BULLETIN DE LA S. M. F.

MARIE-CLAUDE ARNAUD

Création de points périodiques de tous types au voisinage des tores K.A.M.

Bulletin de la S. M. F., tome 123, nº 4 (1995), p. 591-603

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_4_591_0>

Bull. Soc. math. France,
123, 1995, p. 591–603.

CRÉATION DE POINTS PÉRIODIQUES DE TOUS TYPES AU VOISINAGE DES TORES K.A.M.

PAR

MARIE-CLAUDE ARNAUD (*)

RÉSUMÉ. — Nous montrons dans cet article qu'une partie résiduelle G de l'ensemble des difféomorphismes symplectiques de classe C^∞ d'une variété M vérifie : pour tout f dans G, tout tore lagrangien périodique de période notée τ sur lequel f^τ est C^∞ conjuguée à une rotation ergodique est limite de points périodiques de tous types (*i.e.* ayant une dimension elliptique et une dimension hyperbolique que l'on peut imposer à l'avance).

ABSTRACT. — We prove in this paper that there exists a residual subset G of the set of C^∞ symplectic diffeomorphisms of a manifold M such that : for all f in G, every Lagrangian periodic torus (with period τ) on which f^τ is conjugated to an ergodic rotation is limit of periodic points of all types (*i.e.* which have hyperbolic and elliptic dimensions that we can chose).

Le but de cet article est de mettre en évidence pour tout difféomorphisme f symplectique de classe C^∞ « générique » en un sens que nous préciserons ultérieurement un fermé invariant contenant un sous-ensemble dense de points périodiques de tous types (cette notion sera précisée par la suite).

Dans la première partie, nous énonçons les résultats que nous allons démontrer, et les comparons à d'autres résultats déjà connus. Dans la seconde partie, nous donnons la démonstration des résultats précédemment énoncés.

(*) Texte reçu le 25 avril 1994.
M.-C. ARNAUD, Université Paris Sud, bât. 425, Laboratoire de topologie, 91405 Orsay (France).

Classification AMS : 58F05, 58F08, 58F22.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1995/591/$ 5.00

1. Énoncés de résultats

Rappelons tout d'abord les notions que nous allons utiliser :

DÉFINITION 1.1. — Soit f un difféomorphisme symplectique de classe C^∞ d'une variété symplectique (M, ω). Un point périodique p de f de période élémentaire τ sera dit *général* si $\mathrm{D}f^\tau(p)$ a toutes ses valeurs propres distinctes (donc en particulier n'a pas de valeur propre égale à 1).

REMARQUE 1.2. — L'ensemble des difféomorphismes symplectiques de classe C^∞ de M dont tous les points périodiques sont généraux contient un G_δ dense (on dit aussi « *est un ensemble résiduel* ») de $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$ (ensemble des difféomorphismes symplectiques de M de classe C^∞), comme cela est démontré par C. ROBINSON dans [10].

DÉFINITION 1.3. — Soit $f \in \mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$ et p un point périodique de f, de période élémentaire τ. Alors :

- la *dimension elliptique* de p, notée $\mathrm{dime}(p)$, est la dimension du plus grand sous-espace vectoriel E de T_pM invariant par $\mathrm{D}f^\tau(p)$ tel que la restriction de $\mathrm{D}f^\tau(p)$ à E ait toutes ses valeurs propres de module 1 et différentes de 1 ;
- la *dimension hyperbolique* de p, notée $\mathrm{dimh}(p)$, est la dimension du plus grand sous-espace vectoriel H de T_pM invariant par $\mathrm{D}f^\tau(p)$ tel que la restriction de $\mathrm{D}f^\tau(p)$ à H ait toutes ses valeurs propres de module différent de 1 ;
- un tel point p sera dit *hyperbolique* si $\mathrm{dimh}(p) = \dim M$ et *complètement elliptique* si $\mathrm{dime}(p) = \dim M$; il sera dit *quasi-elliptique* si $\mathrm{dime}(p) \geq 2$;
- le *type* d'un tel point p périodique est $t(p) = (\mathrm{dime}(p), \mathrm{dimh}(p))$.

REMARQUE 1.4. — Remarquons qu'à cause du caractère symplectique des difféomorphismes considérés, le dimension elliptique et la dimension hyperbolique sont toujours paires ; de plus, en un point périodique général, on a

$$\mathrm{dime}(p) + \mathrm{dimh}(p) = \dim M$$

et si p est un point périodique général de $f \in \mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$, tout difféomorphisme $g \in \mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$ suffisamment proche de f possède un point périodique proche de p et de même type que p pour f.

On se demande alors s'il existe des ensembles dans lesquels les points périodiques d'un type donné forment une partie dense.

Rappelons que dans [3], on avait démontré que tout difféomorphisme symplectique d'une variété compacte suffisamment proche de l'identité a au moins un point fixe complètement elliptique. On y avait aussi démontré un résultat analogue concernant les difféomorphismes exacts symplectiques fortement monotones à torsion définie de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ (nous renvoyons le lecteur à [3] pour la définition de ces notions). Mais ce type de résultat ne donne une information que sur *un* point périodique et ne fournit évidemment aucun résultat de densité.

Le problème de «créer» des points périodiques (ce qu'on veut faire pour obtenir beaucoup de tels points) n'est pas du tout un problème trivial. Dans [9], C. Pugh et C. Robinson ont montré dans le cas où M est compacte qu'il existe un G_δ dense de $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$, G, tel que l'ensemble des points périodiques de tout élément de G est dense dans M. Malheureusement, leur démonstration utilise de façon fondamentale le caractère C^1 des perturbations qu'on s'autorise à faire et ne laisse aucun espoir à une généralisation aisée en classe C^r pour $r > 1$.

Faire apparaître des points périodiques d'un certain type semble a priori un problème encore plus difficile. Signalons à ce sujet le remarquable résultat démontré dans [8] :

Théorème (S. Newhouse). — *Si (M, ω) est une variété symplectique compacte, il existe un sous-ensemble résiduel $B \subset \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ tel que, si f appartient à B, f est soit Anosov, soit les points périodiques quasi-elliptiques de f sont denses dans M.*

Remarquons que l'on ne peut se libérer du cas Anosov : si f est Anosov, toutes ses perturbations sont Anosov et ses points périodiques sont hyperboliques.

Ceci nous permet de noter qu'il serait vain de chercher à voir apparaître tous les types de points périodiques sur un ensemble dense de M pour n'importe quel difféomorphisme symplectique : par exemple, si f est partiellement hyperbolique, on ne peut obtenir de point périodique complètement elliptique.

C'est pourquoi le résultat que nous obtenons ne concerne qu'un sous-ensemble particulier de M. Nous allons maintenant le définir :

Définition 1.5. — On appellera *tore lagrangien* de la variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$ tout tore n-dimensionnel L C^∞-plongé dans M tel que la restriction de ω à TL soit nulle.

Si $f \in \mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$, on note $LR(f)$ l'ensemble des tores lagrangiens «périodiques», *i.e.* invariants par un f^q pour un $q \geq 1$ (q étant choisi minimal) sur lesquels f^q est conjuguée de manière C^∞ à une translation de vecteur à coordonnées rationnellement indépendantes et non rationnelles (*i.e.* toute orbite de cette translation est dense).

On note alors

$$T(f) = \mathrm{Adh}\Big(\bigcup\{L; L \in LR(f)\}\Big) ;$$

c'est évidemment un fermé invariant par f.

Nous nous proposons de démontrer alors :

THÉORÈME 1.6. — *Soit (M,ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Il existe une partie résiduelle G de* $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$ *telle que tout élément f de G vérifie : pour tout $j \in \{0,\dots,n\}$, l'ensemble des points périodiques de f de type $(2j, 2(n-j))$ contient $T(f)$ dans son adhérence.*

La théorie de Kolmogorov–Arnold–Moser (cf. par exemple [4] et [5] à ce sujet) nous dit qu'il existe une partie résiduelle G' de $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$ telle que pour tout élément f de G', tout point périodique complètement elliptique de f est dans $T(f)$. Aussi :

COROLLAIRE 1.7. — *Soit (M,ω) une variété symplectique. Alors, il existe une partie résiduelle G de* $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$ *telle que tout élément f de G vérifie : l'adhérence de l'ensemble des points périodiques complètement elliptiques de f est égale à $T(f)$.*

REMARQUE 1.8. — Il peut sembler naturel de se poser la question suivante : un tore lagrangien invariant peut-il contenir un point périodique ? J'ai démontré dans [1] que si M est de dimension 4 (en dimension 2, le résultat est trivial), la réponse est non pour un ensemble résiduel de $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$.

En appliquant encore la théorie de Kolmogorov–Arnold–Moser (éventuellement dans une variété centre), on déduit aussi :

COROLLAIRE 1.9. — *Soit (M,ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Alors, il existe une partie résiduelle G de* $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$ *telle que tout élément f de G vérifie : pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, l'ensemble des points périodiques de type $(2j, 2(n-j))$ de f n'a pas de point isolé.*

REMARQUE 1.10. — Rappelons un résultat très proche du précédent dont la démonstration n'utilise pas la théorie de Kolmogorov–Arnold–Moser : il s'agit du théorème de Birkhoff-Lewis, dont le lecteur peut trouver une démonstration dans [7]. Ce théorème énonce en particulier que *pour tout $r \geq 4$, il existe un ensemble résiduel G dans* $\mathrm{Diff}^r_\omega(M)$ *tel que tout élément f de G vérifie : tout point quasi-elliptique de f est point d'accumulation de l'ensemble des points périodiques*; on peut même remplacer *périodique* par *périodique quasi-elliptique*, ou aussi écrire « *limite d'une suite de points périodiques hyperboliques* » comme le démontre

S. NEWHOUSE dans [8] ; on peut aussi voir que non seulement un tel point quasi-elliptique est limite des points périodiques considérés, mais encore qu'il est limite des orbites périodiques correspondantes.

J'ai utilisé ce dernier théorème dans [2] (partie 8) pour montrer que pour tout difféomorphisme f de cet ensemble résiduel G, tout point périodique complètement elliptique à torsion définie (cf. [2] pour la définition) est point d'accumulation de l'ensemble des points périodiques complètement elliptique, mais la méthode utilisée ne pouvait absolument pas se généraliser à tous les points périodiques complètement elliptiques.

En fait, nous verrons que nous obtenons dans la démonstration un résultat un peu plus précis :

PROPOSITION 1.11. — *Soit (M,ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Alors, il existe une partie résiduelle G de $\mathrm{Diff}^{\infty}_{\omega}(M)$ telle que tout élément f de G vérifie : pour tout $\tau \geq 1$, pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, pour tout $0 \leq k \leq j$, tout point périodique de période élémentaire τ et de type $(2j, 2(n-j))$ de f est limite d'orbites périodiques sous f^{τ} de points périodiques (distincts du point périodique considéré) de f^{τ} de type $(2k, 2(n-k))$.*

2. Démonstration des résultats annoncés

Le but de cette partie est de démontrer le THÉORÈME 1.6. Pour cela, on choisit (V_n) base dénombrable d'ouverts de M, dont on peut évidemment supposer qu'ils sont tous difféomorphes à une boule ouverte. Comme une intersection dénombrable d'ensembles résiduels est résiduelle, démontrer le THÉORÈME 1.6 revient à démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1. — *Soit (M,ω) une variété symplectique de dimension $2n$, $0 \leq j \leq n$ un entier et V un ouvert non vide de M. Alors, l'ensemble F des éléments f de $\mathrm{Diff}^{\infty}_{\omega}(M)$ tels que :*

- *soit V ne rencontre aucun élément de $LR(f)$;*
- *soit V contient un point périodique de type $(2j, 2(n-j))$;*

est résiduel dans $\mathrm{Diff}^{\infty}_{\omega}(M)$.

Démonstration du théorème 2. 1. — La démonstration de ce théorème va faire appel à plusieurs lemmes que nous allons énoncer au fil de nos besoins.

Commençons cette démonstration ; pour cela, considérons un élément f quelconque de $\mathrm{Diff}^{\infty}_{\omega}(M)$, et U un voisinage de f dans $\mathrm{Diff}^{\infty}_{\omega}(M)$. Deux cas se présentent alors à nous :

• soit pour tout $g \in U$, il n'existe pas d'élément de $LR(g)$ qui rencontre V ; dans ce cas, U est un voisinage de f inclus dans F ;

• soit il existe un élément g de U tel que $LR(g)$ rencontre V ; nous allons alors montrer qu'il existe h dans U qui possède un point périodique général de type $(2j, 2(n-j))$ dans V, et donc un ouvert non vide de U dont tout élément possède un point périodique général de type $(2j, 2(n-j))$ dans V.

Si effectivement nous montrons ce que nous venons d'écrire, nous aurons montré que F contient un ouvert dense, et donc est résiduel.

Plaçons nous donc dans le cas où g est dans U et où il existe un élément T de $LR(g)$ qui rencontre V. On notera τ la plus petite période de T. Remarquons que comme toute orbite d'un point de T sous g^τ est dense dans T, les tores T, $g(T)$, …, $g^{\tau-1}(T)$ sont deux à deux disjoints. Aussi, il existe un petit voisinage W de T tel que : toute perturbation assez petite de g^τ à support dans W s'écrit h^τ pour un h proche de g. C'est pourquoi, désormais et sans plus nous poser de questions, nous perturberons g^τ.

On se ramène à travailler dans $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ grâce au résultat suivant :

LEMME 2.2 (A. WEINSTEIN). — *Il existe un difféomorphisme symplectique Φ d'un voisinage de T dans M sur un voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ dans $T^*\mathbb{T}^n$ (muni de sa structure symplectique canonique).*

Ce résultat est démontré par A. WEINSTEIN dans [12]. Il nous permet de nous ramener à travailler dans $T^*\mathbb{T}^n$, ce que nous ferons désormais. Par abus de notation, nous noterons V au lieu de $\Phi(V)$ et g^τ au lieu de $\Phi \circ g^\tau \circ \Phi^{-1}$.

Le deuxième lemme, utilisant le fait que la restriction de g^τ à $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ est conjuguée à une translation, permet d'écrire g^τ sous une forme plus simple :

LEMME 2.3 (M. HERMAN). — *Il existe un difféomorphisme symplectique H de classe C^∞ d'un voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ dans un voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ tel que $g_1 = H \circ g^\tau \circ H^{-1}$ se lise au voisinage de la section nulle :*

$$g_1(\theta, r) = \big(\theta + \alpha + b(\theta)r + \mathcal{O}(\|r\|^2), r + \mathcal{O}(\|r\|^2)\big)$$

étant entendu que les $\mathcal{O}(\|r\|^2)$ sont de classe C^∞, nulles et à différentielles nulles sur $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ et que $b(\theta)$ est une matrice symétrique.

Pour la démonstration de ce lemme, le lecteur peut se reporter à [6]. Désormais, nous travaillerons avec g_1 plutôt qu'avec g^τ. On peut alors judicieusement perturber g_1 de manière à rendre tous les points de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ périodiques :

LEMME 2.4. — *Il existe un difféomorphisme symplectique f_1 de classe C^∞ de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ à support dans un voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ aussi petit qu'on le veut, aussi proche de l'identité qu'on le veut, tel que $g_2 = f_1 \circ g_1$ s'écrive sur un voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$:*

$$g_2(\theta, r) = \big(\theta + \gamma + b(\theta)r + \mathcal{O}(\|r\|^2), r + \mathcal{O}(\|r\|^2)\big)$$

où γ est rationnel.

Démonstration du lemme 2.4. — Soit $\beta \in \mathbb{R}^n$ «petit». On peut alors aisément construire une fonction de classe C^∞ $S(\theta, r)$ sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ aussi petite qu'on le veut (quitte à avoir choisi β assez petit) telle que :

- sur un voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ aussi petit qu'on le veut : $S(\theta, r) = -\beta \cdot r$;
- en dehors d'un voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ aussi petit qu'on le veut : $S(\theta, r) = 0$.

Cette fonction S, si on l'a choisie assez petite, est alors la fonction génératrice (cf. [11] pour la définition de cette notion) d'un difféomorphisme symplectique de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, noté f_1. Ce difféomorphisme est alors aussi proche qu'on le veut de l'identité, coïncide avec l'identité en dehors d'un voisinage aussi petit qu'on le veut de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$. De plus, par définition, si $f_1(\theta, r) = (\Theta, R)$ et si on considère des relèvements (encore notés θ et Θ) de θ et Θ, on a :

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}S\big(\tfrac{1}{2}(\theta + \Theta), \tfrac{1}{2}(r + R)\big) \\ &\qquad\qquad = (R - r)\,\mathrm{d}\big(\tfrac{1}{2}(\theta + \Theta)\big) - (\Theta - \theta)\,\mathrm{d}\big(\tfrac{1}{2}(r + R)\big). \end{aligned}$$

Aussi, on peut calculer sur un voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$

$$R - r = 0 = \mathcal{O}(\|r\|^2),$$

$$\Theta - \theta = \beta = \beta + \mathcal{O}(\|r\|^2)$$

et donc :

$$f_1(\theta, r) = \big(\theta + \beta + \mathcal{O}(\|r\|^2), r + \mathcal{O}(\|r\|^2)\big).$$

Si maintenant $g_2 = f_1 \circ g_1$, il est clair que g_2 est aussi proche qu'on le veut de g_1, coïncide avec g_1 en dehors d'un voisinage aussi petit qu'on le veut de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$, et que :

$$g_2(\theta, r) = \big(\theta + \alpha + \beta + \mathcal{O}(\|r\|^2), r + \mathcal{O}(\|r\|^2)\big). \quad \square$$

Le lemme suivant sert à avoir une torsion normale non dégénérée en une orbite choisie :

LEMME 2.5. — *Soit* $p = (\theta_0, 0)$ *un élément de* $H(V) \cap \mathbb{T}^n \times \{0\}$. *Il existe un difféomorphisme symplectique* f_2 *de classe* C^∞ *de* $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ *à support dans un voisinage de* $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ *aussi petit qu'on le veut, aussi proche de l'identité qu'on le veut, tel que si* q *est la période élémentaire de* p *pour* g_2, $g_3 = f_2 \circ g_2$ *s'écrit :*

$$g_3(\theta, r) = \big(\theta + \gamma + d(\theta)r + \mathcal{O}(\|r\|^2), r + \mathcal{O}(\|r\|^2)\big)$$

où $d(\theta_0) + d(\theta_0 + \gamma) + \cdots + d(\theta_0 + (q-1)\gamma)$ *est non dégénérée.*

Démonstration du lemme 2.5. — En utilisant une fonction plateau, il est aisé de trouver une application de classe C^∞ c de $\mathbb{T}^n$ dans l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$ telle que :

- le support de c est dans un voisinage aussi petit qu'on le veut de p, en particulier ne contient pas $p + (k\gamma, 0)$ pour $k \in \{1, \ldots, q-1\}$;
- $b(\theta_0) + b(\theta_0 + \gamma) + \ldots + b(\theta_0 + (q-1)\gamma) + c(\theta_0)$ est non dégénérée ;
- c est aussi proche (en topologie C^∞) de 0 qu'on le veut.

On peut alors aisément construire une fonction $S(\theta, r)$ de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ aussi petite qu'on le veut (quitte à avoir choisi c assez petit) telle que :

- sur un voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ aussi petit qu'on le veut :

$$S(\theta, r) = -\tfrac{1}{2} c(\theta)(r, r) \,;$$

- en dehors d'un voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ aussi petit qu'on le veut : $S(\theta, r) = 0$.

Cette fonction S, si on l'a choisie assez petite, est alors la fonction génératrice d'un difféomorphisme symplectique de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, noté f_2. Ce difféomorphisme est alors aussi proche qu'on le veut de l'identité, coïncide avec l'identité en dehors d'un voisinage aussi petit qu'on le veut de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$. De plus, par définition, si $f_2(\theta, r) = (\Theta, R)$ et si on considère des relèvements (encore notés θ et Θ) de θ et Θ, on a :

$$\mathrm{d}S\big(\tfrac{1}{2}(\theta + \Theta), \tfrac{1}{2}(r + R)\big) = (R - r)\,\mathrm{d}\big(\tfrac{1}{2}(\theta + \Theta)\big) - (\Theta - \theta)\,\mathrm{d}\big(\tfrac{1}{2}(r + R)\big).$$

Aussi, on peut calculer

$$R - r = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial \theta}\big(\tfrac{1}{2}(\theta + \Theta)\big)\big(\tfrac{1}{2}(r + R), \tfrac{1}{2}(r + R)\big) = \mathcal{O}\big(\|r\|^2\big),$$

$$\Theta - \theta = c\big(\tfrac{1}{2}(\theta + \Theta)\big)\big(\tfrac{1}{2}(r + R)\big) = c(\theta)r + \mathcal{O}\big(\|r\|^2\big)$$

et donc :

$$f_2(\theta, r) = \Big(\theta + c(\theta)r + \mathcal{O}\big(\|r\|^2\big), r + \mathcal{O}\big(\|r\|^2\big)\Big).$$

Si maintenant $g_3 = f_2 \circ g_2$, il est clair que g_3 est aussi proche qu'on le veut de g_1, coïncide avec g_1 en dehors d'un voisinage aussi petit qu'on le veut de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$, et que :

$$g_3(\theta, r) = \Big(\theta + \gamma + d(\theta)r + \mathcal{O}\big(\|r\|^2\big), r + \mathcal{O}\big(\|r\|^2\big)\Big). \quad \square$$

Enfin, le dernier lemme nous permet de faire apparaitre l'orbite périodique du type voulu :

LEMME 2. 6. — *Soit $p = (\theta_0, 0)$ un élément de $H(V) \cap \mathbb{T}^n \times \{0\}$. Il existe un difféomorphisme symplectique g_4 de classe C^∞ de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, aussi proche qu'on le veut de g_1, qui coïncide avec g_1 en dehors d'un voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ aussi petit qu'on le veut et tel que p est un points périodique de type $(2j, 2(n-j))$ de g_4.*

Démonstration du lemme 2.6. — Nous allons évidemment perturber g_3 (construit dans le LEMME 2.5). Par construction de g_3 et avec les mêmes notations que dans le lemme, on sait que

$$d(\theta_0) + d(\theta_0 + \gamma) + \cdots + d(\theta_0 + (q-1)\gamma) =: m(\theta_0)$$

est une matrice symétrique non dégénérée. Aussi, il existe une matrice P orthogonale telle que :

$$m(\theta_0) = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P$$

où les λ_i sont tous non nuls.

On peut aussi choisir un petit voisinage V_0 de θ_0 dans $\mathbb{T}^n$ tel que les $g_3^j(\mathrm{Adh}(V_0))$ pour $j \in \{0, \ldots, q-1\}$ soient deux à deux disjoints.

On peut alors construire une fonction ν de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, de classe C^∞, à support dans V_0, aussi petite qu'on le souhaite en topologie C^∞ telle que :

- θ_0 est un point critique (non dégénéré) de ν ;

• il existe j réels distincts, positifs et non nuls $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j$ et $(n-j)$ réels distincts, négatifs et non nuls $\varepsilon_{j+1}, \dots, \varepsilon_n$ tels que la hessienne de ν en θ_0 s'écrive :

$$\mathrm{D}^2\nu(\theta_0) = P^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_1\lambda_1^{-1} & & & \\ & \varepsilon_2\lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon_n\lambda_n^{-1} \end{pmatrix} P$$

Soit alors f_3 le difféomorphisme symplectique de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ donné par sa fonction génératrice S telle que :

• $S(\theta, r) = \nu(\theta)$ au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$;

• S est nulle en dehors d'un voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$.

Alors, il est clair que :

• $f_3(\theta, r) = (\theta, r + {}^t d\nu(\theta))$ au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$;

• f_3 coïncide avec l'identité en dehors d'un voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$.

Posons alors :

$$g_4 = f_3 \circ g_3.$$

Le difféomorphisme g_4 coïncide avec g_1 en dehors d'un voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ et :

$$g_4(\theta, r) = \Big(\theta + \gamma + d(\theta)r + \mathcal{O}\big(\|r\|^2\big), r + {}^t d\nu\big(\theta + \gamma + d(\theta)r\big) + \mathcal{O}\big(\|r\|^2\big)\Big).$$

De plus, on a $g_4^i(p) = p + i(\gamma, 0)$ pour tout i ; donc p est périodique de période q pour g_4. Comme au voisinage de $V_0 \times \{0\}$, g_4^q s'écrit $f_3 \circ g_3^q$ (car ν est à support dans V_0), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}g_4^q(\theta_0, 0) &= \mathrm{D}f_3(\theta_0, 0)\, \mathrm{D}g_3^q(\theta_0, 0) \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathrm{D}^2\nu(\theta_0) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & m(\theta_0) \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ P^{-1}(\varepsilon_i)(\lambda_i^{-1})P & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P^{-1}(\lambda_i)P \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ P^{-1}((\varepsilon_i)+I)(\lambda_i^{-1}) & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2I + (\varepsilon_i) & (\lambda_i) \\ -(\lambda_i^{-1}) & 0 \end{pmatrix} \\ &\qquad\qquad \times \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ P^{-1}((\varepsilon_i)+I)(\lambda_i^{-1}) & P^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

Or, (v_1, v_2) est un vecteur propre de $\begin{pmatrix} 2I + (\varepsilon_i) & (\lambda_i) \\ -(\lambda_i^{-1}) & 0 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre λ si et seulement si :

$$-(\lambda_i^{-1})v_1 = \lambda v_2 \,;$$

$$v_1 \in \operatorname{Ker}\bigl(\lambda^2 I - \lambda\bigl(2I + (\varepsilon_i)\bigr) + I\bigr),$$

matrice diagonale dont les valeurs propres sont les racines des équations

$$\lambda^2 - (2 + \varepsilon_i)\lambda + 1 = 0,$$

les ε_i positifs correspondant donc à des valeurs propres de module différent de 1 alors que les ε_i négatifs correspondent à des valeurs propres de module 1. □

Ceci conclut la démonstration du THÉORÈME 2.1.

COMMENTAIRE 2.7. — Résumons les deux idées principales de la démonstration :

- dans, un premier temps, on utilise le fait qu'on peut toujours approximer de manière C^∞ une translation par une translation de vecteur à coordonnées rationnelles (c'est un cas où le C^∞-closing lemma est élémentaire) ;
- dans un second temps, on utilise que la différentielle d'une translation a toutes ses valeurs propres égales à 1, et donc on peut imposer n'importe quel type de point périodique.

Expliquons maintenant comment on démontre les résultats de la partie 1 qui suivaient le THÉORÈME 1.6. Remarquons que le COROLLAIRE 1.7 est un corollaire immédiat de ce théorème. Commençons donc la démonstration du COROLLAIRE 1.9 :

Démonstration du corollaire 1.9. — Il suffit d'adapter la démonstration du THÉORÈME 2.1. Considérons en effet un difféomorphisme symplectique f de (M, ω) et p un point périodique de f de type $(2j, 2(n-j))$. On sait alors (le lecteur peut consulter par exemple dans [7] la preuve de ce résultat) qu'il existe une sous-variété symplectique locale de M en p de dimension $2j$, invariante par f et telle que la restriction de f à cette sous-variété admette p comme point périodique complètement elliptique. Par la théorie de Kolmogorov–Arnold–Moser, on sait qu'il existe dans cette sous-variété W, si f est dans un ensemble résiduel (nous ne préciserons pas cet ensemble), des éléments de $LR(f_{|W})$ (qui sont donc de dimension j) qui tendent vers p. En adaptant alors la démonstration du THÉORÈME 2.1, il est facile de voir que ces tores sont eux mêmes limites de points périodiques de $f_{|W}$ de tous types pour f parcourant un ensemble résiduel. Ces points périodiques pour $f_{|W}$, s'ils sont de type $(2k, 2(j-k))$, sont alors des points périodiques de f de type $(2k, 2(n-k))$: cette affirmation est juste un corollaire du LEMME 8.6 de [2]. □

Démonstration de la proposition 1.11. — Il s'agit juste de copier la démonstration du COROLLAIRE 1.9 que nous venons d'écrire, en remarquant en plus que les orbites périodiques construites dans la démonstration du THÉORÈME 2.1 sont entièrement comprises dans un voisinage du tore considéré, ce qui donne le résultat voulu. □

REMARQUE 2.8. — En fait, nous avons un peu triché dans la démonstration précédente, car en vérité, il n'existe pas de variété centre locale invariante, mais seulement une variété centre globale invariante immergée injectivement. Mais cela ne change rien à le démonstration.

REMERCIEMENTS. — Je tiens à remercier tout spécialement Michel HERMAN, sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour. Ce sont tant ses exposés que ses enrichissantes discussions qui m'ont permis de cerner le problème envisagé et d'en trouver la résolution présentée ici.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARNAUD (M.-C.). — *Points périodiques et tores invariants de difféomorphismes symplectiques, thèse de doctorat*, Univ. Paris 7, 1990.

[2] ARNAUD (M.-C.). — *Type des points fixes des difféomorphismes symplectiques de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$*, Supplément au Bull. Soc. Math. France, t. **48**, 1992.

[3] ARNAUD (M.-C.). — *Type of critical points of Hamiltonian functions and of fixed points of symplectic diffeomorphisms*, à paraître dans Nonlinearity.

[4] BOST (J.). — *Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens*, Astérisque, t. **133–134**, 1986, p. 113–157.

[5] DOUADY (R.). — *Applications du théorème des tores invariants*, thèse, Univ. Paris 7, 1982.

[6] Herman (M.R.). — *On the dynamic on Lagrangian tori invariant by symplectic diffeomorphisms*, preprint, 1990.

[7] Moser (J.). — *Proof of a generalized form of a fixed point theorem due to G.D. Birkhoff*, Lecture Notes in Math., t. **597**, 1977, p. 464–494.

[8] Newhouse (S.). — *Quasi-elliptic periodic points in conservative dynamical systems*, Amer. J. Math., t. **99** (5), 1977, p. 1061–1087.

[9] Pugh (C.) and Robinson (C.). — *The C^1 Closing Lemma, including Hamiltonians*, Ergodic Theory Dynamical Systems, t. **3**, 1983, p. 261–314.

[10] Robinson (C.). — *Generic properties of conservative systems*, Amer. J. Math., t. **92**, 1970, p. 562–601.

[11] Weinstein (A.). — *The invariance of Poincaré's generating function for canonical transformation*, Invent. Math., t. **16**, 1972, p. 202–213.

[12] Weinstein (A.). — *Lectures on symplectic manifolds*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., t. **29**, 1977.