

# BULLETIN DE LA S. M. F.

RENÉ MICHEL

## **Restriction de la distance géodésique à un arc et rigidité**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 122, n° 3 (1994), p. 435-442

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1994\\_\\_122\\_3\\_435\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_3_435_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## RESTRICTION DE LA DISTANCE GÉODÉSIQUE À UN ARC ET RIGIDITÉ

PAR

RENÉ MICHEL

---

RÉSUMÉ. — On montre que localement la seule restriction de la distance géodésique à une courbe convexe permet d'identifier, à isométrie près, la métrique d'une surface si les données sont analytiques réelles.

ABSTRACT. — One shows how locally the only restriction of the geodesic distance to a convex curve, allows to identify the metric structure of a surface, in case of analytical assumptions.

### 1. Introduction

Dans cet article on traite de l'unicité d'une métrique Riemannienne dans un ouvert avec bord de  $\mathbb{R}^2$  à laquelle on impose les distances entre les couples de points du bord. Ce problème a été d'abord considéré dans le contexte spécial des métriques conformes à la métrique canonique par ROMANOV [1] et MUHOMETOV [2]. Dans [3], la question a été traitée plus géométriquement. Après [3], ce problème a été rencontré en particulier par GROMOV [4] et étudié par CROKE [5], OTAL [6], GERVER-NADIRASHVILI [7]. Toutefois, la quasi-totalité des résultats de rigidité obtenus exigent l'hypothèse pour la métrique d'être à *courbure négative*; la seule exception est le cas d'une métrique à courbure *constante positive* comme il est prouvé dans [3] où ce problème avec bord est ramené à la résolution de la conjecture de Blaschke (GREEN 1953 pour  $n = 2$ , BERGER 1980) ou au théorème de Pu (1962), c'est-à-dire à des théorèmes réputés difficiles.

Nous prouvons ici que pour des métriques analytiques, dans une situation « locale » et *sans hypothèse de courbure*, il y a rigidité.

---

(\*) Texte reçu le 14 janvier 1993, révisé le 15 février 1993.

R. MICHEL, Université d'Avignon, Faculté des Sciences, 33 rue Louis Pasteur, 84000 Avignon, France.

Classification AMS : 53C22.

De façon plus précise on a l'énoncé suivant :

THÉOREME. — Soient  $g_0$  et  $g_1$  deux métriques de classe  $C^\infty$  (resp. analytiques) définies sur un ouvert  $\Theta$  de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $\widehat{AB}$  un arc de courbe de classe  $C^1$  plongé dans  $\Theta$  d'extrémités  $A$  et  $B$ ; on suppose que pour tout  $i \in \{0, 1\}$ , pour tous  $u, v \in \widehat{AB}$ , il existe une unique géodésique  $\gamma_{uv}^i$  relative à la métrique  $g_i$ ,  $\gamma_{uv}^i : [0, 1] \rightarrow \Theta$ , telle que

$$\gamma_{uv}^i(0) = u, \quad \gamma_{uv}^i(1) = v, \quad \gamma_{uv}^i(]0, 1[) \cap \widehat{AB} = \emptyset,$$

et, si  $\text{dist}_i$  désigne la distance relative à  $g_i$ ,  $\text{dist}_0(u, v) = \text{dist}_1(u, v)$ .

Alors il existe un difféomorphisme  $C^\infty$  (resp. analytique)  $\delta : \Theta'_0 \rightarrow \Theta'_1$  avec  $\Theta'_0$  et  $\Theta'_1$  ouverts tels que  $\widehat{AB} \subset \Theta'_0 \subset \Theta$ ,  $\widehat{AB} \subset \Theta'_1 \subset \Theta$ , qui est l'identité sur  $\widehat{AB}$ , et tel que les métriques  $\delta^*g_1$  et  $g_0$  ont le même jet à l'ordre infini en tout point de  $\widehat{AB}$  (respectivement  $\delta^*g_1 = g_0$ , c'est-à-dire  $g_0$  et  $g_1$  sont isométriques).

D'après le théorème d'existence des voisinages convexes on peut localiser l'ouvert  $\Theta$  en sorte que l'hypothèse d'unicité des géodésiques  $\gamma$  soit réalisée pour  $g_0$  et  $g_1$ . Par ailleurs, dans cette situation, si l'arc  $\widehat{AB}$  est strictement convexe relativement à  $g_0$  il l'est aussi relativement à  $g_1$  : ceci se voit aisément puisque chaque distance est réalisée comme longueur d'une unique géodésique.

Ainsi le résultat de rigidité obtenu est optimal sous les hypothèses d'analyticité.

Ceci incite à conjecturer aussi cette rigidité si les hypothèses de régularité sont  $C^k$  (avec  $k \geq 2$ ), dans le cas d'un disque convexe; dans la suite certains arguments ou remarques sont mis en évidence au passage avec cet objectif.

La démonstration du théorème utilise de façon essentielle des résultats obtenus dans [3] qui permettent de décrire les deux métriques dans un même système de coordonnées polaires.

### 2. Mise en situation normalisée des deux métriques

- Soit  $\Theta_0$  (resp.  $\Theta_1$ ) l'ouvert dont le bord est  $\widehat{AB} \cup \gamma_{AB}^0$  (resp.  $\widehat{AB} \cup \gamma_{AB}^1$ ).
- Notons  $\text{exp}_0$  et  $\text{exp}_1$  les applications exponentielles au point  $A$ .
- Soient  $\nu_0$  et  $\nu_1$  les vecteurs unitaires normaux principaux en  $A$  à  $\widehat{AB}$ .
- Soit  $\phi : T_A(\Theta) \rightarrow T_A(\Theta)$  l'application linéaire qui est l'identité sur  $T_A\widehat{AB}$  et telle que  $\phi(\nu_0) = \nu_1$ .

On a établi en [3] les faits suivants : le difféomorphisme

$$\delta = \exp_1 \circ \phi \circ \exp_0^{-1}$$

défini sur un voisinage  $\Theta'_0$  de  $\Theta_0$  est tel que  $\delta(\overline{\Theta_0}) = \overline{\Theta_1}$  et il se réduit à l'identité sur  $\widehat{AB}$ .

- Posons  $\delta^*g_1 = g$ ; alors  $g$  et  $g_0$  coïncident en tout point de  $\widehat{AB}$ .
- Posons

$$\begin{cases} \exp_0^{-1}(\Theta_0) = \exp^{-1}(\Theta_0) = \Omega, \\ \exp_0^{-1}(\widehat{AB}) = \exp^{-1}(\widehat{AB}) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{OP}. \end{cases}$$

Alors  $\exp_0$  et  $\exp$  coïncident dans un voisinage de  $\Omega$ .

- Si l'on pose

$$r_0 = \exp^* g_0, \quad r = \exp^* g,$$

les géodésiques issues de 0 coïncident dans les deux métriques et on a le même système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  tel que

$$\begin{cases} r_0 = dt^2 + G_0 d\theta^2, \\ r = dt^2 + G d\theta^2, \end{cases}$$

et les fonctions  $G_0$  et  $G$  coïncident sur  $\Gamma$  à l'ordre 2.

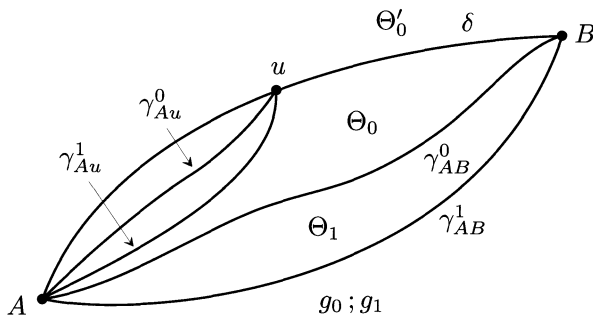


Figure 1

On prouve ci-après que  $G_0$  et  $G$  ont le même jet à l'ordre infini sur  $\Gamma$ .

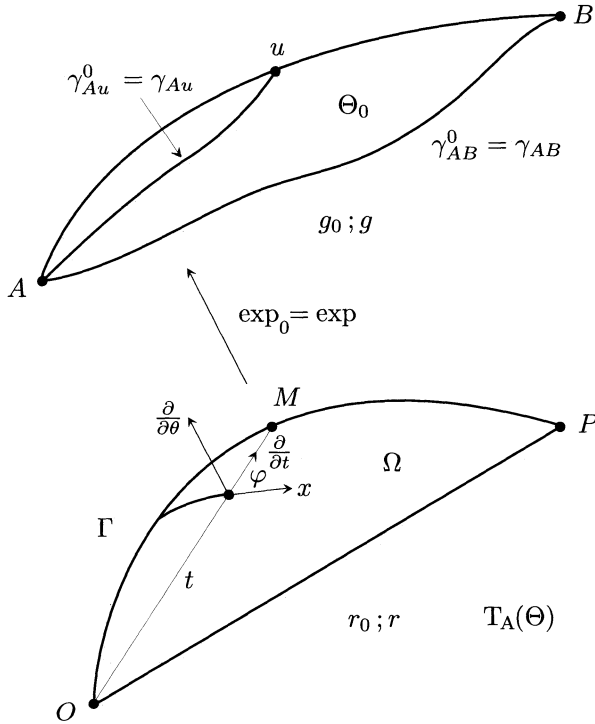


Figure 2 (au-dessus). Figure 3 (au-dessous)

**3. Quelques calculs dans les submersions sur les géodésiques**

**3.1. Notations dans les fibrés unitaires.**

Notons  $U_0$  et  $U$  les fibrés unitaires relatifs à  $r_0$  et  $r$  sur un voisinage de  $\Omega$ ; notons  $\widehat{MN}$  un arc inclus dans  $\Gamma$ . Alors  $\widehat{MN} \times \widehat{MN}$  s'identifie à l'ensemble des arcs géodésiques dont l'origine et l'extrémité sont sur  $\widehat{MN}$  relativement aux métriques  $r$  ou  $r_0$ ; ces arcs sont inclus dans  $\Omega$ . Soit  $p$  (resp.  $p_0$ ) la projection de  $U$  (resp.  $U_0$ ) associant à un vecteur unitaire  $x$  l'arc géodésique tangent à  $x$  et relatif à  $r$  (resp. à  $r_0$ ). Appelons  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{A}_0$ ) l'ensemble saturé par  $p$  (resp.  $p_0$ ) de  $\widehat{MN} \times \widehat{MN}$  :

$$\mathcal{A} = p^{-1}(\widehat{MN} \times \widehat{MN}), \quad \mathcal{A}_0 = p_0^{-1}(\widehat{MN} \times \widehat{MN}).$$

Considérons les notations suivantes : soient  $R \in \Omega$  et  $Q \in \Gamma$ . Soit  $\gamma_0$  (resp.  $\gamma$ ) l'arc de géodésique  $QR$  relatif à  $r_0$  (resp.  $r$ ) paramétré par la longueur d'arc  $\ell_0$  (resp.  $\ell$ ).

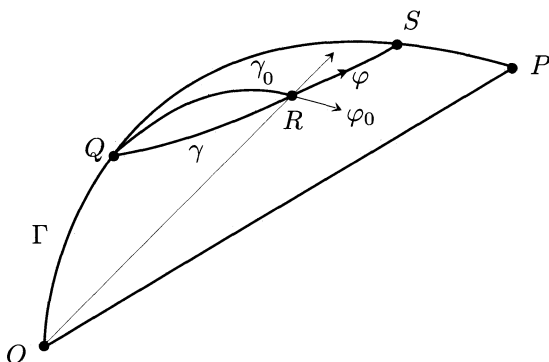


Figure 4

Si  $Q \in \Gamma$  est fixé et  $R$  variable dans un voisinage  $\Omega'$  de  $\Omega$ , on considère les fonctions  $\ell, \ell_0 : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que :

$$\ell_0(R) = \text{dist}_0(Q, R), \quad \ell(R) = \text{dist}(Q, R).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \text{grad}_0 \ell_0 &= \cos \varphi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial}{\partial \theta} = \gamma'_0(\ell_0), \\ \text{grad } \ell &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial \theta} = \gamma'(\ell). \end{aligned}$$

Relativement aux coordonnées  $(\theta, t, \varphi_0)$ ,  $(\theta, t, \varphi)$  respectives dans  $U_0$  et  $U$  la forme de Liouville s'écrit :

$$\lambda_0 = \cos \varphi_0 dt + \sqrt{G_0} \sin \varphi_0 d\theta, \quad \lambda = \cos \varphi dt + \sqrt{G} \sin \varphi d\theta,$$

et les formes volumes et mesures sur  $U_0$  et  $U$  :

$$\begin{aligned} \lambda_0 \wedge d\lambda_0 &= \sqrt{G_0} d\theta \wedge dt \wedge d\varphi_0, & \lambda \wedge d\lambda &= \sqrt{G} d\theta \wedge dt \wedge d\varphi, \\ \mu_0 &= |\lambda_0 \wedge d\lambda_0|, & \mu &= |\lambda \wedge d\lambda|. \end{aligned}$$

**3.2..** — Le calcul qui suit est inspiré d'une idée de [2]. On écrit :

$$(3.2.1) \quad \iiint_{\mathcal{A}} (1 - \cos(\varphi - \varphi_0)) \cdot \mu \geq 0.$$

En développant  $E = \iiint_{\mathcal{A}} \cos(\varphi - \varphi_0) \cdot \mu$ , il vient :

$$E = \iiint_{\mathcal{A}} \left\{ \cos \varphi \cos \varphi_0 + G_0 \frac{\sin \varphi}{\sqrt{G}} \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{G_0}} - G_0 \frac{\sin \varphi}{\sqrt{G}} \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{G_0}} + \sin \varphi \sin \varphi_0 \right\} \mu.$$

On a alors :

$$\cos \varphi \cos \varphi_0 + G_0 \frac{\sin \varphi}{\sqrt{G}} \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{G_0}} = r_0(\text{grad } \ell, \text{grad}_0 \ell_0) = d\ell_0(\text{grad } \ell).$$

On évalue  $\iiint_{\mathcal{A}} d\ell_0(\text{grad } \ell) \mu$  par le théorème de Fubini adapté à la submersion :  $\mathcal{A} \rightarrow \widehat{MN} \times \widehat{MN}$  à fibres géodésiques : ceci est classique puisque la forme  $d\lambda$  « descend » sur l'espace des géodésiques, vu comme ensemble de vecteurs unitaires aux points de  $\widehat{MN}$ , suivant une forme volume que l'on note  $\omega$ ; voir [8], [9] ou [10], [11].

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{A}} d\ell_0(\text{grad } \ell) \mu &= \iint_{\widehat{MN} \times \widehat{MN}} \left[ \int_{\gamma} d\ell_0(\text{grad } \ell) d\ell \right] \omega \\ &= \iint_{\widehat{MN} \times \widehat{MN}} \left[ \int_{\gamma} d\ell_0(\gamma'(\ell)) d\ell \right] \omega \\ &= \iint_{\widehat{MN} \times \widehat{MN}} \ell_0(S) \omega = \iint_{\widehat{MN} \times \widehat{MN}} \ell(S) \omega \end{aligned}$$

On a ici utilisé notre hypothèse basique : pour tout  $Q \in \widehat{MN}$ , on a  $\ell(S) = \ell_0(S)$  (voir Fig.4). On a aussi :

$$\iiint_{\mathcal{A}} \mu = \iint_{\widehat{MN} \times \widehat{MN}} \left[ \int_{\gamma} d\ell \right] \omega = \iint_{\widehat{MN} \times \widehat{MN}} \ell(S) \omega.$$

En tenant compte des calculs ci-dessus dans 3.2.1, on déduit :

$$(3.2.2) \quad \iiint_{\mathcal{A}} \sin \varphi \sin \varphi_0 \left( \frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{G}} - 1 \right) \mu \geq 0.$$

**3.3.** — Appelons  $\pi_0$  (resp.  $\pi$ ) la projection naturelle de  $U_0$  (resp.  $U$ ) sur un voisinage de  $\Omega$ . Posons  $B = \pi(\mathcal{A})$ ; alors  $\overset{\circ}{B}$  est l'ouvert borné ayant pour bord  $\widehat{MN} \cup \gamma_{\widehat{MN}}$

Puisque  $\mu = \sqrt{G} dt d\theta d\varphi$ , le théorème de Fubini dans cette fibration donne alors,

$$(3.3.1) \quad \begin{aligned} &\iiint_{\mathcal{A}} \sin \varphi \sin \varphi_0 \left( \frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{G}} - 1 \right) \mu \\ &= \iint_B (\sqrt{G_0} - \sqrt{G}) \left\{ \int_{\pi^{-1}(\theta, t)} \sin \varphi \sin \varphi_0 d\varphi \right\} dt d\theta \geq 0. \end{aligned}$$

**4. Fin de la preuve du théorème**

LEMME 4.1. — *Dans tout ouvert  $\mathcal{B}$  qui coupe  $\Gamma$  la différence  $G - G_0$  s'annule en changeant de signe sur  $\mathcal{B} \cap \Omega$  (et identiquement sur  $\Gamma$ )*

Remarquons d'abord qu'avec les notations précédentes on a toujours  $\sin \varphi \sin \varphi_0 > 0$  et  $\sin \varphi \sin \varphi_0 = 0$  équivaut à  $\varphi = \varphi_0 = 0$  ou  $\varphi = \varphi_0 = \pi$ . En effet, d'après les hypothèses de convexité, la géodésique  $\gamma$ , par exemple, ne peut recouper  $OR$  qui est une géodésique pour les deux métriques.

Soit donc  $S \in \mathcal{B} \cap \Gamma$  et soit  $B(S, \rho)$  une boule géodésique pour la métrique  $r$  incluse dans l'ouvert  $\mathcal{B}$  : par convexité locale il existe  $M$  et  $N$  dans  $\Gamma$  tels que l'ouvert  $B$  dont le bord est  $\widehat{MN} \cup \gamma_{\widehat{MN}}$  est inclus dans  $B(S, \rho) \cap \Omega$ .

D'après (3.3.1) on ne peut avoir  $G > G_0$  partout sur  $B$ , donc sur  $\mathcal{B} \cap \Omega$ .

Par raison de symétrie entre  $G$  et  $G_0$ ,  $G - G_0$  doit s'annuler en changeant de signe sur  $\mathcal{B} \cap \Omega$  ou s'annuler identiquement.

PROPOSITION 4.2. — *La différence  $G - G_0$  s'annule à l'ordre infini sur  $\Gamma$  et, pour tout multi-entier  $\alpha$ ,  $\partial^\alpha(G - G_0)$  s'annule hors de  $\Gamma$  dans tout ouvert coupant  $\Gamma$ .*

On vérifie par récurrence sur l'ordre de  $\alpha$  le fait suivant :  $\partial^\alpha(G - G_0)$  s'annule hors de  $\Gamma$  dans tout ouvert coupant  $\Gamma$  (et donc aussi, par continuité, sur  $\Gamma$ ). En effet ceci est vrai pour  $G - G_0$  d'après le LEMME 4.1 ; et la récurrence est directe par application du théorème de Rolle.

**4.3. Retour aux métriques initiales.**

Les métriques initiales  $g_0$  et  $g_1$  sont  $C^\infty$  (resp. analytiques) ; il en est de même de leurs applications exponentielles et donc de la métrique  $g$  et des métriques  $r$  et  $r_0$ .

Puisque  $r = \exp^*g$  et  $r_0 = \exp^*g_0$  ont, d'après la PROPOSITION 4.2, le même jet à l'ordre infini sur  $\Gamma$ , (resp. coïncident sur  $\Omega$  dans le cas analytique),  $g$  et  $g_0$  ont le même jet à l'ordre infini sur  $\widehat{AB}$  (resp. coïncident sur  $\Theta'_0 \supset \Theta_0$ ). Puisque  $\delta^*g_1 = g$  avec  $\delta$  de classe  $C^\infty$  (resp. analytique) il en résulte que  $\delta^*g_1$  et  $g_0$  ont le même jet à l'ordre infini sur  $\widehat{AB}$  (resp.  $\delta^*g_1 = g_0$  sur  $\Theta'_0$ ).

**5. Une remarque en vue du problème global  
(hypothèses  $C^k$ ,  $k \geq 2$ )**

Considérons une géodésique  $\mathfrak{c}$  commune aux deux métriques  $r$  et  $r_0$  et définie par  $\theta = \theta_0$ . On voit que l'on peut, de la même façon, appliquer le raisonnement d'intégration du paragraphe 3 à un ensemble de géodésiques voisines de  $\mathfrak{c}$ . On obtient alors comme en 4.1 le fait suivant : dans tout



ouvert contenant  $c$ , la différence  $G - G_0$  s'annule en changeant de signe, et elle s'annule aussi sur  $c \cap \Omega$ .

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ROMANOV (R.G.). — *On the uniqueness of the definition of an isotropic Riemannian metric inside a domain in terms of the distances between points of the boundary*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, t. **218**, 2, 1974, p. 295–297.
- [2] MUHOMETOV (R.G.). — *The problem of recovery of a two dimensional Riemannian metric and integral geometry*, Soviet Math. Dokl., t. **18**, 1977, p. 27–31.
- [3] MICHEL (R.). — *Sur la rigidité imposée par la longueur des géodésiques*, Invent. Math., t. **65**, 1981, p. 71–83.
- [4] GROMOV (M.). — *Filling Riemannian manifolds*, J. Differential Geom., t. **18**, 1983, p. 1–147.
- [5] CROKE (C.B.). — *Rigidity and the distance between boundary points*, J. Differential Geom., t. **33**, 1991, p. 445–464.
- [6] OTAL (J.P.). — *Sur les longueur des géodésiques d'une métrique à courbure négative dans le disque*, Comment. Math. Helv., t. **65**, 1990, p. 334–347.
- [7] GERVER (M.) et NADIRASHVILI (N.). — *An isometricity condition for Riemannian metrics on a disk*, Soviet Math. Dokl., t. **29**, 1984, p. 199–203.
- [8] SANTALO (L.). — *Integral Geometry and Geometric Probability*. — Addison Wesley, 1976.
- [9] MICHEL (R.). — *Sur quelques problèmes de Géométrie Globale des Géodésiques*, Bol. Soc. Brasil. Mat., t. **9**, 2, 1978, p. 19–38.
- [10] BERGER (M.). — *Lectures on Geodesics in Riemannian Geometry*. — Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965.
- [11] BESSE (A.L.). — *Manifolds all of whose Geodesics are closed*. — Ergebnisse der Math., Springer Verlag, 1978.