BULLETIN DE LA S. M. F.

DOMINIQUE MANCHON

Opérateurs pseudodifférentiels et représentations unitaires des groupes de Lie

Bulletin de la S. M. F., tome 123, n° 1 (1995), p. 117-138
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_1_117_0>

Bull. Soc. math. France,
123, 1995, p. 117–138.

OPÉRATEURS PSEUDODIFFÉRENTIELS ET REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES DE LIE

PAR

DOMINIQUE MANCHON (*)

RÉSUMÉ. — Cet article constitue une généralisation à tout groupe de Lie de la construction d'opérateurs pseudodifférentiels sur les espaces de certaines représentations unitaires, obtenue dans un précédent article pour les groupes nilpotents. Le résultat central est une formule de Weyl de comptage des valeurs propres pour les opérateurs elliptiques dans les espaces de certaines représentations unitaires irréductibles, qui apparaît comme une conséquence de la formule des caractères de Kirillov.

ABSTRACT. — This article generalizes to an arbitrary Lie group the theory of pseudodifferential operators on some spaces of unitary representations of nilpotent Lie groups, considered in a previous work. The key result is a Weyl formula for the asymptotic distribution of eigenvalues of elliptic operators in some spaces of unitary irreducible representations, appearing as a consequence of Kirillov's character formula.

Introduction

Cet article est la suite de l'article sur le calcul symbolique de Weyl paru récemment (cf. [Ma3]), et constitue une généralisation à tout groupe de Lie de la construction d'opérateurs pseudodifférentiels sur les espaces de certaines représentations unitaires, obtenue dans le cas des groupes nilpotents (cf. [Ma1], [Ma2]). Le résultat central est une formule de Weyl de comptage des valeurs propres pour les opérateurs elliptiques dans les espaces des représentations unitaires irréductibles, qui apparaît comme une conséquence de la formule des caractères de Kirillov (cf. [Kir], [B-C-D], [Kh], etc.).

(*) Texte reçu le 12 juillet 1993, révisé le 4 janvier 1994.
D. MANCHON, CNRS, URA N° 750, BP 239, 54506 Vandœuvre CEDEX.
Email : manchon@iecn.u-nancy.fr

Mots clés : Algèbres de Lie, formule des caractères, groupes de Lie, méthode des orbites, opérateurs pseudodifférentiels, représentations.

Classification AMS : 22E15, 22E30, 35S05.

Soit G un groupe de Lie réel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et de dual $\mathfrak{g}^*$, et soit π une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$. Rappelons que — pour toute fonction p sur $\mathfrak{g}^*$ telle que sa transformée de Fourier inverse soit de classe C^∞ à support compact voisinage de 0 assez petit — on définit l'opérateur de symbole de Weyl p dans $\mathcal{H}_\pi$ par la formule :

$$p^{W,\pi} = \int_{\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}p(x)\, \pi(\exp x)\, \mathrm{d}x.$$

Si p et q sont deux telles fonctions on peut, quitte à restreindre encore un peu les supports de $\mathcal{F}^{-1}p$ et $\mathcal{F}^{-1}q$, trouver un symbole pour le composé des opérateurs :

$$p \# q(\xi) = \iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}p(x)\, \mathcal{F}^{-1}q(y)\, \mathrm{e}^{-i\langle x\cdot y, \xi\rangle}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

avec

$$x \cdot y = \log(\exp x \exp y) = x + y + \tfrac{1}{2}[x, y] + \cdots.$$

Le résultat principal de l'article [Ma3] consiste en l'extension de la multiplication déformée # en une correspondance bilinéaire :

$$AS^{m_1,Q_1}_{\rho_1}(\mathfrak{g}^*) \times AS^{m_2,Q_2}_{\rho_2}(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow AS^{m_1+m_2,Q_1\cdot Q_2}_{\inf(\rho_1,\rho_2)}(\mathfrak{g}^*)$$

où m_1 et m_2 sont des réels, ρ_1 et ρ_2 sont dans $]\frac{1}{2}, 1]$, Q_1 et Q_2 sont des voisinages compacts suffisamment petits de 0 dans $\mathfrak{g}$, et $AS^{m,Q}_\rho$ désigne la *classe de symboles analytiques* formée des fonctions p de classe C^∞ sur $\mathfrak{g}^*$ telles que

$$\operatorname{supp}(\mathcal{F}^{-1}p) \subset Q$$

et telles que :

$$\left|D^\alpha p(\xi)\right| \le C_\alpha\, \Lambda(\xi)^{m-\rho|\alpha|} \quad \text{avec} \quad \Lambda(\xi) = (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans la première partie de cet article, nous montrons que $p^{W,\pi}$ a un sens — comme opérateur non borné en général — pour tout symbole $p \in AS^{m,Q}_\rho(\mathfrak{g}^*)$, et que $p \# q$ est encore un symbole pour le composé. Nous montrons également certaines propriétés de l'opérateur $p^{W,\pi}$ en fonction du symbole p. Nous définissons l'hypoellipticité et l'ellipticité des symboles, et démontrons quelques propriétes spécifiques des opérateurs associés. Nous donnons également quelques propriétés pour des familles à un paramètre d'opérateurs et de symboles. Les résultats sont en tous points parallèles à ceux connus sur les opérateurs pseudodifférentiels sur $\mathbb{R}^n$ (cf. [He], [Shu]), mise à part la restriction « $\rho > \frac{1}{2}$ » provenant des particularités du calcul symbolique (cf. [Ma1], [Ma2], [Ma3]).

Dans la deuxième partie, nous démontrons une formule de Weyl pour le comportement asymptotique du spectre d'opérateurs elliptiques, dans le cas où la représentation π est irréductible et attachée à une orbite coadjointe Ω fermée et tempérée par une formule des caractères de Kirillov. Nous obtenons

$$N(t) \sim \int_{\Omega \cap \{p \leq t\}} \mathrm{d}\beta_\Omega$$

pour un symbole p elliptique positif, avec une estimation du terme d'erreur, mais qui n'est pas optimale. La méthode est celle des projections approximatives de Tulovskii et Shubin (cf. [T-S], [Fe1], [Fe2]) et la démonstration est une adaptation quasi-immédiate du cas nilpotent [Ma1] : nous en indiquons donc juste les grandes lignes. Nous espérons dans un prochain travail améliorer le terme d'erreur par l'utilisation de techniques d'opérateurs Fourier-intégraux.

La troisième partie, sous les mêmes hypothèses sur la représentation, établit un lien entre l'opérateur et les valeurs du symbole au voisinage de l'orbite : plus précisément, on montre que si le symbole $p \in AS_\rho^{m,Q}(\mathfrak{g}^*)$ décroît rapidement à l'infini sur un voisinage conique du cône asymptote à l'orbite, alors l'opérateur $p^{W,\pi}$ est régularisant, en ce sens qu'il envoie l'espace de la représentation dans les vecteurs C^∞. Ce résultat, qui apparaît lui aussi comme une conséquence directe de la formule des caractères de Kirillov, a été démontré dans le cas nilpotent dans [Ma2], par une méthode beaucoup moins simple et directe que celle utilisée ici. En application de ce résultat, nous démontrons la formule de Weyl pour des symboles Ω-elliptiques, c'est-à-dire qui sont elliptiques seulement dans la direction du cône asymptote à l'orbite Ω.

Enfin dans la dernière partie nous passons en revue quelques exemples.

Je remercie Jean-Louis CLERC pour ses remarques concernant l'exemple final.

I. Opérateurs et symboles hypoelliptiques

Soit G un groupe de Lie réel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dual $\mathfrak{g}^*$. On rappelle la définition des classes de symboles analytiques sur $\mathfrak{g}^*$: pour tout réel m, tout réel $\rho \in \,]0,1]$, et pour tout voisinage compact Q de 0 dans $\mathfrak{g}$, on pose

$$AS_\rho^{m,Q}(\mathfrak{g}^*) = \big\{p \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)\,;\ \big|D^\alpha p(\xi)\big| \leq C_\alpha\, \Lambda(\xi)^{m-\rho|\alpha|} \\ \text{et } \operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1}p \subset Q\big\}$$

avec
$$\Lambda(\xi) = (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette classe de symboles est un sous-espace fermé de l'espace de Fréchet

$S^m_\rho(\mathfrak{g}^*)$ pour la famille de semi-normes

$$N^{m,\alpha}_\rho(p) = \sup_{\mathfrak{g}^*} \big|D^\alpha p(\xi)\big|\, \Lambda(\xi)^{-m+\rho|\alpha|}$$

ou encore pour la famille équivalente

$$P^{m,k}_\rho(p) = \sum_{|\alpha|\leq k} N^{m,\alpha}_\rho(p)$$

où $S^m_\rho(\mathfrak{g}^*)$ désigne l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\mathfrak{g}^*$ vérifiant les mêmes conditions de croissance des dérivées, mais sans restrictions sur le support de la transformée de Fourier inverse [Ma3]. On peut donner un sens à l'opérateur $p^{W,\pi}$ pour un symbole p appartenant à l'une de ces classes : on définit, pour tout vecteur C^∞ u,

$$p^{W,\pi} u = \int_{\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}(\Lambda^{-2s}p)(y)\,(1-\Delta)^s\,\pi(\exp y)\,u\,\mathrm{d}y.$$

Cette intégrale converge pour s assez grand et coïncide avec la définition donnée en introduction lorsque p appartient à

$$AS^Q(\mathfrak{g}^*) = \bigcap_m AS^{m,Q}_\rho(\mathfrak{g}^*) = \big\{p \in S(\mathfrak{g}^*)\,;\ \operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}p \subset Q\big\}$$

I.1. Premières propriétés des opérateurs $p^{W,\pi}$.

PROPOSITION I.1.1. — *Si p appartient à $AS^Q(\mathfrak{g}^*)$, où Q est un voisinage de 0 difféomorphe à un voisinage de l'élément neutre de G par l'exponentielle, alors l'opérateur $p^{W,\pi}$ est régularisant.*

Démonstration. — On désigne par J le jacobien de l'exponentielle. Si u appartient à $\mathcal{H}_\pi$,

$$\begin{aligned}\big\langle \pi(\exp y)p^{W,\pi}u, v\big\rangle &= \int_{\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}p(x)\big\langle \pi(\exp y)\pi(\exp x)u, v\big\rangle\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}p(y^{-1}x)\big\langle \pi(\exp x)u, v\big\rangle J^{-1}(y^{-1}x)J(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

est bien une fonction C^∞ de y au voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$. □

PROPOSITION I.1.2. — *Soit (p_k) une suite de symboles dans $AS^{m,Q}_\rho(\mathfrak{g}^*)$, bornée dans cet espace de Fréchet, et tendant vers 0 au sens de la topologie C^∞ (convergence uniforme de toutes les dérivées sur tout compact). Alors, pour tout vecteur C^∞ u de la représentation π, la suite*

$$k \longmapsto p_k^{W,\pi} u$$

tend vers 0 dans $\mathcal{H}_\pi$

Démonstration. — Pour tout vecteur C^∞ u et pour un entier s assez grand on a :

$$p_k^{W,\pi} u = \int_{\mathfrak{g}} \frac{p_k(\xi)}{\Lambda^{2s}(\xi)} \Big(\int_Q e^{i\langle x,y\rangle} (1-\Delta)^s \pi(\exp y) u \,\mathrm{d}y \Big) \,đ\xi$$

avec $đ\xi = (2\pi)^{-n} \mathrm{d}\xi$. La suite de fonctions sous l'intégrale est majorée par :

$$C \Big(\int_Q (1-\Delta)^s \big\| \pi(\exp y) u \big\| \,\mathrm{d}y \Big) \Lambda(\xi)^{m-2s}$$

et donc par une fonction intégrable si s est assez grand. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue, d'où le lemme. □

PROPOSITION I.1.3. — *Soient a et b appartenant respectivement à $AS^{m_1,Q_1}_{\rho_1}(\mathfrak{g}^*)$ et $AS^{m_2,Q_2}_{\rho_2}(\mathfrak{g}^*)$, m_1 et m_2 réels, ρ_1 et ρ_2 dans $]\frac{1}{2},1]$, et Q_1, Q_2 des voisinages « assez petits » de 0 dans $\mathfrak{g}$. Alors, pour tout vecteur C^∞ u de la représentation π, les deux vecteurs C^∞*

$$(a \# b)^{W,\pi} u \quad et \quad (a^{W,\pi} \circ b^{W,\pi}) u$$

existent et sont égaux.

Démonstration. — La proposition est vraie si a et b sont respectivement dans $AS^{Q_1}(\mathfrak{g}^*)$ et $AS^{Q_2}(\mathfrak{g}^*)$. D'après L. HÖRMANDER [Hr1, chap. 2] il existe deux suites (a'_k) et (b'_k) dans $S(\mathfrak{g}^*)$ convergeant de manière C^∞ vers a et b respectivement en restant resp. bornées dans les classes de symboles « ordinaires » $S^{m_1}_{\rho_1}$ et $S^{m_2}_{\rho_2}$. Donc, d'après le théorème d'approximation [Ma2, th. 2.1], il existe deux projecteurs continus :

$$T^{Q_1} : S^{m_1}_{\rho_1} \longrightarrow AS^{m_1,Q_1}_{\rho_1},$$

$$T^{Q_2} : S^{m_2}_{\rho_2} \longrightarrow AS^{m_2,Q_2}_{\rho_2}$$

tels que $a_k = T^{Q_1} a'_k$ et $b_k = T^{Q_2} b'_k$ convergent au sens C^∞ vers $T^{Q_1} a = a$ et $T^{Q_2} b = b$ respectivement, en restant bornées dans $AS^{m_1,Q_1}_{\rho_1}$ et $AS^{m_2,Q_2}_{\rho_2}$ respectivement. Le théorème 4.2 de [Ma3] relatif au calcul symbolique nous dit alors que $a_k \# b_k$ converge vers $a \# b$ au sens C^∞ en restant bornée dans $AS^{m_1+m_2,\, Q_1 Q_2}_{\inf(\rho_1,\rho_2)}$. Donc pour tout vecteur C^∞ u,

$$(a_k \# b_k)^{W,\pi} u = (a_k^{W,\pi} \circ b_k^{W,\pi}) u$$

converge dans $\mathcal{H}_\pi$ vers $(a \# b)^{W,\pi}u$, d'après la PROPOSITION I.1.2. Reste à montrer que $(a_k^{W,\pi} \circ b_k^{W,\pi})u$ converge vers $(a^{W,\pi} \circ b^{W,\pi})u$. Pour cela, on écrit :

$$(a_k^{W,\pi} \circ b_k^{W,\pi})u = \iint_{\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*} \Big\{ \iint_{Q_1 \times Q_2} e^{i(\langle x,\xi\rangle + \langle y,\eta\rangle)} (1-\Delta)^s \pi(\exp x) \times (1-\Delta)^s \pi(\exp y) \, dx \, dy \Big\} \times a_k(\xi) b_k(\eta) \Lambda(\xi)^{-2s} \Lambda(\eta)^{-2s} \, đ\xi \, đ\eta.$$

Là encore, la proposition découle du théorème de Lebesgue, qui s'applique clairement dès que s est assez grand. ∎

I.2. Familles à un paramètre de symboles.

Pour tout couple de réels (m, m') et pour tous $\rho \in]0,1]$, $\rho' \in [0,1]$, on définit la classe de symboles avec paramètre

$$S_{\rho,\rho'}^{m,m'}(\mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+) = \big\{ p \in C^\infty(\mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+) \, ; \; \big| D^\alpha p(\xi,t) \big| \le C_\alpha \, \Lambda(\xi)^{m-\rho|\alpha|} \Lambda(t)^{m'-\rho'|\alpha|} \big\}$$

et les classes analytiques correspondantes :

$$AS_{\rho,\rho'}^{m,m',Q}(\mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+) = \big\{ p \in S_{\rho,\rho'}^{m,m'}(\mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+) \, ; \; \forall t \in \mathbb{R}_+, \; \operatorname{supp} \mathcal{F}_\xi^{-1} p \subset Q \big\}.$$

(On ne fera pas varier le compact Q avec le paramètre.) On remarque que la classe $S_{\rho,\rho'}^{m,m'}(\mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+)$ s'identifie aux familles à un paramètre de symboles p_t appartenant à $S_\rho^m(\mathfrak{g}^*)$ telles que :

$$N_\rho^{m,\alpha}(p_t) \le C_\alpha \, \Lambda(t)^{m'-\rho'|\alpha|}.$$

En passant en revue la démonstration du théorème 4.2 de [Ma3] relatif au calcul symbolique, on obtient sans difficulté la « variante à un paramètre » suivante.

THÉORÈME I.2.1. — *Soient a_t dans $AS_{\rho_1,\rho_1'}^{m_1,m_1',Q_1}$ et b_t dans $AS_{\rho_2,\rho_2'}^{m_2,m_2',Q_2}$, avec $\rho_1, \rho_2 > \frac{1}{2}$ et Q_1, Q_2 voisinages compacts de 0 assez petits dans $\mathfrak{g}$. Alors on a*

$$a_t \# b_t \in AS_{\inf(\rho_1,\rho_2), \; \inf(\rho_1',\rho_2')}^{m_1+m_2, \; m_1'+m_2', \; Q_1Q_2}$$

et dans le développement asymptotique, avec les notations de [Ma3], *nous avons :*

$$\mathcal{A}_k(a_t, b_t) \in AS_{\inf(\rho_1,\rho_2), \; \inf(\rho_1',\rho_2')}^{m_1+m_2-k(\rho_1+\rho_2-1), \; m_1'+m_2'-k(\rho_1'+\rho_2'), \; Q_1+Q_2},$$

$$R_N \in AS_{\inf(\rho_1,\rho_2), \; \inf(\rho_1',\rho_2')}^{m_1+m_2-(N+1)(\rho_1+\rho_2-1), \; m_1'+m_2'-(N+1)(\rho_1'+\rho_2'), \; Q_1+Q_2}.$$

THÉORÈME I.2.2 (approximation avec paramètre).— *Soit* $S_{\mathfrak{g}*}(\mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+)$ *l'espace des fonctions* $p \in C^\infty(\mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+)$ *telles que pour tout* N, N'

$$\left|D_\xi^\alpha p(\xi, t)\right| \leq C_{N,N'} \Lambda(t)^N \Lambda(\xi)^{N'}$$

Pour tout voisinage compact K *de* 0 *dans* $\mathfrak{g}$ *et pour une fonction* χ *dans* $C^\infty(\mathfrak{g})$ *à support dans* Q *et valant* 1 *au voisinage de* 0, *le projecteur*

$$T^Q : p_t \longmapsto p_t^Q = \mathcal{F}(\chi \mathcal{F}^{-1} p_t)$$

envoie $S_{\rho,\rho'}^{m,m'}(\mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+)$ *dans* $AS_{\rho,\rho'}^{m,m',Q}(\mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+)$, *et la différence* $p_t - T^Q p_t$ *appartient à* $S_{\mathfrak{g}*}(\mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+)$ *si* $\rho' > 0$.

Démonstration. — On sait [Ma3, th. 1.2] que $(I - T^Q)$ est une correspondance Fréchet-continue de $S_\rho^m(\mathfrak{g}^*)$ dans $S_\rho^M(\mathfrak{g}*)$ pour tout M. Cela vient du fait que $(1-\chi)$ est nulle au voisinage de 0. Remplaçant $(1-\chi)$ par $(1-\chi)\Lambda^{-2s}$, on voit qu'il en est de même de la correspondance $U^Q = (I - T^Q)\Delta^{-s}$. Donc, pour tout M, il existe un entier k tel que :

$$\begin{aligned} N_\rho^{M,\alpha}\big((I - T^Q)p_t\big) &= N_\rho^{M,0}\big((I - T^Q)D^\alpha p_t\big) = N_\rho^{M,0}(U^Q \Delta^s D^\alpha p_t) \\ &\leq P_\rho^{m,k}(\Delta^s D^\alpha p_t) \leq C\,\Lambda(t)^{m' - \rho'|\alpha| - 2\rho' s}. \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout M et tout s, il existe C telle que

$$\left|D^\alpha (I - T^Q) p_t(\xi)\right| \leq C\,\Lambda(\xi)^{M - \rho|\alpha|}\,\Lambda(t)^{m' - 2\rho' s - \rho'|\alpha|},$$

ce qui montre le théorème. □

I.3. Symboles analytiques hypoelliptiques.

Pour tout voisinage compact Q de 0 dans $\mathfrak{g}$ et pour $m_0 \leq m$, on désigne par $AHS_\rho^{m,m_0,Q}(\mathfrak{g}^*)$ l'ensemble des symboles $a \in AS_\rho^{m,Q}(\mathfrak{g}^*)$ tels qu'il existe C_1, C_2, R tels que pour tout $\xi \in \mathfrak{g}^*$,

$$\|\xi\| \geq R \implies \begin{cases} C_1\,\Lambda(\xi)^{m_0} \leq |a(\xi)| \leq C_2\,\Lambda(\xi)^m, \\ \forall \alpha,\ \exists C_\alpha > 0,\ \left|D^\alpha a(\xi)\right| \leq C_\alpha \left|a(\xi)\right| \Lambda(\xi)^{-\rho|\alpha|}. \end{cases}$$

Un symbole analytique appartenant à $AHS_\rho^{m,m_0,Q}$ est dit *hypoelliptique*; si $m_0 = m$, on dit que le symbole est *elliptique*.

L'hypoellipticité s'exprime bien si l'on introduit des classes de symboles un peu plus générales. On introduit une fonction réelle continue w sur $\mathfrak{g}^*$

(un *poids*) telle qu'il existe deux réels m, m' et deux constantes C, C' tels que pour $\|\xi\| \geq R \geq 0$ on ait :

$$C'\Lambda(\xi)^{m'} \leq w(\xi) \leq C\,\Lambda(\xi)^{m}.$$

On définit alors la classe $AS(w,\rho,Q)$ comme étant l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ telles que $\operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}p \subset Q$ et telles que :

$$\left|D^\alpha a(\xi)\right| \leq C_\alpha\, w(\xi)\Lambda(\xi)^{-\rho|\alpha|}.$$

L'hypoellipticité d'un symbole analytique se traduit alors par :

$$a \in AS\big(|a|,\rho,Q\big).$$

On a les inclusions :

$$AS_\rho^{m',Q} \subset AS(w,\rho,Q) \subset AS_\rho^{m,Q}, \quad AS_\rho^{m,Q} = AS(\Lambda^m,\rho,Q).$$

Il nous faut encore introduire la notion correspondante pour les familles à un paramètre. On considère cette fois-ci un poids w défini sur $\mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+$, continu et vérifiant pour $\|(\xi,t)\| \geq R > 0$:

$$C'\Lambda(\xi)^{m_1'}\Lambda(t)^{m_2'} \leq w(\xi,t) \leq C\,\Lambda(\xi)^{m_1}\Lambda(t)^{m_2}.$$

On définit alors la classe de symboles à paramètre :

$$AS(w,\rho,\rho',Q) = \big\{a_t\,;\ \operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}a_t \subset Q \ \text{ et } \\ |D^\alpha a_t(\xi)| \leq C_\alpha\,\Lambda(\xi)^{-\rho|\alpha|}\Lambda(t)^{-\rho'|\alpha|}\,w(x,t)\big\}.$$

Une famille à un paramètre de symboles (a_t) est *hypoelliptique* si on a $a_t \in AS(|a_t|,\rho,Q)$; elle est dite *elliptique* si de plus :

$$\big\|(\xi,t)\big\| \geq R \implies C_1\,\Lambda(\xi)^m\Lambda(t)^{m'} \leq \big|a_t(\xi)\big| \leq C_2\,\Lambda(\xi)^m\Lambda(t)^{m'}.$$

A partir du théorème 4.2 de [Ma3] et du THÉORÈME I.2.1, on montre facilement les deux résultats suivants :

PROPOSITION I.3.4. — *Soient Q_1 et Q_2 deux voisinages compacts de* 0 *dans* $\mathfrak{g}$ *assez petits,* w_1 *et* w_2 *deux poids sur* $\mathfrak{g}^*$, ρ_1 *et* ρ_2 *dans* $]0,1]$, *et soit* $\rho = \inf(\rho_1,\rho_2)$. *Alors :*

(a) *Si a appartient à $AS(w_1,\rho_1,Q_1)$ et b appartient à $AS(w_2,\rho_2,Q_2)$, le produit ab appartient à $AS(w_1w_2,\rho,Q_1+Q_2)$.*

(b) *Si a appartient à $AS(w_1, \rho_1, Q_1)$, $D^\alpha a$ est dans $AS(\Lambda^{-\rho_1|\alpha|} w_1)$.*

(c) *Si a appartient à $AS(w_1, \rho_1, Q_1)$ et b appartient à $AS(w_2, \rho_2, Q_2)$ avec $\rho_1 > \frac{1}{2}$ et $\rho_2 > \frac{1}{2}$, alors $a \# b$ appartient à $AS(w_1 w_2, \rho, Q_1 + Q_2)$, et dans le développement*

$$a \# b = \sum_{k=0}^{N} \mathcal{A}_k(a, b) + R_N(a, b),$$

le terme d'ordre k de la somme (resp. le reste R_N) appartient à

$$AS\big(\Lambda^{-k(\rho_1+\rho_2-1)} w_1 w_2, \rho, Q_1 + Q_2\big)$$

(resp. $AS(\Lambda^{-(N+1)(\rho_1+\rho_2-1)} w_1 w_2, \rho, Q)$, où Q est un compact de $\mathfrak{g}$ qui dépend de Q_1 et Q_2).

Proposition I.3.5. — *Soient Q_1 et Q_2 deux voisinages compacts de 0 dans $\mathfrak{g}$ assez petits, w_1 et w_2 deux poids sur $\mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+$, ρ_1 et ρ_2 dans $]0, 1]$, ρ'_1 et ρ'_2 dans $[0, 1]$, et soient $\rho = \inf(\rho_1, \rho_2)$, $\rho' = \inf(\rho'_1, \rho'_2)$. Alors :*

(a) *Si a_t est dans $AS(w_1, \rho_1, \rho'_1, Q_1)$ et b est dans $AS(w_2, \rho_2, \rho'_2, Q_2)$, le produit ab appartient à $AS(w_1 w_2, \rho, \rho', Q_1 + Q_2)$.*

(b) *Si a_t appartient à $AS(w_1, \rho_1, \rho'_1, Q_1)$, alors $D^\alpha a$ appartient à*

$$AS(\Lambda(\xi)^{-\rho_1|\alpha|}\big(\Lambda(t)^{-\rho'_1|\alpha|} w_1\big).$$

(c) *Si a_t est dans $AS(w_1, \rho_1, \rho'_1, Q_1)$ et b dans $AS(w_2, \rho_2, \rho'_2, Q_2)$, avec $\rho_1 > \frac{1}{2}$ et $\rho_2 > \frac{1}{2}$, alors $a \# b$ appartient à $AS(w_1 w_2, \rho, \rho', Q_1 + Q_2)$, et dans le développement le terme d'ordre k de la somme (resp. le reste R_N) appartient à*

$$AS\big(\Lambda(\xi)^{-k(\rho_1+\rho_2-1)} \Lambda(t)^{-k(\rho'_1+\rho'_2)} w_1 w_2, \rho, \rho', Q_1 + Q_2\big)$$

(resp. $AS(\Lambda(\xi)^{-(N+1)(\rho_1+\rho_2-1)} \Lambda(t)^{-(N+1)(\rho'_1+\rho'_2)} w_1 w_2, \rho, \rho', Q)$, où Q est un compact de $\mathfrak{g}$ qui dépend de Q_1 et Q_2).

Proposition I.3.6 (construction d'une paramétrixe). — *Soit a un élément de $AHS_\rho^{m, m_0, Q}$ avec $\rho > \frac{1}{2}$ et Q assez petit. Alors il existe b dans $AS_\rho^{-m_0, Q}$ tel que :*

$$a \# b = 1 + r \quad \text{et} \quad b \# a = 1 + r'$$

où r et r' sont dans $AS^{Q^2}(\mathfrak{g}^*)$.

Démonstration. — La construction de la paramétrixe est classique si on ne tient pas compte de l'analyticité (cf. [He], [Shu], [Ma1, prop. II.2.5]). Il faut ici adapter la démonstration aux symboles analytiques, grâce au théorème d'approximation : on considère un symbole $\tilde{b}_1$ qui coïncide avec $1/a$ au-dehors d'une boule centrée en 0, et b_1 une approximation analytique de $\tilde{b}_1$ telle que $\tilde{b}_1 - b_1 \in S(\mathfrak{g}^*)$ et telle que $\operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1} b_1 \subset P$, où P est un voisinage compact de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que $P^2 \subset Q$. Il est alors clair d'après la PROPOSITION I.3.4 que

$$a \# b_1 = 1 + r_1,$$

où r_1 appartient à $AS_\rho^{-(2\rho-1),Q^2}(\mathfrak{g}^*)$. On considère alors pour tout entier $k \geq 1$ une approximation analytique $r_{1,k}$ de r_1, telle que $r_1 - r_{1,k} \in S(\mathfrak{g}^*)$ et telle que $\operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1} r_{1,k} \subset P_k$, où P_k est un voisinage compact de 0 dans $\mathfrak{g}$ suffisamment petit pour que P_k^k soit contenu dans P. Pour tout $k \geq 1$, le symbole

$$b_k = (-1)^{k-1} b_1 \# r_{1,k-1}^{\#(k-1)}$$

appartient à $AS_\rho^{-m_0-(k-1)(2\rho-1),Q}$. Donc [Ma3, cor. 2.2], il existe un symbole b appartenant à $AS_\rho^{-m_0,Q}(\mathfrak{g}^*)$ (plus précisément à $AS(b_1, \rho, Q)$) admettant le développement asymptotique :

$$b \approx \sum_{k \geq 1} b_k.$$

Ce symbole est la paramétrixe cherchée. □

De même, une adaptation à l'aide du théorème d'approximation de l'algorithme de construction de la racine carrée approchée [Ma1, prop. II.2.6] permet d'obtenir l'analogue pour les symboles analytiques :

PROPOSITION I.3.7 (racine carrée approchée). — *Soit $a \in AHS_\rho^{m,m_0,Q}$ à valeurs réelles strictement positives, avec Q assez petit et $\rho > \frac{1}{2}$. Alors il existe $q \in AS_\rho^{\frac{1}{2}m,Q}$ tel que :*

$$q \# q = a + r \quad \textit{avec} \quad r \in AS^{Q^2}(\mathfrak{g}^*).$$

Nous avons, au vu des propositions II.2 8 et II.2 9 de [Ma1] et en utilisant le théorème d'approximation avec paramètre I.2.2, une « variante à paramètre » des deux propositions précédentes :

PROPOSITION I.3.8. — *Soient m et m' deux réels positifs, $\rho \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, $\rho' \in [0,1]$ avec $\rho + \rho' \leq 1$, et Q un voisinage compact de 0 dans $\mathfrak{g}$ assez petit. Soit $a_t \in AS^{m,m',Q}_{\rho,\rho'}$, ne s'annulant pas et hypoelliptique. Alors il existe $b_t \in AS^{0,0,Q}_{\rho,\rho'}$ tel que*

$$a_t \# b_t = 1 + r_t, \quad b_t \# a_t = 1 + r'_t,$$

où r_t et r'_t appartiennent à $S_{\mathfrak{g}^*}(\mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+)$ si $\rho' > 0$, et à $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+, S(\mathfrak{g}^*))$ si $\rho' = 0$, et de plus :

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1} r_t \subset Q^2, \quad \operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1} r'_t \subset Q^2.$$

PROPOSITION I.3.9. — *Soient m et m' deux réels positifs, $\rho \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, $\rho' \in [0,1]$ avec $\rho + \rho' \leq 1$, et Q un voisinage compact de 0 dans $\mathfrak{g}$ assez petit. Soit $a_t \in AS^{m,m',Q}_{\rho,\rho'}$, à valeurs réelles, et hypoelliptique. On suppose de plus que $a_t(\xi) \geq C > 0$. Alors il existe $q_t \in AS^{\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}m',Q}_{\rho,\rho'}$ tel que*

$$q_t \# q_t = 1 + r_t,$$

où r_t appartient à $S_{\mathfrak{g}^*}(\mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+)$ si $\rho' > 0$, et à $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+, S(\mathfrak{g}^*))$ si $\rho' = 0$, avec

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1} r_t \subset Q^2.$$

I.4. Propriétés des opérateurs dont le symbole est hypoelliptique.

PROPOSITION I.4.1. — *Si p est un symbole analytique hypoelliptique réel positif dans $AHS^{m,m_0,Q}_{\rho}$ avec Q assez petit et $\rho > \frac{1}{2}$, alors $p^{W,\pi}$ est un opérateur borné à gauche.*

Démonstration. — La PROPOSITION I.3.7 et la PROPOSITION I.1.1 entraînent l'existence de $q \in AS^{\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}m_0,Q}_{\rho}$ et $r \in AS^Q$ tels que

$$q^{W,\pi} \circ q^{W,\pi} = p^{W,\pi} + r^{W,\pi},$$

où $r^{W,\pi}$ est régularisant, donc borné. Comme d'autre part p est à valeurs réelles, $p^{W,\pi}$ est formellement auto-adjoint, et on a :

$$\langle p^{W,\pi} u, u \rangle = \langle q^{W,\pi} u, q^{W,\pi} u \rangle - \langle r^{W,\pi} u, u \rangle \geq -\|r^{W,\pi}\| \cdot \|u\|^2. \quad \square$$

COROLLAIRE I.4.2. — *Si p est un symbole borné, c'est-à-dire dans $AS^{0,Q}_{\rho}$ avec Q assez petit et $\rho > \frac{1}{2}$, l'opérateur $p^{W,\pi}$ est borné.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition précédente à $\pm p + C$, où C est une constante positive assez grande. $\square$

Terminons ce paragraphe par une variante à un paramètre de la PROPOSITION I.4.1.

PROPOSITION I.4.3. — *Soit* $p_t \in AS^{m,m',Q}_{\rho,\rho'}$ *à valeurs réelles, avec* $m \geq 0$, $m' \geq 0$, $\rho \in \,]\frac{1}{2}, 1]$, $\rho' \in [0,1]$ *et* $\rho + \rho' \leq 1$. *On suppose* $p_t \geq C > 0$ *et* p_t *hypoelliptique. Alors, si* $\rho' > 0$, $p_t^{W,\pi}$ *est un opérateur positif et si* $\rho' = 0$, *il existe une constante* C *telle que pour tout* t *assez grand* $p_t^{W,\pi} + C\,t^{m'} I$ *soit positif*

Démonstration. — La démonstration est la même que celle de [Ma1, prop. II.3.4] et utilise la racine carrée approchée avec paramètre. □

II. Formule de Weyl pour les opérateurs elliptiques

A partir de maintenant nous ferons quelques hypothèses supplémentaires sur la représentation : nous supposerons que π est une représentation unitaire irréductible du groupe G, et que cette représentation est associée à une orbite coadjointe Ω *fermée* et *tempérée* par la méthode de Kirillov, de manière à ce que la formule des caractères

$$\operatorname{Tr} p^{W,\pi} = \int_\Omega J(D)\, p(\omega)\, \mathrm{d}\beta_\omega$$

soit vérifiée, où J est une fonction analytique définie au voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ vérifiant $J(x) = 1 + O(\|x\|^2)$, et où $J(D)$ est l'opérateur « différentiel d'ordre infini » correspondant :

$$J(D) = \mathcal{F} J \mathcal{F}^{-1}.$$

C'est le cas notamment pour toutes les représentations unitaires irréductibles des groupes nilpotents, auquel cas $J = 1$ (cf. [Kir]), ou pour toutes les représentations de groupes résolubles obtenues par quantification géométrique à partir d'une orbite coadjointe tempérée et fermée (cf. [A-K], [B-C-D] et [Cha]). Dans ce cas, pour les orbites de dimension maximale on a la formule :

$$J(x) = \left[\det \frac{\operatorname{sh} \operatorname{ad} \frac{1}{2}x}{\operatorname{ad} \frac{1}{2}x}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Cette formule est aussi valable pour les séries discrète et principale d'un groupe réductif [Ro].

PROPOSITION II.1. — *Soit* π *une représentation unitaire irréductible de* G *satisfaisant les hypothèses ci-dessus, et soit* p *un symbole analytique hypoelliptique réel positif appartenant à* $AHS^{m,m_0,Q}_{\rho}$ *avec* Q *assez petit* *et $\rho > \frac{1}{2}$. Alors l'opérateur $p^{W,\pi}$ est essentiellement auto-adjoint, a un spectre discret borné à gauche, qui se confond avec la suite (λ_j) de ses valeurs propres; de plus, λ_j tend vers $+\infty$ lorsque j tend vers $+\infty$.*

Démonstration. — Cette proposition est un analogue des propositions 26.2 et 26.3 de [Shu] et se démontre de la même manière. Le point clé est le suivant : comme l'orbite est tempérée une certaine puissance de la résolvante est à trace, donc la résolvante est compacte. $\square$

On note $N(t)$ le nombre de valeurs propres de $p^{W,\pi}$ inférieures à t et on note $V(t)$ le volume :

$$V(t) = \int_{\Omega\cap\{p\leq t\}} \mathrm{d}\beta_\omega$$

où $\mathrm{d}\beta_\Omega$ désigne la mesure de Liouville sur l'orbite (cf. M. RAÏS, dans [B-C-D, § II]). Nous montrons ici l'équivalence asymptotique

$$N(t) \sim V(t)$$

lorsque t tend vers $+\infty$, pour certains opérateurs elliptiques. La démonstration heuristique de ce résultat peut se voir comme ceci : Si χ_t désigne l'indicatrice de $]-\infty, t]$, on a :

$$N(t) = \operatorname{Tr} \chi_t(p^{W,\pi}).$$

Remplaçant le projecteur spectral $\chi_t(p^{W,\pi})$ par son «approximation» $(\chi_t \circ p)^{W,\pi}$ on calcule :

$$\operatorname{Tr}(\chi_t \circ p)^{W,\pi}) = \widetilde{V}(t) = \int_{\Omega\cap\{J(D)p\leq t\}} \mathrm{d}\beta_\Omega.$$

Enfin $\widetilde{V}(t)$ et $V(t)$ sont équivalents, puisque la différence $J(D)p(\xi) - p(\xi)$ est négligeable devant p pour $\|\xi\|$ grand.

Pour donner un sens à ce raisonnement, il faut considérer des approximations analytiques de type exponentiel du symbole $\chi_t \circ p$. On procède d'abord comme dans [Ma1, § III.1] pour obtenir une famille d'approximations C^∞ de $\chi_t \circ p$. On considère une fonction ψ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,1]$, égale à 1 sur $]-\infty, 0]$, nulle sur $[1, +\infty[$, et on pose :

$$\psi_t(\xi) = \psi\Big(\frac{x-t}{t^{1-\kappa}}\Big)$$

où κ est un réel strictement positif. On a alors

$$\tilde{e}(t) = (\psi_t \circ p) \in S^{0,0}_{\rho'',\sigma''}(\mathfrak{g}^*)$$

pour tout couple (ρ'', σ'') tel que $m\sigma'' + \rho'' = \rho - m\kappa$. On utilise alors le THÉORÈME I.2.2 d'approximation à paramètre pour obtenir une famille d'approximations analytiques $(e_t) \in AS^{0,0,Q}_{\rho'',\sigma''}$ pour tout voisinage compact Q de 0 dans $\mathfrak{g}$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de ce chapitre.

THÉORÈME II.1. — *Soient $m > 0$, $\rho \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, soit p un symbole analytique borné à gauche, appartenant à $AHS_{\rho}^{m,m,Q}(\mathfrak{g}^*)$, avec Q assez petit. Alors pour tout $\kappa \in]0, (\rho - \frac{1}{2})/2m[$, pour tout $N > 0$, il existe deux constantes C_1, C_2 telles que :*

$$N(t) = \widetilde{V}(t) + \mathrm{O}\Big\{ \sup_{|t-\tau|<C_1 t^{1-\kappa}} \big(t^{-N} + \widetilde{V}(\tau + C_2\tau^{1-\kappa}) - \widetilde{V}(\tau)\big)^{\frac{1}{2}} \widetilde{V}(\tau)^{\frac{1}{2}} + \sup_{|t-\tau|<C_1 t^{1-\kappa}} \big(t^{-N} + \widetilde{V}(\tau + C_2\tau^{1-\kappa}) - \widetilde{V}(\tau)\big)\Big\}.$$

Démonstration. — La démonstration est strictement parallèle à celle donnée dans [Ma1, chap. III] pour les groupes nilpotents, à part l'application du THÉORÈME I.2.2 d'approximation à paramètre qui ne change rien au déroulement de la démonstration : nous en rappelons simplement le principe. On désigne par $\widetilde{N}(t)$ le nombre de valeurs propres de $E_t = e_t^{W,\pi}$ qui sont proches de 1, c'est-à-dire dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$. On montre à l'aide de la formule des caractères, que $\widetilde{N}(t)$ vérifie l'estimation donnée dans l'énoncé du théorème, et enfin on établit l'encadrement

$$\widetilde{N}(t - Ct^{1-\kappa}) \leq N(t) \leq \widetilde{N}(t + Ct^{1-\kappa}),$$

ce qui donne le théorème. Ce dernier encadrement est obtenu en établissant de manière précise le caractère de « projection approximative » vérifié par l'opérateur E_t, à savoir

$$(I - E_t)(p^{w,\pi} - tI)(I - E_t) + t^{1-\kappa} I \geq 0,$$

$$E_t\big((t + t^{1-\kappa})I - p^{w,\pi}\big)E_t + Ct^{1-\kappa} I \geq 0,$$

ces deux dernières estimations étant obtenues en montrant que les symboles des deux opérateurs membre de gauche satisfont aux hypothèses de la PROPOSITION I.4.3. □

THÉORÈME II.2. — *Soit p un polynôme à valeurs réelles défini sur $\mathfrak{g}^*$, elliptique, borné à gauche et de degré m. Alors pour tout $\varepsilon \in]0, 1/4m[$, lorsque t tend vers $+\infty$, on a :*

$$N(t) = V(t)\big(1 + \mathrm{O}(t^{-\frac{1}{4m}+\varepsilon})\big).$$

Démonstration. — Le théorème avec $\widetilde{V}(t)$ à la place de $V(t)$ se déduit, comme le théorème II.2.5 de [Ma1], du théorème précédent et d'un résultat de Nilsson [Nil, th.1]. Reste à passer de $\widetilde{V}$ à V. D'après l'hypothèse sur la représentation π, on sait que $q = J(D)p - p$ est un polynôme de degré $(m-2)$. Grâce à l'ellipticité de p on en déduit l'encadrement :

$$\begin{aligned}\big\|J(D)p(\xi)\big\| - C\big\|J(D)p(\xi)\big\|^{1-\frac{2}{m}} &\le \big\|p(\xi)\big\| \\ &\le \big\|J(D)p(\xi)\big\| + C\big\|J(D)p(\xi)\big\|^{1-\frac{2}{m}}\end{aligned}$$

D'où l'encadrement :

$$\widetilde{V}\big(t - Ct^{1-\frac{2}{m}}\big) \le V(t) \le \widetilde{V}\big(t + Ct^{1-\frac{2}{m}}\big).$$

On a par ailleurs (voir [T-S, § 3]) :

$$\frac{\widetilde{V}(t + C\,t^{1-\frac{2}{m}}) - \widetilde{V}(t)}{\widetilde{V}(t)} = \mathrm{O}(t^{-\frac{2}{m}}).$$

Donc :

$$\frac{V(t) - \widetilde{V}(t)}{\widetilde{V}(t)} = \mathrm{O}(t^{-\frac{2}{m}}),$$

d'où le résultat. $\square$

III. Comportement du symbole au voisinage de l'orbite coadjointe

On pourrait s'attendre à ce que les valeurs prises par le symbole p sur l'orbite coadjointe Ω déterminent l'opérateur $p^{W,\pi}$ pour toute représentation associée à cette orbite par la méthode de Kirillov. Il n'en est en général rien, sauf si Ω est plate [Lu]. Nous donnons cependant ici une version faible de cette localisation sur l'orbite.

THÉORÈME III.I. — *Soit π une représentation unitaire irréductible de G satisfaisant les hypothèses du chapitre II; soient Ω son orbite coadjointe associée et $AC(\Omega)$ son cône asymptote. Soient $p \in AS_\rho^{m,Q}(\mathfrak{g}^*)$, avec Q voisinage compact de 0 dans $\mathfrak{g}$ assez petit et $\rho > \frac{1}{2}$. Alors si $WF(\mathcal{F}^{-1}p) \cap AC(\Omega) = \emptyset$, l'opérateur $p^{W,\pi}$ est régularisant.*

Démonstration. — Le support singulier de $\mathcal{F}^{-1}p$ est réduit à $\{0\}$, son front d'onde est donc bien assimilable à un cône dans $\mathfrak{g}^*$. Il s'agit donc de montrer que si p est à décroissance rapide sur un voisinage conique de $AC(\Omega)$, l'opérateur $p^{W,\pi}$ est régularisant. Ce théorème est démontré dans [Ma2] pour les groupes nilpotents, sous une forme un peu différente. La démonstration est ici à la fois plus générale et beaucoup plus simple.

Si p est à décroissance rapide sur un voisinage conique W de $AC(\Omega)$, il en est de même de $Q\#p$ pour tout polynôme Q (considérer le développement du produit $\#$ en opérateurs bidifférentiels). Le symbole $J(D)(Q\#p)$ vérifie aussi la même propriété. Or la formule des caractères nous permet d'écrire :

$$\operatorname{Tr}(Q\#p)^{W,\pi} = \int_{\Omega} J(D)(Q\#p)(\omega)\,\mathrm{d}\beta_{\Omega}.$$

L'orbite étant par hypothèse tempérée, l'opérateur $(Q\#p)^{W,\pi}$ est à trace, donc borné pour tout polynôme Q. Donc $Q^{W,\pi}(p^{W,\pi}u)$ existe dans $\mathcal{H}_{\pi}$ pour tout $u \in \mathcal{H}_{\pi}$ et pour tout polynôme Q, ce qui veut bien dire que $p^{W,\pi}$ envoie $\mathcal{H}_{\pi}$ dans les vecteurs C^{∞}. $\square$

COROLLAIRE III.2. — *Si deux symboles p et q dans $AS_{\rho}^{m,Q}$ coïncident sur un voisinage conique de $AC(\Omega)$, les opérateurs $p^{W,\pi}$ et $q^{W,\pi}$ sont égaux à un régularisant près.*

Notons que la réciproque du THÉORÈME III.1 est fausse : il existe des exemples de symboles p constants non nuls sur l'orbite tels que $p^{W,\pi} = 0$ [Ma2, § I, appendice].

Un symbole $p \in AS_{\rho}^{m,Q}$ est dit *Ω-elliptique* s'il existe R, C_1, C_2 tels que pour tout $\xi \in AC(\Omega)$:

$$\|\xi\| > R \implies C_1\,\Lambda(\xi)^m \le \bigl|p(\xi)\bigr| \le C_2\,\Lambda(\xi)^m.$$

Cette définition de l'Ω-ellipticité est un peu différente de celle donnée dans [Ma2], mais elle est plus naturelle. Dans le cas où ρ est égal à 1, on vérifie sans peine qu'il existe un voisinage conique W de $AC(\Omega)$ tel que l'encadrement ci-dessus soit valable pour tout ξ dans W, quitte à changer les constantes C_1 et C_2. En application du THÉORÈME III.1, nous allons étendre la formule de Weyl du chapitre précédent au cas des symboles Ω-elliptiques, dans le cas où $\rho = 1$.

THÉORÈME III.3. — *Soit π une représentation unitaire irréductible de G vérifiant les hypothèses du chapitre précédent, associée à une orbite coadjointe Ω. Soit p un symbole borné à gauche Ω-elliptique appartenant à $AS_1^{m,Q}(\mathfrak{g}^*)$, avec Q voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ assez petit. Soit $N(t)$ la fonction de comptage des valeurs propres de $p^{W,\pi}$ et $\widetilde{V}(t)$ le volume défini par*

$$\widetilde{V}(t) = \int_{\Omega\cap\{J(D)p\le t\}} \mathrm{d}\beta_{\Omega}.$$

Alors pour tout $\kappa \in\,]0, 1/4m[$, *pour tout* $N > 0$, *il existe* C_1, C_2 *telles que :*

$$N(t) = \widetilde{V}(t) + \mathrm{O}\Big\{ \sup_{|t-\tau|<C_1 t^{1-\kappa}} \big(t^{-N} + \widetilde{V}(\tau + C_2\tau^{1-\kappa}) - \widetilde{V}(\tau)\big)^{\frac{1}{2}} \widetilde{V}(\tau)^{\frac{1}{2}} + \sup_{|t-\tau|<C_1 t^{1-\kappa}} \big(t^{-N} + \widetilde{V}(\tau + C_2\tau^{1-\kappa}) - \widetilde{V}(\tau)\Big\}.$$

Démonstration. — L'idée est de remplacer le symbole p par un symbole elliptique p_0 tel que $(p - p_0)$ soit à décroissance rapide sur un voisinage conique de $AC(\Omega)$, puis d'appliquer les THÉORÈMES II.1 et III.1. La construction de p_0 se fait de la façon suivante. On construit une fonction φ de classe C^∞ à valeurs dans $[0, 1]$, homogène de degré 0 à l'infini sur $\mathfrak{g}^*$ (donc appartenant à $S^0_1(\mathfrak{g}^*)$), égale à 0 pour $\|\xi\|$ grand hors du voisinage conique W de $AC(\Omega)$, égale à 1 sur un voisinage conique W_0 un peu plus petit, ainsi que sur une boule de rayon R. On pose alors :

$$\tilde{p}_0(\xi) = \varphi(\xi)p(\xi) + \big(1 - \varphi(\xi)\big)\Lambda(\xi)^m.$$

Il est clair que le symbole $\tilde{p}_0$ est elliptique. En appliquant alors le théorème d'approximation [Ma3, th. 2.1], on obtient un symbole p_0 tel que $(p - p_0)$ soit à décroissance rapide sur W_0. $\square$

Là encore l'énoncé du théorème pour un polynôme est plus agréable.

THÉORÈME III.4. — *Soit p un polynôme à valeurs réelles défini sur* $\mathfrak{g}^*$, Ω-*elliptique, borné à gauche et de degré m. Alors pour tout* $\varepsilon \in\,]0, 1/4m[$, *on a pour t tendant vers* $+\infty$:

$$N(t) = V(t)\big(1 + \mathrm{O}(t^{-\frac{1}{4m}+\varepsilon})\big)$$

IV. Exemples

IV.1. Groupes nilpotents.

Dans le cas des groupes nilpotents on peut travailler avec les classes de symboles ordinaires $S^m_\rho(\mathfrak{g}^*)$ (cf. [Ma1], [Ma2], [Hw1]). Le cas particulier du groupe de Heisenberg fournit le calcul de Weyl classique des opérateurs pseudodifférentiels sur $\mathbb{R}^k$ (cf. [Hr], [Hw2], [Ju], etc.)

IV.2. Le groupe diamant.

On considère ici le groupe connexe et simplement G connexe dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, de dimension 4, est donnée par une base (H, P, Q, E) avec les crochets suivants

$$[H, P] = -Q, \quad [H, Q] = P, \quad [P, Q] = E,$$

les autres crochets étant nuls. La référence pour cet exemple est l'article de M. VERGNE [B-C-D, chap. VIII]. On note (H^*, P^*, Q^*, E^*) la base duale dans $\mathfrak{g}^*$. Les orbites coadjointes non ponctuelles, de dimension 2, sont de deux types :

(a) Les paraboloïdes de révolution, avec $\alpha_0 \neq 0$ et $h_0 \in \mathbb{R}$:

$$\Omega_{\alpha_0,h_0} = \Big\{ \Big(\frac{y^2}{2\alpha_0} + \tfrac{1}{2}\alpha_0 x^2 + h_0 + \tfrac{1}{2} \Big) H^* + yP^* + \alpha_0 x Q^* + \alpha_0 E^* \; ; \; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big\}.$$

(b) Les cylindres, avec $t_0 \in \,]0,+\infty[$:

$$\Omega_{0,t_0} = \Big\{ yH^* + (t_0 \sin x)P^* + (t_0 \cos x)Q^* \; ; \; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big\}.$$

L'orbite Ω_{α_0,h_0} est associée par la méthode de Kirillov à la représentation π_{α_0,h_0} qui agit sur $L^2(\mathbb{R})$:

$$\pi_{\alpha_0,h_0}(H) = -i\Big\{ \frac{1}{2\alpha_0} \Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \alpha_0^2 x^2 \Big) - h_0 \Big\},$$

$$\pi_{\alpha_0,h_0}(P) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}, \quad \pi_{\alpha_0,h_0}(Q) = -i\alpha_0 x, \quad \pi_{\alpha_0,h_0}(E) = i\alpha_0.$$

L'orbite Ω_{0,t_0} est liée à la famille de représentations paramétrée par $(G(t_0P^*)/G(t_0P^*)_0)^\wedge = S^1$

$$\pi_{t_0,\lambda}(H) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}, \quad \pi_{t_0,\lambda}(P) = -it_0 \sin x,$$

$$\pi_{t_0,\lambda}(Q) = -it_0 \cos x, \quad \pi_{t_0,\lambda}(E) = 0,$$

l'espace $\mathcal{H}_\lambda$ de la représentation $\pi_{t_0,\lambda}$ étant le complété L^2 des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x+2\pi) = \mathrm{e}^{2i\pi\lambda} f(x).$$

• Dans le cas (a), l'opérateur $i\pi_{\alpha_0,h_0}(H)$ est Ω-elliptique. C'est — à une constante près — l'oscillateur harmonique à une dimension. On a l'équation :

$$i\pi_{\alpha_0,h_0}(H) = \pi_{\alpha_0,h_0}\Big(\frac{1}{2\alpha_0}(P^2+Q^2) - h_0 \Big).$$

Cet opérateur admet donc (entre autres) deux symboles polynomiaux, l'un de degré 1, l'autre de degré 2. C'est celui de degré 1 qui donnera par l'application du THÉORÈME III.4 l'estimation du reste la plus fine dans la formule de Weyl. Mais cette estimation est en $\mathrm{O}(t^{-1/4+\varepsilon})$, très loin de l'estimation optimale $\mathrm{O}(t^{-1})$ (cf. [He]).

• Dans le cas (b), l'opérateur $-\pi_{0,t_0}(H^2)$ est Ω-elliptique. On calcule explicitement ses valeurs propres :

$$-\pi_{0,t_0}(H^2)\,\mathrm{e}^{i(n+\lambda)x} = (n+\lambda)^2\,\mathrm{e}^{i(n+\lambda)x}.$$

L'opérateur admet donc les valeurs propres $(n+\lambda)^2)_{n\in\mathbb{Z}}$. On en déduit

$$N(t) = 2\sqrt{t} + \mathrm{O}(1),$$

alors que $V(t) = 2\sqrt{t}$.

IV.3. Le revêtement universel de $\mathbf{SL_2}(\mathbb{R})$.

Les références ici sont [Gui, § IV] et [Kn, § II.5]. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est engendrée par :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette algèbre de Lie étant semi-simple, on peut identifier $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ via la forme de Killing B qui entrelace les actions adjointe et coadjointe. La base duale de (X, Y, H) pour la forme $B' = \frac{1}{4}B$ est :

$$(X^*, Y^*, H^*) = (Y, X, \tfrac{1}{2}H).$$

Les orbites coadjointes associées aux représentations de la série principale sont les hyperboloïdes à une nappe :

$$\Omega_{i\lambda} = \{z^2 + 4xy = \lambda^2\,;\ \lambda \in \,]0, +\infty[\,\}.$$

L'orbite $\Omega_{i\lambda}$ est associée aux *deux* représentations de la série principale $\pi^{\pm}_{2i\lambda}$: le groupe $G(f)/G(f)_0$ est en effet égal à $\mathbb{Z}_2$ pour $f \in \Omega_{i\lambda}$.

Les orbites associées aux représentations de la série discrète sont les moitiés d'hyperboloïdes à deux nappes :

$$\Omega^{\pm}_{\lambda} = \{z^2 + 4xy = -\lambda^2\,;\ \lambda \in \,]0, +\infty[,\ \operatorname{sgn} x = \pm\}.$$

L'orbite $\Omega^{\pm}_{\lambda}$ est associée à la représentation de la série discrète $\pi^{\pm}_{2\lambda}$. L'espace de la représentation de la série discrète holomorphe $\pi^{+}_{2\lambda}$ est

$$\mathcal{H}^{+}_{2\lambda} = \Big\{f \text{ analytiques sur } \{\operatorname{Im} z > 0\}\,;\ \iint_{y>0} \big|f(z)\big|^2 y^{2\lambda-2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty\Big\}$$

et la représentation $\pi_{2\lambda}^{+}$ agit par :

$$p_{2\lambda}^{+}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(z) = (-bz+d)^{-2\lambda} f\Big(\frac{az-c}{-bz+d}\Big).$$

Nous avons par abus de notation écrit un élément du revêtement universel comme un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Ici, l'opérateur $i\pi_\Omega(X-Y)$ est Ω-elliptique borné à gauche pour toute orbite Ω_λ^{+}. Cet opérateur s'écrit explicitement sur $\mathcal{H}_{2\lambda}^{+}$:

$$i\pi_{2\lambda}^{+}(X-Y)f(z) = -iz^{-2\lambda}f(z) + i(1+z^2)f'(z).$$

On a donc ici l'exemple d'un opérateur différentiel d'ordre 1 dont le spectre est discret. La formule de Weyl de comptage des valeurs propres s'écrit pour cet opérateur :

$$N(t) = V(t)\big(1 + \mathrm{O}(t^{-\frac{1}{4}+\varepsilon})\big).$$

Les fonctions propres sont données par

$$f_k(z) = \frac{(z-i)^k}{(z+i)^{k+2\lambda}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

de valeur propre associée $k+2\lambda$. (Lorsque λ est demi-entier, ce sont les K-types de la représentation de la série discrète de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ de paramètre λ.) On a donc pour tout λ

$$N(t) = t + \mathrm{O}(1)$$

et on vérifie facilement que le volume $V(t)$ de l'orbite correspondante est aussi équivalent à t.

BIBLIOGRAPHIE

[A-K] AUSLANDER (L.) and KOSTANT (B.). — *Polarization and unitary representations of solvable Lie groups*, Invent. Math., t. **14**, 1971, p. 255–354.

[B-C-D] BERNAT (P.), CONZE (N.), DUFLO (M.) et al. — *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Monographie Soc. Math. France, t. **4**, 1972.

[Cha] CHARBONNEL (J.-Y.). — *Orbites fermées et orbites tempérées*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **23**, 1990, p. 123–149.

[Du1] DUFLO (M.). — *Caractères des groupes et des algèbres de Lie résolubles*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **3**, 1970, p. 23–74.

[Du2] DUFLO (M.). — *Fundamental-series representations of a semi-simple Lie group*, Funct. Anal. Appl., t. **4**, 1970, p. 122–126.

[Fe1] FEIGIN (V.I.). — *Asymptotic distribution of eigenvalues for hypoelliptic systems in* $\mathbb{R}^n$, Math. USSR Sbornik, t. **28**, n° 4, 1976, p. 533–552.

[Fe2] FEIGIN (V.I.). — *New classes of pseudodifferetial operators in* $\mathbb{R}^n$ *and some applications*, Trans. Moscow Math. Soc., t. **36**, 1978, p. 153–195.

[Gui] GUICHARDET (A.). — *Article d'introduction aux travaux de M. Duflo*, prépublication de l'École Polytechnique.

[He] HELFFER (B.). — *Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques*, Astérisque, Soc. Math. France, t. **112**, 1984.

[Hr] HÖRMANDER (L.). — *The Weyl calculus of pseudodifferential operators*, Comm. Pure Appl. Math., t. **32**, 1979, p. 359–443.

[Hw1] HOWE (R.). — *A symbolic calculus for nilpotent Lie groups*, Proc. Conference on operator algebras and group representations, Neptun, Romania Pitman, London, 1980.

[Hw2] HOWE (R.). — *The role of the Heisenberg group in harmonic analysis*, Bull. Amer. Math. Soc., t. **3**, n° 2, 1980, p. 821–843.

[Ju] JUHL (A.). — *Orbit method for nilpotent Lie groups and distribution of eigenvalues*, Math. Nachr., t. **116**, 1984, p. 109–152.

[Kh] KHALGUI (M.S.). — *Caractères des groupes de Lie*, J. Funct. Anal., t. **47**, 1982, p. 64–77.

[Kir] KIRILLOV (A.A.). — *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Russ. Math. Surveys, t. **17**, n° 4, 1962, p. 53–104.

[Kn] KNAPP (A.W.). — *Representation theory of semisimple Lie groups, an overview based on examples.* — Princeton, 1986.

[Lu] LUDWIG (J.). — *Good ideals in the group algebra of a nilpotent Lie group*, Math. Zeitschr., t. **161**, 1978, p. 195–210.

[Ma1] MANCHON (D.). — *Formule de Weyl pour les groupes de Lie nilpotents*, J. reine angew. Math,, t. **418**, 1991, p. 77–129.

[Ma2] MANCHON (D.). — *Calcul symbolique sur les groupes de Lie nilpotents et applications*, J. Funct. Anal., t. **102**, n° 2, 1991, p. 206–251.

[Ma3] MANCHON (D.). — *Weyl symbolic calculus on any Lie group*, Acta Appl. Math., t. **30**, 1993, p. 159–186.

[Nil] NÍLSSON (N.). — *Asymptotic estimates for spectral functions connected with hypoelliptic differential operators*, Ark. Math., t. **5**, n° 35, 1965, p. 527–540.

[Rf] RIEFFEL (M.A.). — *Lie group convolution algebras as deformation quantizations of linear Poisson structures*, Am. J. Math., t. **48**, 1990, p. 657–686.

[Ro] ROSSMANN (W.). — *Kirillov's character formula for reductive Lie groups*, Invent. Math., t. **48**, 1978, p. 207–220.

[Shu] SHUBIN (M.A.). — *Pseudodifferential operators and spectral theory*, Springer, New York, 1987.

[T-S] TULOVSKII (V.N.) and Shubin (M.A.). — *On the asymptotic distribution of eigenvalues of pseudodifferential operators in* $\mathbb{R}^n$, Math. USSR Sbornik, t. **21**, n° 4, 1973, p. 565–583.