 \in S$ et π_ϕ la $C(X)$-représentation de S dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\phi)$.

Pour $\xi, \eta \in \mathcal{E}^f$, $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ on a $\rho(\omega_{\xi,\eta})\rho(\omega) = \omega(1)\rho(\omega_{\xi,\eta})$, de sorte que $\rho(\omega_{\xi,\eta})$ est proportionnel à un projecteur central minimal de $\widehat{S}$. Remarquons que $\rho(\omega_{\xi,\eta}) = \rho(\omega_{\xi,\eta})\rho(\phi) = \langle \xi, \eta \rangle \rho(\phi)$.

Si $a = L(\omega) \in S$, on a alors $\langle \xi, a\eta \rangle = \omega(\rho(\omega_{\xi,\eta})) = \langle \xi, \eta \rangle \omega(\rho(\phi))$. Il en résulte que si a est dans S, $\langle \xi, a\eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle \phi(a)$.

Définissons $W : \mathcal{E}_\phi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}^f \to \mathcal{E}$ par :

$$W \pi_\phi(a)\xi_\phi \otimes \xi = a\xi, \quad a \in S,\ \xi \in \mathcal{E}^f.$$

Comme

$$\big\langle \pi_\phi(a)\xi_\phi \otimes \xi, \pi_\phi(b)\xi_\phi \otimes \eta \big\rangle = \phi(a^*b)\langle \xi, \eta \rangle = \langle a\xi, b\eta \rangle,$$

W est isométrique. Par ailleurs, il est montré dans [4, th. 4.7] que W_x est surjectif quel que soit $x \in X$, ce qui implique par le Lemme 1.13 que W l'est aussi. Comme de plus il est $C(X)$-linéaire, c'est un unitaire dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\phi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}^f, \mathcal{E})$ et il vérifie :

$$\begin{aligned}
(W \otimes W)&(V_S)_{13}\big(\pi_\phi(a)\xi_\phi \otimes \xi \otimes \pi_\phi(b)\xi_\phi \otimes \eta\big) \\
&= \delta(a)(1 \otimes b)(\xi \otimes \eta) \\
&= V(W \otimes W)\big(\pi_\phi(a)\xi_\phi \otimes \xi \otimes \pi_\phi(b)\xi_\phi \otimes \eta\big). \quad \square
\end{aligned}$$

COROLLAIRE 6.17. — *Si $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ est un unitaire multiplicatif régulier de type compact, V est irréductible si et seulement si $\mathcal{E}^f$ est un fibré vectoriel sur X de rang 1.*

Démonstration. — Elle résulte immédiatement des Propositions 6.13 et 6.16. □

6.5. Le champ des algèbres de Fourier.

DÉFINITION 6.18. — Étant donné un unitaire multiplicatif régulier de type compact irréductible $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$, on dira que le champ de vecteurs $\xi \in \mathcal{E}$ est *fini* si $\rho(\widehat{S})\xi$ est un sous-module d'un $C(X)$-module de type fini (*cf.* 4.4).

LEMME 6.19. — *Le $C(X)$-module E des champs de vecteurs finis est dense dans le $C(X)$-module hilbertien $\mathcal{E}$.*

Démonstration. — Donnons-nous $x \in X$ et un projecteur p_x de $\lambda_x(\widehat{S})$. Alors l'espace $p_x\mathcal{E}_x$ est invariant par $\rho_x(\widehat{S})$ et comme $\lambda_x(\widehat{S}) \subset K(\mathcal{E}_x)$, il est de dimension finie. Comme la représentation λ_x de $\widehat{S}$ dans $\mathcal{E}_x$ est non-dégénérée, on en déduit que l'espace E_x des vecteurs $\xi_x \in \mathcal{E}_x$ tels que $\rho_x(\widehat{S})$ soit de dimension finie est dense dans $\mathcal{E}_x$. On applique alors le Lemme 1.13 pour conclure. □

REMARQUE. — Il est montré dans [50] que pour $x \in X$, l'algèbre $\widehat{S}^x$ est une somme directe d'algèbres de matrices, de sorte que si ξ est dans $\mathcal{E}$, il existe un projecteur $p_x \in \rho_x(\widehat{S}) \cap \lambda_x(\widehat{S})$ vérifiant $\|\xi_x - p_x\xi_x\| < \varepsilon$.

On a vu dans la section 5.5 que la $C(X)$-algèbre stellaire S associée à un unitaire multiplicatif régulier irréductible de type compact n'est pas toujours un champ continu. On peut néanmoins affirmer :

PROPOSITION 6.20. — *Soit $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ un unitaire multiplicatif régulier irréductible de type compact. Alors les espaces $A(V_x)$ munis des normes $\| \ \|_*$ (définition 5.4) forment un champ continu d'espaces de Banach.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{F}$ le sous-$C(X)$-module dense de $\mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ engendré par les $\omega_{\xi,\eta}$, $\xi, \eta \in E$. Supposons que $\omega \in \mathcal{F}$ s'écrive

$$\omega = \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_{\xi^i,\eta^i}$$

et que le réel M soit un majorant des normes $\|\xi^i\|$ et $\|\eta^i\|$ pour $1 \leq i \leq n$. Fixons $x \in X$ et montrons la continuité de l'application $y \mapsto \|L_y(\omega)\|_*$ au point x. Si $0 < \varepsilon < M$, il existe un voisinage ouvert Y de x et un projecteur central p dans $\widehat{S}_{|Y}$ tels que sur ce voisinage,

$$\|\rho_y(p)\xi_y^i - \xi_y^i\| < \frac{\varepsilon}{2n^2M} \quad \text{et} \quad \|\rho_y(p)\eta_y^i - \eta_y^i\| < \frac{\varepsilon}{2n^2M}$$

et donc $\|\omega_y - \omega_y\rho_y(p)\| < \varepsilon$. Notons $(\widehat{S}^y)_1$ la boule unité de $\widehat{S}^y$ pour $y \in Y$.

On a alors $\|L_y(\omega)\|_* = \sup\{\,|\omega_y(\rho_y(a))|\,;\ a \in (\widehat{S}^y)_1\}$, ce qui implique :

$$\Big|\big\|L_y\omega)\big\|_* - \sup\{\,|\omega_y(\rho_y(a))|\,;\ a \in p^y(\widehat{S}^y)_1\}\Big| < \varepsilon.$$

Mais la Proposition 6.14 permet de supposer que l'algèbre $C_0(Y)p\widehat{S}$ est de type fini et on a donc bien continuité de $y \mapsto \|L_y(\omega)\|_*$ au point x. ∎

6.6. Quelques remarques.

LEMME 6.21. — *Soient $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$ un unitaire multiplicatif régulier et $\mathcal{E}'$ un sous-$C(X)$-module fermé de $\mathcal{E}$. Si $V(\mathcal{E}' \otimes_{C(X)} \mathcal{E}') = \mathcal{E}' \otimes_{C(X)} \mathcal{E}'$, alors la restriction V' de V à $\mathcal{E}' \otimes_{C(X)} \mathcal{E}'$ définit un unitaire multiplicatif régulier.*

Démonstration. — Notons $P_x \in L(\mathcal{E}_x)$ le projecteur orthogonal sur $\mathcal{E}'_x$ pour $x \in X$; l'hypothèse du lemme signifie que V_x commute à $P_x \otimes P_x$.

Soient $\xi, \eta \in \mathcal{E}'$ et $x \in X$. Si $a = (\mathrm{id} \otimes \omega_{\xi,\eta})(\Sigma V)$, alors $a_x = P_x a_x P_x$ appartient à $K(\mathcal{E}'_x) \subset K(\mathcal{E}_x)$. On peut donc relever a_x en un projecteur $h \in \mathcal{K}(\mathcal{E}')$, de sorte que $\|a_y - h_y\| < \varepsilon$ sur un voisinage de x. On en déduit par partition de l'unité qu'il existe $k \in \mathcal{K}(\mathcal{E}')$ tel que $\|a - k\| < \varepsilon$, d'où $\mathcal{C}(V') \subset \mathcal{K}(\mathcal{E}')$. Mais $\mathcal{C}(V')^x = K(\mathcal{E}'_x)$ pour tout $x \in X$ et donc $\mathcal{C}(V') = \mathcal{K}(\mathcal{E}')$ par le Lemme 1.13. ∎

6.6.1. — Soit (K_n, u_n) un système projectif de groupes localement compacts indexé par $\mathbb{N}^*$ où les morphismes continus $u_n : K_{n+1} \to K_n$ sont surjectifs. Notons K la limite projective des K_n et Θ_n le morphisme canonique de K dans K_n.

Considérons le $C([0,1])$-module hilbertien $\mathcal{E} = C([0,1], L^2(K, \mathrm{d}\mu))$ où $\mathrm{d}\mu$ est une mesure de Haar à droite sur K et le sous-$C(X)$-module $\mathcal{E}'$ des $\xi \in \mathcal{E}$ tels que quel que soit le couple $(x,g) \in [0,1] \times K$ vérifiant $x \geq 1/n$ et $\Theta_n(g) = 1$, $\xi(x,\cdot) = \xi(x, g\cdot)$.

Si $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C([0,1])} \mathcal{E})$ est le champ continu d'unitaires multiplicatifs régulier défini par $(V\eta)(x,s,t) = \eta(x,st,t)$ pour η appartenant à $C\big([0,1], L^2(K \times K, \mathrm{d}\mu \otimes \mathrm{d}\mu)\big)$, le lemme précédent montre que sa restriction à $\mathcal{E}' \otimes_{C([0,1])} \mathcal{E}'$ est encore un unitaire multiplicatif régulier. Les fibres de la $C(X)$-algèbre $\widehat{S}$ sont :

$$\widehat{S}^x = C^*_r(K_{n+1}) \text{ pour } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n},\ \widehat{S}^1 = C^*_r(K_1) \text{ et } \widehat{S}^0 = C^*_r(K).$$

Remarquons enfin que si le groupe K est compact, l'unité de $C([0,1] \times K)$ définit un champ de vecteurs fixe pour la restriction V' de V à $\mathcal{E}' \otimes_{C([0,1])} \mathcal{E}'$.

Soient p un nombre premier, K_n les groupes $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et $K = \mathbb{Z}_p$ leur limite projective. La construction précédente permet de définir un champ continu d'unitaires multiplicatifs V' régulier de type compact. Sur un voisinage de 0, on ne peut relever simultanément qu'un nombre fini de projecteurs centraux de $\mathcal{Z}(\widehat{S}^0)$, ce qui implique que l'on ne peut pas généraliser la Proposition 6.14.

6.6.2. — Soient G le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et V_G l'unitaire multiplicatif régulier associé agissant dans $L^2(G) \otimes L^2(G)$. Considérons le $C([0,1])$-module hilbertien $\mathcal{E} = L^2(G) \otimes_{\mathbb{C}} C([0,1])$ et le champ continu d'unitaires multiplicatifs $V = (V_G)_{13}$ agissant dans $\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E}$. Comme $(e_0+e_1)\otimes 1 \in \mathcal{E}$ est fixe pour V où $e_i \in L^2(G)$ désigne la fonction caractéristique du point $i \in G$, le champ continu d'unitaires multiplicatifs V est birégulier et irréductible.

Soit $\mathcal{E}'$ le sous-$C([0,1])$-module $C([0,1])(e_0 \otimes 1) \oplus C_0([0,1[)(e_1 \otimes 1)$ de $\mathcal{E}$. Remarquons que $V\mathcal{E}' \otimes_{C(X)} \mathcal{E}' = \mathcal{E}' \otimes_{C(X)} \mathcal{E}'$ et étudions la restriction V' de V à $\mathcal{E}' \otimes_{C(X)} \mathcal{E}'$. Si $x \in [0,1]$, l'unitaire multiplicatif V'_x est de type compact ; V' ne peut cependant pas être un unitaire multiplicatif de type compact puisque le $C([0,1])$-module $(\mathcal{E}')^f = C_0([0,1[)[(e_0+e_1)\otimes 1]$ des champs de vecteurs fixes n'est pas plein.

7. Exemples

7.1. Le champ des $\mathrm{SU}_\mu(2)$.

Définissons la C^*-algèbre unifère A dont les générateurs α, γ et f sont assujétis aux relations suivantes [51] :

- f commute à α et γ,
- le spectre de f est $[0,1]$,
- $u = \begin{pmatrix} \alpha & -f\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix}$ est un unitaire de $M_2(A)$.

La C^*-algèbre commutative unifère engendrée par f définit alors une structure de $C([0,1])$-algèbre sur A.

Le but de cette section est d'apporter une démonstration simple de la proposition suivante :

PROPOSITION 7.1. — *L'algèbre* $C_0(]0,1])A$ *est l'algèbre des sections nulles à l'infini d'un champ continu de* C^**-algèbres de Woronowicz sur* $]0,1]$ *de fibres* $\mathrm{SU}_\mu(2)$.

REMARQUE. — Partant des travaux de Rieffel sur les quantifications d'une variété C^∞ munie d'un crochet de Poisson [41], Sheu a construit dans [42] une déformation d'opérateurs [42, déf. 2.2] de l'algèbre de

Poisson $C^\infty(\mathrm{SU}(2))$ et Bauval s'est inspirée de ces résultats pour montrer que la $C([0,1])$-algèbre A était un champ continu de fibres A^x (*cf.* [6]). Parallèlement, Nagy a montré plus généralement dans [35] que si $N \geq 2$, on pouvait munir la famille des $\mathrm{SU}_\mu(N)$ pour $\mu \in]0,1]$, définie par Woronowicz [52] d'une structure de déformation stricte au sens introduit par Rieffel dans [41].

Commençons comme dans [6, § 2] par étudier les fibres A^μ, $\mu \in [0,1[$, de A. Si z est un complexe de module 1, l'opérateur

$$\begin{pmatrix} \alpha & -f\bar{z}^2\gamma^* \\ z^2\gamma & \alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \alpha & -f\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$$

est un unitaire de $M_2(A)$. Donc si μ est dans $[0,1]$, le spectre $\mathrm{Sp}(\gamma^\mu)$ de γ^μ est invariant par rotation dans le plan complexe de centre 0.

D'autre part, comme $\alpha\alpha^* = (1-f^2) + f^2\alpha^*\alpha$ et $\gamma^*\gamma = 1 - \alpha^*\alpha$, si μ est un point fixé de $[0,1[$,

$$\mathrm{Sp}\big((\gamma^\mu)^*\gamma^\mu\big) \cup \{1\} = \mu^2\, \mathrm{Sp}\big((\gamma^\mu)^*\gamma^\mu\big) \mathbin{\dot\cup} \{1\},$$

ce qui implique en convenant que $0^0 = 1$ que

$$\mathrm{Sp}\big((\gamma^\mu)^*\gamma^\mu\big) = \{\mu^{2n}\,;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

(*cf.* [51, lemme A2.1]).

Il en résulte que $\mathrm{Sp}(\gamma^\mu) = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| \in \mu^{\mathbb{N}}\} \cup \{0\}$.

Si $\mu = 0$, la C^*-algèbre engendrée par α^0 est l'algèbre de Tœplitz $\mathcal{T}$ car $\alpha^0(\alpha^0)^* = 1$. Par ailleurs, γ^0 est un élément normal dont le spectre est $\{0\} \cup \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = 1\}$, de sorte que la représentation π_0 de A dans l'espace de Hilbert $H = \ell^2(\mathbb{N}) \otimes \ell^2(\mathbb{Z})$ de base orthonormale $(e_{n,k})$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ définie par

- $\pi_0(f) = 0$;
- $\pi_0(\alpha)e_{n,k} = \begin{cases} e_{n-1,k} & \text{si } n > 0, \\ 0 & \text{si } n = 0\,; \end{cases}$
- $\pi_0(\gamma)e_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 0, \\ e_{n,k+1} & \text{si } n = 0\,; \end{cases}$

se factorise à travers une représentation fidèle de A^0.

Si μ appartient à $[0,1[$, il résulte alors de [51, § A.2] que la représentation π_μ de A dans H définie par

- $\pi_\mu(f) = \mu$,
- $\pi_\mu(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1-\mu^{2n}}\,\big[\pi_0(\alpha^*)^{n-1}\pi_0(\alpha)^n - \pi_0(\alpha^*)^n\pi_0(\alpha)^{n+1}\big]$,

- $\pi_\mu(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \pi_0(\alpha^*)^n \pi_0(\gamma) \pi_0(\alpha)^n$

se factorise à travers une représentation fidèle de A^μ. En développant ces formules, il vient [51, th. 1.2] :

$$\pi_\mu(\alpha) e_{n,k} = \begin{cases} \sqrt{1-\mu^{2n}}\, e_{n-1,k} & \text{si } n > 0, \\ 0 & \text{si } n = 0, \end{cases}$$

$$\pi_\mu(\gamma) e_{n,k} = \mu^n e_{n,k+1}.$$

Considérons la $C([0,1])$-représentation $\pi = (\pi_\mu)$ de A dans le $C([0,1])$-module hilbertien $\mathcal{E} = C_0([0,1[, H)$ et définissons le champ continu d'états ϕ sur $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ par la formule :

$$\phi_\mu(T) = (1-\mu^2) \sum \mu^{2n} \langle e_{n,0}, T e_{n,0} \rangle.$$

Alors quel que soit $\mu \in \,]0,1[$, ϕ_μ est fidèle sur $L(\ell^2(\mathbb{N})) \otimes C(S^1)$ et donc si l'on pose $\varphi = \phi \circ \pi$, φ_μ est un état fidèle sur la fibre A^μ, ce qui implique que si X est une partie compacte de $]0,1[$, φ définit par restriction un champ continu d'états fidèles sur $A_{|X}$.

Remarque. — Si pour $\mu \in]0,1[$, $\sigma_\mu : A^\mu \to C(S^1)$ est le morphisme défini par $\sigma_\mu(\alpha^\mu) = z$ et $\sigma_\mu(\gamma^\mu) = 0$, on a la suite exacte :

$$0 \to K\big(\ell^2(\mathbb{N})\big) \otimes C(S^1) \longrightarrow A^\mu \xrightarrow{\sigma_\mu} C(S^1) \to 0.$$

On va maintenant montrer que si φ_1 est la mesure de Haar sur $A^1 = \mathrm{SU}(2)$, le système des φ_μ forme un champ continu d'états fidèles sur $[0,1]$, ce qui démontrera grâce au Théorème 3.3 que la $C(X)$-algèbre A est un champ continu de C^*-algèbres (voir aussi [35, § 3]).

Pour ce faire, commençons par définir comme dans [51] :

$$a_{k,m,n} = \begin{cases} \alpha^k \gamma^{*m} \gamma^n & \text{si } k \geq 0, \\ \alpha^{*-k} \gamma^{*m} \gamma^n & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Alors, les combinaisons linéaires à coefficients dans $C_0(\,]0,1])$ des $a_{k,m,n}$ sont denses dans $C_0(\,]0,1])A$. Pour affirmer que le système des φ_μ forme un champ continu d'états fidèles sur $]0,1]$, il suffit donc de le vérifier sur les générateurs $a_{k,m,n}$. Or, au voisinage de 1, on a :

$$\varphi_\mu(a_{k,m,n}) = \delta_{k=0}\delta_{m=n} \frac{1-\mu^2}{1-\mu^{2m+2}} \longrightarrow \delta_{k=0}\delta_{m=n} \frac{1}{m+1} = \varphi_1(a_{k,m,n}).$$

Démonstration de la proposition 7.1. — Soit X une partie compacte de $]0,1]$ contenant 1 et considérons la restriction $A_{|X} = C(X) \otimes_{C([0,1])} A$ de A à X. Si l'on munit $A_{|X}$ de l'application

$$\delta : A_{|X} \to A_{|X} \otimes_{C(X)} A_{|X}$$

définie par la formule $(\mathrm{id} \otimes \delta)(u) = u_{12}u_{13}$ dans $M_2(A_{|X} \otimes_{C(X)} A_{|X})$, alors $(A_{|X}, \delta, \varphi)$ est un champ continu de pseudogroupes de Woronowicz car $u_\mu \in M_2(A^\mu)$ permet de définir sur A^μ par la même formule une structure de pseudogroupe de Woronowicz dont la mesure de Haar est φ_μ (*cf.* [50, A.1]). $\square$

Remarque. — Nagy [36, th. 1.1] a montré plus généralement que si $\mu \in]0,1[$ et si $N \geq 2$, la mesure de Haar sur $\mathrm{SU}_\mu(N)$ est fidèle sur $\mathrm{SU}_\mu(N)$.

7.2. La déformation du groupe $ax + b$ vers $\mathrm{SU}_\mu(2)$.

Soient X une partie compacte de l'intervalle $]0,1]$ contenant le point 1 et Ω l'espace localement compact des points $(\mu, z) \in X \times \mathbb{C}$ tels que $|z| \in (1-\mu)^{-1}\mu^{\mathbb{N}} \cup \{0\}$ si $\mu \neq 1$. Considérons l'application positive et $C(X)$-linéaire τ de l'algèbre involutive $C_c(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω à support compact à valeurs dans $C(X)$ définie par :

$$\tau(f)(\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\mu} \displaystyle\sum_{t \in \mu^{\mathbb{N}}} t^2 \int_0^{2\pi} f\Big(\mu, \frac{t}{1-\mu} \mathrm{e}^{i\theta}\Big) \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} & \text{si } \mu \neq 1, \\[2ex] \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \int_0^{2\pi} f(1, r\,\mathrm{e}^{i\theta})\, r \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\, \mathrm{d}r & \text{si } \mu = 1. \end{cases}$$

Si $\mathcal{E}_\tau$ est le $C(X)$-module hilbertien complété de $C_c(\Omega)$ pour la norme $\|\tau(|f|^2)\|^{1/2}$, on va construire dans cette section un champ continu de C^*-algèbres de Hopf (A, δ) engendré par des multiplicateurs $\mathfrak{z}, \mathfrak{g}$ appartenant à $M(A) \subset \mathcal{L}(\mathcal{E}_\tau)$ et l'idéal $C_1(X)$ de $C(X)$ de fibres $A^\mu = \mathrm{SU}_\mu(2)$ si $\mu \neq 1$ et $A^1 = C^*(ax+b)$ (Proposition 7.7). On montre ensuite que (A, δ) est bisimplifiable (Proposition 7.8), ce qui nous permet de construire un $C(X)$-module hilbertien $\mathcal{E}_\Phi$ et un unitaire multiplicatif $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\Phi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_\Phi)$ tel que la $C(X)$-algèbre de Hopf $L(S_V)$ soit isomorphe à A (Lemme 7.9). On démontre enfin l'existence d'un unitaire $U \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\Phi)$ tel que le triplet $(\mathcal{E}_\Phi, V, U)$ forme un système de Kac (Proposition 7.10).

On utilisera de manière essentielle la définition de Woronowicz suivante :

DÉFINITION 7.2 [53, déf. 1.1]. — Si A est une C^*-algèbre et T est un opérateur linéaire défini sur un sous-espace vectoriel dense $D(T) \subset A$ à valeurs dans A, on dit que T est *affilié* à A (noté $T\eta A$) s'il existe z appartenant à $M(A)$ tel que $\|z\| \leq 1$ et tel que les deux assertions suivantes soient équivalentes :

1) $x \in D(T)$ et $y = Tx$;

2) il existe $a \in A$ tel que $x = (1 - z^*z)^{1/2}a$ et $y = za$.

On utilisera aussi les caractérisations de l'existence d'un opérateur affilié à une C^*-algèbre données dans le théorème 2.3 et la proposition 2.6 de [53].

REMARQUE. — Notons que Baaj [1] avait déjà obtenu des résultats similaires dans ses travaux sur les multiplicateurs non bornés d'une C^*-algèbre.

7.2.1. — Définissons dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\tau)$ les opérateurs α et γ associé à la déformation que nous voulons construire par les formules suivantes pour $\xi \in \mathcal{E}_\tau$:

$$(\alpha\xi)(\mu, z) = \mu\sqrt{1 - (1-\mu)^2\mu^2|z|^2}\,\xi(\mu, \mu z)\,,$$

$$(\gamma\xi)(\mu, z) = (1-\mu)z\,\xi(\mu, z)\,.$$

REMARQUE. — Si l'on convient que $\xi(\mu, z) = 0$ pour $(\mu, z) \notin \Omega$, on a :

$$(\alpha^*\xi)(\mu, z) = \mu^{-1}\sqrt{1 - (1-\mu)^2|z|^2}\,\xi(\mu, \mu^{-1}z).$$

DÉFINITION 7.3. — Soit Θ la $C(X)$-représentation non dégénérée de $C_0(\mathbb{C})$ dans le $C(X)$-module $\mathcal{E}_\tau$ définie pour $f \in C_0(\mathbb{C})$ par

$$\Theta(f)\xi(\mu, z) = f(z)\xi(\mu, z).$$

On note $\boldsymbol{g} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\tau)$ l'*image* par Θ de la fonction $z \mapsto z(1 + |z|^2)^{-1/2}$ et on définit l'*opérateur normal* Γ *affilié* à $\mathcal{K}(\mathcal{E}_\tau)$ image par Θ de la fonction $z \mapsto z$ affiliée à $C_0(\mathbb{C})$ (*cf.* [53, th. 1.2]).

Définissons pour $\mu \in X\backslash\{1\}$ l'opérateur :

$$K_\mu = (1-\mu)^{-1}(1 - \alpha_\mu^*) \in L((\mathcal{E}_\tau)_\mu).$$

On déduit alors de l'égalité $2 - \alpha_\mu - \alpha_\mu^* = |1 - \alpha_\mu^*|^2 + \mu^2|\gamma_\mu|^2$ la formule :

$$K_\mu + K_\mu^* = (1-\mu)|K_\mu|^2 + (1-\mu)\mu^2|\Gamma_\mu|^2 \geq 0,$$

d'où l'inégalité $|1 + K_\mu|^2 \geq 1 + |K_\mu|^2$; l'opérateur $(1 + K_\mu)^{-1}$ est donc de norme inférieure à 1.

Considérons en outre la représentation unitaire du groupe $\mathbb{R}_+^*$ dans la fibre $(\mathcal{E}_\tau)_1$ définie par la formule $(u_t\xi)(1, z) = t^{-1}\xi(1, t^{-1}z)$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $\xi \in \mathcal{E}_\tau$.

PROPOSITION 7.4. — *Définissons pour $\mu \in X$ l'opérateur $\mathfrak{Z}_\mu$ dans $L((\mathcal{E}_\tau)_\mu)$ par la formule suivante :*

$$\mathfrak{Z}_\mu = \begin{cases} (1-\mu)\big[(1-\mu)+(1-\alpha_\mu^*)\big]^{-1} = (1+K_\mu)^{-1} & si\ \mu \neq 1, \\ \int_0^1 u_t \,\mathrm{d}t & si\ \mu = 1. \end{cases}$$

a) *L'opérateur $\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}_\mu)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\tau)$.*

b) *Il existe un opérateur fermé K affilié à $\mathcal{K}(\mathcal{E}_\tau)$ tel que :*

▷ *$\mathfrak{Z}\cdot\mathcal{K}(\mathcal{E}_\tau)$ est un domaine essentiel pour K,*

▷ *quel que soit $x \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_\tau)$, on a $K(\mathfrak{Z}x) = (1-\mathfrak{Z})x$.*

Démonstration.

a) Donnons-nous une fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ de classe C^∞ sur $\mathbb{C}$ à support compact. En identifiant f à sa classe dans $L^2(\mathbb{C}) = (\mathcal{E}_\tau)_1$, il vient

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_t \,\mathrm{d}t f &= (1-\mu)\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu^n(u_\mu)^n f + h_\mu \\ &= (1-\mu)\big[1-\mu u_\mu\big]^{-1} f + h_\mu \\ &= (1-\mu)\big[(1-\mu)+(1-u_\mu)+(\mu-1)(1-u_\mu)\big]^{-1} f + h_\mu \\ &= (1-\mu)\big[(1-\mu)+(1-u_\mu)\big]^{-1} f + h_\mu + h'_\mu,\end{aligned}$$

où les normes des fonctions h_μ et de h'_μ sont arbitrairement petites, pourvu que μ soit suffisamment proche de 1. Par conséquent, $\mathfrak{Z}\Lambda_\tau(f)$ et de même $\mathfrak{Z}^*\Lambda_\tau(f)$ sont dans $\mathcal{E}_\tau$.

Comme de plus $\|\mathfrak{Z}_\mu\| \leq 1$ quel que soit $\mu \in X$, on a par densité $\mathfrak{Z}\xi \in \mathcal{E}_\tau$ et $\mathfrak{Z}^*\xi \in \mathcal{E}_\tau$ quel que soit $\xi \in \mathcal{E}_\tau$, d'où $\mathfrak{Z} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\tau)$.

b) Posons $a = d = \mathfrak{Z}$ et $b = c = 1 - \mathfrak{Z}$ et montrons que ces opérateurs satisfont aux hypothèses de la proposition 2.6 de [53], ce qui impliquera l'existence de K. Notons que les seules représentations irréductibles de l'algèbre $\mathcal{K}(\mathcal{E}_\tau)$ sont les représentations canoniques π_μ dans $(\mathcal{E}_\tau)_\mu$ pour $\mu \in X$.

Si $\mu = 1$, les opérateurs $\pi_\mu(a)$ et $\pi_\mu(b)$ sont bornés et il est facile de voir que les hypothèses de la proposition 2.6 de [53] sont vérifiées. Mais si $\mu = 1$, on a $\pi_1(a) = (1+K_1)^{-1}$ et $\pi_1(b) = K_1(1+K_1)^{-1}$ où K_1 est l'opérateur fermé antisymétrique qui engendre la représentation (u_t) de $C^*(\mathbb{R}_+^*)$ dans $(\mathcal{E}_\tau)_1 = L^2(\mathbb{C})$ (*i.e.* tel que $u_t = t^{K_1}$), de sorte que les hypothèses de la proposition 2.6 de [53] sont encore vérifiées. □

LEMME 7.5. — *Soit $E \subset \mathcal{L}(\mathcal{E}_\tau)$ le $C(X)$-module engendré par l'idéal $C_1(X)$ des fonctions $f \in C(X)$ nulles au point 1 et par les éléments de la forme ab où a est dans la $C(X)$-algèbre engendrée par $\mathfrak{z}$ et b est dans l'image par Θ de $C_0(\mathbb{C})$; considérons enfin la $C(X)$-algèbre stellaire A engendrée par E dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\tau)$.*

a) *Si l'on pose $v = (1 + |\Gamma|^2)^{-1/2} \in M(A)$, l'idéal v^2A est dense dans A.*

b) *Si π_μ est la représentation de $M(A)$ dans $M(A^\mu)$, l'opérateur $\pi_1(1 - 2\mathfrak{z})$ est unitaire.*

Démonstration.

a) Posons $Q = (4 + K)^{-1} = \mathfrak{z}(1 + 3\mathfrak{z})^{-1}$. Alors $\|Q\| \le \frac{1}{4}$ et $\mathfrak{z} = Q[1 - 3Q]^{-1}$ est dans l'algèbre fermée engendrée par Q, de sorte qu'il nous suffit de montrer que $\mathfrak{z}v^2$ et Q^*v^2 sont dans l'adhérence de v^2A pour conclure.

• Comme $|\gamma_\mu|\alpha_\mu^* = \mu\alpha_\mu^*|\gamma_\mu|$, on a pour $\mu \in X\backslash\{1\}$ l'égalité dans A_μ :

$$\mu K_\mu|\Gamma_\mu| = |\Gamma_\mu|(K_\mu - 1),$$

d'où $|\Gamma_\mu|^2\mathfrak{z}_\mu = (2 + \mu + \mu^2K_\mu)^{-1}|\Gamma_\mu|^2 = \mathfrak{z}_\mu[\mu^2 + (2 + \mu - \mu^2)\mathfrak{z}_\mu]^{-1}|\Gamma_\mu|^2$. Par conséquent, en identifiant μ à la fonction $\mu \mapsto \mu$, il vient :

$$\mathfrak{z}v^2 = v^2\mathfrak{z}[\mu^2 + (2 + \mu - \mu^2)\mathfrak{z}]^{-1} + v^2\mathfrak{z}\big(1 - [\mu^2 + (2 + \mu - \mu^2)\mathfrak{z}]^{-1}\big)v^2.$$

• De même, si $\mu \neq 1$, on a $\mu^2(4 + K_\mu)|\Gamma_\mu|^2 = |\Gamma_\mu|^2(4\mu^2 - \mu - 1 + K_\mu)$ dans A_μ ; mais sur un voisinage ouvert U de 1 dans X, on a $4\mu^2 - \mu - 2 \ge 0$, d'où l'égalité :

$$v_\mu^2Q_\mu = \big(\mu^2\mathfrak{z}_\mu[1 + (4\mu^2 - \mu - 2)\mathfrak{z}_\mu]^{-1} + a_\mu\big)v_\mu^2$$

où $a_\mu = v_\mu^2\mathfrak{z}_\mu([1 + 3\mathfrak{z}_\mu]^{-1} - [1 + (4\mu^2 - \mu - 2)\mathfrak{z}_\mu]^{-1})$ pour tout $\mu \in U\backslash\{1\}$.

b) Il suffit d'après le a) de montrer que les opérateurs

$$r = (2\mathfrak{z}^*\mathfrak{z} - \mathfrak{z} - \mathfrak{z}^*)v^2 \quad \text{et} \quad s = (2\mathfrak{z}\mathfrak{z}^* - \mathfrak{z} - \mathfrak{z}^*)(1 + 2\mathfrak{z}^*)^{-1}v^2$$

sont dans $C_1(X)A$.

• Si $\mu \in X$ est différent de 1, on a

$$(\mathfrak{z}_\mu + \mathfrak{z}_\mu^*)v_\mu^2 = \mathfrak{z}_\mu^*[2 + K_\mu + K_\mu^*]\mathfrak{z}_\mu v_\mu^2 = 2\mathfrak{z}_\mu^*\mathfrak{z}_\mu v_\mu^2 + (1 - \mu)r'_\mu$$

où $r'_\mu = (1-\mu)^{-1}\mathfrak{Z}_\mu^*[K_\mu + K_\mu^*]\mathfrak{Z}_\mu v_\mu^2$. Nous allons montrer que l'opérateur r'_μ est borné par une constante qui ne dépend pas de $\mu \neq 1$, ce qui impliquera que r appartient bien à $C_1(X)A$.

Si $\mu \neq 1$, on a $K_\mu + K_\mu^* = (1-\mu)|K_\mu|^2 + (1-\mu)\mu^2|\Gamma_\mu|^2$. On déduit donc de l'inégalité $\| \, |\Gamma_\mu|^2\mathfrak{Z}v_\mu^2\| \leq \|(2+\mu+\mu^2K_\mu)^{-1}\| \leq \frac{1}{2}$ la formule :

$$\|r'_\mu\| \leq \big\| \, |K_\mu|^2(1+|K_\mu|^2)^{-1}\big\| + \tfrac{1}{2} \leq \tfrac{3}{2}.$$

• De même, en utilisant l'égalité $\mathfrak{Z}_\mu^*(1+2\mathfrak{Z}_\mu^*)^{-1} = (3+K_\mu^*)^{-1}$, on en déduit que l'on a $(1-\mu)^{-1}s_\mu = \mathfrak{Z}_\mu|K_\mu^*|^2(3+K_\mu^*)v_\mu^2 + \mathfrak{Z}_\mu|\Gamma_\mu|^2(3+K_\mu^*)^{-1}v_\mu^2$ pour $\mu \neq 1$.

Si U' est un voisinage ouvert de 1 sur lequel $3-\mu^{-1}-\mu^{-2} \geq \frac{1}{2}$, on a donc pour tout $\mu \in U'\backslash\{1\}$ l'inégalité

$$(1-\mu)^{-1}\|s_\mu\| \leq \|K_\mu^*(3+K_\mu^*)^{-1}\| + 2 \leq 3$$

grâce à la formule $|\Gamma_\mu|^2(3+K_\mu^*)^{-1} = (3-\mu^{-1}-\mu^{-2}+\mu^{-2}K_\mu^*)^{-1}|\Gamma_\mu|^2$. □

PROPOSITION 7.6. — *Soit A la $C(X)$-algèbre stellaire introduite dans le lemme précédent.*

a) *La $C(X)$-représentation canonique θ de la $C(X)$-algèbre stellaire A dans $\mathcal{E}_\tau$ est un champ de représentations fidèles.*

b) *Les opérateurs K et Γ sont affiliés à A.*

Démonstration.

a) Si $\mu \in X\backslash\{1\}$, alors $A^\mu = \mathrm{SU}_\mu(2)$ et l'on a vu dans la section 7.1 que la représentation θ_μ de $\mathrm{SU}_\mu(2)$ dans $(\mathcal{E}_\tau)_\mu$ était fidèle. Il s'agit donc d'étudier la fidélité de la représentation θ_1 de A^1.

Si π_1 désigne la représentation de $M(A)$ dans $M(A^1)$, l'opérateur $\pi_1(1-2\mathfrak{Z})$ étant unitaire (Lemme 7.5 b), l'opérateur $\pi_1(\mathfrak{Z})$ engendre une représentation de $C_0(\mathbb{R}) \simeq C^*(\mathbb{R}_+^*)$ tandis que $\pi_1(\boldsymbol{g})$ engendre une représentation de $C_0(\mathbb{C})$.

Maintenant, si $\mu < 1$, on a $\Gamma_\mu(1+K_\mu) = (2+\mu K_\mu)\Gamma_\mu$ et donc $\Gamma_\mu\mathfrak{Z}_\mu = \mathfrak{Z}_\mu[\mu+(2-\mu)\mathfrak{Z}_\mu]^{-1}\Gamma_\mu$. Par conséquent, si $f_1, f_2 \in C_c(\mathbb{C})$ sont à support compact,

$$\pi_1\big(f_1(\Gamma)\Gamma\,\mathfrak{Z}f_2(\Gamma)\big) = \pi_1\big(f_1(\Gamma)\mathfrak{Z}[1+\mathfrak{Z}]^{-1}\,\Gamma f_2(\Gamma)\big).$$

La C^*-algèbre A^1 est donc un quotient de la C^*-algèbre pleine $C^*_{\max}(\mathfrak{G}) \simeq C_0(\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{R}_+^*$ du groupe $\mathfrak{G}$ des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{C})$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Mais $\mathfrak{G}$ est moyennable, de sorte que A^1 est isomorphe à la C^*-algèbre réduite $C^*_r(\mathfrak{G}) \simeq \theta_1(A)$ de $\mathfrak{G}$.

b) Comme toute représentation irréductible de A se factorise à travers une représentation d'une certaine fibre $A^\mu \simeq \theta_\mu(A)$, les opérateurs $a = d = \mathfrak{z} \in M(A)$ et $b = c = 1-\mathfrak{z} \in M(A)$ introduits dans la Proposition 7.4 vérifient les hypothèses du théorème 2.3 de [53] pour la C^*-algèbre A (en particulier, $\mathfrak{z}A$ est dense dans A), *i.e.* l'opérateur K est affilié à A.

Enfin, le Lemme 7.5 implique que si $v = (1+|\Gamma|^2)^{-1/2} \in M(A)$, l'idéal vA est dense dans A; l'opérateur Γ est donc affilié à A. $\square$

REMARQUE. — L'opérateur $(1+|K|^2)^{-1} = 2\mathfrak{z}(1+|1-2\mathfrak{z}|^2)^{-1}\mathfrak{z}^*$ est dans la C^*-algèbre engendrée par $\mathfrak{z}$ et définit donc un multiplicateur de l'algèbre A.

PROPOSITION 7.7.

a) *L'opérateur* $u = (1+|K|^2+(1-\mu)|\Gamma|^2)^{-1/2}$ *est dans l'algèbre* $M(A)$.

b) *Il existe des opérateurs fermés* $\widetilde{\Gamma}$ *et* $\widetilde{K}$ *affiliés à* $A \otimes_{C(X)} A$ *tels que les images dans* $A\otimes_{C(X)} A$ *des produits tensoriels* $uA\otimes_{\mathrm{alg}} uA$ *et* $vA\otimes_{\mathrm{alg}} vA$ *soient des domaines essentiels pour* $\widetilde{K}$ *et* $\widetilde{\Gamma}$ *et tels que :*

- *pour tous* y_1, y_2 *dans* uA, *on a :*

$$\widetilde{K}(y_1\otimes y_2) = Ky_1\otimes y_2 + y_1\otimes Ky_2 - (1-\mu)[Ky_1\otimes Ky_2] + \mu(1-\mu)[\Gamma y_1\otimes \Gamma^* y_2]\ ;$$

- *pour tous* y_1, y_2 *dans* vA, *on a :*

$$\widetilde{\Gamma}(y_1\otimes y_2) = \Gamma y_1 \otimes \alpha y_2 + \alpha^* y_1 \otimes \Gamma y_2.$$

c) *Il existe un unique morphisme* $C(X)$*-linéaire non dégénéré* $\delta : A \to M(A\otimes_{C(X)} A)$ *tel que* $\delta(\Gamma) = \widetilde{\Gamma}$ *et* $\delta(K) = \widetilde{K}$.

Démonstration.

a) Donnons-nous $a \in A$ et montrons que $u^2 a \in A$, ce qui impliquera que u^2 et donc $u = (u^2)^{1/2}$ sont dans $M(A)$. Mais pour ce faire, si $u' = (1+|K|^2)^{-1/2}$ appartient à $M(A)$, il suffit de voir que

$$q = \big(u^2 - (u')^2\big)a = (1-\mu)u^2|\Gamma|^2(u')^2 a \in C_1(X)A,$$

ce qui est vrai puisque $v^2 A$ est dense dans A (Lemme 7.5 a) et si $\|(u')^2 a - v^2 b\| < \varepsilon$ avec $b \in A$, on a $\|q - (1-\mu)u^2|\boldsymbol{g}|^2 b\| < \varepsilon$.

b) Définissons dans $M(A\otimes_{C(X)} A)$ les opérateurs a, b, c et d par les formules :

$$\begin{aligned}
a &= d = u\otimes u,\\
b &= (Ku)\otimes u + u\otimes (Ku) - (1-\mu)\big[(Ku)\otimes(Ku)\big]\\
&\qquad\qquad + \mu(1-\mu)\big[(\Gamma u)\otimes(\Gamma u)\big],\\
c &= (uK)\otimes u + u\otimes(uK) - (1-\mu)\big[(uK)\otimes(uK)\big]\\
&\qquad\qquad + \mu(1-\mu)\big[(u\Gamma)\otimes(u\Gamma)\big].
\end{aligned}$$

Ils vérifient les hypothèses de la proposition 2.6 de [53] puisque la $C(X)$-algèbre stellaire A est nucléaire et donc $A \otimes_{C(X)} A$ est un champ continu de C^*-algèbres sur X (Corollaire 3.26), ce qui implique que toute représentation irréductible de $A \otimes_{C(X)} A$ se factorise à travers une fibre $A^\mu \otimes A^\mu$ pour un certain $\mu \in X$.

On démontre de la même façon l'existence de l'opérateur $\widetilde{\Gamma}$ car α appartient à $M(A)$.

c) Posons $\delta(\boldsymbol{g}) = \widetilde{\Gamma}(1 + |\widetilde{\Gamma}|^2)^{-1/2}$ et $\delta(\mathfrak{z}) = (1 + \widetilde{K})^{-1}$.

Si θ_μ désigne la représentation canonique de A dans $(\mathcal{E}_\tau)_\mu$ pour $\mu \in X$, les deux conditions

$$\delta_\mu(\boldsymbol{g}) = (\theta_\mu \otimes \theta_\mu) \circ \delta(\boldsymbol{g}) \quad \text{et} \quad \delta_\mu(\mathfrak{z}) = (\theta_\mu \otimes \theta_\mu) \circ \delta(\mathfrak{z})$$

définissent de manière univoque un morphisme δ_μ de A dans

$$M[A^\mu \otimes A^\mu] \subset L\big[(\mathcal{E}_\tau \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_\tau)_\mu\big],$$

de sorte que δ se prolonge de manière unique en un morphisme coassociatif de A dans $M(A \otimes_{C(X)} A)$. □

7.2.2. — Attachons-nous maintenant à l'étude de la bisimplifiabilité du champ continu de C^*-algèbres de Hopf (A, δ).

PROPOSITION 7.8.

a) *Si a et b sont dans A et si $f \in C_0(\mathbb{C})$, les opérateurs $\delta(b)[a \otimes f(\Gamma)]$ et $\delta(b)[f(\Gamma) \otimes a]$ appartiennent tous deux à $A \otimes_{C(X)} A$.*

b) *Le champ continu de C^*-algèbres de Hopf (A, δ) est bisimplifiable.*

Démonstration.

a) Posons $u' = (1 + |K|^2)^{-1/2} \in M(A)$ et considérons l'opérateur $\widetilde{K}_r$ affilié à $A \otimes_{C(X)} A$ de domaine essentiel l'image dans $A \otimes_{C(X)} A$ du produit tensoriel $u'A \otimes_{\mathrm{alg}} u'A$ et tel que pour tous y_1, y_2 dans $u'A$,

$$\widetilde{K}_r(y_1 \otimes y_2) = K y_1 \otimes y_2 + y_1 \otimes K y_2.$$

On a alors dans $M(A \otimes_{C(X)} A)$ l'égalité

$$(1 + \widetilde{K}_r)^{-1}[\mathfrak{z}^2 \otimes 1] = \mathfrak{z} \otimes \mathfrak{z} - (1 + \widetilde{K}_r)^{-1}\big[(1 - \mathfrak{z})\mathfrak{z} \otimes \mathfrak{z}\big],$$

et comme $\mathfrak{z}^2 A$ est dense dans A, il vient $(1 + \widetilde{K}_r)^{-1}[a \otimes f(\Gamma)] \in A \otimes_{C(X)} A$ pour tout $a' \in A$ et tout $f \in C_0(\mathbb{C})$.

Maintenant, si l'on montre que $((1+\widetilde{K})^{-1}-(1+\widetilde{K}_r)^{-1})[a\otimes f(\Gamma)]$ est dans $C_1(X)M(A\otimes_{C(X)}A)$, on aura $(1+\widetilde{K})^{-1}[a\otimes f(\Gamma)]\in A\otimes_{C(X)}A$ et par densité $\delta(b)[a\otimes f(\Gamma)]\in A\otimes_{C(X)}A$ pour tous $b,a\in A$ et $f\in C_0(\mathbb{C})$.

Mais il suffit pour cela d'établir que $r=(\widetilde{K}-\widetilde{K}_r)(1+\widetilde{K}_r)^{-1}[a'\otimes f(\Gamma)]$ définit un élément de $C_1(X)\mathcal{L}(\mathcal{E}_r)$ pour un sous-ensemble dense de $a'\in A$ et $f\in C_0(\mathbb{C})$ puisque la différence $(1+\widetilde{K})^{-1}-(1+\widetilde{K}_r)^{-1}$ est bornée.

Si l'on se donne $a'=\mathfrak{z}^2a$ avec $a\in A$ et $f\in C_c(\mathbb{C})$ à support compact, on a la décomposition $r=r_1+r_2$ avec :

$$\begin{aligned} r_1 &= -\big[K\mathfrak{z}\otimes(1-\alpha^*)\big](1+\widetilde{K}_r)^{-1}\big[\mathfrak{z}a\otimes f(\Gamma)\big]\,,\\ r_2 &= \mu[\gamma\otimes\Gamma^*](1+\widetilde{K}_r)^{-1}\big[a'\otimes f(\Gamma)\big]\\ &= \mu(3+\mu\widetilde{K}_r)^{-1}\big[\gamma a'\otimes\Gamma^* f(\Gamma)\big]\,. \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que $(1-\alpha^*)A$ et γA sont inclus dans $C_1(X)A$.

On montre de la même façon que $\delta(b)[f(\Gamma)\otimes a]$ appartient à $A\otimes_{C(X)}A$.

b) Posons $v=(1+|\Gamma|^2)^{-1/2}$ et considérons l'opérateur $\widetilde{\Gamma}_r=\Gamma\otimes 1+1\otimes\Gamma$ affilié à $A\otimes_{C(X)}A$ de domaine essentiel $(v\otimes v)(A\otimes_{C(X)}A)$.

Si a est dans A, $[av^2\otimes 1](1+|\widetilde{\Gamma}_r|^2)^{-1}$ appartient à $A\otimes_{C(X)}C_0(\Omega)$ puisque la fonction $f(z_1,z_2)=(1+|z_1+z_2|^2)^{-1}(1+|z_1|^2)^{-1}$ est dans $C_0(\mathbb{C}\times\mathbb{C})$. Par conséquent, si b est dans A, l'opérateur

$$\delta(b)\big[a(1+|\Gamma|^2)^{-1}\otimes 1\big]\big(1+|\widetilde{\Gamma}_r|^2\big)^{-1}$$

définit un élément de $A\otimes_{C(X)}A$ d'après l'assertion a).

Nous allons montrer que si $a'=av^4$ et $c'=v^2c$ avec $a,c\in A$, l'opérateur

$$s=\delta(b)[a'\otimes 1]\big(1+|\widetilde{\Gamma}_r|^2\big)^{-1}\big(|\widetilde{\Gamma}_r|^2-|\widetilde{\Gamma}|^2\big)\delta(c')$$

est dans $C_1(X)[A\otimes_{C(X)}A]$, ce qui entraînera que la somme $\delta(b)[a'\otimes 1]\delta(c')$ appartient à $A\otimes_{C(X)}A$.

On a la décomposition $s=s_1+s_2+s_3$ avec :

$$\begin{aligned} s_1 =&\delta(b)[a\otimes 1]f\big(\Gamma\otimes 1,1\otimes\Gamma\big)\Big[\frac{|\Gamma|^2}{1+|\Gamma|^2}\otimes|\gamma|^2\Big]\delta(c')\times(1+\mu^2)\,,\\ s_2 =&\delta(b)[a\otimes 1]f'\big(\Gamma\otimes 1,1\otimes\Gamma\big)\big(1\otimes 1-\mu\alpha\otimes\alpha\big)\delta(c'),\\ s_3 =&\delta(b)[a\otimes 1]f'\big(\Gamma^*\otimes 1,1\otimes\Gamma^*\big)\big(1\otimes 1-\mu^{-1}\alpha^*\otimes\alpha^*\big)\delta(c')\,. \end{aligned}$$

où $f'(z_1,z_2)=f(z_1,z_2)(1+|z_1|^2)^{-1}\bar{z}_1z_2$.

Maintenant, si π est la représentation de $M(A\otimes_{C(X)}A)$ dans le quotient par $C_1(X)M(A\otimes_{C(X)}A)$ et si l'on pose $r_2=\delta(b)[a\otimes 1]f'(\Gamma\otimes 1, 1\otimes\Gamma)$, alors $\pi(s_2)=\pi(r_2\cdot\delta[(1-\alpha)c'])=0$. De même, $\pi(s_3)=0$ tandis qu'il est immédiat de vérifier que $\pi(s_1)=0$.

La densité de v^4A dans l'algèbre A implique pour a,b et c dans A que $\delta(b)(a\otimes 1)\delta(c)$ appartient à $A\otimes_{C(X)}A$. En particulier, les opérateurs $\delta(b^*)(a^*a\otimes 1)\delta(b)$ et donc $(a\otimes 1)\delta(b)$ appartiennent à $A\otimes_{C(X)}A$, d'où la simplifiabilité à gauche puisque toutes les fibres de (A,δ) sont simplifiables à gauche.

Si σ est la volte de $A\otimes_{C(X)}A$ définie par $\sigma(a\otimes b)=b\otimes a$ pour $a,b\in A$, on montre de même que $(\sigma\circ\delta)(b)(a\otimes 1)$ appartient à $A\otimes_{C(X)}A$ quels que soient les éléments a et b dans A. $\square$

Remarque. — En utilisant l'égalité $\alpha f(\Gamma)=f(\mu\Gamma)\alpha$ pour $f\in C_0(\mathbb{C})$, il vient par la même démonstration que celle de l'assertion b) que $T(1+|\widetilde{\Gamma}_r|^2)^{-1}(|\widetilde{\Gamma}_r|^2-|\widetilde{\Gamma}|^2)$ est dans $C_1(X)[A\otimes_{C(X)}A]$ pour tout T dans $(A\otimes_{C(X)}A)(v^4\otimes 1)$, argument qui sera utilisé dans la démonstration de la Proposition 7.10.

7.2.3. — Étudions maintenant le système des poids de Haar Φ associé au champ continu de C^*-algèbres de Hopf (A,δ) afin de définir les deux $C(X)$-modules hilbertiens $\mathcal{E}_\Phi$ et $\mathcal{E}_{\Phi\otimes\Phi}\simeq\mathcal{E}_\Phi\otimes_{C(X)}\mathcal{E}_\Phi$ sur lesquels agiront les unitaires U et V que l'on veut construire.

Fixons pour tout $k\in\mathbb{N}$ une fonction continue g_k sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $[0,1]$ égale à 1 sur l'intervalle $[0,k]$ et nulle hors de l'intervalle $[0,k+1]$; notons ξ_k l'image de la fonction $(\mu,z)\mapsto g_k(|z|)$ dans $\mathcal{E}_\tau$ et remarquons déjà que pour $a\in A_+$, la suite des $\langle\xi_n,a\xi_n\rangle\in C(X)$ est croissante : en effet, si pour $\mu\in X\backslash\{1\}$, Φ_μ est une forme de Haar sur A^μ, on a pour tout $a\in A$ et tout $f\in C_0(\mathbb{C})$ l'égalité $\Phi_\mu[f(\Gamma)a]=\Phi_\mu[af(\Gamma)]$ (*cf.* [50]) ; de même, si Φ_1 est un poids de Haar sur A^1, alors $C_c(\Omega)$ est dans le centralisateur de Φ_1 (*cf.* [44, § 4.3]).

Définissons le cône positif $\mathcal{M}_\Phi^+$ des $a\in A_+$ tels que $\Phi(a)=\sup_n\langle\xi_n,a\xi_n\rangle$ appartienne à $C(X)$. Il est normiquement dense dans A_+ puisque si a est dans A_+, on a $g_n(|\Gamma|)^*ag_n(|\Gamma|)\in\mathcal{M}_\Phi^+$ quel que soit $n\in\mathbb{N}$.

De plus, si $a\in\mathcal{M}_\Phi^+$, la suite des $\langle\xi_n,a\xi_n\rangle$ converge uniformément vers $\Phi(a)$ par le théorème de Dini et est donc de Cauchy, *i.e.* pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$ et tout $m\geq n$, on ait :

$$\begin{aligned}0&\leq\langle\xi_m,a\xi_m\rangle-\langle\xi_n,a\xi_n\rangle\\&=\Phi\Big[\big(g_m^2(|\Gamma|)-g_n^2(|\Gamma|)\big)^{1/2}a\big(g_m^2(|\Gamma|)-g_n^2(|\Gamma|)\big)^{1/2}\Big]\leq\varepsilon.\end{aligned}$$

Par conséquent, si $0 \leq b \leq a$, la suite des $\langle \xi_n, b\xi_n \rangle \in C(X)$ est aussi de Cauchy, ce qui signifie que le cône $\mathcal{M}_\Phi^+$ est héréditaire.

Il s'ensuit que le $C(X)$-module $\mathcal{N}_\Phi = \{a \in A\,;\ a^*a \in \mathcal{M}_\Phi^+\}$ est un idéal à gauche dense dans A. Si l'on prolonge l'application $C(X)$-linéaire Φ au $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_\Phi = \mathcal{N}_\Phi^* \mathcal{N}_\Phi$ engendré par $\mathcal{M}_\Phi^+$, le séparé complété $\mathcal{E}_\Phi$ de $\mathcal{N}_\Phi$ pour la semi-norme $\|\Phi(a^*a)\|^{1/2}$ est un $C(X)$-module hilbertien dont le produit scalaire est donné par la formule $\langle \Lambda_\Phi(a), \Lambda_\Phi(b) \rangle = \Phi(a^*b)$ pour $a, b \in \mathcal{N}_\Phi$.

REMARQUE. — Si $T \in M(A)$ est tel que la suite des $\langle \xi_n, T^*T\xi_n \rangle$ converge dans $C(X)$ et si (u_k) est une unité approchée de A, la suite des $\Lambda_\Phi(u_k T)$ converge dans $\mathcal{E}_\Phi$; on notera $\Lambda_\Phi T$ cette limite qui ne dépend pas du choix de (u_k).

Soit $\mathcal{M}_{\Phi\otimes\Phi}^+$ le cône positif des $T \in (A \otimes_{C(X)} A)_+$ tels que

$$(\Phi \otimes \Phi)(T) = \sup_{n,m} \big\langle \xi_n \otimes \xi_m, T(\xi_n \otimes \xi_m) \big\rangle \in C(X)$$

et soit $\mathcal{N}_{\Phi\otimes\Phi}$ le $C(X)$-module des $T \in A \otimes_{C(X)} A$ tels que $T^*T \in \mathcal{M}_{\Phi\otimes\Phi}^+$. Le $C(X)$-module engendré par les $a \otimes b$, $a, b \in \mathcal{N}_\Phi$, est un sous-module dense de $\mathcal{N}_{\Phi\otimes\Phi}$, de sorte que l'on identifiera le séparé complété de $\mathcal{N}_{\Phi\otimes\Phi}$ pour la semi-norme $\|(\Phi \otimes \Phi)(T^*T)\|^{1/2}$ et le $C(X)$-module hilbertien $\mathcal{E}_\Phi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_\Phi$.

Remarquons par ailleurs que le $C(X)$-module engendré par les éléments de la forme $\delta(a)(1 \otimes b)$ et le $C(X)$-module engendré par les éléments de la forme $\delta(a)(b \otimes 1)$ pour $a, b \in \mathcal{N}_\Phi$, sont tous deux des sous-modules denses de $\mathcal{N}_{\Phi\otimes\Phi}$ puisque (A, δ) est bisimplifiable et si a et b sont dans $\mathcal{N}_\Phi$, on a l'égalité :

$$\Phi\big(\omega_{\Lambda_\Phi(b),\Lambda_\Phi(b)} * a^*a\big) = \Phi\big(a^*a * \omega_{\Lambda_\Phi(b),\Lambda_\Phi(b)}\big) = \Phi(b^*b)\Phi(a^*a) \in C(X).$$

7.2.4. — Définissons les opérateurs isométriques V et $\widehat{V}$ sur $\mathcal{E}_\Phi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_\Phi$ par les formules suivantes pour $a, b \in \mathcal{N}_\Phi$:

$$V\big(\Lambda_\Phi(a) \otimes \Lambda_\Phi(b)\big) = \Lambda_{\Phi\otimes\Phi}\big(\delta(a)\,(1 \otimes b)\big),$$
$$\widehat{V}\big(\Lambda_{\Phi\otimes\Phi}(\delta(b)\,(a \otimes 1)\big) = \Lambda_\Phi(a) \otimes \Lambda_\Phi(b).$$

Comme V et $\widehat{V}$ sont $C(X)$-linéaires et d'image dense, ils définissent deux unitaires de $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\Phi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_\Phi)$.

LEMME 7.9. — *Le champ continu de représentations fidèles canonique π_Φ de A dans $\mathcal{E}_\Phi$ réalise un isomorphisme isométrique $C(X)$-linéaire entre le champ continu A et la $C(X)$-algèbre de Banach $L(S)$ associée à V.*

Démonstration. — Si $\eta = \Lambda_\Phi b$ où $b \in \mathcal{N}_\Phi$ et $\xi = \Lambda_\Phi(ag_n(|\Gamma|))$ avec $a \in A$ et $p \in \mathbb{N}$, on a alors

$$L(\omega_{\xi,\eta}) = (\Phi \otimes \pi_\Phi)\big[(g_p(|\Gamma|)a^* \otimes 1)\delta(b)\big] \in \pi_\Phi(A)$$

puisque (A,δ) est bisimplifiable. Comme de plus $(\pi_\Phi)_\mu(A) \simeq L_\mu(S)$ quel que soit $\mu \in X$, le Lemme 1.13 permet de conclure. □

On identifiera par la suite les deux $C(X)$-algèbres de Banach A et $L(S)$ à travers π_Φ. On notera par ailleurs $U_\mu \in L(\mathcal{E}_{\Phi_\mu})$ est la phase de l'opérateur densément défini par la formule $\Lambda_{\Phi_\mu}(a) \mapsto \Lambda_{\Phi_\mu}(\kappa(a))$ pour a appartenant à une sous-algèbre dense de $L_\mu(A)$ (*cf.* [4, th. 5.2 et exemple 6.11 b]).

PROPOSITION 7.10.

a) *Les unitaires multiplicatifs V et $\widehat{V}$ sont coréguliers.*

b) *L'opérateur $U = (U_\mu)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\Phi)$.*

c) *Le triplet $(\mathcal{E}_\Phi, V, U)$ forme un système de Kac.*

Démonstration.

a) Comme chaque V_μ est corégulier, il suffit pour démontrer la corégularité de V de voir que $(\omega_{\eta_1,\eta_2} \otimes \mathrm{id})(\Sigma V)$ est dans $\mathcal{K}(\mathcal{E}_\Phi)$ pour tous $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{E}_\Phi$ (Lemme 1.13). On peut de plus par densité se limiter au cas où $\eta_1 = a\zeta_1$ et $\eta_2 = \Lambda_\Phi b$ avec $a \in A$, $\zeta_1 \in \mathcal{E}_\Phi \backslash \{0\}$ et $b \in Av^2$ où $v = (1+|\Gamma|^2)^{-1/2}$.

Maintenant, si l'on montre pour tout $T' \in (A \otimes_{C(X)} A)\delta(v^2)$ que la suite des $(\Lambda_\phi \otimes \mathrm{id})(T'[g_n(|\Gamma|\,) \otimes 1])$ converge dans le A module hilbertien $\mathcal{E}_\Phi \otimes_{C(X)} A$ vers un élément noté $(\Lambda_\Phi \otimes \mathrm{id})(T')$, il existera en particulier pour $\varepsilon > 0$ un nombre fini de couples $(\xi_i, d_i) \in \mathcal{E}_\Phi \times A$ tels que :

$$\Big\|(\Lambda_\Phi \otimes \mathrm{id})\Big[(1 \otimes a^*)\,\delta(b) - \sum_i \xi_i \otimes d_i\Big]\Big\| < \varepsilon \|\zeta_1\|^{-1},$$

d'où $\|(\omega_{\eta_1,\eta_2} \otimes \mathrm{id})(\Sigma V) - \sum \theta_{\xi_i, d_i^* \zeta_1}\| < \varepsilon$.

Donnons-nous $T \in A \otimes_{C(X)} A$; posons $T' = T\delta(v^2)$ et montrons que la suite des $(\Lambda_\Phi \otimes \mathrm{id})(T'[g_n(|\Gamma|) \otimes 1])$ converge. Comme $(g_m - g_n)^2 = g_m^2 - g_n^2$ si $m \geq n$, on a l'égalité

$$\begin{aligned}\Big\|(\Lambda_\Phi \otimes \mathrm{id})\big(T'[g_m(|\Gamma|) \otimes 1]\big) - (\Lambda_\Phi \otimes \mathrm{id})\big(T'[g_n(|\Gamma|) \otimes 1]\big)\Big\|^2 \\ = \Big\|(\omega_{\xi_m,\xi_m} \otimes \mathrm{id})\big(|T'|^2\big) - (\omega_{\xi_n,\xi_n} \otimes \mathrm{id})\big(|T'|^2\big)\Big\|^2\end{aligned}$$

et il s'agit donc de voir que la suite croissante des $x_n = (\omega_{\xi_n,\xi_n} \otimes \mathrm{id})(|T'|^2)$ est de Cauchy dans A.

Remarquons que l'on peut supposer par densité que l'opérateur T est dans $(A \otimes_{C(X)} A)[v^4 \otimes g_k(|\Gamma|)]$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ puisque l'on a pour tout $q \in A \otimes_{C(X)} A$ auto-adjoint et tout $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité :

$$(\omega_{\xi_n,\xi_n} \otimes \mathrm{id})\big[\delta(v^2) q \delta(v^2)\big] \leq \|q\| \Phi(v^4).$$

Si maintenant $\widetilde{\Gamma}$ et $\widetilde{\Gamma}_r$ désignent les opérateurs $\delta(\Gamma)$ et $\Gamma \otimes 1 + 1 \otimes \Gamma$ affiliés à $A \otimes_{C(X)} A$ (Propositions 7.7 et 7.8), la remarque suivant la Proposition 7.8 implique que l'opérateur

$$Q = T\big(1 + |\widetilde{\Gamma}_r|^2\big)^{-1}\big(|\widetilde{\Gamma}|^2 - |\widetilde{\Gamma}_r|^2\big)$$

est dans l'algèbre $C_1(X)[A \otimes_{C(X)} A]$. Mais par construction,

$$Q\delta(v^2) = T(1 + |\widetilde{\Gamma}_r|^2)^{-1} - T\delta(v^2),$$

de sorte que si θ_μ est la représentation fidèle de A^μ dans $(\mathcal{E}_\tau)_\mu$ et si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe un voisinage ouvert U de 1 dans X tel que pour tous $n \in \mathbb{N}, \mu \in U$:

$$\Big\| \theta_\mu \circ (\omega_{\xi_n,\xi_n} \otimes \mathrm{id})\Big[|T'|^2 - \big(1 + |\widetilde{\Gamma}_r|^2\big)^{-1} |T|^2 \big(1 + |\widetilde{\Gamma}_r|^2\big)^{-1}\Big] \Big\| < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Comme de plus la suite des $g_k(|\Gamma|)^2(\mathrm{id} \otimes \omega_{\xi_n,\xi_n})[(1 + |\widetilde{\Gamma}_r|^2)^{-2}]$ est de Cauchy dans $C_0(\Omega)$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m \geq n \geq N$ et $\mu \in U$, on ait $0 \leq \theta_\mu(x_m - x_n) < \varepsilon$.

Maintenant sur le compact $X \backslash U$, il existe par le théorème de Dini un entier $N' \geq N$ tel que $\theta_\mu(x_m - x_n) < \varepsilon$ pour tous $m \geq n \geq N'$ et tout $\mu \in X \backslash U$, ce qui implique que la suite des x_n est bien de Cauchy dans A.

On montre de même que $(\omega \otimes \mathrm{id})(\widehat{V}^* \Sigma) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_\Phi)$ quel que soit $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\Phi)_*$ et donc que $\widehat{V}$ est corégulier.

b) Commençons par rappeler que si μ appartient à $X \backslash \{1\}$, alors $\kappa(|\gamma_\mu|^2) = |\gamma_\mu|^2$ et $f_z * |\gamma_\mu|^2 = |\gamma_\mu|^2$ quel que soit $z \in \mathbb{C}$ (*cf.* [50, A1.3]), de sorte que $U\Lambda_\Phi(f(|\Gamma|)) = \Lambda_\Phi(f(|\Gamma|))$ quelle que soit la fonction $f \in C_c(\mathbb{R}_+)$ (*cf.* [4, prop. 5.2]).

Maintenant, si R est l'isométrie $C(X)$-linéaire de A dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\Phi)$ associée à l'unitaire $\widehat{V}$ (Lemme 7.9), on a en notant $\zeta_n \in \mathcal{E}_\Phi$ le vecteur $\Lambda_\Phi(g_n(|\Gamma|))$ pour tout a dans $\mathcal{N}_\Phi$ et tous $n, m \in \mathbb{N}$ l'égalité :

$$\big\langle R(a)\zeta_n, R(a)\zeta_m \big\rangle = \big\langle L(a)U\zeta_n, L(a)U\zeta_m \big\rangle = \big\langle L(a)\zeta_n, L(a)\zeta_m \big\rangle.$$

La suite des $R(a)\Lambda_\Phi(g_n(|\Gamma|))$ converge donc dans $\mathcal{E}_\Phi$ et la limite ξ_a vérifie $(\xi_a)_\mu = U_\mu(\Lambda_\Phi a)_\mu$ quel que soit $\mu \in X$, ce qui implique que $U\Lambda_\Phi a = \xi_a$ est dans $\mathcal{E}_\Phi$. Par conséquent, l'opérateur $C(X)$-linéaire U est isométrique et d'image dense dans $\mathcal{E}_\Phi$, *i.e.* il définit un opérateur unitaire de $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\Phi)$.

c) Si $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$, alors $(\omega \otimes \mathrm{id})(\Sigma\widehat{V}) = (\mathrm{id} \otimes U\omega U)(\Sigma V)$. Mais l'assertion b) implique que $U\mathcal{L}(\mathcal{E})_*U = \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$; le $C(X)$-module $\mathcal{C}(V)$ engendré par les $(\mathrm{id} \otimes \omega)(\Sigma V)$ pour $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_*$ est donc $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ par a), d'où la régularité de V. $\square$

Proposition 7.11. — *La $C(X)$-algèbre de Hopf $(\widehat{S}, \widehat{\delta})$ associée à V est un champ continu de C^*-algèbres de Hopf.*

Démonstration. — Comme V est régulier et V_μ est moyennable quel que soit $\mu \in X$, la proposition résulte du Théorème 5.8. $\square$

Remarque. — Posons pour $s \in \mathbb{R}$ comme dans l'appendice A.1 de [50] :

$$f_{\mathrm{is}}(\mathfrak{z}) = \left[1 + (1-\mu)^{-1}(1-\mu^{\mathrm{is}})\right]^{-1} \in C(X) \quad \text{et} \quad f_{\mathrm{is}}(\boldsymbol{g}) = 0.$$

L'application f_{is} se prolonge alors de manière univoque en une représentation $C(X)$-linéaire de S dans $C(X)$ puisque l'unitaire V_μ est comoyennable quel que soit $\mu \in X$; de plus si $a \in S$, l'application $s \mapsto f_{\mathrm{is}}(a)$ est continue.

Définissons pour tout $s \in \mathbb{R}$ l'unitaire $u_s = (\mathrm{id} \otimes f_{is})(V) \in M(\widehat{S})$. L'application $s \mapsto \rho(u_s) \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\Phi)$ est faiblement et donc fortement continue, de sorte que le groupe à un paramètre d'unitaires $(\rho(u_s))$ définit une représentation non-dégénérée π de $C^*(\mathbb{R}) = C_0(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{E}_\Phi$; la Proposition 2.13 montre que cette représentation se factorise à travers une représentation π dans $M(\widehat{S})$ qui est non dégénérée par le théorème 2.9.5 de [14].

Notons $\widehat{F}$ l'image de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$ affiliée à $C_0(\mathbb{R})$ par π ; cet opérateur positif affilié à $\widehat{S}$ vérifie $u_s = \widehat{F}^{\mathrm{is}}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. De plus, comme $\widehat{\delta}(\widehat{F}^{\mathrm{is}}) = \widehat{F}^{\mathrm{is}} \otimes \widehat{F}^{\mathrm{is}}$ quel que soit $s \in \mathbb{R}$, si l'on pose $\boldsymbol{a} = \widehat{F}^{1/2}\eta\,\widehat{S}$ comme dans [39], alors :

$$\widehat{\delta}(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{a})\,\eta\,\big(\widehat{S} \otimes_{C(X)} \widehat{S}\big).$$

7.3. Le double quantique[a] associé à un système de Kac.

On va appliquer la construction du «double quantique» introduite dans [15], [39] avec la méthode de [4, § 8].

Donnons-nous un système de Kac $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \mathcal{U})$. Notons $\mathcal{Y}$ le champ continu d'unitaires multiplicatifs $\sigma\mathcal{X}^*\sigma$ où σ est la volte de $\mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} \mathcal{E})$; le triplet $(\mathcal{E}, \mathcal{Y}, \mathcal{U})$ est alors un système de Kac.

Définissons $\mathcal{Z} = \sigma\mathcal{X}(\mathcal{U}\otimes\mathcal{U})\mathcal{X}^*(\mathcal{U}\otimes\mathcal{U})\sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{E}\otimes_{C(X)}\mathcal{E})$. En adaptant les démonstrations de l'exemple b) de [4, § 8] comme dans le chapitre 4, on montre :

Proposition 7.12 (*cf.* [4, th 4.8.17]). — *Le champ continu d'unitaires multiplicatifs* $V = (\mathcal{Z}_{12}^*\mathcal{X}_{13}\mathcal{Z}_{12})\mathcal{Y}_{24}$ *agissant dans*

$$\mathcal{E}\otimes_{C(X)}\mathcal{E}\otimes_{C(X)}\mathcal{E}\otimes_{C(X)}\mathcal{E}$$

est birégulier et l'algèbre S_V *associée à* V *est égale au produit tensoriel* $S_{\mathcal{X}}\otimes_{C(X)}\widehat{S}_{\mathcal{X}}$ *au dessus de* $C(X)$.

Si on définit l'isomorphisme $\tau : S_{\mathcal{X}}\otimes_{C(X)}\widehat{S}_{\mathcal{X}} \to \widehat{S}_{\mathcal{X}}\otimes_{C(X)} S_{\mathcal{X}}$ *par la formule* $\tau(a\otimes b) = \mathcal{X}\sigma(b\otimes a)\sigma\mathcal{X}^*$, *alors* S_V *est une* $C(X)$*-algèbre de Hopf pour le champ de coproduits* $\delta_V = (\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id})(\delta_{\mathcal{X}}\otimes\delta_{\mathcal{Y}})$.

On en déduit :

Corollaire 7.13. — *Le système des* $\mathrm{SL}_\mu(2,\mathbb{C})$ *pour* $\mu\in\,]0,1[$ (*cf.* [39]) *admet une structure de champ continu de* C^**-algèbres.*

Démonstration. — Soient X une partie compacte de $]0,1]$ et A la $C(X)$-algèbre stellaire nucléaire considérée dans la section 7.1. Le champ continu d'unitaires multiplicatifs $\mathcal{X}$ associé au champ continu de C^*-algèbre de Woronowicz A vérifie les hypothèses de la Proposition 7.12. De plus, si μ est dans X, l'unitaire $\mathcal{X}_\mu$ est moyennable et comoyennable ; la remarque qui suit la Proposition 5.5 implique que V_μ est comoyennable quel que soit $\mu\in X$ et donc la $C(X)$-algèbre S_V associée au double quantique V est un champ continu de C^*-algèbres de fibres $(S_{\mathcal{X}})^\mu\otimes(\widehat{S}_{\mathcal{X}})^\mu$ (Théorème 5.8).

Enfin, si μ est dans $X\backslash\{1\}$, la fibre $(S_V)^\mu = \mathrm{SL}_\mu(2,\mathbb{C})$ est une C^*-algèbre de Hopf pour le coproduit $(\delta_V)_\mu$, *i.e.* le coproduit construit dans (*cf.* [39, § 4.16]). ∎

7.4. Le champ des $E_\mu(2)$.

Étant donnée une partie compacte X de $[1,+\infty[$ contenant le point 1, nous allons construire dans cette section un champ continu d'unitaires multiplicatifs irréductible (V,U) tel que pour tout $\mu\in X$, la C^*-algèbre de Hopf moyennable $(E_\mu(2),\delta_\mu)$ considérée par Woronowicz [53] et Baaj [2], [3] soit isomorphe à la C^*-algèbre de Hopf $L_\mu(S_V)$ associée à V_μ.

Soit Ω l'espace localement compact des points $(\mu,z)\in X\times\mathbb{C}$ tels que $|z|\in\mu^{\mathbb{Z}}\cup\{0\}$ si $\mu>1$. L'application $p:\Omega\to X$ qui à (μ,z) associe μ est ouverte ; donc $C_0(\Omega)$ est un champ continu de C^*-algèbres sur X (Proposition 3.14). L'application

$$\alpha : C_0(\Omega)\longrightarrow M\big(C_b(\Omega)\otimes C_0(\mathbb{Z}),C_0(\Omega\times\mathbb{Z})\big)$$

qui à $f \in C_0(\Omega)$ associe $\alpha(f)(\mu,z,n) = f(\mu,\mu^{-n}z)$ définit sur $C_0(\Omega)$ un champ de coactions de l'algèbre $C_0(\mathbb{Z})$, ce qui implique que la $C(X)$-algèbre $A = C_0(\Omega) \rtimes_\alpha C_0(\mathbb{Z})$ est un champ continu de C^*-algèbres (Corollaire 5.10). Notons que la $C(X)$-algèbre $A \otimes_{C(X)} A$ est aussi un champ continu de C^*-algèbres sur X car A est nucléaire (Proposition 3.26).

Notons $\boldsymbol{v}$ le générateur de $C^*(\mathbb{Z}) \subset M(A)$ et définissons l'opérateur normal $\boldsymbol{n} \in C_b(\Omega)$ par la formule $\boldsymbol{n}[(\mu,z)] = z$. Comme $C_b(\Omega) \subset M(A)$, $\boldsymbol{n}$ est affilié à A et on a la relation $\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{n}\boldsymbol{v} = h\boldsymbol{n}$ où la fonction $h \in C_b(\Omega)$ associe à (μ,z) le réel μ. On notera $D(\boldsymbol{n}) \subset A$ le domaine de l'opérateur $\boldsymbol{n}$.

PROPOSITION 7.14. — *Il existe un opérateur N affilié à $A \otimes_{C(X)} A$ tel que l'image du produit tensoriel algébrique $D(\boldsymbol{n}) \otimes_{\mathrm{alg}} D(\boldsymbol{n})$ dans $A \otimes_{C(X)} A$ soit un domaine essentiel pour N et pour y_1, y_2 dans $D(\boldsymbol{n})$,*

$$N(y_1 \otimes y_2) = \boldsymbol{v}y_1 \otimes \boldsymbol{n}y_2 + \boldsymbol{n}y_1 \otimes \boldsymbol{v}^*y_2.$$

De plus N est fermé.

Démonstration. — Posons $r = (1+\boldsymbol{n}^*\boldsymbol{n})^{-1/2} \in M(A)$, $a = d = r \otimes r$, $b = \boldsymbol{v}r \otimes \boldsymbol{n}r + \boldsymbol{n}r \otimes \boldsymbol{v}^*r$, $c = r\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{n}r + \boldsymbol{n}r \otimes r\boldsymbol{v}^*$ et soit π une représentation irréductible de $A \otimes_{C(X)} A$.

Comme $C(X)$ est inclus dans le centre de $A \otimes_{C(X)} A$, π se factorise à travers une représentation de $(A \otimes_{C(X)} A)^x = A^x \otimes A^x$ où x est un point de X. Les opérateurs $\pi(a)$, $\pi(b)$, $\pi(c)$ et $\pi(d)$ satisfont alors aux hypothèses de la proposition 2.6 de [53] grâce au théorème 3.1 de [53] dans le cas $x \neq 1$; le théorème 2.3 de [53] permet donc de conclure comme dans le théorème 3.2 de [53]. $\square$

Appelons $\delta : A \to M(A \otimes_{C(X)} A)$ l'unique morphisme vérifiant

$$\delta(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} \quad \text{et} \quad \delta(\boldsymbol{n}) = N$$

(il est bien défini car $(\boldsymbol{v}^* \otimes \boldsymbol{v}^*)N(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) = hN$).

Alors on a l'égalité

$$(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \delta = (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \delta$$

dans $M(A \otimes_{C(X)} A \otimes_{C(X)} A)$ (*cf.* [53, th. 3.4]).

Définissons l'application positive ν de l'algèbre involutive $C_c(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω à support compact à valeurs dans $C(X)$ par les formules :

- $\nu(f)(\mu) = (\mu - 1)\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu^{2j} \int_0^{2\pi} f\big(\mu, \mu^j \mathrm{e}^{i\theta}\big)\, \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \quad \text{si } \mu \neq 1\,;$

• $\nu(f)(1) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^{2\pi} f\big(1, r\mathrm{e}^{i\theta}\big)\, r \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\, \mathrm{d}r$.

Soit $\mathcal{M}_\nu^+$ l'ensemble des $f \in C_0(\Omega)_+$ tels que $\nu(f) \in C(X)_+$: c'est un cône héréditaire dense dans le cône positif $C_0(\Omega)_+$ de $C_0(\Omega)$.

Fixons en effet pour $k \in \mathbb{N}$ une fonction continue g_k sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $[0,1]$ égale à 1 sur la boule fermée $B_f(0,k)$ de centre 0 et de rayon k et nulle hors de la boule $B_f(0,k+1)$. Définissons alors $\widetilde{g_k} \in C_c(\Omega)$ par $\widetilde{g_k}(\mu, z) = g_k(z)$. Si f est dans $\mathcal{M}_\nu^+$, alors $\nu(f\widetilde{g_k})$ converge simplement et donc normiquement dans $C(X)$ vers $\nu(f)$. Par conséquent, si $f' \in C_0(\Omega)$ vérifie $0 \leq f' \leq f$, on a

$$0 \leq \nu\big[f'(\widetilde{g_j} - \widetilde{g_i})\big] \leq \nu\big[f(\widetilde{g_j} - \widetilde{g_i})\big] \quad \text{pour } j \geq i,$$

de sorte que la suite des $\nu(f'\widetilde{g_k}) \in C(X)$ est de Cauchy. Or $\nu(f'\widetilde{g_k})$ converge simplement vers $\nu(f')$; donc f' appartient à $\mathcal{M}_\nu^+$.

Si $\widehat{\alpha}$ est l'action duale de α définie pour $z \in S^1$ par $\widehat{\alpha}_z(\boldsymbol{v}) = z\boldsymbol{v}$ et $\widehat{\alpha}_z(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}$, $\epsilon = \int_{S^1} \widehat{\alpha}_z \, \mathrm{d}z$ est une espérance conditionnelle sur A à valeurs dans $C_0(\Omega)$.

Posons $\Phi = \nu \circ \epsilon$ et considérons le $C(X)$-module $\mathcal{N}_\Phi$ normiquement dense dans A des $a \in A$ tels que $\Phi(a^*a) \in C(X)$: c'est un idéal à gauche puisque le cône $\mathcal{M}_\nu^+$ est héréditaire et $\Phi(a^*a)$ est dans $C(X)$ si et seulement si $\epsilon(a^*a)$ appartient à $\mathcal{M}_\nu^+$.

Le séparé complété $\mathcal{E}_\Phi$ de $\mathcal{N}_\Phi$ pour la semi-norme $\|\Phi(a^*a)\|^{1/2}$ est un $C(X)$-module hilbertien de produit scalaire :

$$\big\langle \Lambda_\Phi(a), \Lambda_\Phi(b) \big\rangle = \Phi(a^*b) \quad a, b \in \mathcal{N}_\Phi.$$

Soit L la $C(X)$-représentation de A dans $\mathcal{E}_\Phi$ définie pour $a \in A$ et $b \in \mathcal{N}_\Phi$ par $L(a)\Lambda_\Phi(b) = \Lambda_\Phi(ab)$. Comme $\mathcal{N}_\Phi$ est normiquement dense ddans A, L est non-dégénérée. De plus, L est un champ de représentations fidèles car si $a \in A_+$ et $\mu \in X$ vérifient $\Phi_\mu(a) = 0$, alors $a^\mu = 0$.

Posons $u_k = \widetilde{g_k}(\boldsymbol{n}) \in A$ et soit $T \in M(A)$ tel que $\Phi(T^*T)$ soit dans $C(X)$. Alors la suite croissante des $\Phi(T^*u_kT)$ converge normiquement dans $C(X)$ vers $\Phi(T^*T)$ par le théorème de Dini. Comme

$$0 \leq \Phi\big(T^*(u_j - u_i)^2 T\big) \leq \Phi(T^*u_jT) - \Phi(T^*u_iT) \quad \text{si } j \geq i,$$

la suite des $\Lambda_\Phi(u_kT)$ est de Cauchy et converge donc dans $\mathcal{E}_\Phi$ vers un élément ξ_T. Mais si T est dans A, on a $\xi_T = \Lambda_\Phi(T)$, de sorte que l'on pourra noter sans ambiguïté $\Lambda_\Phi(T)$ l'élément ξ_T.

Rappelons que si ω est un champ continu d'états sur A et $a \in A$, on a :

$$\Phi(a * \omega) = \Phi(\omega * a) = \Phi(a) \quad \text{(d'après [2, th. 3.2])}.$$

Donc si a et b sont dans $\mathcal{N}_\Phi$, $\Phi(\omega_{\Lambda_\Phi(b),\Lambda_\Phi(b)} * a^*a) = \Phi(b^*b)\Phi(a^*a)$.

Soit $\Omega \times_X \Omega \subset X \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ l'ensemble des triplets (μ, z_1, z_2) tels que (μ, z_1) et (μ, z_2) soient dans Ω. On peut alors définir :

$$\nu \otimes \nu = (\nu_\mu \otimes \nu_\mu) : C_c(\Omega \times_X \Omega) \longrightarrow C(X),$$
$$\Phi \otimes \Phi = (\nu \otimes \nu)(\epsilon \otimes \epsilon).$$

Si $\mathcal{N}_{\Phi\otimes\Phi}$ est l'ensemble des $T \in A \otimes_{C(X)} A$ tels que $(\Phi \otimes \Phi)(T^*T) \in C(X)$, l'image du produit tensoriel algébrique $\mathcal{N}_\Phi \otimes_{alg} \mathcal{N}_\Phi$ dans $A \otimes_{C(X)} A$ est normiquement dense dans $\mathcal{N}_{\Phi\otimes\Phi}$; donc $\mathcal{E}_{\Phi\otimes\Phi} = \mathcal{E}_\Phi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_\Phi$.

Notons V l'isométrie de $\mathcal{E}_\Phi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_\Phi$ définie pour $a, b \in \mathcal{N}_\Phi$ par :

$$V\Lambda_\Phi(a) \otimes \Lambda_\Phi(b) = \Lambda_{\Phi\otimes\Phi}(\delta(a)1 \otimes b).$$

Alors V est $C(X)$-linéaire et $(V\mathcal{E}_\Phi)_\mu = (\mathcal{E}_\Phi)_\mu$ quel que soit μ dans X (*cf.* [2, prop. 4.1 a]) ; donc $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\Phi \otimes_{C(X)} \mathcal{E}_\Phi)$ est un champ continu d'unitaires multiplicatifs (non régulier). De plus, si a appartient à A, $(L_\mu \otimes L_\mu)\delta(a) = V_\mu(L_\mu(a) \otimes 1)V_\mu^*$ pour tout $\mu \in X$ (*cf.* [2, prop. 4.1 b]), de sorte que $(L \otimes L)\delta(a) = V(L(a) \otimes 1)V^*$.

Posons $U\Lambda_\Phi f(\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}^k = \Lambda_\Phi(h\boldsymbol{v})^{-k} f(-\boldsymbol{n})$ pour $f \in C_c(\Omega)$ et $k \in \mathbb{Z}$ (où $h \in C_b(\Omega)$ est définie par $h(\mu, z) = \mu$). Comme les combinaisons linéaires d'éléments de ce type sont denses dans $\mathcal{E}_\Phi$, l'application U s'étend en un opérateur unitaire auto-adjoint de $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\Phi)$ que l'on note U (*cf.* [2]). Il résulte de l'irréductibilité de (V_μ, U_μ) démontrée dans [2, § 5] et [3] que la paire (V, U) définit un champ continu d'unitaires multiplicatifs irréductible.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Baaj (S.). — *Thèse*, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1980.

[2] Baaj (S.). — *Représentation régulière du groupe quantique $E_\mu(2)$ de Woronowicz*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **314**, 1992, p. 1021–1026.

[3] BAAJ (S.). — *Représentation régulière du groupe quantique des déplacements de Woronowicz*, preprint.

[4] BAAJ (S.) et SKANDALIS (G.). — *Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C^*-algèbres*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), t. **26**, 1993, p. 425–488.

[5] BARTLE (R.G.) and GRAVES (L.M.). — *Mappings between function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **72**, 1952, p. 400–413.

[6] BAUVAL (A.). — *Déformation du groupe de Lie–Poisson* SU(2), prépublication n° 13 de l'URA 1408, Toulouse, 1992.

[7] BAUVAL (A.). — *$\mathcal{R}KK(X)$-nucléarité (d'après G. Skandalis)*, preprint.

[8] BLACKADAR (B.). — *K-theory for Operator Algebras*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., t. **5**, 1986.

[9] BLANCHARD (E.). — *Représentations de champs de C^*-algèbres*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **314**, 1992, p. 911–914.

[10] BOURBAKI (N.). — *Espace vectoriels topologiques.* — Hermann et C^{ie}, Paris, 1955.

[11] CHOI (M.D.) and EFFROS (E.G.). — *Nuclear C^*-algebras and injectivity : the general case*, Indiana Univ. Math. J., t. **26**, 1977, p. 443–446.

[12] COHEN (P.J.). — *Factorization in group algebras*, Duke Math. J., t. **26**, 1959, p. 199–205.

[13] CONNES (A.). — *Classification of injective factors*, Ann. of Math., t. **104**, 1976, p. 73–115.

[14] DIXMIER (J.). — *Les C^*-algèbres et leurs représentations.* — Gauthiers-Villars, Paris, 1969.

[15] DRINFEL'D (V.G.). — *Quantum groups.* — Proceedings of the I.C.M., Berkeley, California, 1986.

[16] DUPRÉ (M.J.). — *The classification and structure of C^*-algebra bundles*, Mem. Amer. Math. Soc., t. **222**, 1979.

[17] EFFROS (E.G.) and LANCE (E.C.). — *Tensor products of operator algebras*, Adv. in Math., t. **25**, 1977, p. 1–34.

[18] ELLIOTT (G.), NATSUME (T.) and NEST (R.). — *The Heisenberg Group and K-Theorie*, K-Theory, t. **7**, 1993, p. 409–428.

[19] ENOCK (M.) et SCHWARTZ (J.M.). — *Une dualité dans les algèbres de von Neumann*, Mémoire Soc. Math. France, suppl. Bull., n° **44**, 1975, p. 1–144.

[20] ENOCK (M.) et SCHWARTZ (J.M.). — *Algèbres de Kac moyennables*, Pacific J. Math., t. **125,2**, 1986, p. 363–379.

[21] FELL (J.M.G.). — *The structure of algebras of operator fields*, Acta Math., t. **106**, 1962, p. 237–268.

[22] GELFAND (I.M.) and NAIRMARK (M.A.). — *On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*, Mat. Sb., t. **12**, 1943, p. 197–213.

[23] GREEN (P.). — *The local structure of twisted covariance algebras*, Acta Math., t. **140**, 1978, p. 191–250.

[24] DE LA HARPE (P.) et VALETTE (A.). — *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Astérisque n° 175, 1989.

[25] KAC (G.I.). — *Ring groups and the duality principle*, Trans. Moscow Math. Soc., 1963, p. 291–339 (traduit de Trudy Moskov. Math. Obshch., t. **12**, 1963, p. 259–301).

[26] KASPAROV (G.G.). — *Hilbert C^*-modules : theorems of Stinespring aand Voiculescu*, J. Operator Theory, t. **4**, 1980, p. 133–150.

[27] KASPAROV (G.G.). — *Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture*, Invent. Math., t. **91**, 1988, p. 147–201.

[28] KATAYAMA (Y.). — *Takesaki's duality for a non degenerate coaction*, Math. Scand., t. **55**, 1985, p. 141–151.

[29] KIRCHBERG (E.). — *On non-semisplit extension, tensor products and exactness of group C^*-algebras*, Invent. Math., t. **112**, 1993, p. 449–489.

[30] KIRCHBERG (E.) and WASSERMANN (S.). — *Operations on continuous bundles of C^*–algebras*, preprint.

[31] LANCE (C.). — *Tensor product and nuclear C^*-algebras*, Operator Algebras and Applications, Proc. Sympos. Pure Math., t. **38,I**, 1982, p. 379–399.

[32] LEE (R.-Y.). — *On the C^*-algebras of operator fields*, Indiana Univ. Math. J., t. **25**, 1976, p. 303–314.

[33] MASUDA (T.), MIMACHI (K.), NAKAGAMI (Y.), NOUMI (M.) and UENO (K.). — *Representations of quantum groups and a q-analogue of orthogonal polynomials*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **307**, 1988, p. 559–564.

[34] MICHAEL (E.). — *Continuous selection I*, Ann. Math., t. **63**, 1956, p. 361–382.

[35] NAGY (G.). — *A framework for deformation quantization*, thesis, Berkeley, 1992.

[36] NAGY (G.). — *On the Haar measure of the quantum* SU(N) *group*, Comm. Math. Phys., t. **153**, 1993, p. 217–228.

[37] PASCHKE (W.). — *Inner product modules over B^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **182**, 1973, p. 443–468.

[38] PEDERSEN (G.K.). — *C^*-algebras and their automorphism groups.* — Academic press, 1979.

[39] PODLES (P.) and WORONOWICZ (S.L.). — *Quantum deformation of Lorentz group*, Comm. Math. Phys., t. **130**, 1990, p. 381–431.
[40] RIEFFEL (M.A.). — *Continuous fields of C^*-algebras coming from group cocycles and actions*, Math. Ann., t. **283**, 1989, p. 631–643.
[41] RIEFFEL (M.A.). — *Deformation quantization of Heisenberg manifolds*, Comm. Math. Phys., t. **122**, 1989, p. 531–562.
[42] SHEU (J.L.). — *Quantization of the Poisson* SU(2) *and its Poisson homogeneous space, the* 2*-sphere*, Comm. Math. Phys., t. **135**, 1991, p. 217–232.
[43] SKANDALIS (G.). — *Operator algebras and duality*, Proc. Intern. Congr. Math., t. **2**, 1990, p. 997–1009.
[44] STRATILA (S.). — *Modular theory in operator algebras.* — Academiei and Abacus Press, 1981.
[45] TAKESAKI (M.). — *On the cross norm of the direct product of C^*-algebras*, Tôhoku Math. J., t. **16**, 1964, p. 111–122.
[46] TOMIYAMA (J.). — *Topological representation of C^*-algebras*, Tôhoku Math. J., t. **14**, 1962, p. 187–204.
[47] VALIN (J.M.). — *C^*-algèbres de Hopf et C^*-algèbres de Kac*, Proc. London Math. Soc. (3), t. **50**, 1985, p. 131–174.
[48] VOICULESCU (D.). — *Amenability and Katz algebras, Algèbres d'opérateurs et leurs applications en physique mathématique*, Colloq. Intern. CNRS, t. **274**, 1977, p. 451–457.
[49] WASSERMANN (S.). — *C^*-algebras associated with groups with Kazhdan's property T*, Ann. Math., t. **134**, 1991, p. 423–431.
[50] WORONOWICZ (S.L.). — *Compact matrix pseudogroups*, Comm. Math. Phys., t. **111**, 1987, p. 613–665.
[51] WORONOWICZ (S.L.). — *Twisted* SU(2) *group. An example of a non commutative calculus*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., t. **23**, 1987, p. 117–181.
[52] WORONOWICZ (S.L.). — *Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted* SU(N) *group*, Invent. Math., t. **93**, 1988, p. 35–76.
[53] WORONOWICZ (S.L.). — *Unbounded Elements Affiliated with C^*-Algebras and Non-Compact Quantum Groups*, Comm. Math. Phys., t. **136**, 1991, p. 399–432.
[54] WORONOWICZ (S.L.). — *Compact quantum groups*, preprint.