BULLETIN DE LA S. M. F.

MARCEL BERGER

Seules les quadriques admettent des caustiques

Bulletin de la S. M. F., tome 123, nº 1 (1995), p. 107-116

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_1_107_0>

Bull. Soc. math. France,
123, 1995, p. 107–116.

SEULES LES QUADRIQUES ADMETTENT DES CAUSTIQUES

PAR

MARCEL BERGER (*)

1. Introduction

Pour les billards du plan on sait que tout convexe à courbure partout non nulle et suffisamment différentiable admet des caustiques (LAZUTKIN [L], 1973), voir aussi DOUADY [D], 1982). La question a été posée il y a quelque temps déjà de savoir ce qu'il en était en dimension plus grande que 2. Dans (BERGER [B], 1990) il a été exposé comment montrer que le cas du plan est tout à fait spécial et que, en dimension 3, il n'y a pas de caustiques en général pour les surfaces, à moins qu'il ne s'agisse d'ellipsoïdes. En effet rappelons d'abord que, si l'on considère un ellipsoïde S dans l'espace euclidien E^d de dimension d quelconque, alors toute quadrique homofocale à S est une caustique de S, c'est-à-dire que tout rayon lumineux (se propageant à l'intérieur de S et s'y réfléchissant en sorte que l'angle d'incidence soit égal l'angle de réflexion) reste constamment tangent à une quadrique fixe, homofocale à S. On ne manquera pas de remarquer que, tout près de S, ces quadriques sont des ellipsoïdes mais qu'ensuite elles peuvent devenir des quadriques d'autres types. Auquel cas il faut dire que c'est la droite support du rayon lumineux qui reste tangente à cette quadrique, donc parfois à l'extérieur de S. Cette propriété des ellispoides (en fait de n'importe quelle quadrique sans singularité) est due à Jacobi, voir la page 80 de (STAUDE [S], 1904–1992). En fait Jacobi l'énonçait, comme systématiquement à cette époque, pour une

(*) Texte reçu le 12 novembre 1993, révisé le 14 octobre 1993.
Marcel BERGER, I.H.E.S. 35, route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette.
Email : berger@ihes.fr.

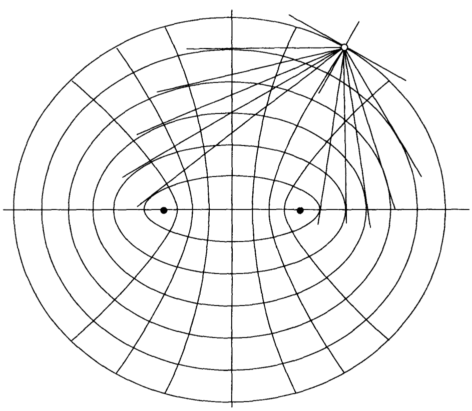
Classification AMS : 55XX73–79, 58XX73–79.

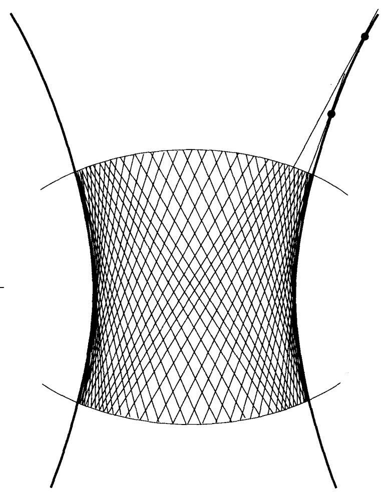
dimension d'espace égale à 3. On trouvera une démonstration moderne et en dimension quelconque dans les pages IV, 14-15 de (DOUADY [D], 1982).

Rappelons que, par définition, on appelle *famille de quadriques homofocales* la famille à un paramètre λ des quadriques d'équation

$$\sum_{1}^{d} \frac{x_i^2}{a_i^2 + \lambda} = 1$$

où λ parcourt la réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ obtenue en ôtant les $-a_i^2$. Le cas générique est celui où $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_d$. Mais plusieurs des a_i peuvent coïncider, le cas extrême étant celui des sphère concentriques. Dans les cas intermédiaires, on obtient la figure obtenue par action du produit convenable $\mathrm{SO}(k_1) \times \cdots \times \mathrm{SO}(k_h)$ de groupes orthogonaux agissant sur une famille de quadriques homofocales dans un espace de dimension plus petite. Dans tous les cas la propriété de caustiques reste évidemment vraie. Deux quadriques sont dites *homofocales* si elles appartiennent à une telle même famille.

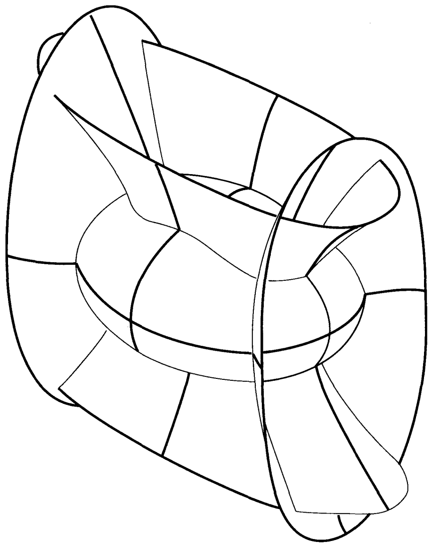




Comme annoncé dans (BERGER, 1990), nous étendons dans le présent article la démonstration du cas $d = 3$ au cas de la dimension quelconque.

On démontre en fait un résultat complètement local et qu'il n'y a aucune raison de restreindre, comme l'a remarqué le referee, aux frontières de convexes :

On considère une hypersurface ouverte S de E^d de classe C^2 et dont la seconde forme fondamentale est non dégénérée. Supposons que S ait



la propriété suivante : il existe une hypersurface ouverte U, de classe C^2, dont la seconde forme fondamentales est non dégénérée, et un ouvert de droites de E^d tangentes à U et rencontrant S transversalement qui sont tels que toutes ces droites, après s'être réfléchies sur S selon la loi « angle d'incidence égal angle de réflexion », restent tangentes à une hypersurface V, de classe C^2, de E^d. Alors, si la dimension d est supérieure ou égale à 3, l'hypersurface S est un morceau de quadrique et U et V sont deux ouverts d'une même quadrique homofocale à S.

Comme dans (BERGER, 1990), l'essentiel de la démonstration consiste à montrer que les cônes circonscrits d'un point x de S à $U \cap V$ sont des ouverts de cônes du second degré. Ensuite, on utilise la dualité pour montrer que $U \cap V$ est un ouvert d'une quadrique : en effet, après une polarité notée « * », $U^* \cap V^*$ va donc posséder beaucoup de sections hyperplanes qui sont des quadriques. Plus ou moins classiquement, une telle condition implique que $U^* \cap V^*$ elle-même est un morceau de quadrique. Par polarité, $U \cap V$ aussi est un morceau de quadrique. A ce moment on renverse ainsi la situation : les cônes (complétés) circonscrits à U le long de ses différentes sections planes ont en leur sommet un hyperplan orthogonal à leur axe qui fait partie de l'un des distributions (intégrables) d'hyperplans formées par les hyperplans tangents aux différentes quadriques homofocales à la quadrique dont $U \cap V$ est un morceau. Puisque S est un morceau de feuille d'une telle distribution c'est donc que S elle-même est un morceau de quadrique.

REMARQUES. — En lui-même, le résultat n'est pas surprenant. La famille des droites (rayons lumineux) tangentes à une surface (a fortiori à une hypersurface) est à trois paramètres ; la famille réfléchie a donc aussi trois paramètres, il n'y a donc aucune raison qu'elle admette en général une surface « enveloppe », il est classique que deux paramètres est le maximum pour cela.

Questions ouvertes. — Il est probable que certaines des hypothèses peuvent être affaiblies, par exemple dans le cas des hypersurfaces frontières de corps convexes. Mais il faudrait alors peut-être utiliser une toute autre approche[1].

Je suis heureux de remercier ici Peter GRUBER, d'abord pour m'avoir communiqué le texte (BIANCHI and GRUBER, 1987), qui s'est avéré contenir le bon argument pour la démonstration du fait que seules les quadriques admettent beaucoup de sections hyperplanes qui sont des quadriques. Il a ensuite bien voulu lire et corriger une première version bien imparfaite.

Je remercie aussi beaucoup le referee pour avoir fait plusieurs remarques essentielles pour amender et améliorer la première version.

2. Les cônes circonscrits sont des ouverts de cônes quadratiques.

Dans le cas du plan le calcul conduit à la seule condition, classique en optique géométrique :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2k}{\cos\alpha},$$

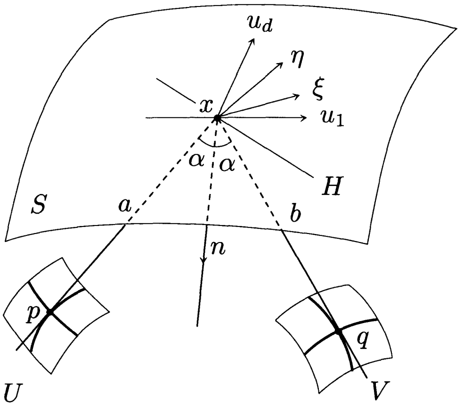
où k est la courbure.

On note S une hypersurface ouverte de E^d à seconde forme fondamentale non dégénérée (Fig. 1), U un petit morceau d'hypersurface qui donne lieu par réflexion optique sur S a un morceau de caustique opposée V ; on suppose U et V de classe C^2. On va faire un calcul de variation autour des points respectifs p de U, x de S et q de V ; on supposera que U et V ont en p et q respectivement une seconde forme fondamentale non dégénérée. On désigne par n la normal unitaire en x à S, par a (resp. b) la distance xp (resp. xq) ; il s'agit de distances algébriques. Enfin on écrit

$$p = x + a(\sin\alpha\cdot x + \cos\alpha\cdot n),$$

$$q = x + b(-\sin\alpha\cdot x + \cos\alpha\cdot n),$$

[1] *Ajouté sur épreuves.* C'est ce qui vient d'être fait par P. GRUBER, dans le cas convexe, dans « *Only Ellipsoids have caustics* », à paraître.



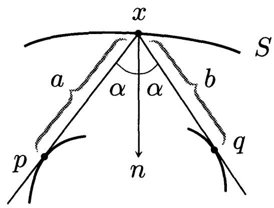


Figure 1

ce qui doit bien être le cas puisque xq est le rayon réfléchi en x du rayon px. Le vecteur unitaire ξ est dans l'hyperplan T_xS tangent à S en x. Dans celui-ci, on choisit une base $\{u_1, \cdots, u_{d-1}\}$ qui diagonalise la seconde forme fondamentale, dont les valeurs propres (c'est-à-dire les courbures principales de S) seront notées $k_1, \ldots, k_{d-1}$. On notera H l'hyperplan de T_xS qui est l'intersection avec T_xS de l'hyperplan T_pU à U en p. La condition de caustique implique donc que H est aussi l'intersection de T_xS avec T_qV. Le vecteur unitaire de T_xS orthogonal à H sera noté $\eta = (m_1, \ldots, m_{d-1})$ dans la base définie par les u_i. On écrira aussi :

$$\xi = \cos \lambda_i \cdot u_i + \sin \lambda_i \cdot v_i$$

(ce qui ce qui définit le vecteur unitaire v_i). On fait maintenant varier le point x, pour un i choisi, le long d'une géodésique $x(t)$ de vitesse égale à u_i en x (Fig. 2). On obtient ainsi d'abord deux courbes $u_i(t)$ et $n(t)$ qui prolongent u_i et n. Si l'on désigne par des «$'$» les dérivées par rapport à t prises en 0 alors — par définition de la seconde forme fondamentale et des directions de courbure principales — on aura $u_i' = -k_i\, n$, $n' = k_i\, u_i$. Prolongeons v_i en des $v_i(t)$ par transport parallèle le long de $x(t)$: on aura alors nécessairement $v_i' = 0$ puisque v_i' doit être orthogonal à la fois à S et à u_i'.

Puisque la seconde forme fondamentale de U est non dégénérée, les droites tangentes à U qui n'ont pas un contact du troisième ordre avec U (i.e. qui ne sont pas des directions asymptotiques) forment encore un ouvert partout dense parmi nos rayons lumineux. On peut donc, pour la

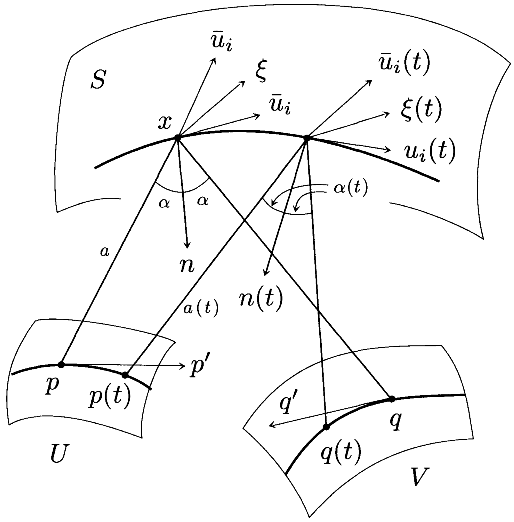


Figure 2

démonstration, choisir maintenant la droite px en sorte qu'elle n'ait pas un contact du troisième ordre avec U. Ceci entraîne que l'on peut prolonger p en une courbe $p(t)$ tracée dans U et de la forme :

$$p(t) = x(t) + a(t)\big(\sin\alpha(t)\cdot\xi(t) + \cos\alpha(t)\cdot n(t)\big)$$

avec

$$\xi(t) = \cos\lambda_i \cdot u_i(t) + \sin\lambda_i \cdot v_i(t) \quad \text{et} \quad \lambda_i \text{ constant.}$$

En effet, ceci d'abord détermine les $\xi(t)$. Maintenant, la courbe de section de U par le plan engendré par n et ξ a une courbure non nulle en p. Il en sera donc de même (pour t sufisamment petit) pour la courbe de section par $n(t)$ et $\xi(t)$; on prendra alors (Fig. 3) pour $p(t)$ le point de contact de la tangente à cette courbe qui est issue, dans son plan, du point $x(t)$.

On pose $\cos\lambda_i = \lambda_i$ et on calcule p' :

$$\begin{aligned} p' &= u_i + a'(\sin\alpha\cdot\xi + \cos\alpha\cdot n)\\ &\qquad + a(\alpha'\cos\alpha\cdot\xi - \ell_i k_i\sin\alpha\cdot n - \alpha'\sin\alpha\cdot n + \cos\alpha\cdot k_i u_i). \end{aligned}$$

Maintenant les $x(t)$ et $p(t)$ donnent naissance à une courbe $q(t)$ obtenue en changeant a en b et α en $-\alpha$; on trouve donc pour q' :

$$\begin{aligned} q' &= u_i + b'(-\sin\alpha\cdot + \cos\alpha\cdot n)\\ &\qquad + b(-\alpha'\cos\alpha\cdot\xi + \ell_i k_i\sin\alpha\cdot n - \alpha'\sin\alpha\cdot n + \cos\alpha\cdot k_i u_i). \end{aligned}$$

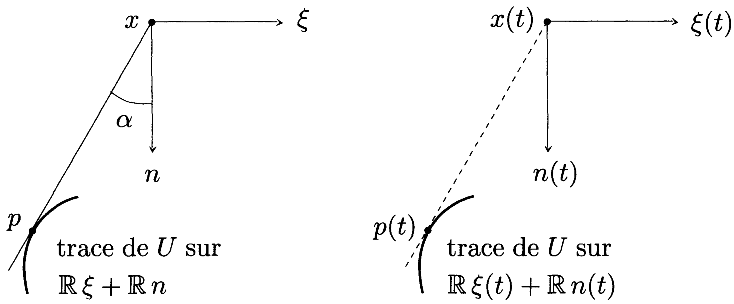


Figure 3

On écrit enfin que p' et q' sont respectivement dans T_pU et T_qV. Ceci se traduit par la nullité des deux produits scalaires :

$$p' \cdot \Big(\eta - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\xi\cdot\eta)n\Big) = 0, \quad q' \cdot \Big(\eta + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\xi\cdot\eta)n\Big) = 0.$$

Pour ces produits scalaires, on calcule $1/a$ fois le premier plus $1/b$ fois le second ; les termes en a', b', α' disparaissent et il reste la condition :

$$(*) \qquad \Big(\cos\alpha\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Big) + 2\cos^2\alpha k_i\Big)m_i + 2k_i\ell_i\sin^2\alpha(\xi\cdot\eta) = 0.$$

Mais alors en outre le réel $1/a + 1/b$ est solution de l'équation fournie par $\sum_i m_i\ell_i = \xi\cdot\eta$, soit :

$$(**) \qquad \sum_i \frac{2\sin^2\alpha k_i\ell_i^2}{\cos\alpha(a^{-1}+b^{-1}) + 2\cos^2\alpha k_i} = -1.$$

Le couple $(\xi = (1,\dots,\ell_{d-1}),\alpha)$ détermine un point (ξ,α) de la sphère unité Σ de T_xS. L'hyperplan H de T_xS détermine un espace vectoriel de dimension $(d-2)$, *noté* $D(\xi,\alpha)$, qui est tangent à Σ au point (ξ,α).

Supposons — *dans un premier temps* — que les $(d-1)$ courbures principales k_i soient distinctes (elles sont non nulles par hypothèse). L'équation (**) en l'inconnue $1/a + 1/b$ est de degré $(d-1)$; et elle a toujours $(d-1)$ racines distinctes, comme on le voit en regardant le comportement de la partie de gauche quand $1/a+1/b$ est voisin de l'infini puis des différentes valeurs qui annulent ses dénominateurs. Pour chaque racine de cette équation, les $(d-1)$ équations (*) déterminent les m_i et donc H. Finalement on obtient une famille $D_i(\xi,\alpha)$ $(i = 1,\dots,d-1)$

de $(d-1)$ hyperplans tangents à Σ en (ξ, α). Quant (ξ, α) varie en décrivant le cône circonscrit à U à partir de x, il décrit une hypersurface de Σ partout tangente à l'un de ces D_i.

Maintenant la remarque essentielle est que le couple d'équations fournissant les $D_i(\xi, \alpha)$ formé par (*) et (**) est *universel*, une fois les courbures principales k_i connues. Or il n'y a pas besoin de l'intégrer explicitement ; en effet, considérons n'importe quelle quadrique $\mathbb{R}$ en un point de laquelle les courbures principales valent ces k_i. Elle admet toutes les quadriques qui lui sont homofocales comme caustiques ; les cônes qui leur sont circonscrits forment $(d-1)$ familles d'hypersurfaces de la sphère Σ attaché en ce point à cette quadrique et fournissent donc toutes les hypersurfaces intégrales de ces $(d-1)$ feuilletages « universels », puisque le calcul ci-dessus étant valable pour tous S, U, V, il l'est en particulier pour la quadrique $\mathbb{R}$.

Conclusion. — Puisque tout cône, circonscrit à partir d'un point quelconque à une quadrique, est toujours un cône quadratique, il en résulte que le cône circonscrit simultanément à U et à V à partir de x est toujours un ouvert de cône quadratique. Si maintenant les courbures principales distinctes sont seulement en nombre s (compris entre 1 et $d-2$), tout ce qui précède reste valable en y remplacant $(d-1)$ par s. L'équation (**) a seulement s racines, mais les équations (*) déterminent toujours bien s hyperplans tangents à la sphère Σ en (ξ, α). Le couple (*), (**) reste bien universel, mais pour des familles homofocales « dégénérées », comme expliqué plus haut. Tous nos cônes restent quadratiques ; par exemple, dans le cas extrême où toutes les courbures principales sont égales, on obtient les cônes de révolution autour de la normale n.

3. Les hypersurfaces *U* et *V* ont des ouverts de quadriques

L'idée de départ est essentiellement prise dans les pages 346–347 de (Bianchi et Gruber, 1987), mais nous la détaillons cependant pour la commodité du lecteur. On effectue d'abord une polarité dans E^d de centre convenable : il suffit de choisir le centre de la polarité en dehors de tous les éléments que l'on peut rencontrer. On obtient ainsi trois hypersurfaces ouvertes S^*, U^*, V^* disjointes, de classe C^2 et ayant des secondes formes fondamentales non dégénérées. Le fait que les cônes, circonscrits des points de S à la paire U, V se trouvent être des cônes quadratiques, devient après polarité la propriété suivante (Fig. 4) :

tous les hyperplans tangents à S^* rencontrent la réunion $U^* \cap V^*$ selon un ouvert d'une même quadrique.

Ceci va entraîner que l'ensemble $U^* \cap V^*$ lui-même est un ouvert de quadrique. Il suffit de le voir localement, puisque deux quadriques qui coïncident sur un ouvert commun coïncident globalement.

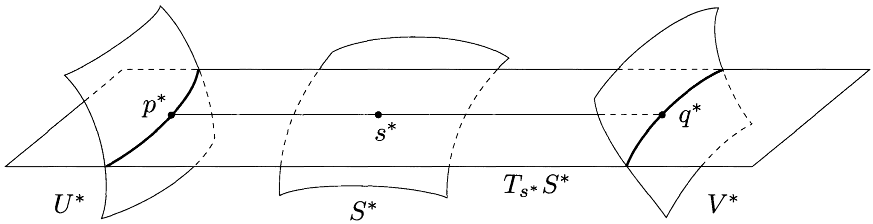


Figure 4

On suppose d'abord que $d = 3$. On se place au voisinage d'une droite $p^*q^*s^*$, tangente en s^* à S^* et suposée en outre ne pas être une direction asymptotique de S^*. Ceci suffit parce que la non-dégénérescence des secondes formes fondamentales assure que les directions asymptotiques ont un complémentaire ouvert et partout dense. On choisit trois plans distincts $P_i (i = 1, 2, 3)$, tangents à S^* et passant par p^* ; suffisamment voisins entre eux et de s^* (et donc de q^*) et, en outre, n'ayant pas de droite commune. Ces plans coupent $U^* \cap V^*$ selon trois ouverts de coniques C_i $(i = 1, 2, 3)$ comme sur la figure 5. Ces trois coniques passent par p^* et sont tangentes en ce point à U^*. On sait qu'il existe une quadrique et une seule contenant ces trois coniques, notons-la Q.

Montrons maintenant qu'un ouvert suffisamment petit de $U^* \cap V^*$ est nécessairement contenu dans Q. En effet, tout plan tangent P à S^*, différent des P_i mais suffisamment voisin de s^*, va couper, par hypothèse, la réunion $U^* \cap V^*$ selon un ouvert d'une conique C et la quadrique Q selon une conique C'. Or C et C' ont en commun au moins six points distincts (Fig. 5), provenant des intersections $C \cup C_i = C' \cup C_i$ $(i = 1, 2, 3)$ qui sont communes puisque provenant des droites $P \cup P_i$ $(i = 1, 2, 3)$. C'est donc que $C = C'$, puisque $P \cup Q = P \cup (U^* \cap V^*)$. Ceci ayant lieu pour tous les P considérés, c'est donc que $U^* \cap V^*$ est un ouvert de la quadrique Q.

Soit maintenant d quelconque et plus grande que 3. On coupe E^d par des sous-espaces de dimension 3 et transverses à S^*, U^*, V^*. Ce qui précède prouve que, en un point quelconque p^* de U^*, toutes les sections de U^* par des sous-espaces de dimension 3 et contenant la normale à U^* en p^* sont des ouverts de quadriques. En particulier, toutes les sections planes contenant cette normale coupent U^* selon une conique. Ceci entraîne donc que U^* coïncide avec la quadrique unique déterminée par les conditions : être tangente à U^* en p^* et à V^* en q^* et avoir en p^* même seconde forme fondamentale que U^*.

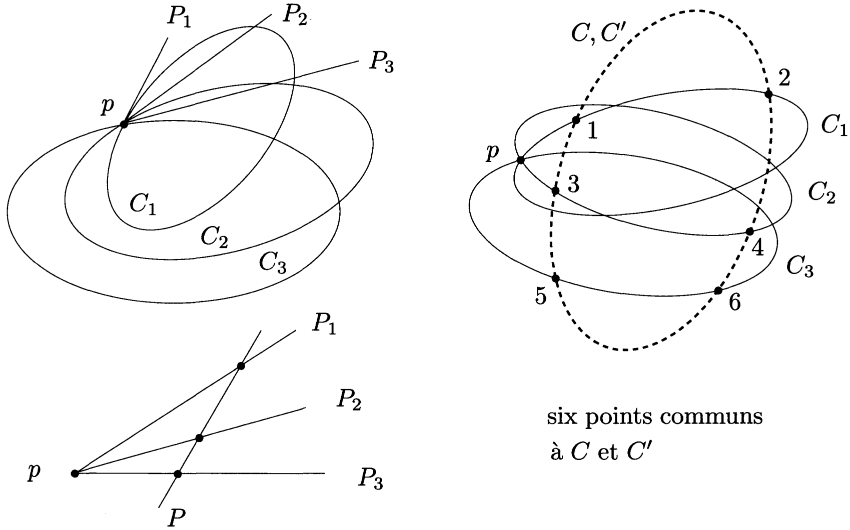


Figure 5

En revenant en arrière, la polarité conservant les quadriques, on voit bien que U et V sont aussi des quadriques. Enfin, S elle-même est une quadrique pour la raison donnée à la fin de l'introduction.

BIBLIOGRAPHIE

[B] BERGER (M.). — *Sur les caustiques de surfaces en dimension* 3, C.R. Acad. Sc. Paris, t. **311** (série I), 1990, p. 333–336.

[BG] BIANCHI (B.) and GRUBER (P.). — *Characterizations of ellipsoids*, Archiv der Math., t. **49**, 1987, p. 344–350.

[D] DOUADY (R.). — *Applications du théorème des tores invariants.* — Thèse, Paris VII, 1982.

[L] LAZUTKIN (V). — *The existence of caustics for a billiard problem in a convex domain*, Math. USSR Iszvetija, t. **7**, 1973, p. 185–214.

[S] STAUDE (O.). — *III, 22, Quadriques.* — Encyclopédie des Sciences Mathématiques, Teubner, Gauthier-Villars, J. Gabay, 1904–1992, p. 1–162.