BULLETIN DE LA S. M. F.

M.M. VIROTTE-DUCHARME

Présentation de certains couples fischériens de type classique

Bulletin de la S. M. F., tome 121, n^{o} 2 (1993), p. 227-270

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1993__121_2_227_0>

Bull. Soc. math. France,
121, 1993, p. 227–270.

PRÉSENTATION DE CERTAINS COUPLES FISCHÉRIENS DE TYPE CLASSIQUE

PAR

M.M. VIROTTE-DUCHARME (*)

RÉSUMÉ. — Soit D la classe des transvections unitaires ou la classe des réflexions orthogonales t_v, v étant de longueur donnée. On sait que D est une classe de 3-transpositions de G, où G désigne $\mathrm{SU}(n, \mathbb{F}_4)$ ou un sous-groupe d'indice 2 de $\mathrm{O}(n, \mathbb{F}_3)$. Dans ces deux cas, nous donnons des présentations $(X, \mathcal{R})$ pour le groupe G telles que X soit contenu dans D ; on obtient G comme un quotient d'un groupe de Coxeter avec un diagramme approprié.

ABSTRACT. — Let D be the class of the unitary transvections or the class of the orthogonal reflections t_v, v with given length. We know that D is a class of 3-transpositions of G, where G denotes $\mathrm{SU}(n, \mathbb{F}_4)$ or a subgroup of index 2 in $\mathrm{O}(n, \mathbb{F}_3)$. In these two cases, we give presentations $(X, \mathcal{R})$ for the group G with X contained in D; we obtained G as a quotient of a Coxeter group with an appropriate diagram.

Soit (G, D) un couple fischérien, c'est-à-dire la donnée d'un groupe G engendré par une classe D d'involutions conjuguées telles que l'ordre de xy (avec $x, y \in D$) soit 1, 2 ou 3. On dit alors que D est une *classe de Fischer* de G. Toute partie X de D qui engendre G, détermine un graphe dont les sommets sont les éléments de X et les arêtes les paires d'éléments distincts x et y de X tels que $(xy)^3 = 1$. Notons $\mathcal{R}_F(X)$ l'ensemble des relations contenues dans la donnée d'un tel graphe sur X.

Nous nous proposons de donner des présentations $(X, \mathcal{R})$ pour deux des quatre familles de couples fischériens de type classique (G, D) intervenant dans le théorème de classification de Fischer [6] ; présentations pour lesquelles X est contenu dans D et $\mathcal{R}_F(X)$ est une partie de $\mathcal{R}$.

(*) Texte reçu le 7 décembre 1991, révisé le 25 juin 1992.
M.M. VIROTTE-DUCHARME, Université de Paris VII, 2 place Jussieu, UFR de Mathématiques, Tour 45–55, 5e étage, 75251 Paris cedex 05.
Classification AMS : 20.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1993/227/$ 5.00

Le cas des groupes symplectiques $G = \mathrm{Sp}(2n, 2)$ et des groupes orthogonaux $G = \mathrm{O}_\nu(2n, 2)$ a été traité à titre d'application des principes généraux exposés dans *Présentations des groupes de Fischer* (I) (cf. [12]). Les familles dont il est question ici concernent certains sous-groupes normaux $G^\varepsilon(n, 3)$, avec $\varepsilon \in \{+, -\}$ et $n \geq 5$, du groupe orthogonal $\mathrm{O}(n, \mathbb{F}_3, \phi)$ (section 1) et les groupes unitaires $\mathrm{SU}(n, 4)$ $(n \geq 4)$ (section 2).

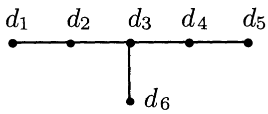
Les groupes $G^\varepsilon(n, 3)$ sont les sous-groupes d'indice 2 de $\mathrm{O}(n, \mathbb{F}_3, \phi)$ qui admettent pour classe de Fischer une classe de réflexions orthogonales t_v. Il y a lieu de distinguer, pour chaque valeur de n, deux situations suivant que l'indice de ϕ est maximal ou non quand n est pair, et suivant que l'on considère la classe des réflexions t_v avec $\phi(v, v) = 1$ ou $\phi(v, v) = -1$ quand n est impair. De plus amples détails sont donnés en préliminaires et résumés sous forme de tableau (section 0, paragraphe 1).

On établit que chaque groupe des familles mentionnées ci-dessus admet une présentation $(X, \mathcal{R})$ où X est un sous-ensemble de D et où $\mathcal{R}$ est la réunion de $\mathcal{R}_F(X)$ (défini ci-dessus), de $\mathcal{R}_S$ ensemble de relations supplémentaires et de $\mathcal{R}_Z$ relations concernant le centre de G. Le plus souvent, on obtient des présentations pour des extensions centrales de G dont on déduit des présentations pour G en ajoutant les relations $\mathcal{R}_Z$.

La méthode suivie est essentiellement inductive. Elle est rappelée dans les préliminaires (section 0, paragraphe 2) et exposée dans [12].

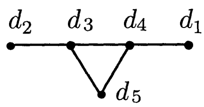
Pour les petites dimensions on a les résultats suivants [1], [6], [10], [13] :

(i) $G^-(5, 3) \simeq W(E_6)$ admet une présentation $(X, \mathcal{R}_F(X))$ avec :

- $X = (d_j \mid 1 \leq j \leq 6)$,
- $\mathcal{R}_F(X)$: 

.

(ii) $\mathrm{PSU}(4, 4)$ admet une présentation $(X, \mathcal{R}_F(X) \cup \mathcal{R}_S \cup \mathcal{R}_Z)$ avec :

- $X = (d_j \mid 1 \leq j \leq 5)$,
- $\mathcal{R}_F(X)$: 

,
- $\mathcal{R}_S$: $\big(d_3 d_4 d_3 d_5\big)^3 = 1$,
- $\mathcal{R}_Z$: $p = 1$ avec $p = d_1 d_2 d_5 \big(d_2^{s d_2 d_1 d_4 d_5 d_3}\big)\big(d_2^{s d_1 d_5 d_3}\big)$ et $s = (d_3 d_4 d_5)^2$.

(iii) $G^+(5, 3) \simeq C_2 \times \mathrm{PSU}(4, 4)$ admet (avec les notations de (ii)) une présentation $(X, \mathcal{R}_F(X) \cup \mathcal{R}_S)$; p est alors l'involution centrale de $G^+(5, 3)$.

Les sections 1 et 2 traitent successivement des groupes orthogonaux et unitaires. Au début de chacune d'elles, c'est-à-dire au paragraphe 1, on trouve les énoncés des résultats et les notations. Les démonstrations sont reportées au paragraphe 2 et les calculs trop longs sont donnés en appendice.

Pour les petites dimensions, les présentations des groupes $G^{\varepsilon}(n,3)$ pour $n \leq 9$ et $\mathrm{SU}(n,4)$ pour $n \leq 6$ ont été vérifiées sur CAYLEY V3.7.3 machine SUN 3.60 par S. BOUC au Département de Mathématique et d'Informatique de l'École Normale Supérieure à Paris.

Je tiens à remercier ici le referee pour ses critiques lors de la lecture d'une première version de ce travail.

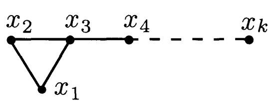
0. Préliminaires

1. Notations.

0.1.1. — Soient G un groupe et X un ensemble générateur contenu dans une classe de Fischer D de G. Désignons par g le graphe dont les sommets sont les éléments de X et les arêtes les paires d'éléments distincts de X dont le produit est d'ordre 3. La donnée de ce graphe g est équivalente à celle d'un ensemble de relations $\mathcal{R}(g)$ portant sur les éléments de X (relations du type $x^2 = 1$, $(xy)^2 = 1$ ou $(xy)^3 = 1$).

Si $(X, \mathcal{R}(g) \cup r)$ est une présentation de G où $\mathcal{R}(g)$ est défini ci-dessus et où r est un ensemble de relations portant sur les éléments de X, on dit que X *satisfait à la formule de présentation* $g \cup r$ où g est le graphe défini ci-dessus; G est un quotient du groupe de Coxeter $(X, \mathcal{R}(g))$.

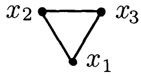
0.1.2. *Exemple.* — On note $\mathcal{H}_{3,k}$ un groupe avec la présentation $(X_k, \mathcal{R}(h_k) \cup r)$ où :

- $X_k = \{x_j \mid 1 \leq j \leq k\}$,
- h_k : 

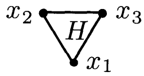
,
- $r : \big(x_1 x_2 x_1 x_3\big)^3 = 1$.

On montre que ce groupe est d'ordre $k\,!\,3^{k-1}$, qu'il admet une classe de Fischer de cardinal $\frac{1}{2}3k(k-1)$ et que son centre, trivial si $k \not\equiv 0 \pmod 3$, est engendré par l'élément $\gamma_2\gamma_3\cdots\gamma_n$ d'ordre 3, où $\gamma_2 = x_1x_2$ et $\gamma_j = x_j\gamma_{j-1}x_j$ pour $3 \leq j \leq k$.

Pour $k = 3$, le groupe $\mathcal{H}_{3,3}$ est noté $\mathcal{H}$; il est d'ordre 54, les éléments de sa classe de Fischer ne commutent pas entre eux; $\mathcal{H}$ est engendré par les éléments x_1, x_2, x_3 sur lesquels on a la formule de présentation



$$\big(x_1x_2x_1x_3\big)^3 = 1$$

que l'on notera 

pour alléger l'écriture.

Le centre de $\mathcal{H}$ est engendré par l'élément $(x_1x_2x_3)^2$ d'ordre 3 (voir [6], [10], [12] et [13]).

2. Le groupe $G^{\varepsilon}(n,3)$ pour $n \geq 5$ et ε dans $\{+,-\}$.

0.2.1. — Soit V un espace vectoriel de dimension $n \geq 5$ sur $\mathbb{F}_3$. Soient ϕ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur V et $\mathrm{O}(n,\phi)$ le groupe des isométries de ϕ. Ce groupe est noté souvent $\mathrm{GO}_n(3)$, ou encore $\mathrm{O}(\phi)$ dans [1] et $\mathrm{O}(\mathbb{F}_3,\phi)$ dans [5]. Soit v dans V. On dit que v est de *longueur* k, avec $k \in \mathbb{F}_3$, si $\phi(v,v) = k$. Si V admet une base orthonormale, on dit que V est de *type* $\varepsilon = +$; dans le cas contraire, on dit que V est de *type* $\varepsilon = -$.

L'ensemble de réflexions t_v (avec $v \in V$ et $\phi(v,v) \neq 0$) est la réunion de classes de conjugaison $E(1)$ et $E(-1)$ dans $O(n,\phi)$: dans la première, les réflexions sont relatives à des vecteurs de longueur 1, dans la seconde, à des vecteurs de longueur -1. Chacune de ces classes est une classe de Fischer du sous-groupe de $\mathrm{O}(n,\phi)$ qu'elle engendre : ces sous-groupes sont d'indice 2 dans $\mathrm{O}(n,\phi)$. On pose

$$G\big(n,\phi,E(1)\big) = \big\langle E(1)\big\rangle \quad \text{et} \quad G\big(n,\phi,E(-1)\big) = \big\langle E(-1)\big\rangle$$

et on désigne par Ω le groupe dérivé de $\mathrm{O}(n,\phi)$, i.e. $\Omega = \mathcal{D}(\mathrm{O}(n,\phi))$. On établit sans peine les assertions suivantes :

$$\mathcal{D}\big(G\big(n,\phi,E(1)\big)\big) = \Omega = \mathcal{D}\big(G\big(n,\phi,E(-1)\big)\big),$$

$$G\big(n,\phi,E(1)\big) \cap E(-1) = \emptyset = G\big(n,\phi,E(-1)\big) \cap E(1),$$

$$\big|G\big(n,\phi,E(1)\big) : \Omega\big| = 2 = \big|G\big(n,\phi,E(-1)\big) : \Omega\big|$$

(on utilise le fait que si v et v' sont des vecteurs orthogonaux de longueur 1, $v-v'$ et $v+v'$ sont orthogonaux de longueur -1 et que $t_v t_{v'} = t_{v+v'}t_{v-v'}$).

Notons v_i, pour $1 \leq i \leq n$, une base orthogonale de l'espace vectoriel V dont les $(n-1)$ premiers vecteurs sont de longueur 1 et $\phi(v_n,v_n) \neq 0$. Le centre du groupe orthogonal $\mathrm{O}(n,\phi)$ est formé des homothéties ; on a donc :

$$Z\big(\mathrm{O}(n,\phi)\big) = \langle -1\rangle \quad \text{et} \quad -1 = t_{v_1}\cdots t_{v_n}.$$

Le groupe dérivé Ω est un groupe simple s'il ne contient pas -1 ; si -1 appartient à Ω, alors $\Omega/\langle -1\rangle$ est un groupe simple [5].

0.2.2. *Supposons n impair.* — Dans ce cas, Ω est un groupe simple.

• Quand $\phi(v_n, v_n) = 1$ (l'espace V est de type $+$), -1 appartient à $G(n, \phi, E(1))$ et n'appartient pas à $G(n, \phi, E(-1))$.

• Quand $\phi(v_n, v_n) = -1$ (l'espace V est de type $-$), -1 est dans $G(n, \phi, E(-1))$ et non dans $G(n, \phi, E(1))$.

Comme les vecteurs de longueur 1 pour ϕ (resp. -1) sont exactement les vecteurs de longueur -1 pour $-\phi$ (resp. $+1$), on a :

$$G\big(n, \phi, E(1)\big) = G\big(n, -\phi, E(-1)\big),$$

$$G\big(n, \phi, E(-1)\big) = G\big(n, -\phi, E(1)\big).$$

Posons, pour $\varepsilon \in \{+, -\}$:

$$G^+(n,3) = G(n, \phi, E(1)), \quad G^-(n,3) = G(n, -\phi, E(1)), \quad D = E(1).$$

Alors :

(i) $G^+(n,3) = \langle e \rangle \times \Omega$ avec e dans D;

(ii) $1 \to \Omega \to G^-(n,3) \to \langle e \rangle \to 1$ (où $e \in D$) est une extension non scindée.

0.2.3. *Supposons n pair.*—Les groupes $G(n, \phi, E(1))$ et $G(n, \phi, E(-1))$ sont isomorphes.

• Quand $\phi(v_n, v_n) = 1$ (V est de type $+$), on pose $G^+(n,3) = G(n, \phi, E(1))$ et $D = E(1)$: l'élément -1 appartient à Ω; le groupe $\Omega/\langle -1 \rangle$ est simple et on a l'extension non scindée :

$$1 \longrightarrow \Omega \longrightarrow G^+(n,3) \longrightarrow \langle e \rangle \longrightarrow 1 \qquad (e \in D).$$

• Quand $\phi(v_n, v_n) = -1$ (V est de type $-$), on pose $G^-(n,3) = G(n, \phi, E(1))$ et $D = E(1)$: -1 n'est ni dans Ω, ni dans $G^-(n,3)$. Le groupe Ω est un groupe simple et l'extension

$$1 \to \Omega \to G^-(n,3) \to \langle e \rangle \to 1 \qquad (e \in D)$$

est non scindée.

Observons que l'indice de la forme ϕ est maximal pour $\varepsilon(-1)^{n/2} = 1$ et non maximal pour $\varepsilon(-1)^{n/2} = -1$, ε désignant le type de l'espace V.

Faisons d'abord quelques remarques. Si V est un plan, ou bien c'est un plan hyperbolique (on a donc $\varepsilon = -1$), l'indice de ϕ est alors maximal, ou bien c'est un plan anisotrope (on a donc $\varepsilon = +$) et l'indice de ϕ est non maximal. Si V est de dimension 4, c'est la somme orthogonale de deux plans anisotropes (on a donc $\varepsilon = +$) ou d'un plan anisotrope et d'un plan hyperbolique (on a donc $\varepsilon = -$). Dans le second cas, l'indice de ϕ n'est pas maximal; dans le premier cas, l'indice de ϕ est maximal : si v_1, v_2, v_3, v_4 est une base orthonormale de V, $\langle v_1 + v_3 - v_4, v_2 + v_3 + v_4 \rangle$ est un plan isotrope.

• Supposons $\dim V = 2 \pmod 4$ et V de type $+$ (resp. $-$). Alors V est une somme orthogonale de sous-espaces de dimension 4 de type $+$ et d'un plan U de type $+$ (resp. $-$) : l'indice de la forme ϕ est alors non maximal (resp. maximal).

• Supposons $\dim V = 0 \pmod 4$ et V de type $+$ (resp. $-$). Alors V est une somme orthogonale de sous-espaces de dimension 4 et de type $+$, d'un plan anisotrope (type $+$) et d'un plan hyperbolique (type $-$). L'indice de ϕ est alors maximal (resp. non maximal).

0.2.4. *Table de notations ; liens avec les groupes simples associés.* — (Voir le tableau page suivante.) On pose $\Omega = \mathcal{D}(O(n, \phi))$ et

$$D = E(1) = \{t_v \mid \phi(v, v) = 1, \ v \in V\} \quad \nu \in \{+, -\}.$$

Type de V : V est de type $+$ si V admet une base formée de vecteurs orthogonaux v_i pour $1 \leq i \leq n$ avec $\phi(v_i, v_i) = 1$ et de type $-$ sinon.

Pour n pair, l'indice de la forme est maximal si et seulement si l'on a $\varepsilon(-1)^{n/2} = 1$ (cf. [3], [4], [5], [6], [7] et [10]).

3. La méthode.

Soit G un groupe avec une présentation $(X, \mathcal{R})$. Le premier résultat donne des conditions sous lesquelles G admet une classe de Fischer E contenant X, sachant que G possède un sous-groupe « assez gros » engendré par une classe de Fischer.

0.3.1. THÉORÈME. — *Soit G un groupe donné avec une présentation $(X, \mathcal{R})$ où X est un ensemble d'involutions, $|X| \geq 3$, et soit b un élément de X tel que :*

(i) *il existe un élément x_0 dans $X - \{b\}$ avec $(x_0 b)^3 = 1$,*

(ii) *pour tout x dans $X - \{b\}$ on a : ou bien $(xb)^2 = 1$ ou bien $(xb)^3 = 1$,*

(iii) *le sous-groupe $K = \langle X - \{b\} \rangle$ est distinct de G et admet une classe de Fischer $D(K)$ contenant $X - \{b\}$.*

$\dim(V) = n$	$4m+2$	$4m$	$4m+2$	$4m$	$2m+1$	
type de V (pour ϕ) $= \varepsilon$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
indice de ϕ	non max.	max.	max.	non max.		
groupe simple	$\Omega/\langle -1\rangle$		Ω		Ω	
(notation de l'Atlas)	$\mathrm{O}_n^-(3)$	$\mathrm{O}_n^+(3)$	$\mathrm{O}_n^+(3)$	$\mathrm{O}_n^-(3)$	$\mathrm{O}_n(3)$	
type de Lie	${}^2D_{2m+1}$	D_{2m}	D_{2m+1}	${}^2D_{2m}$	B_{2m+1}	
$G^\varepsilon(n,3)$	$G^+(n,3)$		$G^-(n,3)$		$G^-(n,3)$	$G^+(n,3)$
(notation de H. Cuypers	$1 \to \Omega \to G^\varepsilon(n,3) \to \langle e\rangle \to 1$					$\langle -1\rangle \times \Omega$
et J.I. Hall)	extension non scindée, $e \in D$					
	${}^+\Omega_n^-(3)$	${}^+\Omega_n^+(3)$	${}^+\Omega_n^+(3)$	${}^+\Omega_n^-(3)$	${}^+\Omega_n^\nu(3)$	${}^+\Omega_n^\nu(3)$
					$1 = \nu(-1)^m$	$-1 = \nu(-1)^m$
$Z(G^\varepsilon(n,3))$	$\langle -1\rangle$		1			$\langle -1\rangle$

$\Omega = \mathcal{D}(O(n,\phi))$, $\quad D = E(1) = \{t_v \mid \phi(v,v) = 1,\ v \in V\}$, $\quad \nu \in \{+,-\}$.

Type de V : V est de type $+$ si V admet une base formée de vecteurs orthogonaux v_i pour $1 \le i \le n$ avec $\phi(v_i, v_i) = 1$ et de type $-$ sinon.

Table des notations.

Si les conditions C.0 et C.1 ci-dessous (resp. C.0, C.2) sont satisfaites, alors $E = D(K) \cup \{b^k \mid k \in K\}$ (resp. $E = D(K) \cup \{b^{zb}\} \cup \{b^k \mid k \in K\}$, pour z voir C.2) est une classe de Fischer de G et l'on a :

$$|E| = |D(K)| + |K : C_K(b)|$$

(resp. $|D(K)| + 1 + |K : C_K(b)|$).

C.0 Le centralisateur B de b dans K opère transitivement (par conjugaison) sur $D(K) - B$;

C.1 Pour tout élément k dans K, il existe des éléments d et d' dans $D(K)$ tels que $k \in Bd \cup Bdd'$;

C.2 Le centre de K contient une involution z ne centralisant pas b telle que $(bb^{zb})^3 = 1$ et $(xb^{zb})^2 = 1$ pour tout x dans $X - \{b\}$. Pour tout élément k dans K, il existe des éléments d et d' dans $D(K)$ tels que $k \in Bd \cup Bdz \cup Bdd' \cup Bz$ [12, 1.3.1].

0.3.2. — Soit $G = (X, \mathcal{R})$ un groupe satisfaisant aux hypothèses du théorème ci-dessus et pour lequel les conditions C.0 et C.1 (resp. C.0 et C.2) sont remplies. Supposons X fini, $X = \{x_i \mid 1 \le i \le n\}$, et notons E la classe de Fischer de G.

Soit H un groupe de la famille $G^{\varepsilon}(n,3)$, $\mathrm{SU}(n,4)$, avec $n \ge 5$, des groupes étudiés ici ; soit $D = D(H)$ la classe de Fischer de H. Supposons que H admette des générateurs y_i $(1 \le i \le n)$ satisfaisant aux relations $\mathcal{R}$, on démontre alors le résultat suivant :

(i) il existe un homomorphisme ψ de G sur H qui applique x_i sur y_i pour $1 \le i \le n$;

(ii) si $|E| = |D|$, l'extension $1 \to \ker\psi \to G \xrightarrow{\psi} H \to 1$ est centrale (voir. [12, 1.3.2]).

Observons que le groupe H est presque simple (i.e. $\mathcal{D}(H/Z(H))$ est simple non abélien). Posons $\overline{H} = H/Z(H)$. Dans la situation ci-dessus et sous l'hypothèse $|E| = |D|$, on a une extension centrale :

$$(e) : 1 \to Z \longrightarrow G \longrightarrow H \to 1.$$

Posons $Z' = \mathcal{D}(G) \cap Z$; on démontre les assertions suivantes :

(1) Si $|\overline{H} : \mathcal{D}(\overline{H})| = 2$, alors $Z = Z'$, l'extension (e) est non scindée, $|G : \mathcal{D}(G)| = 2$ et $|Z|$ est un diviseur de l'ordre du multiplicateur de Schur du groupe simple $\mathcal{D}(\overline{H})$.

(2) Si $|\overline{H} : \mathcal{D}(\overline{H})| = 1$, alors $|G : \mathcal{D}(G)| = |Z : Z'| \le 2$, $G \simeq Z^0 \times G'$, où Z^0 est un sous-groupe central de G et où G' est une extension

centrale non scindée de Z' par H ; $|Z'|$ divise l'ordre du multiplicateur de Schur du groupe simple $\mathcal{D}(\overline{H})$. (On rappelle que : $|G : \mathcal{D}(G)| \leq 2$, que $Z(\mathcal{D}(G)) \subset Z(G)$ et que $\mathcal{D}(G)$ est engendré par les produits ee' d'éléments de E, cf. [6] et [12, 1.3.3]).

Multiplicateur de Schur du groupe simple $\mathcal{D}(\overline{H})$. — (Avec les notations ci-dessus.)

H	$\overline{H} : \mathcal{D}(\overline{H})$	mult. de Schur de $\mathcal{D}(\overline{H})$
$G^+(2p+1,3), \quad p \geq 4$	1	$C_2 \times C_2$
$G^+(2p,3), \quad p \geq 4$	2	$C_2 \times C_2$
$G^+(6,3)$	2	$C_4 \times C_3 \times C_3$
$G^\varepsilon(7,3)$	2	$C_3 \times C_2$
$G^-(n,3) \quad n \geq 6,\ n \neq 7$	2	C_2
$\mathrm{SU}(n,4) \quad n \geq 4,\ n \neq 6$	1	1
$\mathrm{SU}(6,4)$	1	$C_3 \times C_2 \times C_2$

(cf. [8] et [12]).

On peut alors établir la proposition suivante :

0.3.3. — Soit $(e) : 1 \to Z \to G \xrightarrow{\psi} H \to 1$ une extension centrale d'un couple fischérien (H, D) pour laquelle G admet une classe de Fischer E telle que $|\psi(E)| = |D|$. Alors :

(1) Pour $H \simeq \mathrm{SU}(n,4)$ (avec $n \geq 4$ et $n \neq 6$) l'extension (e) est scindée, on a $|Z| \leq 2$ et $G \simeq Z \times H$.

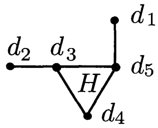
(2) Pour $H \simeq G^\varepsilon(n,3)$ (avec $n \geq 8$ ou ($n = 6$ et $\varepsilon = -$)), l'extension (e) est triviale : $G \simeq H$.

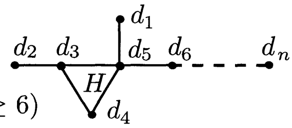
(3) Pour $H \simeq G^\varepsilon(7,3)$, l'extension (e) est ou bien triviale, ou bien non scindée, et dans ce cas $|Z| = 3$ [12, 1.3.7].

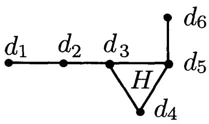
0.3.4. — Pour chaque groupe H des familles $G^\varepsilon(n,3)$ pour $n \geq 6$, ($n = 6$, $\varepsilon = +$ excepté) et $\mathrm{SU}(n,4)$ pour $n \geq 5$, on détermine un ensemble générateur X contenu dans la classe de Fischer $D = D(H)$ de H de telle sorte que $X_0 = X - \{b\}$ engendre le stabilisateur K dans H d'un vecteur de longueur -1. Le centralisateur B de b dans K et K satisfont aux conditions C.0 et C.1 du THÉORÈME 0.3.1 (cf. [12, 1.4.6 et 1.4.7, cas 3 et 4]). Les groupes K et B sont respectivement isomorphes à $G^{-\varepsilon}(n-1,3)$ et à $G^\varepsilon(n-2,3)$ si H désigne $G^\varepsilon(n,3)$, et à $\mathrm{SU}(n-1,4)$ et $\mathrm{SU}(n-2,4)$ si H désigne $\mathrm{SU}(n,4)$. On a $|D(K)| + |K : B| = |D(H)|$.

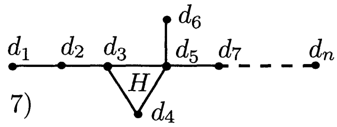
Dans le cas d'exception, on est conduit à faire des choix différents pour K et B puisque $G^+(4,3)$ (isomorphe à $W(D_4)$) n'est pas le stabilisateur dans H d'un plan anisotrope. On détermine un ensemble générateur $X_0 = X - \{b\}$ où $\langle X_0 \rangle$ est le stabilisateur dans K d'un vecteur v de longueur 1 ; t_v est alors un élément central de K ne centralisant pas b. Le stabilisateur B de b dans K est le stabilisateur d'un vecteur isotrope. On a $K \simeq G^+(5,3)$ et $B \simeq \mathcal{H}_{3,4}$. Ces groupes satisfont aux conditions C.0 et C.2 ci-dessus et l'on a : $|D(K)| + 1 + |K : B| = |D(H)|$ [12, 1.4.6, 1.4.7 cas 3′]).

0.3.5. *Systèmes générateurs pour $G^\varepsilon(n,3)$.* — Le groupe $G^\varepsilon(n,3)$ est engendré par des éléments d_i $(1 \le i \le n)$ de sa classe de Fischer sur lesquels on a les relations f_n si $\varepsilon(-1)^n = -1$ et $n \ge 5$, et les relations g_n si $\varepsilon(-1)^n = 1$ et $n \ge 6$:

f_5 :


f_n :
$(n \ge 6)$


g_6 :


g_n :
$(n \ge 7)$


Soient n et ε tels que $\varepsilon(-1)^n = -1$ (resp. $\varepsilon(-1)^n = 1$). Par récurrence sur la dimension n de l'espace vectoriel V associé à G, on définit une base v_j pour $1 \le j \le n$ de V de vecteurs de longueur 1 de telle sorte que les réflexions t_{v_j} qui leurs sont associées satisfassent aux relations f_n (resp. g_n) :

- pour $n = 5$:

$$\begin{cases} \phi(v_i, v_{i+1}) = \phi(v_3, v_5) = \phi(v_1, v_5) = 1, & 2 \le i \le 5, \\ \phi(v_i, v_j) = 0, \qquad 1 \le i < j \le 5, & (i,j) \notin \{(1,5), (3,5), (i, i+1)\} \,; \end{cases}$$

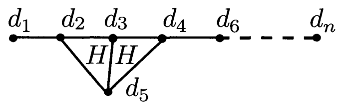
- pour $n = 6$:

$$\begin{cases} \phi(v_i, v_{i+1}) = \phi(v_3, v_5) = 1, & 1 \le i \le 5, \\ \phi(v_i, v_j) = 0, \qquad 1 \le i < j \le 6, & (i,j) \notin \{(3,5), (i, i+1)\}. \end{cases}$$

Pour $n > 5$ (resp. $n > 6$), on sait construire par récurrence une base de $(n-1)$ vecteurs de longueur 1 engendrant un sous-espace V' de dimension $(n-1)$ et de type $-\varepsilon$ tel que l'on ait les relations f_{n-1} (resp. g_{n-1}) ;

l'orthogonal de V' est un vecteur a_n de longueur -1, on pose alors : $v_n = a_n + v_1 + v_4 - \sum_5^{n-1} v_j$ (resp. $v_n = a_n + v_4 - v_5 - v_6 - \sum_6^{n-1} v_j$). (Dans tout ce numéro, ϕ désigne une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur V, pour laquelle V est de type ε.)

0.3.6. *Systèmes générateurs pour* $\mathrm{SU}(n,4)$. — On note ϕ une forme non dégénérée antihermitienne sur V, espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{F}_4$. On construit par récurrence une base de V formée de vecteurs non isotropes v_i pour $1 \leq i \leq n$ satisfaisant :



On choisit les v_i de la manière suivante :

- $\phi(v_i, v_{i+1}) = \phi(v_4, v_6) = \phi(v_2, v_5) = \phi(v_4, v_5) = 1$ si $1 \leq i \leq n-1$ et $i \neq 5$;
- $\phi(v_i, v_j) = 0$ si $1 \leq i \leq j \leq n$ et $(i,j) \notin \{(2,5),(3,5),(i,i+1)\}$;
- $\phi(v_5, v_3) = \omega$ avec $\{\omega, \bar{\omega}\} = \mathbb{F}_4 - \{1, 0\}$.

Soit V' le sous-espace engendré par v_i pour $1 \leq i \leq n-1$; c'est un sous-espace non dégénéré dont l'orthogonal est une droite portée par :

$$a_n = v_1 + \omega v_3 + v_4 + \bar{\omega} v_5 + \sum_6^{n-1} v_j$$

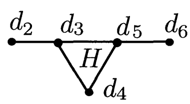
pour $n > 6$ (cf. [5], [12]).

1. Groupes orthogonaux sur $\mathbb{F}_3$

1. Énoncés des résultats. Notations.

1.1.1. — Le groupe $G^+(5,3)$ admet un système générateur d_i pour $2 \leq i \leq 6$ formé d'éléments de sa classe de Fischer D sur lequel

$F(5)$

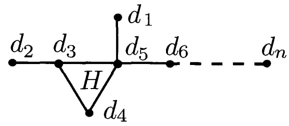


est une formule de présentation. L'involution centrale p est le produit de cinq éléments de D commutant deux à deux :

$$p = d_2 d_4 d_6 x x'$$

avec $x = d_3^{d_5 d_2 d_4 d_6 d_3 d_5 d_3}$ et $x' = d_3^{d_2 x d_4 d_3}$ [10, chap. 4].

1.1.2 THÉORÈME. — *Soient $n \geq 6$ un entier et $\varepsilon \in \{+,-\}$ tels que $\varepsilon(-1)^n = -1$. Le groupe $G^\varepsilon(n,3)$ admet sur le système générateur d_j (avec $1 \leq j \leq n$) la formule de présentation*

$F(n)$ 

, $(d_1^s d_6)^2 = 1, \quad z = 1$ *si* $n \geq 7$,

s et z étant définis ci-dessous en 1.1.3 *et* 1.1.5.

1.1.3. — On pose $s = (d_3 d_4 d_5)^2$; s est un élément central du sous-groupe H_0 engendré par d_3, d_4, d_5 ; on a $s^3 = 1$ et $\langle s \rangle = Z(H_0)$, (0.1.1.).

1.1.4. — Les relations $(d_1^s d_6)^2 = 1$ et $(d_1 d_6^s)^2 = 1$ sont équivalentes. En effet, $|ab|$ désignant l'ordre du produit ab, on a

$$\begin{aligned} |d_1^s d_6| &= |d_1^{d_3 d_4 d_5 d_3 d_4 d_5} d_6| = |d_1^{d_5 d_3 d_4 d_5} d_6| \\ &= |d_5^{d_3 d_4 d_1 d_6} d_5| = |d_6^{d_5 d_3 d_4 d_5} d_1| \\ &= |d_6^s d_1|, \end{aligned}$$

ce qui entraîne l'assertion.

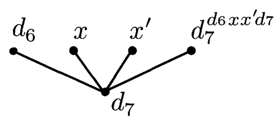
1.1.5. — Soit $n \geq 7$ sous les hypothèses 1.1.2. On pose $d_7' = d_7^{pd_7}$ et on désigne par $\langle p \rangle$ le centre du groupe $P = \langle d_j \mid 2 \leq j \leq 6 \rangle$ (1.1.1). On a les assertions suivantes :

(i) $(d_7' d_6)^2 = 1$;

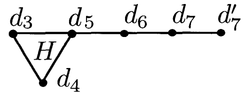
(ii) $H = \langle d_j, d_7' \mid 3 \leq j \leq 7 \rangle \simeq \mathcal{H}_{3,6}$ [10, chap. 3, 0.1.2] ;

(iii) pd_7' centralise d_j pour $2 \leq j \leq 7$.

En effet, comme d_2 et d_4 centralisent d_7, on a $d_7^{pd_7} = d_7^{d_6 x x' d_7}$. Le sous-groupe de G engendré par d_7, d_6, x et x' est isomorphe à $W(D_4)$ (ou à $W(D_4)/Z(W(D_4))$) puisque $(d_7 d_6)^3 = (d_7 x)^3 = (d_7 x')^3 = 1$ et que d_6, x et x' commutent deux à deux. On a



et l'assertion (i) en résulte immédiatement. En outre, comme p et d_7 centralisent d_2, d_3, d_4 et d_5, on a la formule stricte :



ce qui établit (ii).

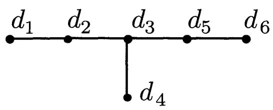
Enfin, pd'_7 centralise d_j pour $2 \leq j \leq 6$ et l'on a : $d_7^{pd'_7} = d_7^{p(d_7 d_7^p d_7)} = d_7$ ce qui montre que pd'_7 centralise d_j pour $2 \leq j \leq 7$, d'où (iii).

1.1.6. — Avec les notations 1.1.5. On pose :

$$z = (d_3d_4)(d_3d_4)^{d_5}(d_3d_4)^{d_5d_6}(d_3d_4)^{d_5d_6d_7}(d_4d_4)^{d_5d_6d_7d'_7}$$

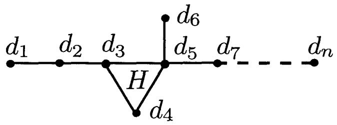
$\langle z \rangle$ est le centre de H (1.1.5 (ii)), on a $z^3 = 1$ (cf. [7] et [10, 0.1.2]).

1.1.7. — Le groupe $G^-(5,3)$ admet un système générateur formé d'éléments d_j, $1 \leq j \leq 6$, de sa classe de Fischer D sur lequel on a la formule de présentation :



Les groupes $G^-(5,3)$ et $W(E_6)$ sont isomorphes (cf. [1] et [10, chap. 3]).

1.1.8. Théorème. — *Soient $n \geq 6$ et $\varepsilon \in \{+,-\}$ tels que $\varepsilon(-1)^n = 1$. Le groupe $G^\varepsilon(n,3)$ admet un système générateur d_j pour $1 \leq j \leq n$ sur lequel*

$G(n)$ 

, $(d_7^s d_6)^2 = 1$, $z = 1$

est une formule de présentation; s étant défini en 1.1.3 *et z étant un élément tel que $z^3 = 1$, déterminé en* 1.1.10.

1.1.9. — Avec les notations de 1.1.8, soit P le sous-groupe de G engendré par d_j pour $2 \leq j \leq 6$. Son centre est engendré (1.1.1) par $p = d_2d_4d_6xx'$. Posons $d_0 = d_1^{pd1}$. On a les assertions suivantes :

(i) $(d_0d_2)^2 = 1$;

(ii) $H = \langle d_j, d_0 \mid 1 \leq j \leq 5 \rangle \simeq \mathcal{H}_{3,6}$;

(iii) d_0p centralise d_0 et d_j pour $1 \leq j \leq 5$.

Ces assertions se démontrent mutans mutandis comme dans (1.1.5).

1.1.10. — On pose :

$$z = (d_5d_4)(d_5d_4)^{d_3}(d_5d_4)^{d_3d_2}(d_5d_4)^{d_3d_2d_1}(d_5d_4)^{d_3d_2d_1d_0}.$$

Alors z engendre le centre du groupe H défini en 1.1.9 (ii); on a $z^3 = 1$.

2. Démonstrations.

On démontre chacun des THÉORÈMES 1.1.2 et 1.1.8 par récurrence sur l'entier n.

• Dans le cas $\varepsilon(-1)^n = -1$, on établit d'abord le résultat pour $n = 6$ (LEMME 1.2.1). Puis pour $n = 7$, on montre qu'en supprimant la relation $z = 1$, on obtient une présentation pour l'extension centrale non scindée

$$1 \longrightarrow \langle z \rangle \longrightarrow G \longrightarrow G^{+}(7,3) \longrightarrow 1,$$

où z est un groupe d'ordre 3 (LEMME 1.2.2) ; certains calculs, un peu longs sont reportés en appendice. Enfin, on établit le résultat 1.1.2 pour $n = 8$ (resp. $n \geq 9$) (LEMME 1.2.4).

• Dans le cas $\varepsilon(-1)^n = 1$, on montre tout d'abord que pour $n = 6$, si l'on supprime la relation $z = 1$, le groupe G est l'extension centrale non scindée

$$1 \to \langle z \rangle \longrightarrow G \longrightarrow G^{+}(6,3) \to 1,$$

où z est un groupe d'ordre 3 (LEMME 1.2.5). Pour $n = 7$, on montre que si l'on remplace la relation $z = 1$ par $d_7^z d_7 = 1$, le groupe G est l'extension centrale non scindée (LEMME 1.2.6)

$$1 \to \langle z \rangle \longrightarrow G \longrightarrow G^{-}(7,3) \to 1.$$

Enfin, on établit le THÉORÈME 1.1.8 pour $n = 8$ et $n \geq 9$ (LEMME 1.2.7).

Comme me l'a fait remarquer le referee, en m'indiquant l'existence d'une extension non scindée $G = 3^7 \cdot G^{-}(7,3)$ (où G est engendré par une classe de Fischer) dans Fi_{24} (cf. [3]), la relation $d_7^z d_7 = 1$, dans le cas $\varepsilon = -$ et $n = 7$ est nécessaire, alors que dans le cas $\varepsilon = +$ et $n = 7$ elle est conséquence des autres relations (1.2.3).

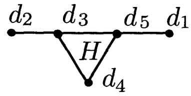
Je donne, en appendice la preuve du lemme suivant :

Soit (K, D) un couple fischérien avec une présentation $(X, \mathcal{R})$ fischérienne (i.e. $X \subset D$, les éléments de $\mathcal{R}$ étant du type $(xy^k)^m = 1$, $x^2 = 1$ avec x et y dans X, k dans K et $m = 2, 3$).

Alors, toute extension $1 \to N \to G \xrightarrow{f} K \to 1$ telle que G admette une classe de Fischer E avec $f(E) = D$, est scindée (appendice 7).

1.2.1. LEMME. — *Soit G un groupe engendré par des éléments d_j pour $1 \leq j \leq 6$ sur lesquels on a la formule de présentation $F(6)$. Alors le groupe G admet une classe de Fischer E de cardinal* 117, *contenant d_j pour $1 \leq j \leq 6$; G est isomorphe à $G^{-}(6,3)$.*

Preuve. — Il existe un homomorphisme ψ de G sur $G^0 = G^-(6,3)$ appliquant d_i sur t_{v_i} pour $1 \le i \le 6$ (0.3.5). Soit K le sous-groupe de G engendré par d_j pour $2 \le j \le 6$; K est un quotient de $G^+(5,3)$ (1.1.1)

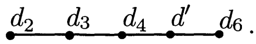


et son image par ψ est contenue dans le stabilisateur dans G^0 d'un vecteur de longueur -1 :

$$\psi(K) \subset S(a_6) \quad \text{où} \quad a_6 = v_6 - v_5 + v_4.$$

Comme ψ applique le système générateur de K sur un système générateur de $S(a_6)$ (0.3.5), nous en déduisons que K est engendré par une classe de Fischer $D(K)$ et que la restriction de ψ à K est un isomorphisme.

Soit B le centralisateur de d_1 dans K. Posons $d' = d_6^{sd_2d_3d_4}$; d' est un élément de B pour lequel on a :



En effet, d_6^s, d_3 et d_4 sont dans B; on a les assertions suivantes :

$$|d'd_2| = |d_6^s d_3| = |d_6 d_3|, \quad |d'd_3| = |d_6^s d_4| = |d_6 d_4|,$$

d'où $(d'd_2)^2 = (d'd_3)^2 = 1$. En outre

$$|d'd_4| = |d_6^s d_2^{d_3d_4}| = |d_6^{d_5d_3d_4d_5} d_2| = |d_6 d_5|,$$

$$|d'd_6| = |d_6^s d_6| = |d_6^{d_5d_3d_4} d_6^{d_5}| = |d_5^{d_3} d_5^{d_4}| = |d_3 d_4|,$$

d'où $(d'd_6)^3 = (d'd_4)^3 = 1$, ce qui établit l'assertion.

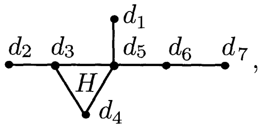
Le sous-groupe $B' = \langle d_2, d_3, d_4, d', d_6 \rangle$ est isomorphe à Σ_6 et son image $\psi(B')$ (isomorphe à B'), isomorphe aussi à $G^-(4,3)$, est le stabilisateur dans $\psi(K)$ d'un vecteur de longueur -1; en particulier c'est un sous-groupe maximal de $\psi(K)$. On a donc $\psi(B) = \psi(B')$ et par suite $B = B'$.

Les conditions C.0 et C.1 du THÉORÈME 0.3.1 sont satisfaites pour K et B (0.3.4), le groupe G admet donc une classe de Fischer E, avec $E = D(K) \cup \{d_1^k \mid k \in K\}$ dont le cardinal est

$$|E| = 45 + \frac{|G^+(5,3)|}{|G^-(4,3)|} = 45 + 72 = 117.$$

Comme $|D(G^-(6,3))| = 117$, G est une extension centrale de $G^-(6,3)$ et par suite G est isomorphe à $G^-(6,3)$ (0.3.2 et 0.3.3).

1.2.2. LEMME. — *Soit G un groupe engendré par des éléments d_j pour $1 \leq j \leq 7$ sur lesquels on a la formule de présentation*

$f(7)$  , $(d_6^s d_1)^2 = 1$, (*s défini en* 1.1.3)

Alors le groupe G admet une classe de Fischer E contenant d_j pour $1 \leq j \leq 7$; G est une extension centrale non scindée de $G^+(7,3)$ par un sous-groupe $\langle z \rangle$, $z^3 = 1$. Le centre de G est d'ordre 6 ; *il est engendré par z et m_7, m_7 étant le produit de* 7 *éléments de E commutant deux à deux. L'expression de z est donnée en* 1.1.6, *celle de m_7 en appendice* 2.

Preuve. — Il existe un homomorphisme ψ de G sur $G^0 = G^+(7,3)$ qui applique d_i sur t_{v_i} pour $1 \leq i \leq 7$ (notations 0.3.5). Posons :

$$K = \langle d_i \mid 1 \leq i \leq 6 \rangle.$$

L'image de K dans G^0 fixe un vecteur $a_7 = v_1 + v_4 - \sum_5^7 v_j$ de longueur -1 ; le fixateur $S(a_7)$ de a_7 dans G^0 est isomorphe à $G^-(6,3)$, il est engendré par $\psi(d_i)$ pour $1 \leq i \leq 6$ (0.3.5). Il résulte alors de 1.2.1 que K est isomorphe à $\psi(K) = S(a_7)$, donc à $G^-(6,3)$. La classe de conjugaison de d_1 dans K est alors une classe de Fischer $D(K)$ de K.

Soit B le centralisateur de d_7 dans K. Observons que B contient le sous-groupe B' engendré par d_i pour $1 \leq i \leq 5$; B' est isomorphe à son image par ψ. On a donc :

$$\psi(B') \simeq B' \simeq G^+(5,3).$$

Comme $\psi(B')$ est un sous-groupe maximal de $\psi(K)$, on a :

$$\psi(B') = \psi(B) \quad \text{d'où} \quad B = B'.$$

Les conditions C.0 et C.1 du THÉORÈME 0.3.1 sont satisfaites pour K et B (0.3.4). Le groupe G admet donc une classe de Fischer E telle que $E = D(K) \cup \{d_7^k \mid k \in K\}$. Le cardinal de E est $117 + 2 \times 9 \times 31 = 351$ (cf. [12, 1.4.7 L3]). Par suite G est une extension centrale de G^0 (0.3.2). Ainsi on a la suite exacte

$$1 \to Z_0 \longrightarrow G \xrightarrow{\psi} G^0 \to 1,$$

où Z_0 est un sous-groupe central dont l'ordre divise celui du multiplicateur de Schur de $\mathcal{D}G^+(7,3)$.

1.2.3. *Détermination de Z_0.* — Conservons les notations 1.1.5 et 1.1.6 ; z désigne le générateur

$$z = (d_3d_4)(d_3d_4)^{d_5}(d_3d_4)^{d_5d_6}(d_3d_4)^{d_5d_6d_7}(d_3d_4)^{d_5d_6d_7d'_7}$$

du centre du groupe H engendré par d'_7 et d_j pour $3 \le j \le 7$. Cet élément z appartient à $\mathcal{D}(G)$, son image par ψ engendre le centre de $\psi(H)$. Or $\psi(H)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{3,6}/Z(\mathcal{H}_{3,6})$, car $G^+(7,3)$ ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $\mathcal{H}_{3,6}$; on a donc $\psi(z) = 1$ et z est un élément central de G.

On peut aussi démontrer « à la main » que z centralise d_1 et d_2 (appendice 3) ; z centralise alors les générateurs de G : c'est un élément de $Z(G)$.

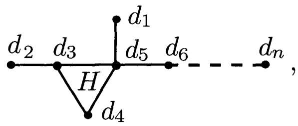
Ainsi, $\langle z\rangle$ est contenu dans Z_0 ; comme $|Z_0| \le 3$, on a : $Z_0 = \langle z\rangle$.

Pour déterminer l'involution centrale de G il suffit de sélectionner sept éléments dans E commutant deux à deux ; leurs images par ψ correspondent alors à des réflexions orthogonales déterminées à partir d'une base orthonormale de l'espace vectoriel V associé à G^0.

Pour les expressions explicites voir appendice 2.

1.2.4. LEMME. — *Soit $n \ge 8$. Soit G un groupe engendré par des éléments d_j pour $1 \le j \le n$ sur lesquels on a la formule de présentation :*

$f(n)$



$$(d_6^s d_1)^2 = 1 \quad s \text{ défini en } 1.1.3,$$
$$(d_8^z d_8)^2 = 1 \quad z \text{ défini en } 1.1.6.$$

Alors le groupe G admet une classe de Fischer E de cardinal

- $\frac{1}{2}3^{m-1}(3^m + (-1)^m)$ *si* $n = 2m$,
- $\frac{1}{2}3^m(3^m + (-1)^m)$ *si* $n = 2m + 1$;

E contient d_j pour $1 \le j \le n$; G est isomorphe à $G^-(n,3)$ si n est pair et à $G^+(n,3)$ si n est impair.

Preuve. — Soit $\varepsilon \in \{+,-\}$ tel que $\varepsilon(-1)^n = -1$. Posons $G^0 = G(n,3)$. Il existe un homomorphisme ψ de G sur G^0 qui applique d_i sur t_{v_i} pour $1 \le i \le n$ (0.3.5). Soit $K = \langle d_j \mid 1 \le j \le n-1\rangle$; l'image du système générateur de K engendre le stabilisateur $S(a_n)$ dans G^0 du vecteur $a_n = v_1 + v_4 - \sum_5^n v_j$ de longueur -1.

Démontrons 1.2.4 par récurrence sur n.

Soit $n = 8$. Le sous-groupe K de G est isomorphe à un quotient de l'extension centrale de $G^+(7,3)$ par $\langle z\rangle \simeq C_3$ (1.2.2) ; compte tenu de ce qui précède, K admet une classe de Fischer $D(K)$ et l'on a :

$$1 \to \langle z\rangle \longrightarrow K \xrightarrow{\psi} S(a_8) \to 1$$

où $\langle z\rangle$ est le centre du sous-groupe H de K engendré par d_7' et les d_j pour $3 \le j \le 7$ construit en (1.2.3). Observons que l'hypothèse $d_8^z d_8 = 1$ impose que z soit un élément central dans G.

Soit B le centralisateur de d_8 dans K ; B contient le sous-groupe B' engendré par d_j pour $1 \le j \le 6$. Comme l'image de B' par ψ est isomorphe à $G^-(6,3)$ (1.2.1), c'est un sous-groupe maximal de $\psi(K)$. On a donc $\psi(B) = \psi(B')$ et par suite $B = \langle z\rangle B'$ (car $z \notin B'$). Les conditions C.0 et C.1 du THÉORÈME 0.3.1 sont satisfaites pour K et B (0.3.4) ; le groupe G admet alors une classe de Fischer E telle que $E = D(K) \cup \{d_8^k \mid k \in K\}$ dont le cardinal est :

$$|E| = 351 + \frac{|\langle z\rangle| \times |G^+(7,3)|}{|\langle z\rangle| \times |G^-(6,3)|} = 351 + 2^2 \times 3^3 \times 7 = 1\,107.$$

Comme $1\,107$ est aussi le cardinal de la classe de Fischer de $G^-(8,3)$, on voit que G est isomorphe à $G^-(8,3)$ (0.3.2, 0.3.3) et l'on a $z = 1$.

Supposons $n \ge 9$. Le groupe K est un quotient de $G^{-\varepsilon}(n-1,3)$ (hypothèse de récurrence) dont l'image par ψ est $S(a_n) \simeq G^{-\varepsilon}(n-1,3)$. La restriction de ψ à K est donc un isomorphisme.

Soit B le centralisateur de d_n dans K ; B contient le $D(K)$-sous-groupe B' engendré par d_j pour $1 \le j \le n-2$. Si $n = 9$, K est isomorphe à $G^-(8,3)$ et $z = 1$; le sous-groupe B' est donc isomorphe à $G^-(7,3)$. Si $n > 9$, B' est isomorphe à $G^\varepsilon(n-2,3)$. Dans toutes les situations, $\psi(B')$ est un sous-groupe maximal de $\psi(K)$; on a donc $\psi(B) = \psi(B')$ et par suite $B = B'$. Les conditions C.0 et C.1 du THÉORÈME 0.3.1 sont satisfaites pour K et B (0.3.4) ; le groupe G admet une classe de Fischer E telle que $E = D(K) \cup \{d_n^k \mid k \in K\}$. On a :

- $n = 2m+1$ $\quad |E| = \big|D(K)\big| + \dfrac{|G^-(2m,3)|}{|G^+(2m-1,3)|}$

$$= \tfrac{1}{2}3^{m-1}(3^m + (-1)^m) + 3^{m-1}(3^m + (-1)^m)$$
$$= \tfrac{1}{2}3^m(3^m + (-1)^m),$$

$$\bullet\ n = 2m \quad |E| = |D(K)| + \frac{|G^+(2m-1,3)|}{|G^-(2m-2,3)|}$$
$$= \tfrac{1}{2}3^{m-1}(3^{m-1} + (-1)^{m-1})$$
$$+ 3^{m-1}(3^{m-1} - (-1)^{m-1})$$
$$= \tfrac{1}{2}3^{m-1}\big(3^m + (-1)^m\big).$$

Donc $|E| = |D(G^\varepsilon(n,3))|$ avec $\varepsilon(-1)^n = -1$. Le groupe G est donc une extension centrale de G^0 et l'on a $G \simeq G^0 = G^\varepsilon(n,3)$ (0.3.2 et 0.3.3).

1.2.5. Lemme. — *Soit G un groupe engendré par des éléments d_j $(1 \le j \le 6)$ sur lesquels on a la formule de présentation :*

$g(6)$

Alors, le groupe G admet une classe de Fischer E de cardinal 126 *contenant d_j pour $1 \le j \le 6$; G est une extension centrale non scindée de $G^+(6,3)$ par $\langle z\rangle$, z étant défini en* 1.1.10.

Preuve. — Il existe un homomorphisme ψ de G sur $G^0 = G^+(6,3)$ (0.3.5) qui applique d_i sur t_{v_i} pour $1 \le i \le 6$. Posons $P = \langle d_j \mid 2 \le j \le 6\rangle$. Soit S le fixateur du vecteur $u = v_1 - v_3 + v_4$ de longueur $+1$ (notations 0.3.5). On a alors $S \simeq G^+(5,3)$ et les générateurs de P s'envoient sur des éléments de S engendrant S, d'où $\psi(P) = S$. Il résulte de (1.2.1) que la restriction de ψ à P est un isomorphisme. Notons $D(P)$ la classe de conjugaison de d_2 dans P ; c'est une classe de Fischer de P. Soit $\langle p\rangle$ le centre de P, on a :

$$p = d_2d_4d_6xx', \quad x = d_3^{d_5d_2d_4d_6d_3d_5d_3}, \quad x' = d_3^{d_2xd_4d_3}.$$

Posons $d_0 = d_1^{pd_1}$; on a les assertions suivantes :

(1) $(d_0d_1)^3 = 1 = (d_0d_j)^2$ pour $2 \le j \le 6$;

(2) $m_0 = pd_0$ est une involution centrale dans G ;

(3) $H = \langle d_j \mid 0 \le j \le 5\rangle \simeq \mathcal{H}_{3,6}$;

(4) $Z(H) = \langle z\rangle$ et $|z| = 3$;

(5) $\psi(z) = 1$ avec $z \in Z(G)$.

Les quatre premières assertions résultent de 1.1.9. Comme $G^+(5,3)$ n'admet aucun sous-groupe isomorphe à $\mathcal{H}_{3,6}$, $\psi(H)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{3,6}/Z(\mathcal{H}_{3,6})$. Le centre de H est donc contenu dans le noyau de ψ. Pour établir (5), il suffit de prouver l'égalité $zd_6 = d_6z$, avec z explicité en 1.1.10. Pour ce calcul, voir l'appendice 3.

Soit B le centralisateur de d_1 dans P ; il contient le $D(P)$-sous-groupe B' engendré par d_i pour $3 \leq i \leq 6$; $B' \simeq \mathcal{H}_{3,4}$ (cf. [8, chap. 3] et [10, 1.1.2]). L'image de B' par ψ est le stabilisateur dans $\psi(P)$ de la droite isotrope $v_3 - v_4$, c'est donc un sous-groupe maximal de $\psi(P)$. On a :

$$\psi(B') = \psi(B) \quad \text{et par suite} \quad B = B'.$$

Les conditions C.0 et C.2 du THÉORÈME 0.3.1 sont donc remplies pour les groupes P et B (0.3.4) ; le groupe G admet une classe de Fischer E telle que $E = D(P) \cup \{d_0\} \cup \{d_1^k \mid k \in P\}$ dont le cardinal est

$$|E| = 45 + 1 + \frac{|G^+(5,3)|}{|B|} = 126.$$

Le groupe G est donc une extension centrale de $G^+(6,3)$:

$$1 \to Z_0 \longrightarrow G \xrightarrow{\psi} G^0 \to 1.$$

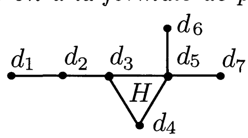
Or, toute extension centrale de $G^+(6,3)$ admet une représentation complexe irréductible de degré 6 (cf. [13, chap. 6]) et il résulte de la classification des groupes finis possédant certaines représentations de degré 6 que le centre de G est au plus de cardinal 6 (cf. [9]). Soit m_6 le produit de six involutions de E commutant deux à deux dont les images par ψ sont des réflexions orthogonales définies par les vecteurs d'une base orthonormale de l'espace vectoriel V associé à G^0. Les éléments z et m_6 sont centraux dans G et contenus dans le groupe dérivé de G ; on a donc $Z(G) = \langle z, m_6 \rangle$ et l'extension

$$1 \to \langle z \rangle \longrightarrow G \xrightarrow{\psi} G^0 \to 1$$

est non scindée.

Remarquons que $\psi(m_6)$ opère sur V par $v \mapsto -v$ et que m_6 engendre le centre de tout E-sous-groupe de G isomorphe à $W(D_6)$ puisque G^0 ne contient aucun D-sous-groupe isomorphe à $W(D_6)/Z(W(D_6))$.

1.2.6. LEMME. — *Soit G un groupe engendré par des éléments d_i pour $1 \leq i \leq 7$ sur lesquels on a la formule de présentation :*



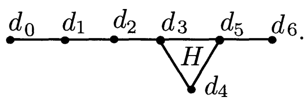
$$g(7) \quad \begin{cases} \quad , \\ (d_6^s d_7)^2 = 1, & s \textit{ défini en } 1.1.3, \\ (d_7^z d_7) = 1, & z \textit{ défini en } 1.1.10, \end{cases}$$

Alors le groupe G admet une classe de Fischer de cardinal 378, *contenant d_i pour $1 \leq i \leq 7$; G est une extension centrale non scindée de $G^-(7,3)$ par C_3 :*

$$1 \to \langle z \rangle \longrightarrow G \longrightarrow G^-(7,3) \to 1 \quad \textit{avec } z^3 = 1.$$

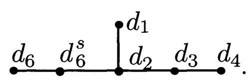
Preuve. — Il existe un homomorphisme ψ de G sur $G^0 = G^-(7,3)$ qui applique d_i sur t_{v_i} pour $1 \leq i \leq 7$ (0.3.5). Soit K le sous-groupe de G engendré par d_i pour $1 \leq i \leq 6$; K est engendré par une classe de Fischer $D(K)$. C'est un quotient de l'extension de $G^+(6,3)$ par C_3 (1.2.5) et de plus, son image par ψ stabilise le vecteur $a_7 = v_7 - v_6 + v_5 - v_4$ de longueur -1 (notations loc. cit.).

Posons $P = \langle d_i \mid 2 \leq i \leq 6 \rangle$ et $\langle p \rangle = Z(P)$. Rappelons que p est le produit de cinq involutions de $D(K)$ commutant deux à deux ; on a $p = d_2 d_4 d_6 x x'$ (1.1.9). Désignons par d_0 l'élément $d_1^{pd_1}$. On a :



Soit z un générateur du centre du groupe $H = \langle d_j \mid 0 \leq j \leq 5 \rangle$ (on a $H \simeq \mathcal{H}_{3,6}$ d'après 1.1.9(ii)). On a alors $d_6^z d_6 = 1$ (appendice 3) ; de plus $\psi(z) = 1$ car $\psi(H)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{3,6}/Z(\mathcal{H}_{3,6})$ car il n'y a pas de sous-groupe isomorphe à $\mathcal{H}_{3,6}$ dans $G^-(7,3)$ (cf. [10, chap. 3]). Compte tenu de la relation $d_7^z d_7 = 1$, l'élément z de K est donc central dans G. On a $K/\langle z \rangle \simeq G^+(6,3)$; K est une extension centrale non scindée de $S(a_7)$ par $\langle z \rangle$, $S(a_7)$ désignant le stabilisateur de a_7 dans G^0, $S(a_7) \simeq G^+(6,3)$.

Notons B le centralisateur de d_7 dans K. Par hypothèse $(d_6^s d_7)^2 = 1$, donc B contient le $D(K)$-sous-groupe $B' = \langle d_6, d_6^s, d_i \mid 1 \leq i \leq 4 \rangle$. On a :



En effet, cela résulte des définitions suivantes :

$$|d_6^s d_j| = |d_6 d_j^{s^{-1}}| = |d_6 d_j|, \qquad j = 1, 3, 4\,;$$
$$|d_6^s d_2| = |d_6^{d_5 d_3} d_2| = |d_6^{d_5} d_3| = |d_6 d_5|,$$
$$|d_6^s d_6| = |d_6^{d_5 d_3 d_4 d_5} d_6| = |d_6^{d_5 d_3} d_6^{d_5 d_4}| = |d_3 d_4|.$$

En conséquence, B' est isomorphe à $W(E_6)$, (on a $W(E_6) \simeq G^-(5,3)$). Observons que $\psi(B')$ est isomorphe à son image dans G^0 et que $\psi(B')$ est un $D(K)$-sous-groupe maximal de $\psi(K)$; on a alors $\psi(B) = \psi(B')$. Par suite $B = B'(B \cap \operatorname{Ker}\psi)$. Comme $\langle z \rangle$ est le noyau de la restriction de ψ à K et comme z centralise d_7, on en déduit : $B = B'\langle z \rangle$.

Les conditions C.0 et C.1 de (0.3.1) sont remplies pour K et B ; le groupe G admet une classe de Fischer E, avec $E = D(K) \cup \{d_7^k \mid k \in K\}$, dont le cardinal est :

$$|D(K)| + \frac{3\,|G^+(6,3)|}{3\,|W(E_6)|} = 126 + 2^2 \times 3^2 \times 7 = 378.$$

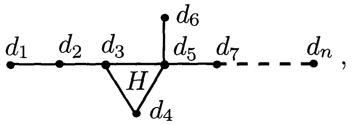
Comme $378 = |D(G^-(7,3))|$, G est une extension centrale de $G^-(7,3)$ d'après (0.3.2). L'élément z appartient à $\mathcal{D}(G) \cap Z(G)$; l'extension

$$1 \to \langle z \rangle \longrightarrow G \xrightarrow{\psi} G^0 \to 1, \qquad G^0 = G^-(7,3),$$

est donc non scindée.

1.2.7 Lemme. — *Soit $n \geq 8$. Soit G un groupe engendré par des éléments d_j, avec $1 \leq j \leq n$, sur lesquels on a la formule de présentation :*

$g(n)$



$$(d_6^s d_7)^2 = 1, \quad s \text{ défini en } 1.1.3,$$
$$(d_7^z d_7)^2 = 1, \quad s \text{ défini en } 1.1.10.$$

Alors, le groupe G admet une classe de Fischer E contenant les d_j pour $1 \leq j \leq n$ dont le cardinal est :

- $\frac{1}{2}3^m(3^{m+1} + (-1)^{m+1}$ *si* $n = 2m+2$,
- $\frac{1}{2}3^m(3^m + (-1)^m)$ *si* $n = 2m+1$.

Le groupe G est isomorphe à $G^\varepsilon(n,3)$ avec $\varepsilon(-1)^n = 1$; on a $z = 1$.

Preuve. — Il existe un homomorphisme ψ de G sur $G^0 = G^\varepsilon(n,3)$ (avec $\varepsilon \in \{+,-\}$ et $\varepsilon(-1)^n = 1$) appliquant d_i sur t_{v_i} pour $1 \leq i \leq n$, avec les notations et les conventions (0.3.5). Démontrons les assertions par récurrence sur n.

Observons que si $n = 7$, la formule $g(7)$ est une formule de présentation pour l'extension centrale G de $G^-(7,3)$ par un sous-groupe $\langle z \rangle$ d'ordre 3 (cf. 1.2.6).

Supposons $n = 8$ (resp. $n \geq 9$). Posons $K = \langle d_j \mid 1 \leq j \leq n-1 \rangle$. D'après l'hypothèse de récurrence, K est un quotient central du groupe

$G^{\varepsilon}(n-1,3)$ et admet pour classe de Fischer la classe de conjugaison de d_1 dans K ; on la note $D(K)$. L'image de K par ψ stabilise le vecteur $a_n = -v_4+v_5-v_6+\sum_7^n v_j$ de longueur -1 ($n \geq 8$). Comme l'image par ψ du système générateur de K est un système générateur du fixateur $S(a_n)$ de a_n dans G^0, le groupe K est une extension centrale de $G^{-\varepsilon}(n-1,3)$.

En conséquence, pour $n \geq 9$, ψ est un isomorphisme; pour $n = 8$, on a $K/Z(K) \simeq G^-(7,3)$ et le noyau de ψ est engendré par $\langle z \rangle$, centre du groupe K. Rappelons que z engendre le centre du sous-groupe $H = \langle d_j \mid 0 \leq j \leq 5 \rangle$ et que z centralise d_6 (1.2.5, appendice 3). Par hypothèse, on a $d_7^z d_7 = 1$ et par suite z est central dans G.

Notons B le centralisateur de d_n dans K ; B contient le sous-groupe B', engendré par d_j pour$1 \leq j \leq n-2$.

Si $n = 8$, on a $K/\langle z \rangle \simeq \psi(K) = S(a_8) \simeq G^-(7,3)$; B' est une extension centrale de $G^+(6,3)$ par $\langle z \rangle$ (1.2.5). Son image $\psi(B')$ est alors un sous-groupe maximal de $\psi(K)$. On a donc $\psi(B) = \psi(B')$ et par suite $B = B'$ (avec z appartenant à B). Les conditions C.0 et C.1 (0.3.1) sont remplies pour K et B ; le groupe G admet donc une classe de Fischer E telle que $E = D(K) \cup \{d_8^k \mid k \in K\}$ dont le cardinal est :

$$|E| = 378 + \frac{3\,|G^-(7,3)|}{3\,|G^+(6,3)|} = 378 + 2 \times 3^3 \times 13 = 1080.$$

Comme 1 080 est aussi le cardinal de la classe de Fischer de $G^+(8,3)$, le groupe G est une extension centrale de $G^+(8,3)$ (0.3.2). Il résulte alors de (0.3.3) que l'élément z, central dans G et appartenant à G, est trivial.

Pour $n \geq 9$, le groupe K est isomorphe à $G^{-\varepsilon}(n-1,3)$ pour ε tel que $\varepsilon(-1)^n = 1$. On a alors $z = 1$. Ainsi le sous-groupe B' de B est isomorphe à $G^{\varepsilon}(n-2,3)$ et son image par ψ est un sous-groupe maximal de $\psi(K)$; on a $\psi(B) = \psi(B')$ et par suite $B = B' \simeq G^{\varepsilon}(n-2,3)$. Les conditions C.0 et C.1 ci-dessus sont remplies pour K et B ; le groupe G est engendré par une classe de Fischer E telle que $E = D(K) \cup \{d_n^k \mid k \in K\}$ dont le cardinal est :

- si $n = 2m+1$, $$|E| = \tfrac{1}{2}3^{m-1}(3^m - (-1)^m) + \frac{|G^+(2m,3)|}{|G^-(2m-1,3)|} = \tfrac{1}{2}3^m(3^m - (-1)^m)\,;$$
- si $n = 2m+2$, $$|E| = \tfrac{1}{2}3^m(3^m - (-1)^m) + \frac{|G^-(2m+1,3)|}{|G^+(2m,3)|} = \tfrac{1}{2}3^m(3^{m+1} + (-1)^m).$$

On a donc $|E| = |D(G^{\varepsilon}(n,3))|$ avec $\varepsilon(-1)^n = 1$. Il s'ensuit que G est une extension centrale de $G^{\varepsilon}(n,3)$; l'élément z est donc trivial et l'on a $G \simeq G^{\varepsilon}(n,3)$ (0.3.2 et 0.3.3).

2. Groupes unitaires sur $\mathbb{F}_4$

Dans toute cette section $\mathrm{SU}(n,4)$ désigne le groupe des isométries de déterminant 1 d'un espace vectoriel V de dimension n sur $\mathbb{F}_4$, muni d'une forme bilinéaire hermitienne non dégénérée ϕ.

1. Énoncés des résultats. Notations.

2.1.1. — Rappelons tout d'abord que le groupe orthogonal $G^+(5,3)$ (2.1.1 et 0.2.2) est isomorphe à l'extension centrale scindée [10, chap. 4] :

$$1 \to C_2 \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{SU}(4,4) \to 1$$

Ce groupe G admet donc un système générateur formé d'éléments d_j pour $1 \leq j \leq 5$ satisfaisant à la formule de présentation :

$S(4)$

La classe de conjugaison de d_1 dans G est une classe de Fischer de G ; le centre de G est engendré par l'involution

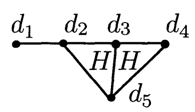
$$p = d_2 d_5 d_1 d d'$$

où $d = d_3^{(d_4 d_2 d_5 d_1 d_4 d_3 d_4)}$ et $d' = d_3^{(d_2 d d_5 d_3)}$ (1.1.1).

Quand on adjoint à $S(4)$ la relation $p = 1$, on obtient une formule de présentation pour le groupe simple $\mathrm{SU}(4,4)$.

2.1.2. Proposition. — *Le groupe* $\mathrm{SU}(5,4)$ *admet un système générateur* d_j *pour* $1 \leq j \leq 5$ *satisfaisant à la formule de présentation* :

$S(5)$



$(d_3^{d_2 d_4} d_5)^3 = 1, \quad \hat{q} = 1, \quad \hat{q}$ *défini ci-après en* 2.1.4.

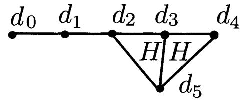
2.1.3. — (Avec les notations ci-dessus.) On pose $Q = \langle d_2, d_3, d_4, d_5 \rangle$; Q est un groupe isomorphe à $\mathcal{J}$ ou à $\mathcal{J}/Z(\mathcal{J})$. Le centre de Q est engendré par $q = d_2 d_4 y y'$ où

$$y = d_2^{d_3 d_5 d_4 d_3 d_5} \quad \text{et} \quad y' = d_4^{d_3 d_5 d_2 d_3 d_5} ;$$

les éléments d_2, d_4, y, y' commutent deux à deux (appendice 4).

2.1.4. — On désigne par $\hat{q}$ le produit $d_0 q$ où $d_0 = d_1^{qd_1}$ (notation 2.1.3). On a les relations suivantes :

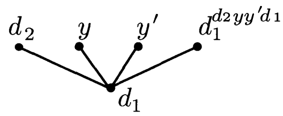
(r)



En effet, q centralise d_j pour $2 \leq j \leq 5$ et d_1 centralise d_3, d_4 et d_5. Pour établir (r), il suffit donc de prouver $(d_0 d_1)^3 = 1 = (d_0 d_2)^2$. Rappelons que d_2, y, y' sont des éléments qui commutent deux à deux (2.1.3), de plus, on a :

$$|d_1 y| = |d_1 d_2| \quad \text{et} \quad |d_1 y'| = |d_1 d_4^{d_3 d_5 d_2}| = |d_1 d_2|.$$

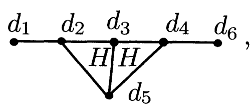
Ainsi le sous-groupe $W = \langle d_1, d_2, y', y \rangle$ est isomorphe à $W(D_4)$ (ou à $W(D_4)/Z(W(D_4))$) ; on a alors :



Comme $d_1^{d_2 y y' d_1} = d_1^{qd_1}$, l'assertion en découle immédiatement.

2.1.5. THÉORÈME. — *Le groupe* SU(6, 4) *admet un système générateur* d_j *pour* $1 \leq j \leq 6$ *sur lequel*

S(6)



$$\left\{ \begin{array}{l} (d_3^{d_2 d_4} d_5)^3 = 1, \quad (d_6 d_1^{q d_2 d_3 d_4})^2 = 1, \\ \hat{q} = m(R_1) = m(R_2) = 1. \end{array} \right.$$

est une formule de présentation, les éléments q *et* $\hat{q}$ *étant donnés en* 2.1.3 *et* 2.1.4 ; $m(R_1)$ *et* $m(R_2)$ *étant le produit de six conjugués de* d_1 *commutant entre eux* (2.1.6).

Le centre de G *est engendré par un élément* z *d'ordre* 3 :

$$z = (d_3 d_5)(d_3 d_5)^{d_2}(d_3 d_5)^{d_2 d_1}(d_3 d_5)^{d_2 d_1 d_0}(d_3 d_5)^{d_2 d_1 d_0 d_6}.$$

2.1.6. — (Avec les notations ci-dessus.) On pose :

$$b = d_1^{q d_2 d_3 d_4}, \qquad e = d_2^{d_5 d_4 d_1 d_3 d_6 (d_2^{d_5 d_4}) d_5 d_3},$$

$$y_2' = e^{b d_3 d_5 d_2 d_3 d_5}, \quad y_2'' = d_2^{d_3 d_5 e^b d_3 d_5}, \quad y_2 = d_1^{y_2' y_2'' d_2 d_1}.$$

Pour $i = 1, 2, 3$, on définit $m(R_i)$ comme le produit

$$m(R_i) = f_i d_6 b x_i x_i' x_i'',$$

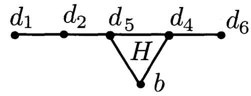
où $f_1 = d_2$, $f_2 = x_1^{(e^b)y_2''}$, $f_3 = x_1^{(e^b)y_2'}$ et où x_i', x_i'' et x_i sont donnés par :

$$x_i' = (d_4^{d_5})^{f_i b d_6 (d_5 d_4 d_5)}, \quad x_i'' = d_5^{x_i' b f_i d_5}, \quad x_i = d_1^{x_i' x_i'' f_i d_1} \qquad i = 1, 2, 3.$$

(Pour plus de détails sur $m(R_1)$, voir 2.1.7.)

2.1.7. — (Notations 2.1.5 et 2.1.6.) On a les relations :

(r')



En effet :

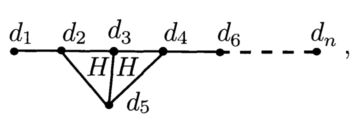
$$\begin{aligned}
|bd_1| &= |d_0^{d_1 d_2 d_3 d_4} d_1| = |d_0 d_2|,\\
|bd_2| &= |d_1^{q d_2 d_3} d_2| = |d_1 d_3|,\\
|bd_5| &= |d_1^q d_5^{d_4 d_3 d_2}| = |d_1 d_5^{d_4 d_3 d_2}| = |d_1 d_2|,\\
|bd_4| &= |d_1^q d_4^{d_3 d_2}| = |d_1 d_4^{d_3 d_2}| = |d_1 d_2|,\\
|bd_5^{d_4}| &= |d_1^q d_5^{d_3 d_2}| = |d_1 d_5^{d_3 d_2}| = |d_1 d_2|.
\end{aligned}$$

Par hypothèse, $(bd_6)^2 = 1$; les relations (r') sont donc établies.

Il résulte de la section 1 (1.2.5) que le sous-groupe R_1 engendré par $d_1, d_2, d_5, d_4, d_6, b$ est une extension centrale de $G^+(6,3)/Z(G^+(6,3))$; les éléments $d_2, d_5, d_6, x_1', x_1'', x_1$ commutent deux à deux, leur produit $m(R_1)$ est un élément central de R_1 tel que $m(R_1)^2 = 1$.

2.1.8. THÉORÈME. — *Soit $n \geq 7$. Le groupe* $\mathrm{SU}(n,4)$ *admet un système générateur d_j pour $1 \leq j \leq n$ sur lequel on a la formule de*

$S(n)$



$$(d_3^{d_2 d_4} d_5)^3 = 1, \quad (d_6 d_1^{q d_2 d_3 d_4})^2 = 1,$$
$$\hat{q} = m(R_1) = m(R_2) = 1,$$

où q est défini en 2.1.3, *où $\hat{q}$ est défini en* 2.1.4 *et où* $m(R_1)$, $m(R_2)$ *sont définis en* 2.1.6.

Pour $n \equiv 0 \bmod 3$, *le centre de* G *est engendré par l'élément* :

$$z = (d_3d_5)(d_3d_5)^{d_2}(d_3d_5)^{d_2d_1}(d_3d_5)^{d_2d_1d_0} \prod_{6\leq j\leq n} (d_3d_5)^{d_2d_1d_0 \prod_{6\leq i\leq j} d_i}.$$

2. Démonstrations.

La Proposition 2.1.2 a été établie en [10, chap. 4] et [13, chap. 6]). Pour que l'exposé soit complet, nous en donnons ici une démonstration (2.2.2).

Si dans la formule $S(6)$, (2.1.5), on omet les relations $\hat{q} = m(R_1) = m(R_2) = 1$, on obtient alors une formule de présentation $s(6)$ sur d_j, où $1 \leq j \leq 6$, pour l'extension centrale $C_2 \times \widetilde{G}$ où $\widetilde{G}$ est l'extension centrale non scindée de $\mathrm{SU}(6,4)$ par $C_2 \times C_2$ (2.2.3).

On démontre ensuite le théorème (2.1.8) par récurrence sur n pour $n \geq 7$; on omet la relation $\hat{q} = 1$, le groupe obtenu est une extension centrale scindée de $\mathrm{SU}(n,4)$ par C_2 (2.2.9) :

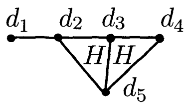
$$1 \to C_2 \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{SU}(n,4) \to 1.$$

Observons que les groupes G considérés ci-après en 2.2.3 et 2.2.9 admettent des images homomorphes d'ordre 2. Au cours des démonstrations, on établit qu'ils sont engendrés par une classe de Fischer; ils satisfont donc à $|G : \mathcal{D}(G)| = 2$. Comme $\mathrm{PSU}(n,4)$ est un groupe simple, on obtient toujours G comme extension centrale scindée de la forme $C_2 \times G_1$ où G_1 est une extension centrale non scindée

$$1 \to Z_1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow \mathrm{PSU}(n,4) \to 1,$$

$|Z_1|$ divisant l'ordre du multiplicateur de Schur de $\mathrm{PSU}(n,4)$ (0.3.2 et 0.3.3).

2.2.1 Proposition. — *Soit* G *un groupe engendré par des éléments* d_j *pour* $1 \leq j \leq 5$ *satisfaisant à la formule de présentation* :

$S(5)$ 

, $\qquad (d_3^{d_2d_4}d_5)^3 = 1.$

Alors le groupe G *admet une classe de Fischer de cardinal* 165 *contenant* d_j *pour* $1 \leq j \leq 5$; *il possède un sous-groupe central* $\langle \hat{q} \rangle$ *tel que* $\hat{q}^2 = 1$ (*avec* $\hat{q}$ *défini en* 2.1.4) ; G *est l'extension scindée*

$$1 \to C_2 \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{SU}(5,4) \to 1$$

de $\mathrm{SU}(5,4)$ *par* C_2.

Preuve. — Il existe un homomorphisme ψ de G sur $G^0 = \mathrm{SU}(5,4)$ qui applique d_j sur t_{v_j} pour $1 \leq j \leq 5$ avec les notations et conventions (0.3.6). Soit D la classe de Fischer de G^0. Posons $Q = \langle d_2, d_3, d_4, d_5 \rangle$; Q est isomorphe à $\mathcal{J}$ ou a $\mathcal{J}/Z(\mathcal{J})$ (appendice 4) : il admet une classe de Fischer $D(Q)$ et son centre est $\langle q \rangle$ (2.1.3). Comme G^0 ne contient aucun D-sous-groupe isomorphe à $\mathcal{J}/Z(\mathcal{J})$, on a $\psi(Q) = \mathcal{J}$ et par suite $\psi(q) \neq 1$; donc Q est isomorphe à $\mathcal{J}$ et q n'est pas trivial [10, 3.1.3c et 3.1.6].

Soit $\hat{q} = d_0 q$ avec $d_0 = d_1^{q d_1}$ (2.1.3). Observons que $\hat{q}$ centralise d_1 car $d_1^{\hat{q}} = d_1^{d_0 q} = d_0^{d_1 q} = d_1$. Comme d_0 et q centralisent Q, l'élément $\hat{q}$ est central dans G.

Posons $B = \mathcal{C}_Q(d_1)$. Le $D(Q)$-sous-groupe B' de Q engendré par d_3, d_4 et d_5 est isomorphe à $\mathcal{H}$ (0.1.2) ; il centralise d_1. Les images de Q et de B' dans G^0 sont respectivement isomorphes à $\mathcal{J}$ et à $\mathcal{H}$, elles correspondent aux stabilisateurs dans G^0 d'une droite isotrope $\langle w \rangle$ et d'un plan non dégénéré contenant w ; $\psi(B')$ est donc un D-sous-groupe maximal de $\psi(Q)$. Or la restriction de ψ à Q est un isomorphisme, $N_Q(B') = Z(Q)B'$; comme $Z(Q)$ ne centralise pas d_1 ($d_1^q \neq d_1$) on en déduit $B = B'$.

Les conditions C.0 et C.2 du théorème principal (0.3.1) sont remplies pour Q et B (0.3.4). Le groupe G admet donc une classe de Fischer E telle que $E = D(Q) \cup \{d_0\} \cup \{d_1^k \mid k \in Q\}$ dont le cardinal est :

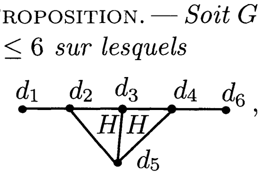
$$|E| = 36 + 1 + \frac{|Q|}{|B|} = 36 + 1 + 2^7 = 165.$$

Il résulte alors de l'étude générale ([12], (0.3.2)) que G est une extension centrale de $\mathrm{SU}(5,4)$. Le multiplicateur de Schur de $\mathrm{SU}(5,4)$ est trivial [5, 0.3.2] ; l'extension $1 \to \langle \hat{q} \rangle \to G \xrightarrow{\psi} G^0 \to 1$, avec $G^0 = \mathrm{SU}(5,4)$, est scindée.

2.2.2. *Preuve de la proposition* 2.1.2. — C'est une conséquence immédiate de 2.2.1.

2.2.3. PROPOSITION. — *Soit G un groupe engendré par des éléments d_j pour $1 \leq j \leq 6$ sur lesquels*

$s(6)$



,

$(d_3^{d_2 d_4} d_5)^3 = 1, \quad (d_6 d_1^{q d_2 d_3 d_4})^2 = 1 \quad$ (*q défini en* 2.1.3),

est une formule de présentation.

Alors, le groupe G admet une classe de Fischer E de cardinal 693 *contenant d_j pour $1 \leq j \leq 6$; on a $G/Z(G) = \mathrm{PSU}(6,4)$. Le centre de G est d'ordre* 24 ; *il contient l'involution $\hat{q}$* (5.1.4) *et $G = \langle \hat{q} \rangle \times G_1$ où G_1 est une extension centrale non scindée de* $\mathrm{PSU}(6,4)$ *par son multiplicateur de Schur $M = \langle z \rangle \times Z_0$, où z est d'ordre* 3 (*et donné en 2.1.5*) *et Z_0 isomorphe à $C_2 \times C_2$.*

Preuve. — Il existe un homomorphisme ψ de G sur $G^0 = \mathrm{SU}(6,4)$ qui applique d_i sur t_{v_i} pour $1 \leq i \leq 6$ (notations et conventions 0.3.6). Posons $K = \langle d_j \mid 1 \leq j \leq 5 \rangle$ et $Q = \langle d_j \mid 2 \leq j \leq 5 \rangle$. Rappelons que Q est isomorphe à $\mathcal{J}$ et que le centre de Q est d'ordre 2 ; il est engendré par q (2.1.3).

2.2.4. — Le groupe K admet une classe de Fischer $D(K)$; K est isomorphe à l'extension centrale scindée de $\mathrm{SU}(5,4)$ par C_2, $Z(K) = \langle \hat{q} \rangle$.

En effet, l'image de K par ψ est contenue dans le stabilisateur $F(u)$ de la droite non isotrope $u = v_1 + \omega v_3 + v_4 + \bar{\omega} v_5 + v_6$ (notations et conventions 0.3.6). Le système générateur de K s'envoie sur un système générateur de $F(u)$; il résulte alors de 2.2.1 que l'on a la suite exacte :

$$1 \to \langle \hat{q} \rangle \longrightarrow K \longrightarrow F(u) \to 1.$$

L'assertion s'en déduit immédiatement.

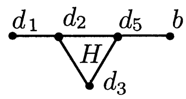
2.2.5. — L'élément $\hat{q}$ est central dans G.

Considérons le sous-groupe K' engendré par $d_1, d_2, d_3, d_4^{d_6}, d_5$. Son image par ψ fixe le vecteur non isotrope $u' = v_1 + \omega v_3 + v_4 + \bar{\omega} v_5$. Comme ci-dessus, K' est l'extension centrale de $F(u')$ (fixateur de u' dans G^0) par $Z(K') = \langle \hat{q}' \rangle$.

Posons $b = d_1^{qd_2d_3d_4}$, b appartient à K ; par hypothèse, b commute à d_6. On a $b = d_1^{qd_2d_3d_4} = d_1^{(d_2d_4yy')d_2d_3d_4d_6} = d_1^{d_6d_4d_6d_6yd_6d_6y'd_6d_3d_6d_4d_6}$. Comme

$$d_6 y d_6 = d_2^{d_3d_5d_6d_4d_6d_3d_5} \quad \text{et} \quad d_6 y' d_6 = d_4^{d_6d_3d_5d_2d_3d_5},$$

b est aussi un élément de K'. Ainsi le sous-groupe $S = \langle d_1, d_2, d_3, d_5, b \rangle$ est contenu dans $K \cap K'$. L'image de S par ψ stabilise le plan engendré par u et u' ; on a donc $\psi(S) = F \simeq \mathrm{SU}(4,4)$. De plus, on a les relations



car $(bd_1)^2 = (bd_2)^2 = (bd_5)^3 = 1$ (5.1.6) et $|bd_3| = |d_1^{qd_2d_3d_4} d_3| = |d_1^{qd_2} d_4| = |d_1 d_4|$, donc $(bd_3)^2 = 1$.

En conséquence, S est engendré par une classe de Fischer — la classe de conjugaison de d_1 dans S; par conséquent S est un $D(K)$-sous-groupe de K (resp. un $D(K')$-sous-groupe de K'). On a la suite exacte :

$$1 \to Z(S) \longrightarrow S \xrightarrow{\psi} F \to 1 \qquad (F \simeq \mathrm{SU}(4,4)).$$

Rappelons que $Z(S)$ (resp. $Z(K), Z(K')$) est engendré par le produit de cinq éléments de $D(S)$ (resp. $D(K), D(K')$) commutant deux à deux. Si $Z(K) \cap S = \{1\}$, la restriction de ψ à S est un isomorphisme; S est donc un groupe simple. En particulier d_1 est le produit de quatre involutions commutant deux à deux (car $Z(S) = \{1\}$), par suite K et K' sont aussi des groupes simples et l'on a $Z(K) = Z(S) = Z(K')$. Si $Z(K) \cap S \neq \{1\}$, alors $Z(K) = Z(K')$ et l'on a également $Z(S) = Z(K')$. Dans tous les cas, l'élément $\hat{q}'$, central dans K', centralise K; on a donc $\hat{q}'(d_4^{d_6})\hat{q}' = d_4^{d_6}$ et $\hat{q}' d_4 \hat{q}' = d_4$, d'où $\hat{q}' d_6 \hat{q}' = d_6$ et $\hat{q} = \hat{q}'$ est donc un élément central dans G.

2.2.6. — Le groupe G admet une classe de Fischer de cardinal 693; il existe une extension centrale non scindée de G^0 telle que $G = \langle \hat{q} \rangle \times G_1$.

Notons B le centralisateur de d_6 dans K. Par hypothèse b appartient à B. En particulier le sous-groupe $S = \langle d_1, d_2, d_5, b, d_3 \rangle$ est contenu dans B. Comme $\psi(S)$ est isomorphe à $\mathrm{SU}(4,4)$, $\psi(S)$ est un sous-groupe maximal de $\psi(K)$; on a donc $\psi(S) = \psi(B) \neq \psi(K)$ et par suite $S = B$ ($\hat{q} \in S$ et $\hat{q}$ engendre le noyau de la restriction de ψ à K).

Les conditions C.0 et C.1 du THÉORÈME 0.3.1. sont remplies pour les groupes K et B; G admet une classe de Fischer E telle que $E = D(K) \cup \{d_6^k \mid k \in K\}$. On a :

$$|E| = 165 + \frac{|Z(K)| \times |\mathrm{SU}(5,4)|}{|Z(S)| \times |\mathrm{SU}(4,4)|} = 165 + 2^4 \times 3 \times 11 = 693.$$

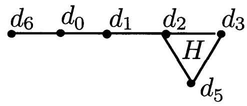
Le groupe G est alors une extension centrale de $\mathrm{SU}(6,4)$ (0.3.2). Comme $\hat{q}$ est un élément central de G n'appartenant pas à $\mathcal{D}(G)$, il existe un sous-groupe central Z_1 de G, $|Z_1|$ divisant l'ordre du multiplicateur de Schur de $\mathrm{PSU}(6,4)$ tel que :

$$1 \to Z_1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow \mathrm{PSU}(6,4) \to 1$$

et $G = \langle \hat{q} \rangle \times G_1$ (0.3.3).

2.2.7. *Détermination du sous-groupe central Z_1 de G.* — Rappelons que Z_1 est un $\{2,3\}$-groupe (0.3.2). Étudions d'abord la 3-partie de Z_1.

Soit N le sous-groupe de G engendré par d_j pour $0 \leq j \leq 6$ et $j \neq 4$. On a



(un calcul simple prouve que $(d_6d_0)^3 = 1$, appendice 5). Il s'ensuit que le E-sous-groupe N de G est isomorphe à $\mathcal{H}_{3,6}$ (il n'y a pas de E-sous-groupe isomorphe à $\mathcal{H}_{3,6}/Z(\mathcal{H}_{3,6})$ dans G^0 [10, 3.4.9]. Le centre de N est donc trivial; il est d'ordre 3, engendré par l'élément z dont l'expression est donnée en 2.1.4. On a $\psi(z) \neq 1$, il est facile de vérifier que $\psi(z)$ opère sur l'espace vectoriel associé à G^0 comme l'homothétie $v \mapsto \omega v$, avec $\omega \in \mathbb{F}_4 - \{0,1\}$. Il s'ensuit que z est un élément de $Z(G)$. Comme l'ordre de Z_1 divise 12, sa 3-partie est $\langle z \rangle$.

Étude de la 2-partie Z_0 de Z. Le groupe $\mathrm{PSU}(6,4)$ admet trois classes de sous-groupes isomorphes à $G^+(6,3)/Z(G^+(6,3))$ et n'admet aucune classe de sous-groupe isomorphe à $G^+(6,3)$ [10, chap. 9]. (On peut aussi, comme me l'a fait remarquer le referee, observer que si $G^+(6,3)$ était isomorphe à un sous-groupe S de $\mathrm{PSU}(6,4)$, on aurait $\mathrm{O}_2(S) \neq 1$ par le théorème de Borel-Tits, S serait alors un sous-groupe parabolique de $\mathrm{PSU}(6,4)$, le théorème de Lagrange entraîne une impossibilité.)

Considérons le sous-groupe $R_1 = \langle d_1, d_2, d_5, d_4, d_6, b \rangle$; tenant compte de 2.1.7 et de ce qui précède, R_1 est une extension centrale de $G^+(6,3)$ par $\langle z \rangle$ et son image dans $\mathrm{PSU}(6,4)$ est isomorphe à $G^+(6,3)/Z(G^+(6,3))$. Désignons par $m(R_1)$ l'involution centrale de R_1, on a

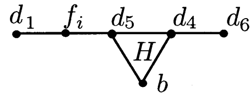
$$m(R_1) = d_2d_6bx_1x_1'x_1''$$

(2.1.6, 2.1.7 et 1.2.5). On a aussi $\psi(m(R_1)) = 1$. Ainsi $m(R_1)$ est un élément de $\ker\psi$, donc de $Z(G)$ (2.2.6).

Notons $\bar{\psi}$ la composée de ψ et de l'application canonique

$$G^0 \to G^0/Z(G^0).$$

Considérons les éléments f_2 et f_3 introduits en 2.1.6. On montre sans difficulté que l'on a les relations (appendice 6 (iii)) :



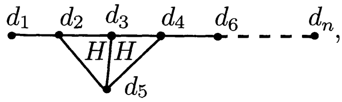
Posons $R_i = \langle d_1, f_i, d_5, d_4, d_6, b \rangle$ pour $i = 2, 3$; les sous-groupes R_2 et R_3 sont isomorphes à R_1 ; en outre ils sont distincts ($f_i \notin R_j$ pour

$i \neq j$) et leur intersection contient $\langle d_5, d_4, d_6, b\rangle = \mathcal{H}_{3,4}$. En conséquence $\bar{\psi}(R_1)$, $\bar{\psi}(R_2)$, $\bar{\psi}(R_3)$ sont des représentants de classes de conjugaison de sous-groupes isomorphes à $G^+(6,3)/Z(G^+(6,3))$ dans $\mathrm{PSU}(6,4)$ (cf. [6], [10, chap. 8] et appendice 6 (iv)).

Les involutions centrales $m(R_1), m(R_2), m(R_3)$ de R_1, R_2, R_3 sont explicitées en 2.1.6 ; on montre que $m(R_1)m(R_2) = m(R_3)$ (appendice 6 (iv)). Ainsi $Z_0 = \langle m(R_1), m(R_2)\rangle$ est un sous-groupe de $\mathcal{D}(G) \cap Z(G)$ (car Z_0 est engendré par des produits d'un nombre pair d'éléments de E), il est isomorphe à $C_2 \times C_2$ et l'on a $Z_1 = \langle z\rangle Z_0$.

2.2.8. *Preuve de 2.1.5.* — Par hypothèse, on a $Z_0 = \{1\}$; le résultat est donc une conséquence immédiate de 2.2.3.

2.2.9. PROPOSITION. — *Soit $n \geq 7$. Soit G_n un groupe engendré par des éléments d_j pour $1 \leq j \leq n$ satisfaisant à la formule de présentation :*



$$
s(n) \qquad \begin{cases} \quad , \\ (d_3^{d_2 d_4} d_5)^3 = 1, \\ (d_6 d_1^{q d_2 d_3 d_4})^2 = 1, \\ (s) \quad d_7 d_7^{m(R_1)} = d_7 d_7^{m(R_2)} = 1, \end{cases}
$$

où q est défini en 2.1.3 *et $m(R_1)$ et $m(R_2)$ sont donnés en* 2.1.6. *Alors G_n admet une classe de Fischer E_n contenant d_j pour $1 \leq j \leq n$ dont le cardinal est égal à celui de la classe de Fischer de* $\mathrm{PSU}(n,4)$; *G_n est une extension centrale scindée de* $\mathrm{SU}(n,4)$ *par le sous-groupe $\langle \hat{q}\rangle$ (isomorphe à C_2), avec $\hat{q}$ donné en* 2.1.4. *Pour n multiple de* 3, *G_n admet un* 3*-groupe central engendré par z_n (expression en* 2.1.7). *On a $m(R_1) = m(R_2) = 1$.*

Preuve. — Observons tout d'abord que $\hat{q}$ centralise G_n. De plus les relations (s) imposent que $m(R_1)$ et $m(R_2)$ centralisent d_j pour $j \geq 7$; comme $Z_0 = \langle m(R_1), m(R_2)\rangle$ centralise d_j si $j \leq 6$, il s'ensuit que $\langle \hat{q}\rangle \times Z_0$ est un sous-groupe central de G_n.

On démontre le théorème par récurrence sur n pour $n \geq 7$.

Supposons $n = 7$ (resp. $n \geq 8$). Il existe un homomorphisme ψ de G_n sur $G^0 = \mathrm{SU}(n,4)$ qui applique d_j sur t_{v_j} pour $1 \leq j \leq n$ (0.3.6).

Posons $K = \langle d_j \mid 1 \leq j \leq 6\rangle$ (resp. $K = \langle d_j \mid 1 \leq j \leq n-1\rangle$. L'image de K par ψ fixe un vecteur non isotrope $u = v_1 + \omega v_3 + v_4 + \bar{\omega} v_5 + v_6 + v_7$, (resp. $u = v_1 + \omega v_3 + v_4 + \bar{\omega} v_5 + \sum_6^n v_j$) ; l'image du système générateur de K est un système générateur du fixateur $F(u)$ de u dans G^0. On a donc $\psi(K) = F(u)$ et K est une extension centrale de $\mathrm{SU}(6,4)$ par $\langle \hat{q}\rangle \times Z_0$ (2.2.3) (resp. une extension centrale de $\mathrm{SU}(n-1,4)$, hypothèse de récurrence) ; K admet une classe de Fischer $D(K)$.

Soit B le centralisateur de d_7 (resp. d_n) dans K.

Supposons d'abord $n = 7$. Alors B contient Z_0 et contient aussi le $D(K)$-sous-groupe B' engendré par d_j pour $1 \leq j \leq 5$, isomorphe à $C_2 \times \mathrm{SU}(5,4)$. Le centre de B' est engendré par $\hat{q}$ et son image dans G^0 est le stabilisateur dans $\psi(K)$ d'un plan non dégénéré contenant u. C'est un sous-groupe maximal de $\psi(K)$. On a donc $\psi(B) = \psi(B')$; comme Z_0 centralise d_7, on a $B = B'Z_0$.

Les conditions C.0 et C.1 du THÉORÈME 0.3.1 sont donc remplies pour les groupes B et K (0.3.4) ; le groupe G_7 admet alors une classe de Fischer E telle que $E = D(K) \cup \{d_7^k \mid k \in K\}$ dont le cardinal est :

$$|E| = 693 + \frac{2\,|Z_0| \times |\mathrm{SU}(6,4)|}{2\,|Z_0| \times |\mathrm{SU}(5,4)|} = 2\,709.$$

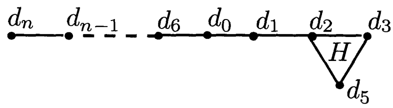
Comme 2 709 est aussi le cardinal de la classe de Fischer de $\mathrm{SU}(7,4)$, le groupe G_7 est une extension centrale de $\mathrm{SU}(7,4)$ dont $\langle \hat{q}\rangle \times Z_0$ est un sous-groupe central. Or Z_0 est contenu dans $\mathcal{D}(G_7)$ (engendré par des éléments qui sont des produits de six éléments de E) et le multiplicateur de Schur de $\mathrm{SU}(7,4)$ est trivial, on a donc $G \simeq C_2 \times \mathrm{SU}(7,4)$ (cf. [8]).

Supposons maintenant $n \geq 8$. Le centralisateur B de d_n dans K contient Z_0 et le $D(K)$-sous-groupe $B' = \langle d_j \mid 1 \leq j \leq n-1\rangle$. L'image par ψ de B' stabilise un plan non dégénéré contenant u ; c'est un sous-groupe maximal de $\psi(K)$. On a donc $\psi(B) = \psi(B')$ et par suite $B = B'$ (remarque : $\hat{q}$ et Z_0 sont contenus dans B'). Les conditions C.0 et C.1 (loc. cit.) sont remplies pour les groupes B et K, le groupe G_n admet une classe de Fischer E telle que $E = D(K) \cup \{d_n^k \mid k \in K\}$. On a :

$$\begin{aligned}|E| &= \big|D(\mathrm{SU}(n-1,4))\big| + \frac{2\,|Z_0| \times |D(\mathrm{SU}(n-1,4))|}{2\,|Z_0| \times |D(\mathrm{SU}(n-2,4))|}\\ &= \tfrac{1}{3}\big(2^{2n-3} + (-1)^{n-1}2^{n-2} - 1\big) + 2^{n-2}\big(2^{n-1} - (-1)^{n-1}\big)\\ &= \tfrac{1}{3}\big(2^{2n-1} + (-1)^{n}2^{n-1} - 1\big) = \big|D(\mathrm{SU}(n,4))\big|.\end{aligned}$$

Ainsi G_n est une extension centrale de $\mathrm{SU}(n,4)$; comme ci-dessus, on a $Z_0 = \{1\}$; ainsi G_n est isomorphe à $C_2 \times \mathrm{SU}(n,4)$ et $\hat{q}$ appartient à $Z(G)$.

Supposons $n \equiv 0 \bmod 3$. L'élément z_n (défini en 2.1.8) est central dans G_n. Soit X le E-sous-groupe de G_n engendré par d_j pour $0 \leq j \leq n$ et $j \neq 4$. Il est clair que $d_0 = d_1^{qd_1}$ centralise d_j pour $j \geq 7$; il résulte de 2.2.7 que l'on a les relations :



Le E-sous-groupe X est donc isomorphe à $\mathcal{H}_{3,n}$ et son centre est engendré par z_n (0.1.2). L'image de z_n par ψ opère sur l'espace vectoriel V associé à G^0 comme une homothétie (vérification facile) ; z_n est donc un élément central dans G_n.

Remarque. — On établit, pour $n \geq 7$, que Z_0 est trivial. On peut évidemment remplacer les relations (s) de 2.2.9 par les relations (s') : $m(R_1) = m(R_2) = 1$.

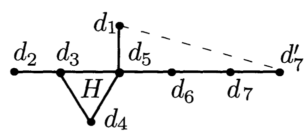
Appendice

Convention. — Pour alléger l'écriture, on notera les éléments d_j par leur indice j ; on écrit ainsi $1, 2, 3, \ldots$ au lieu de $d_1, d_2, d_3, \ldots$. Cette convention est utilisée pour établir certaines égalités quand aucune confusion n'est possible.

2. — (Notations 1.2.2.) Soit :

$$z = d_3 d_4 (d_3 d_4)^{d_5} (d_3 d_4)^{d_5 d_6} (d_3 d_4)^{d_5 d_6 d_7} (d_3 d_4)^{d_5 d_6 d_7 d_7'}$$

un générateur du centre du groupe $H = \langle d_7', d_j \mid 3 \leq j \leq 7 \rangle$. On rappelle que l'on a les relations suivantes :



On se propose d'établir que l'on a :

(a) $(d_2^z d_2)^2 = 1$,

(b) $(d_1^z d_1)^2 = 1$.

On a les assertions :

(i) $(d_2^{s d_6 d_5 d_7 d_4} d_5)^2 = 1$. En effet, d_7 centralise d_4, d_5 donc :

$$|2^{s6547} 5| = |2^{s654}\, 5| = |2^{s6} 4| = |2\, 4|$$

(écriture simplifiée) ce qui donne (i).

(ii) $(d_2^{sd_6d_5d_7d_4d_5d_3}d_2)^2 = 1$. D'après (i) on a :

$$|2^{s657453}\,2| = |2^{s6}\,2^{345}| = |2^{3453}\,2^{3456}| = |3\,6|$$

ce qui montre (ii).

(iii) $(d_2^{sd_6d_5d_7d_4d_6d_3d_4d_3d_5}d_6)^2 = 1$. On a :

$$|2^{s6574343}\,5| = |2^{s65734}\,5| = |2^{s6}\,5^{34}| = |2^{345}\,5^{6}| = |2\,6|$$

ce qui montre (iii).

(iv) $d_7' = d_2^{sd_6d_5d_7d_6sd_2d_3d_5d_6d_7}$. En effet (1.1.5) :

$$d_7' = d_7^{d_6xx'd_7} = x^{d_3d_2d_4d_3d_7xd_6d_7},$$

ce qui donne en remplaçant x par son expression (en écriture simplifiée) :

$$\begin{aligned} 7' &= 3^{5246\ 353\ 324\ 37\ 353\ 246\ 353\ 246\ 353\ 67} \\ &= 2^{s\ 6547\ 5\ 3\ 2\ 4635324635367} \\ &= 2^{s\ 6547\ 346353\ 24\ 353\ 67} \quad \text{(en tenant compte de (i), (ii) et (iii))} \\ &= 2^{s\ 6576\ 345345\ 2\ 3567} = 2^{s\ 6576\ s\ 23567}, \end{aligned}$$

ce qui montre (iv).

(v) $d_7'^{\,d_7d_6d_5d_3d_2} = d_2^{sd_6d_5d_7d_6s}$. C'est une conséquence immédiate de (iv).

(vi) $(d_7'd_2)^2 = 1$. En utilisant (iv) et (v), on a :

$$|7'2| = |2^{s6576s23567}\,2| = |2^{s6576}\,3| = |2^{345363}\,5| = |2^{34}\,6| = |2\,6|,$$

ce qui entraîne (vi).

(vii) $(d_2^{sd_6d_5d_3d_4}d_5)^2 = 1$. On a :

$$|2^{s6534}\,5| = |2^{3453\ 6535}\,4| = |2^{345653}\,4| = |2\,6^{54}|$$

ce qui prouve (vii).

(viii) $(d_2^{sd_6d_5d_3d_4}d_6)^2 = 1$. En effet, $|2^{s6534}\,6| = |2^{s}\,5| = |2\,5|$ d'où l'assertion.

Observons maintenant que z s'écrit :

$$z = s(d_3d_4)^{d_5d_6}d_7d_6d_5(d_3d_4)d_7'^{\,d_7d_6d_5}d_3d_4d_5d_6d_7d_7'.$$

On en déduit alors (en écriture simplifiée)

$$|2^z2| = |2^{s65\ 34\ 56765\ 34\ 5677'765\ 3}\,2|,$$

ce qui donne en tenant compte de (v), (vi), (vii) et (viii) :

$$|2^z2| = |2^{s65\ 34\ 76534}\,7'^{76532}| = |2^{s65\ 34\ 76534}\,2^{s6576s}| = |2^{s6576\ 5}\,2^{s6576}|.$$

Mais $|2^{s65765}\,5| = |2^{s67}6| = |2^{s}\,7| = |2\ 7|$; on a donc

$$|2^z2| = |2^{s\,6576}\,2^{s\,6576}| = 1,$$

ce qui démontre l'égalité (a).

Pour établir l'assertion (b), rappelons que x et x' s'écrivent :

$$x = 3^{5\,246\,353} = 6^{s\,235} \quad \text{et } x' = x^{3243} = 2^{35(6^s)43}.$$

On a alors $7^{xx'} = 6^{s\,2357\,34\,6^s 2\,353\,2\,6^s\,43}$.

(i) $(d_7' d_1)^3 = 1$. En effet,

$$|7'\,1| = |6^{s235734\,6^s235\,32\,6^s4367}\,1| = |6^{s235734\,6^s235}\,1|,$$

d'où :

$$|7'\,1| = |6^{s23537\,543565345\,4\,235}\,1| = |6^{s23537\,54356\,5342}\,1^s|.$$

Mais d_1^s centralise d_6 et d_4 ; on en déduit

$$\begin{aligned} |7'\,1| &= |6^{s2537436532}\,1^s| = |6^{5342\,343\,76532}1^s| = |6^{5323476532}\,1^s| \\ &= |6^{534\,765232}\,1^{5345}| = |6^{5345\,7\,232}\,1^{5345}| \quad (\text{car } 6^{53476} = 6^{5347}) \\ &= |6^{532}\,1^{53}| = |6^{53235}\,1| = |6\,5| \end{aligned}$$

ce qui établit (i).

(ii) $(d_7'^{\,d_7 d_6 d_1} d_5)^2 = 1$. En effet

$$|7'^{761}\,5| = |7^{xx'67\,761}\,5| = |7^{xx'5}\,1|,$$

d'où :

$$\begin{aligned} |7'^{761}\,5| &= |2^{34536576\,345345\,235\,5}1| = |2^{34536576}\,1^{5435}| = |2^{34546}\,1^5| \\ &= |2^{354565}\,1| = |2^{35465}\,1| = |6^{5345}\,1| = |6^s\,1|. \end{aligned}$$

Comme $(d_6^s d_1)^2 = 1$, l'assertion (ii) est établie.

Observons enfin que, d'après (i)

$$|d_1^z d_1| = |1^{s6\,5345\,67634\,7'^{765}345677'}\,1| = |1^{s5345\,676\,534\,7'^{765}}\,7'^{761}\,5| ;$$

d'après (ii)

$$|1^z\,1| = |1^{s5345\,676\,5345\,7'^{76}}\,7'^{76}\,1|.$$

Comme $|7'^{76}1| = |7'1|$, on a :

$$|1^z\,1| = |1^{5345\,5345\,676\,5345}\,1| = |1^{5435\,676}\,1^{5435}| = |1^{5435}\,1^{5435}|$$

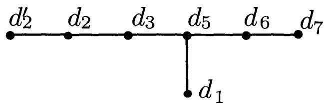
puisque d_6 centralise d_1^s et d_1^{ss} (1.1.4). L'assertion (b) est démontrée.

2. — (Notations et conventions 1.2.2.) Posons :

$$d'_2 = {d'_7}^{d_7 d_6 d_5 d_3 d_2}, \quad d' = d_5^{d_3 d_1 d_6 d_5}, \quad d'' = d_2^{d'_2 d_3 d' d_2},$$
$$d = d_1^{d_5 d_6 d_7 d_3 d_5 d_6 d_2 d_3 d_5 d_1 d'_2 d_2 d_3 d_5 d_6 d_7}.$$

On a alors les assertions suivantes :

(i) Les éléments d'_2, d_j pour $1 \leq j \leq 7$ et $j \neq 4$ satisfont aux relations :



(ii) $W = \langle d'_2, d_j \mid 1 \leq j \leq 7,\ j \neq 4 \rangle$ est isomorphe à $W(E_7)$.

(iii) $m_7 = d'_2 d_3 d_1 d_6 d' d'' d$ est une involution qui engendre le centre de W.

(iv) Soit v_e un vecteur de l'espace vectoriel V associé à $G^+(7,3)$ définissant la réflexion orthogonale e ; alors $v_{d'_2}, v_{d_3}, v_{d_1}, v_{d_6}, v_{d'}, v_{d''}, v_d$ est une base orthonormale de V. On a :

$$\begin{aligned} v_{d'_2} &= -v_2 - v_3 - v_4 - v_6 + v_7, \\ v_{d'} &= v_1 + v_3 - v_5 + v_6, \\ v_{d''} &= -v_1 + v_2 - v_3 - v_4 + v_5 + v_6 + v_7, \\ v_d &= -v_1 + v_2 - v_3 - v_4 + v_5 - v_6. \end{aligned}$$

(v) m_7 est une involution centrale de G.

La vérification de ces assertions ne présente pas de difficulté.

3. — (Notations et conventions 1.2.6.) Pour l'élément z défini en 1.1.10, on se propose de démontrer $d_6^z d_6 = 1$.

On a les assertions suivantes :

(i) $d_6^{sd_6} = d_6^{ss}$ car

$$d_6^{sd_6} = d_6^{d_5 d_3 d_4 d_5 d_6} = d_5^{d_3 d_4 d_6 d_5 d_6} = d_5^{d_3 d_4 d_5 d_6 d_5} = d_5^{d_4 d_3 d_6 d_5} = d_6^{ss}.$$

(ii) $(d_6^{ssd_2 d_3 d_1 d_2 d_4 d_5} d_6)^2 = 1$. Avec l'écriture simplifiée, on a :

$$|6^{5435\ 231245}\, 6| = |6^{5435\ 623124}\, 5| = |6^{5345\ 234}\, 5| = |6^{534\ 2}\, 5^{34}| = |6\, 2^3| = |6\, 2|,$$

ce qui entraîne (ii).

(iii) $(d_6^{ssd_2d_3d_1d_2d_5d_4d_3d_5}d_2)^2 = 1$. En effet :

$$|6^{5435\ 23125435}\,2| = |6^{5435\ 23154}\,3| = |6^{5435\ 2}\,3^{54}| = |6^{543\ 2}\,3| = |6^{54}\,2| = |6\,2|,$$

ce qui démontre (iii).

(iv) $(d_0^{d_1d_2d_3d_5d_6}d_3)^2 = 1$. Cette égalité résulte de :

$$|0^{12356}\,3| = |0^{1235}\,3| = |0\,5|.$$

(v) $d_0^{d_1d_2d_3d_5d_6} = d_6^{ssd_2d_3d_1d_2d_5d_4d_3d_5d_4}$.

En écriture simplifiée, d_0 se met sous la forme $x^{54651x356}$. On a donc :

$$\begin{aligned} 0^{12356} &= 5^{3246\ 5346\ 135\ 642\ 535\ 243} = 6^{5345\ 234\ 6\ 135642\ 535\ 243} \\ &= 6^{s65\ 343\ 15642\ 353\ 243} = 6^{ss231245\ 64\ 535\ 243} \quad \text{d'après (i)}, \\ &= 6^{ss231245\ 45\ 35243} \quad \text{d'après (ii)}, \\ &= 6^{ss2312\ 543\ 543} \quad \text{d'après (iii)} \\ &= 6^{ss2312\ 54354} \quad \text{d'après (iv)}, \end{aligned}$$

ce qui donne l'assertion

(vi) $(d_6^{ssd_2d_3d_5d_4}d_3)^2 = 1$. En effet, on a :

$$|6^{ss2354}\,3| = |6^{ss2353}\,4| = |6^{ss24}\,3^5| = |6^{5435\ 2}\,3^5| = |6^{5432}\,3| = |6^{54}\,2| = |6\,2|$$

ce qui entraîne (vi).

Observons alors que z (qui se note $54(54)^3(54)^{32}(54)^{321}(54)^{3210}$ en écriture simplifiée) s'écrit aussi :

$$ss\ 2354\ 3212\ 354\ 0^{123}\ 543210.$$

On a donc, d'après (iv),

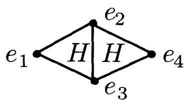
$$6^z = 6^{ss2354\ 212\ 354\ 3210123\ 543210},$$

puis, en utilisant le fait que d_2 centralise d_4 et d_5 et que $6^{ss232} = 6^{ss23}$ (en écriture simplifiée), on obtient :

$$|6^z\,6| = |6^{ss235412354\ 3210123\ 5}\,6| = |6^{ss2312534}\,0^{12356}|.$$

En vertu de (v), l'assertion est alors démontrée.

4. Le groupe $\mathcal{J}$. — On appelle groupe $\mathcal{J}$ un groupe engendré par des éléments e_1, e_2, e_3, e_4 sur lesquels



est une formule de présentation.

Soit D la classe de conjugaison de e_1 dans $\mathcal{J}$; on a les assertions suivantes :

(i) D est une classe de Fischer de $\mathcal{J}$, $|D| = 36$ et $|\mathcal{J}| = 2^8 3^3$.

(ii) Les D-sous-groupes $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$ et $\langle e_2, e_3, e_4\rangle$ sont isomorphes à $\mathcal{H}$; leurs centres sont respectivement engendrés par $z = (e_1e_2e_3)^2$ et $z' = (e_2e_3e_4)^2$; le sous-groupe $\langle z, z'\rangle$ est isomorphe à $\mathrm{SL}(2,3)$.

(iii) D est la réunion de neuf cliques de cardinal 4 (sous-ensemble maximal formé d'éléments de D commutant deux à deux) ; soient $\mathcal{C}$ une clique et x un élément de $D - \mathcal{C}$. Le sous-groupe $\langle x, \mathcal{C}\rangle$ est isomorphe à $W(D_4)$, le produit z_0 des éléments de la clique $\mathcal{C}$ est une involution qui engendre le centre de $\langle x, \mathcal{C}\rangle$. Cette involution z_0 ne dépend ni du choix de $\mathcal{C}$ ni de celui de x (avec $x \in D - \mathcal{C}$) ; z_0 engendre le centre de $\mathcal{J}$ et on a $z_0 = (z^2z')^2$.

(iv) $\mathrm{O}_2(\mathcal{J})$ est un 2-groupe extra-spécial d'ordre 2^7 ; c'est le produit central de trois groupes de quaternions; on a $Z(\mathrm{O}_2(\mathcal{J})) = Z(\mathcal{J}) = \langle z_0\rangle$.

(v) $\mathcal{J}/\mathrm{O}_2(\mathcal{J})$ est isomorphe à $\mathcal{H}$ et la suite exacte

$$1 \to \mathrm{O}_2(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}/\mathrm{O}_2(\mathcal{J}) \to 1$$

est scindée (cf. [10, chap. 4] et [13, chap. 4]).

5. — (Notations et hypothèses 2.2.3.) On rappelle que ψ est un homomorphisme de G sur $G^0 = \mathrm{SU}(6,4)$ dont le noyau est un sous-groupe central $\langle \hat{q}\rangle \times Z_1$. Le groupe G admet une classe de Fischer E de cardinal $|E| = 693$, qui s'envoie sur la classe des transvections unitaires de G^0 ; la restriction de ψ à E est un isomorphisme. Pour $1 \le i \le 6$, on a $\psi(d_i) = t_{v_i}$ et $\{v_i \mid 1 \le i \le 6\}$ est une base de l'espace vectoriel V, associé à G^0, formée de vecteurs isotropes tels que

$$\begin{aligned}&\phi(v_1,v_2) = \phi(v_2,v_3) = \phi(v_3,v_4) = \phi(v_4,v_5) = \phi(v_4,v_6) = \phi(v_2,v_5) = 1,\\ &\phi(v_5,v_3) = \omega \quad (\text{avec } \omega \in \mathbb{F}_4 - \{1,0\})\end{aligned}$$

et $\phi(v_i, v_j) = 0$ pour les autres paires $\{i,j\}$ telles que $1 \le i,j \le 6$.

Avec ces notations, on a :

$$\begin{aligned} \psi(y) &= t_{v_2+\bar\omega v_4} && \text{pour} \quad y = d_2^{d_3 d_5 d_4 d_3 d_5}, \\ \psi(y') &= t_{\bar\omega v_2+v_4} && \text{pour} \quad y' = d_4^{d_3 d_5 d_2 d_3 d_5}, \\ \psi(d_0) &= t_{v_2+v_4} && \text{pour} \quad d_0 = d_1^{q d_1} = d_1^{d_2 y y' d_4 d_1}. \end{aligned}$$

On a donc $(\psi(d_0)\psi(d_6))^3 = 1$ et par suite $(d_0 d_6)^3 = 1$.

NOTATION (n). — Soient a et a' des éléments distincts dans E qui commutent. On note $\ell(a,a')$ l'ensemble des cinq éléments de E dont les images par ψ correspondent aux transvections relatives aux cinq droites du plan isotrope engendré par v_a et $v_{a'}$. Ainsi on a :

$$\ell(d_2,d_4) = \{d_2, d_4, y', y, d_0\} \quad \text{et} \quad \hat q = d_2 d_4 y' y d_0.$$

6. — (Avec les notations et les conventions précédentes.)

(i) Rappelons que $b = d_0^{d_1 d_2 d_3 d_4}$; on a alors $\psi(b) = t_{v_1+v_3}$. On a :

$$\begin{aligned} \psi(x_1') &= t_{v_2+\bar\omega(v_1+v_3)+v_6}, & x_1' &= d_5^{d_4 d_2 b d_6 (d_4 d_5 d_4)}; \\ \psi(x_1'') &= t_{\bar\omega v_2+\bar\omega(v_1+v_3)+\omega v_6}, & x_1'' &= d_5^{d_2 x_1' b d_5}; \\ \psi(x_1) &= t_{v_2+\omega(v_1+v_3)+\omega v_6}, & x_1 &= d_1^{d_2 x_1' x_1'' d_1}. \end{aligned}$$

(ii) Rappelons que $e = (d_2^{d_5 d_4})^{d_1 d_3 d_6 (d_2^{d_5 d_4}) d_5 d_3}$. Alors :

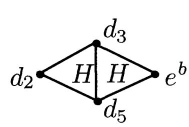
$$\psi(e) = t_{v_1+v_5+v_6} \qquad \text{(d'après 2.1.6).}$$

On pose :

$$v_e = v_1 + v_5 + v_6, \quad v_b = v_1 + v_3.$$

On a $\psi(e^b) = t_{v_e+\omega v_b}$.

Un calcul simple prouve que l'on a les relations suivantes :



$$(d_3^{d_2 e^b} d_5)^3 = 1.$$

Le sous-groupe $Q_2 = \langle d_2, d_3, d_5, e^b\rangle$ est isomorphe à $\mathcal{J}$, son centre $d_2 e^b y_2' y_2''$ est d'ordre 2 ; les expressions de y_2' et de y_2'' sont données en 2.1.6 et on a :

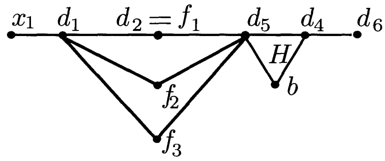
$$\psi(y_2') = t_{v_2+v_e+\omega v_b}, \quad \psi(y_2'') = t_{v_2+\omega v_e+\bar\omega v_b}.$$

Posons $y_2 = d_1^{y_2' y_2'' d_2 d_1}$; on a $\psi(y_2) = t_{v_2+\bar{\omega} v_e+v_b}$ et par suite le sous-ensemble $\ell(d_2, e^b) = \{d_2, e^b, y_2', y_2'', y_2\}$ correspond aux cinq droites du plan isotrope engendré par v_2 et $v_e + \omega v_b$ (notation (n)).

(iii) Considérons les éléments $f_2 = x_1^{beby_2''}$ et $f_3 = x_1^{beby_2'}$ introduits en 2.1.6; un calcul simple prouve que :

$$\psi(f_2) = t_{v_2+v_b+v_6} \quad \text{et} \quad \psi(f_3) = t_{\omega v_2+v_b+v_6}.$$

On a alors les relations :



et les sous-groupes $R_i = \langle d_1, f_i, d_5, d_4, d_6, b\rangle$ pour $i = 1, 2, 3$ sont isomorphes entre eux; leurs images dans $\mathrm{PSU}(6,4)$ ne sont pas conjugués entre elles. Les intersections de $\psi(R_1)$ avec ses conjugués ont été classifiées, aucune ne contient de sous-groupes isomorphes à $\langle d_5, d_4, d_6, b\rangle$ (cf. [7]); $\psi(R_1), \psi(R_2), \psi(R_3)$ sont des représentants des trois classes de conjugaison de sous-groupes isomorphes à $G^+(6,3)/Z(G^+(6,3))$ dans $\mathrm{PSU}(6,4)$ (cf. [10, chap. 8]).

(iv) Les involutions centrales de R_i sont des produits de six éléments commutant deux à deux (c'est le produit des éléments d'une clique de $E \cap R_i$). Avec les notations introduites en 2.1.6, on a :

$$m(R_i) = f_i d_6 b x_i x_i' x_i''$$

avec $x_1' = d_5^{d_4 f_i b d_6 d_5 d_4 d_5}$, $x_i'' = d_5^{x_i' f_i b d_5}$ et $x_1 = d_1^{x_i' x_i'' f_i d_1}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\psi(x_i') &= t_{u_i'} \quad \text{avec} \quad u_1' = v_2 + \omega v_b + v_6,\ u_2' = v_2 + \bar{\omega} v_6,\ u_3' = v_2 + v_b\,;\\
\psi(x_i'') &= t_{u_i''} \quad \text{avec} \quad u_1'' = v_2 + v_b + \bar{\omega} v_6,\ u_2'' = v_2 + \bar{\omega} v_b,\ u_3'' = v_2 + v_6\,;\\
\psi(x_i) &= t_{u_i} \quad \text{avec} \quad u_1 = u_2 = u_3 = v_2 + \omega v_b + \omega v_6.
\end{aligned}$$

On peut alors calculer $m(R_1)m(R_2)$.

Conservons les notations (n) introduites au numéro 5 et considérons les sous-ensembles suivants :

- $L_1 = \ell(x_1', x_2'') = \{x_1', x_2'', d_6, f_3, a_1\}$ associé au plan $\langle v_2 + \bar{\omega} v_b, v_6\rangle$ avec $\psi(a_1) = t_{v_2+\bar{\omega} v_b+\omega v_6}$;

- $L_2 = \ell(d_6, x_1'') = \{d_6, x_1'', x_3', f_2, a_2\}$ associé au plan $\langle v_2 + v_b, v_6\rangle$ avec $\psi(a_2) = t_{v_2+v_b+\omega v_6}$;
- $L_3 = \ell(a_1, a_2) = \{a_1, a_2, b, x_3, a_3\}$ associé au plan $\langle v_2 + \omega v_6, v_b\rangle$ avec $\psi(a_3) = t_{v_2+\omega v_6}$;
- $L_4 = \ell(x_2', d_6) = \{x_2', d_6, d_2, x_3'', a_3\}$ associé au plan $\langle v_2, v_6\rangle$.

On a alors

$$m(R_1)m(R_2) = (x_1x_1'x_1''bd_6d_2)(x_2x_2'x_2''bd_6f_2) = (x_1'x_2'')(x_1''f_2)(x_2'd_2)$$

en observant que les éléments x_i', x_i'', x_i, f_i, b et d_6 commutent entre eux puisqu'ils correspondent, par ψ, à des droites du sous-espace isotrope engendré par v_2, v_b et v_6. Le produit des cinq éléments de L_1, L_2, L_3 et L_4 est $\hat{q}$. On obtient donc :

$$m(R_1)m(R_2) = \big(\hat{q}d_6f_3a_1\big)\big(\hat{q}d_6x_3'a_2\big)\big(\hat{q}d_6a_3x_3''\big) \quad \text{(en utilisant } L_1, L_2, L_4\text{)},$$
$$m(R_1)m(R_2) = \big(\hat{q}a_1a_2a_3\big)\big(d_6f_3x_3'x_3''\big) \quad \text{(en utilisant } L_3\text{)},$$
$$m(R_1)m(R_2) = (bd_6f_3)x_3x_3'x_3'' = m(R_3).$$

7. — Soit (K, D) un couple fischérien avec une présentation $(X, \mathcal{R})$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) X est un sous-ensemble de D ;

(ii) les relations composant la donnée $\mathcal{R}$ sont toutes de la forme $(xx')^2 = 1$ ou $(xx')^3 = 1$ (pour tous $x, x' \in X$ tels que $x \neq x'$) et $(x^kx')^m = 1$ avec x et x' dans X, k dans K et m dans $\{2, 3\}$. Une telle présentation est dite *fischérienne.*

LEMME. — *Soit (G, E) un couple fischérien et soit N un sous-groupe normal de G, non central dans G tel que $K = G/N$ admette une présentation fischérienne $(X, \mathcal{R})$ avec X contenu dans l'image D de la classe E de G. Alors, l'extension*

$$(*) \qquad 1 \to N \longrightarrow G \longrightarrow K \to 1$$

est scindée.

Preuve. — Notons f l'application canonique de G sur K. Soit Y une image réciproque de X dans G telle que, pour tout x dans X, on ait $|f^{-1}(x) \cap Y| = 1$.

Soit G_0 le sous-groupe de G engendré par Y, i.e. $G_0 = \langle Y\rangle$, et soit f_0 la restriction de f à G_0 ; f_0 est un homomorphisme surjectif.

Soient x et x' des éléments distincts dans X. Soient y et y' des éléments dans Y tels que $f_0(y) = x$ et $f_0(y') = x'$. On a alors $f_0(yy') = xx'$. L'ordre de yy' divise celui de xx' qui est 2 ou 3. Il s'ensuit que f_0 induit un isomorphisme du graphe porté par Y sur le graphe porté par X (graphe dont les sommets sont les éléments de Y (resp. X) et dont les arêtes joignent les points y, y' tels que yy' est d'ordre 3).

Considérons une relation de la forme $(x^k x')^m = 1$, avec k dans K, m dans $\{2,3\}$, x et x' distincts dans X. Il existe des éléments y et y' dans Y dont les images par f_0 sont respectivement x et x'. Puisque X engendre K, il existe des éléments $x_{v(1)}, \ldots, x_{v(n)}$ de X dont le produit est k. Notons $y_{v(1)}, \ldots, y_{v(n)}$ les éléments de Y (uniques) dont les images par f_0 sont $x_{v(1)}, \ldots, x_{v(n)}$; leur produit g est un élément de G_0 tel que $f_0(g) = k$. On a alors : $f_0(y^g y') = f_0(x)^{f_0(g)} f_0(x') = x^k x'$; comme $(x^k x')^m = 1$, l'ordre de $y^g y'$ divise m ; la relation $(y^g y')^m = 1$ est satisfaite.

Désignons par h l'application de K dans G_0 définie par $h(x) = y$ où y est l'élément de Y satisfaisant à $f_0(y) = x$. Puisque les relations $\mathcal{R}$ sont satisfaites dans $G_0 = \langle Y \rangle$, l'application h se prolonge en un homomorphisme du groupe K sur le groupe G_0. Par construction $f_0 \circ h$ est l'identité sur X, donc sur K puisque X engendre K. L'extension (*) est scindée.

REMARQUE. — Les groupes de type classique suivants possèdent une présentation fischérienne :

- $C_2 \times Sp(2n, 2)$ si $n \geq 3$;
- $\mathrm{O}_\nu(2n, 2)$ si $n \geq 3$;
- $G^-(5,3)$, $G^+(5,3)$, $G^-(6,3)$, $3 \cdot G^+(6,3)$, $3 \cdot G^+(7,3)$ (extensions centrales non scindées),
- $C_2 \times \mathrm{SU}(4,4)$, $C_2 \times \mathrm{SU}(5,4)$ (lemme ci-dessus ; 1.1.7 ; 1.1.1 ; 1.2.1 ; 1.2.2 ; 2.1.1 ; 2.2.1 et [12] pour les groupes sur $\mathbb{F}_2$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie.* — Masson, 1982.

[2] CHEVALLEY (C.). — *Algebraic theory of spinors.* — Columbia University Press, New York, 1951.

[3] Conway (J.H.), Curtis (R.T.), Norton (S.P.), Parker (R.A.) and Wilson (R.A.). — *Atlas of Finite Groups.* — Clarendon Press, Oxford, 1985.

[4] Cuypers (H.) and Hall (J.I.). — *3-transposition Groups of orthogonal type.* — (à paraître).

[5] Dieudonné (J.). — *La géométrie des groupes classiques.* — Springer-Verlag, 1963.

[6] Fischer (B.). — *Groups generated by 3–transpositions.* — Université de Warwick, Lectures notes 1969 (unpublished).

[7] Fischer (B.). — *Groups generated by 3-transpositions*, Invent. Math., t. **13**, 1971, p. 232–246.

[8] Griess (R.L.). — *Schur multipliers of finite simple groups of Lie type*, Trans. Amer. Soc., t. **183**, 1973, p. 355–421.

[9] Lindsey (J.H.). — *Finite linear group of degree six*, Canada J. Math., t. XXIII, n° 5, 1971, p. 771–790.

[10] Virotte-ducharme (M.M.). — *Couples fischériens presque simples*, Thèse, Université Paris 7, 1985.

[11] Virotte-ducharme (M.M.). — *Une construction du groupe de Fischer* Fi_{24}, Mémoire n° 27, Bull. SMF, **t. 11**, fasc. 2, 1987.

[12] Virotte-ducharme (M.M.). — *Présentation des groupes de Fischer* (I), Geom. Dedicata, t. **41**, 3, 1992, p. 275–335.

[13] Zara (F.). — *Classification des couples fischériens*, Thèse, Université de Picardie, 1985.