BULLETIN DE LA S. M. F.

JOSEPH LE POTIER

À propos de la construction de l'espace de modules des faisceaux semi-stables sur le plan projectif

Bulletin de la S. M. F., tome 122, nº 3 (1994), p. 363-369
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_3_363_0>

Bull. Soc. math. France,
122, 1994, p. 363–369.

A PROPOS DE LA CONSTRUCTION DE L'ESPACE DE MODULES DES FAISCEAUX SEMI-STABLES SUR LE PLAN PROJECTIF

PAR

JOSEPH LE POTIER

RÉSUMÉ. — Soit $\mathbb{M} = \mathbb{M}(r, c_1, c_2)$ l'espace de modules des classes de S-équivalence de faisceaux semi-stables de rang r, de classes de Chern c_1 et c_2 sur le plan projectif. Nous montrons comment on peut décrire $\mathbb{M}$ comme quotient de Mumford d'un ouvert d'un sous-schéma fermé d'un produit de deux grassmanniennes sous l'action d'un groupe réductif, et nous déterminons quelle polarisation on doit choisir sur ce produit de grassmanniennes pour interpréter cet ouvert comme ouvert de points semi-stables, au sens de Mumford, pour l'action de ce groupe réductif. Cette polarisation se calcule en termes de rang et classes de Chern.

ABSTRACT. — Let $\mathbb{M} = \mathbb{M}(r, c_1, c_2)$ the moduli space of S-equivalence classes of semistable sheaves of rank r, and Chern classes c_1 and c_2 on the projective plane. We show how to describe $\mathbb{M}$ as a Mumford quotient of an open set in a closed subscheme of a product of two Grassmann varieties, by the action of a reductive group. We determine what is the good polarisation on this product of Grassmann varieties to interpret this open set as the open set of semistable points for the action of the reductive group, in sense of Mumford. We can compute this polarisation with the rank and the Chern classes.

1. Introduction

Nous apportons ici une réponse à une question qui nous a été posée par S.A. STRØMME. Il s'agit de donner une construction directe de l'espace de modules des classes de S-équivalence de faisceaux semi-stables sur le plan projectif $\mathbb{P}_2$, à partir des complexes de Kronecker semi-stables introduits dans [1]. La construction donnée dans [1] consistait, de manière un peu artificielle, à se ramener à celle de MARUYAMA [4] c'est-à-dire à quotienter

(*) Texte reçu le 16 novembre 1992.
J. LE POTIER, UFR de Mathématiques et URA 212, Université de Paris VII, 2, place Jussieu, 75251, Paris CEDEX 05. Email : jlp@mathp7.jussieu.fr.
Classification AMS : 14F05, 14J60.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1994/363/$ 5.00

un schéma de Hilbert-Grothendieck par l'action d'un groupe réductif. La méthode expliquée ici consiste à comparer directement les complexes de Kronecker semi-stables avec l'ouvert des points semi-stables d'une variété projective pour l'action d'un groupe réductif. Le point essentiel est de déterminer quelle polarisation on doit choisir sur cette variété projective pour retrouver la définition standard des monades semi-stables. Par commodité, on va commencer par se ramener à l'étude de l'action d'un groupe linéaire agissant sur un produit de grassmanniennes, ce qui réduit le calcul des points semi-stables à des résultats bien connus.

2. La variété $\mathfrak{G}$

Comme il est d'usage, on désigne par Q le fibré quotient canonique de rang 2 sur le plan projectif, et par V l'espace vectoriel de ses sections; l'espace vectoriel dual V^* s'identifie à l'espace des sections de $\mathcal{O}(1)$. Soient (r, c_1, χ) trois entiers satisfaisant aux conditions suivantes :

$$-r < c_1 \leq 0, \quad \chi \leq 0, \quad \chi \leq 2c_1 + r.$$

Soient H un espace vectoriel de dimension $n = -\chi + r + c_1$, K un espace vectoriel de dimension $n + c_1$, et L un espace vectoriel de dimension $n - (r + c_1)$. On considère les complexes de Kronecker

$$0 \to K \otimes \wedge^2 Q^* \xrightarrow{\alpha} H \otimes Q^* \xrightarrow{\beta} L \otimes \mathcal{O} \to 0.$$

Rappelons [1] qu'un tel complexe de Kronecker D est dit *semi-stable* si pour tout sous-complexe de Kronecker $D' \subset D$ on a [1]

$$rP_{D'}(m) \leq r' P_D(m),$$

où P_D et $P_{D'}$ désignent le polynôme de Hilbert de D et D', définis par la somme alternée des polynômes de Hilbert des composantes, et r et r' les rangs respectifs de D et D', définis aussi par la somme alternée des rangs des composantes. On considère la variété $\mathfrak{M}^{ss}$ des complexes de Kronecker semi-stables. Le groupe $G = \mathrm{Gl}(K) \times \mathrm{Gl}(H) \times \mathrm{Gl}(L)$ opère sur $\mathfrak{M}^{ss}$. Il s'agit de montrer qu'il existe un bon quotient $\mathfrak{M}^{ss} \to \mathbb{M}(r, c_1, \chi)$. Il est en fait commode de commencer par quotienter par l'action du sous-groupe distingué $\mathrm{Gl}(K) \times \mathrm{Gl}(L)$. On sait que pour un tel complexe semi-stable, le morphisme α est génériquement injectif, et que le morphisme β est

[1] Les polynômes sont ordonnés par ordre lexicographique, commençant par les termes de plus haut degré.

surjectif. Le seul faisceau de cohomologie du complexe ci-dessus est $F = \operatorname{Ker}\beta/\operatorname{Im}\alpha$; ce faisceau est semi-stable au sens de Gieseker et Maruyama, et a pour rang r, pour première classe de Chern c_1 et pour caractéristique d'Euler-Poincaré χ. Il en résulte que pour un tel complexe, l'application linéaire $a : K \to H\otimes V$ définie par $a = H^0(\alpha(1))$ est injective, et l'application linéaire $b : H \otimes V^* \to L$ définie par $b = H^2(\beta(-3))$ est surjective. Considérons le produit de grassmanniennes

$$\mathfrak{G} = \mathrm{Grass}_{n+c_1}(H \otimes V) \times \mathrm{Grass}^{n-(r+c_1)}(H \otimes V^*),$$

où le premier facteur est la grassmannienne des sous-espaces de dimension $n + c_1$ et le deuxième facteur est la grassmannienne des sous-espaces de codimension $n - (r + c_1)$. Le groupe $\mathrm{Gl}(K) \times \mathrm{Gl}(L)$ opère librement sur $\mathfrak{M}^{ss}$, et on a un morphisme équivariant

$$\phi : \mathfrak{M}^{ss} \to \mathfrak{G}$$

qui associe au complexe de Kronecker semi-stable $D = (\alpha, \beta)$ la paire $(\overline{K} = \operatorname{Im} a, \overline{L} = \ker b)$.

LEMME 2.1. — *Le morphisme ϕ fait de $\mathfrak{M}^{ss}$ un $\mathrm{Gl}(K) \times \mathrm{Gl}(L)$-fibré principal au-dessus d'une sous-variété localement fermée $\mathfrak{N}^{ss}$ de $\mathfrak{G}$.*

Définition de $\mathfrak{N}^{ss}$. — Pour décrire la variété $\mathfrak{N}^{ss}$ on introduit pour tout sous-espace vectoriel $H' \subset H$ et tout point $(K, L) \in \mathfrak{G}$ les sous-espaces vectoriels $K' \subset K$ et $L' \subset L$ définis par

$$K' = a^{-1}(H' \otimes V), \quad L' = b(H' \otimes V^*),$$

où $a : K \to H\otimes V$ est l'inclusion canonique et $b : H\otimes V^* \to L$ la projection canonique sur L, considéré comme espace vectoriel quotient de $H \otimes V^*$. On définit χ', n', c_1', r' par les formules :

$$\begin{aligned}
\dim H' &= n', \\
\dim K' &= n' + c_1', \\
\dim L' &= -\chi' = n' - (r' + c_1').
\end{aligned}$$

La sous-variété $\mathfrak{N}^{ss}$ est définie par les paires $(K, L) \in \mathfrak{G}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) Les morphismes canoniques

$$K \otimes \wedge^2 Q^* \xrightarrow{\alpha} H \otimes Q^* \xrightarrow{\beta} L \otimes \mathcal{O}$$

satisfont à l'équation $\beta \circ \alpha = 0$.

(2) Pour tout sous-espace $H' \subset H$, on a :

$$r(c_1'm + \chi') \leq r'(c_1 m + \chi).$$

Démonstration du lemme 2.1. — Il est clair que la paire $(\overline{K}, \overline{L})$ associée au complexe de Kronecker D satisfait à la condition (1) ; elle satisfait également à la condition (2), car la paire (K', H') associée à un sous-espace $H' \subset H$ définit un sous-complexe $D' \subset D$, et la condition (2) résulte de la définition de la semi-stabilité écrite pour ce sous-complexe. Réciproquement, une paire $(K, L) \in \mathfrak{N}^{ss}$ définit un complexe de Kronecker D

$$0 \to K \otimes \wedge^2 Q^* \xrightarrow{\alpha} H \otimes Q^* \xrightarrow{\beta} L \otimes \mathcal{O} \to 0$$

et le morphisme α est trivialement injectif; pour voir que ce complexe est semi-stable, on peut considérer le sous-complexe maximal $D' \subset D$ (cf. [1, p. 212]) :

$$0 \to K' \otimes \wedge^2 Q^* \xrightarrow{\alpha'} H' \otimes Q^* \xrightarrow{\beta'} L' \otimes \mathcal{O} \to 0.$$

Ce sous-complexe est en fait une monade d'après [1, lemme 2.4]. Il en résulte que le rang r' est ≥ 0 et que le complexe D' coïncide avec celui qui est associé au sous-espace $H' \subset H$. De la condition (2) résulte la semi-stabilité du complexe D.

Dès lors, si on trivialise localement les fibrés universels sur $\mathfrak{G}$ on construit des sections locales pour le morphisme équivariant ϕ. L'énoncé en résulte. $\square$

3. La polarisation

On désigne par $\mathfrak{G}^{ss}$ l'ouvert de $\mathfrak{G}$ des paires (K, L) qui satisfont à la condition (2) ci-dessus. On se propose de montrer que $\mathfrak{G}^{ss}$ est l'ouvert des points semi-stables de $\mathfrak{G}$ pour une polarisation que nous allons préciser. Pour tout sous-espace $H' \subset H$, on considère le polynôme de degré 1

$$P_{H'}(m) = (rc_1' - r'c_1)(m-1) + (r\chi' - r'\chi),$$

où les entiers r', c_1', χ' sont ceux qui ont été définis dans la section 2. On obtient ainsi une famille finie de polynômes de degré 1, et on peut choisir un entier $m = m(r, c_1, \chi)$ assez grand pour que l'on ait les équivalences :

$$P_{H'} < 0 \iff P_{H'}(m) < 0,$$

$$P_{H'} = 0 \iff P_{H'}(m) = 0.$$

On choisira en outre m assez grand pour que $(r+c_1)m > n$. Un tel entier m sera fixé dans toute la suite. L'ouvert $\mathfrak{G}^{ss}$ est défini par les paires (K, L) qui satisfont à la condition $P_{H'}(m) \leq 0$ pour tout sous-espace vectoriel H' de H.

On munit $\mathfrak{G}$ du plongement

$$\mathfrak{G} \hookrightarrow \mathbb{P}\big(\textstyle\bigwedge^{n+c_1}(H \otimes V)\big) \times \mathbb{P}\big(\textstyle\bigwedge^{2n+(r+c_1)}(H \otimes V^*)\big)$$

induit par le plongement de Plücker sur chacun des facteurs. Ceci donne un sens au fibré inversible $\mathcal{O}(k, \ell)$ pour tout couple d'entiers (k, ℓ), et l'action de $\mathrm{Sl}(H)$ sur $\mathfrak{G}$ se relève de manière naturelle en une linéarisation de ce fibré inversible.

THÉORÈME 3.1. — *Soient $k = (r+c_1)m - n$ et $\ell = -c_1 m + n$. La variété projective $\mathfrak{G}$ étant munie de la polarisation définie par le fibré très ample $\mathcal{L} = \mathcal{O}(k, \ell)$, l'ouvert $\mathfrak{G}^{ss}$ coïncide avec l'ouvert des points semi-stables de $\mathfrak{G}$ pour l'action naturelle du groupe* $\mathrm{Sl}(H)$.

Considérons un sous-groupe à un paramètre :

$$\lambda : \mathbb{C}^* \to \mathrm{Sl}(H).$$

Rappelons que si $z \in \mathfrak{G}$ est un point fixe sous l'action de λ, on définit l'entier $\mu = \mu(\lambda, z)$ par la formule

$$\lambda(t)\xi = t^{\mu}\xi$$

pour $\xi \in \mathcal{L}_z$. Si $y \in \mathfrak{G}$ est un point quelconque, l'entier $\mu(\lambda, y)$ est défini par $\mu(\lambda, y) = \mu(\lambda, z)$, où z est la spécialisation $z = \lim_{t \to 0} \lambda(t)(y)$. Le point y est semi-stable sous l'action de $\mathrm{Sl}(H)$ si pour tout sous-groupe à un paramètre λ de $\mathrm{Sl}(H)$ on a $\mu(\lambda, y) \geq 0$.

Considérons un point $y = (K, L) \in \mathfrak{G}$ et désignons par H_i la somme directe des sous-espaces propres correspondant aux valeurs propres t^j, avec $j \leq i$. La suite H_i est croissante; désignons par K_i et L_i les sous-espaces de K et L associés, et par $\mathrm{gr}_i(H)$, $\mathrm{gr}_i(K)$ et $\mathrm{gr}_i(L)$ les gradués associés.

LEMME 3.2. — *On a*

$$\mu(\lambda, y) = -\sum_i i \cdot m_i$$

avec $\quad m_i = k \dim \mathrm{gr}_i(K) + \ell\big(3 \dim \mathrm{gr}_i(H) - \dim \mathrm{gr}_i(L)\big).$

C'est un calcul standard que nous ne reprendrons pas ici (voir [5], [3]). Il en découle le critère suivant.

LEMME 3.3. — *Le point $y = (K, L)$ est semi-stable si et seulement si pour tout sous-espace vectoriel $H' \subset H$ de dimension n' on a, avec les notations de la section 2 :*

$$\frac{1}{n'}(k \dim K' - \ell \dim L') \leq \frac{1}{n}(k \dim K - \ell \dim L).$$

Démonstration du théorème 3.1. — L'inégalité du LEMME 3.3 s'écrit encore, avec les notations de la section 2 :

$$k(n \dim K' - n' \dim K) - \ell(n \dim L' - n' \dim L) \leq 0.$$

On a :

$$n \dim K' - n' \dim K = nc_1' - n'c_1,$$

$$n \dim L' - n' \dim L = n'\chi - n\chi' = n'(r + c_1) - n(r' + c_1').$$

Considérons la matrice :

$$\begin{pmatrix} c_1' & n' & r' + c_1' \\ c_1 & n & r + c_1 \\ c_1 & n & r + c_1 \end{pmatrix}.$$

En développant le déterminant par rapport à la dernière ligne, et compte tenu des valeurs de k et ℓ et des relations $2n = r + \dim K + \dim L$ et $2n' = r' + \dim K' + \dim L'$, on voit que cette inégalité est équivalente à

$$nm(rc_1' - r'c_1) + n(nr' - n'r) \leq 0,$$

c'est-à-dire :

$$(rc_1' - r'c_1)(m - 1) + r\chi' - r'\chi \leq 0.$$

Compte tenu du choix de m, ceci signifie exactement que le point (K, L) appartient à l'ouvert $\mathfrak{G}^{ss}$. □

REMARQUE 3.4. — On a bien sûr un peu de liberté dans le choix de la polarisation. Avec la polarisation que nous avons choisie, les calculs s'arrangent un peu mieux.

COROLLAIRE 3.5. — *L'espace de modules $\mathbb{M}(r, c_1, \chi)$ est une sous-variété fermée de la variété projective $\mathbb{N}(r, c_1, \chi) := \mathfrak{G}^{ss}/\mathrm{Sl}(H)$.*

Lorsque r, c_1 et χ sont premiers entre eux, les points semi-stables de $\mathfrak{G}$ sont stables, et l'action du groupe $\mathrm{Sl}(H)$ se factorise en une action libre de $\mathrm{PSl}(H)$ de sorte que la variété projective $\mathbb{N}(r, c_1, \chi)$ est lisse.

Il nous paraît intéressant de calculer l'anneau de Chow de cette variété : les fibrés universels introduits par G. ELLINGSRUD et S.A. STRØMME [2] s'étendent à cette variété, et la classe fondamentale $[\mathbb{M}]$ de $\mathbb{M}(r, c_1, \chi)$ se calcule facilement en termes des classes de Chern de ces fibrés en utilisant la formule de Porteous. En calquant l'article de G. ELLINGSRUD et S.A. STRØMME, on obtient que l'anneau de Chow $A(\mathbb{M}(r, c_1, \chi))$ est isomorphe au quotient de $A(\mathbb{N}(r, c_1, \chi))$ par l'annulateur de $[\mathbb{M}]$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DREZET (J.M.) et LE POTIER (J.). — *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur le plan projectif*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), t. **18**, 1985, p. 193–244.

[2] ELLINGSRUD (G.) and STRØMME (S.A.). — *Towards the Chow ring of the Hilbert scheme of $\mathbb{P}_2$*, Preprint, 1992.

[3] LE POTIER (J.). — *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, cours de DEA, Université Paris 7, 1991.

[4] MARUYAMA (M.). — *Moduli of stable sheaves, II*, J. Math. Kyoto Univ., t. **18**, 1978, p. 557–614.

[5] MUMFORD (D.) and FOGARTY (J.). — *Geometric Invariant Theory*, Springer Verlag, 1982.