BULLETIN DE LA S. M. F.

E. TOUBIANA

Surfaces minimales non orientables de genre quelconque

Bulletin de la S. M. F., tome 121, n° 2 (1993), p. 183-195

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1993__121_2_183_0>

Bull. Soc. math. France,
121, 1993, p. 183–195.

SURFACES MINIMALES NON ORIENTABLES DE GENRE QUELCONQUE

PAR

E. TOUBIANA (*)

RÉSUMÉ. — Nous construisons une nouvelle famille de surfaces minimales non orientables, complètes dans $\mathbb{R}^3$ (s.n.o) paramétrées par $\mathbb{P}^2 - \{0,1\}$. Nous montrons que la moyenne non orientable de chacune de ces surfaces est la surface de Henneberg. Nous montrons l'existence de s.n.o de genre quelconques puis que toutes les structures conformes de la bouteille de Klein peuvent être complètement et minimalement immergées dans $\mathbb{R}^3$ avec deux bouts.

ABSTRACT. — We build a new family of complete minimal non-orientable surface in $\mathbb{R}^3$ (s.n.o) parametrised by $\mathbb{P}^2 - \{0,1\}$. We show that every surface in this family has the Henneberg surface as non-orientable mean. We show existence of s.n.o of every genus and that every conformal structure of the Klein bottle can be completly and minimaly immersed in $\mathbb{R}^3$ with two ends.

Introduction

Les surfaces minimales complètes non orientables (s.n.o par abréviation) constituent actuellement un grand sujet d'étude.

MEEKS [6] a montré qu'il n'existe pas de s.n.o de courbure totale -2π ou -4π, puis qu'il n'existe qu'une s.n.o de courbure totale -6π ; elle est paramétrée par le plan projectif $\mathbb{P}^2$ moins un point. Ensuite, M.E. OLIVEIRA [7] donna l'exemple d'une famille de s.n.o paramétrées par $\mathbb{P}^2 - \{0\}$ et de courbure totale $-2n\pi$ avec $n \geq 3$; lorsque $n = 3$, on obtient la surface de Meeks. Elle découvrit également deux s.n.o paramétrées par $\mathbb{P}^2 - \{0,1\}$ de courbure totale -10π.

ZHANG [9] montra que ces deux surfaces sont les seules à posséder certaines propriétés, puis il donna d'autres exemples de s.n.o de courbure totale -10π paramétrées par $\mathbb{P}^2$ moins deux points.

(*) Texte reçu le 16 mai 1991, révisé le 27 mai 1992.
E. TOUBIANA, Université de Bourgogne, Laboratoire de Topologie, DO 755, BP 138, 21004 Dijon cedex.
Classification AMS : 53 A 10.

Dans ce papier, nous donnons une nouvelle famille de s.n.o paramétrées par $\mathbb{P}^2 - \{0,1\}$, de courbure totale -10π ; cette famille contient les deux exemples de M.E. Oliveira. Nous montrons également qu'il existe des s.n.o de genre quelconque obtenues par revêtement ramifié des exemples précédents, de plus ces surfaces ont une moyenne non orientable égale à la surface de Henneberg (voir le paragraphe 2 pour la définition de la moyenne). Nous montrons enfin que toutes les structures conformes de la bouteille de Klein peuvent être immergées minimalement avec deux bouts et de courbure totale -20π.

Remarque. — Nous avons appris en cours de rédaction de ce papier que Ishihara [3] a construit un exemple de s.n.o paramétrée par une une bouteille de Klein moins un point et de courbure totale -16π.

1. Rappels sur les surfaces non orientables

Soit M une surface de Riemann possédant une involution anti-conforme I sans point fixe, le quotient de M par I donne donc une surface non orientable N dont le revêtement conforme des orientations est M. Nous dirons abusivement que N est une *surface de Riemann non orientable* (car, à un revêtement à deux feuillets près, N est muni d'une structure conforme : celle de M).

Lemme 1. — *Soient N une surface de Riemann non orientable, M son revêtement des orientations et I l'involution anti-conforme de M, sans point fixe définissant N (i.e. $N \simeq M/I$). Soit X une immersion minimale de M dans $\mathbb{R}^3$ donnée par la représentation de Weierstrass (g,w) i.e.*

$$\forall z \in M, \quad X(z) = \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}\Big[\tfrac{1}{2}\omega(1-g^2),\, \tfrac{1}{2}i\omega(1+g^2), \omega g\Big],$$

où g est une fonction méromorphe sur M et où ω une forme holomorphe sur M vérifiant : un point p de M est un pôle d'ordre n de g si et seulement si p est un zéro d'ordre $2n$ de ω, et également :

$$\forall \gamma \in \prod_1(M) \quad \operatorname{Re}\int_{\gamma}\Big[\tfrac{1}{2}\omega(1-g^2),\, \tfrac{1}{2}i\omega(1+g^2), \omega g\Big] = 0.$$

Alors X définit une immersion minimale de N dans $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire $X(z) = X(I(z))$ pour tout $z \in M$) si et seulement si nous avons :

(a) *$g(I(z)) = -1/\bar{g}(z)$ pour tout $z \in M$;*

(b) *$I^*(\omega) = -\overline{g^2\omega}$.*

On peut trouver une démonstration de ce lemme dans [6] ou [7].

2. Surfaces minimales complètes non orientables de genre quelconque

Nous commençons par définir une nouvelle famille de s.n.o paramétrées par $\mathbb{P}^2 - \{0,1\}$.

PROPOSITION 1. — *Soient g_θ et ω_θ, avec $\theta \in [0,2\pi]$, la fonction et la forme définies sur $\mathbb{S}^2$ par :*

$$g_\theta(z) = z\left(\frac{z^4 + \left(3\sqrt{5/3}\,\mathrm{e}^{i\theta} - 5\right)z^2 + \sqrt{5/3}\,\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{5/3}\,\mathrm{e}^{-i\theta}z^4 + \left(3\sqrt{5/3}\,\mathrm{e}^{-i\theta} - 5\right)z^2 + 1}\right),$$

$$\omega_\theta = i\,\frac{\left(\sqrt{5/3}\,\mathrm{e}^{-i\theta}z^4 + \left(3\sqrt{5/3}\,\mathrm{e}^{-i\theta} - 5\right)z^2 + 1\right)^2}{z^4(z-1)^2(z+1)^2}\,\mathrm{d}z.$$

Alors, pour tout θ dans $[0,2\pi]$, (g_θ,ω_θ) définit une s.n.o X_θ, de courbure totale -10π, paramétrée par $\mathbb{P}^2 - \{0,1\}$, où

$$\mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{S}^2/I$$

et où I est l'involution de $\mathbb{S}^2$ définie par :

$$I(z) = -1/\bar{z} \quad \textit{pour tout} \quad z \in \mathbb{S}^2.$$

Démonstration. — Un simple calcul montre que

$$g_\theta\big(I(z)\big) = \frac{1}{\bar{g}_\theta(z)}$$

pour tout $z \in \mathbb{S}^2$ et pour tout $\theta \in [0,2\pi]$ et

$$I^*(\omega_\theta) = -\ \overline{g_\theta^2\omega_\theta}$$

pour tout $\theta \in [0,2\pi]$.

Ainsi, en utilisant le LEMME 1, il suffit de montrer que (g_θ,ω_θ) définissent une immersion minimale de $\mathbb{S}^2 - \{0,\infty,1,-1\}$, et pour cela, il faut montrer que les fonctions coordonnées sont bien définies, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\big[\mathrm{Res}\big(\omega_\theta(1-g_\theta^2); z_0\big)\big] = 0,\\
&\mathrm{Im}\big[\mathrm{Res}\big(i\omega_\theta(1+g_\theta^2); z_0\big)\big] = 0,\\
&\mathrm{Im}\big[\mathrm{Res}(\omega_\theta g_\theta, z_0)\big] = 0,
\end{aligned}$$

où $z_0 \in \{0,\infty,1,-1\}$. Or un calcul montre que les résidus des formes ω_θ, $\omega_\theta g_\theta^2$ et $\omega_\theta g_\theta$ sont tous nuls ; les fonctions coordonnées sont donc bien définies. Pour montrer la complétude de la surface, il suffit de vérifier que tout chemin divergent vers le bout $z=1$ ou $z=0$ a une longueur infinie, ceci pour la métrique $\mathrm{d}s$ induite par l'immersion dans $\mathbb{R}^3$. La métrique $\mathrm{d}s$ est donnée par :

$$\mathrm{d}s=\big(1+|g^2|\big)|\omega|.$$

Ainsi, près du bout $z=1$, $\mathrm{d}s$ est de la forme $1/(z-1)^2$ et près du bout $z=0$, la métrique est de la forme $\mathrm{d}s=1/z^4$; ceci montre la complétude de la surface.

Remarque 1.

a) Un calcul montre que pour tout θ dans $[0,2\pi]$, nous avons

$$g_\theta'(1)=0 \quad \text{et} \quad g_\theta'(0)\neq 0\,;$$

de plus

$$g_\theta''(1)=0 \iff \mathrm{e}^{i\theta}=\pm 1\,;$$

enfin, si $\mathrm{e}^{i\theta}=\pm1$, nous avons $g_\theta'''(1)\neq 0$. Ainsi g_θ est de degré trois près de 1 si et seulement si $\mathrm{e}^{i\theta}=\pm1$, autrement g_θ est de degré deux près de 1. Dans tous les cas g_θ est de degré un près de 0.

Pour $\mathrm{e}^{i\theta}=\pm1$ on montre facilement qu'après une rotation dans $\mathbb{R}^3$ et un changement de paramètre nous obtenons les deux surfaces de M.E. Oliveira [7].

b) Les résidus des formes Φ_j étant nuls pour $j=1,2,3$, les surfaces associées existent, i.e. les surfaces définies par

$$(g_\theta,\,\mathrm{e}^{i\alpha}\omega_\theta)_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad \text{sur} \quad \mathbb{S}^2-\{0,\infty,1,-1\}$$

sont des surfaces orientables de courbure totale -20π dans $\mathbb{R}^3$ mais ces surfaces passent au quotient, i.e. sont des s.n.o, si et seulement si $\mathrm{e}^{i\alpha}=\pm1$ car sinon $(g_\theta,\,\mathrm{e}^{i\alpha}\omega_\theta)$ ne vérifient pas la condition (b) du Lemme 1.

c) L'existence de la famille présentée à la Proposition 1 est apparue de la manière suivante. Si l'on cherche une s.n.o paramétrée par $\mathbb{P}^2-\{0,1\}$ de courbure totale -10π avec l'un des bouts plongé, nous avons la représentation de Weierstrass suivante (à une rotation près, nous pouvons supposer $g(0)=0$ et donc $g(\infty)=\infty$) :

$$g(z)=z\,\frac{z^4+az^3+bz^2+cz+d}{\alpha z^4+\beta z^3+\varphi z^2+\delta z+\varepsilon},$$

$$\omega=\frac{\lambda(\alpha z^4+\beta z^3+\varphi z^2+\delta z+\varepsilon)^2}{z^4(z-1)^2(z+1)^2}\,\mathrm{d}z,$$

avec $a, b, c, d, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \varepsilon, \lambda \in \mathbb{C}$. Les conditions

$$g\Big(\frac{-1}{\bar z}\Big) = -\frac{1}{\bar g(z)} \quad \text{et} \quad f(z) = -\frac{\overline{f(-1/\bar z)}}{z^2 g^2(z)}$$

donnent, avec $\tau^2 = -\lambda/\bar\lambda$:

$$(*) \qquad \begin{cases} \varepsilon = -\bar\tau, \quad \delta = \bar\tau\bar a, \qquad \varphi = -\bar\tau\bar b, \\ \beta = \bar\tau\bar c, \quad \alpha = -\bar\tau\bar d. \end{cases}$$

De plus, les conditions sur les résidus sont

$$\begin{cases} \operatorname{Im}[\operatorname{Res}(g\omega, 0)] = 0, \quad \operatorname{Im}[\operatorname{Res}(g\omega, 1)] = 0, \\[1ex] \operatorname{Res}(\omega, 0) = -\overline{\operatorname{Res}(\omega g^2, 0)}, \quad \operatorname{Res}(w, 1) = -\overline{\operatorname{Res}(\omega g^2, 1)}, \end{cases}$$

ce qui donne, en tenant compte de (*) :

$$\begin{cases} (a+c)(-3a+c) = (1+b+d)(5+b-3d), \\ c + ab + 2a + dc = 0, \\ \operatorname{Re}(\bar b d + b - \bar a c + 2d) = 0, \\ \operatorname{Re}\big[(a+c)\big(1 + \frac{1}{2}\bar b\big) - (1+b+d)\big(\frac{3}{4}\bar a + \frac{1}{4}\bar c\big)\big] = 0. \end{cases}$$

Si l'on cherche une solution à ce système avec $a = c = 0$ et $\lambda = i$, nous trouvons nécessairement $5 + b - 3d = 0$, puis $d = \sqrt{5/3}\,\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$, et finalement $b = 3\sqrt{5/3}\,\mathrm{e}^{i\theta} - 5$, c'est-à-dire la famille annoncée dans la PROPOSITION 1.

REMARQUE 2.

Par convention nous dirons qu'une surface compacte sans bord non orientable est de *genre* k si elle est homéomorphe à la somme connexe de $(k+1)$ plans projectifs. Par exemple $\mathbb{P}^2$ a un genre nul et le genre de la bouteille de Klein est un. L'avantage de cette convention est que le genre d'une surface non orientable est le même que celui de son revêtement des orientations.

Nous allons maintenant définir pour tout entier k une surface de Riemann N_k non orientable de genre k, i.e. une surface compacte non orientable obtenue comme quotient d'une surface de Riemann M_k compacte de genre k, par une involution anti-conforme et sans point fixe de M_k.

Pour cela, considérons les surfaces de Riemann M_k définies par les équations :

$$y^{k+1} = x^k(x^2 - 1), \qquad x, y \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \ k \in \mathbb{N}^*.$$

Il est connu que M_k est une surface de Riemann compacte de genre k. Soient I et $\tilde{I}$ les fonctions sur $\mathbb{S}^2$ et M_k définies respectivement par :

$$\begin{aligned} I(z) &= -\frac{1}{\bar{z}} && \forall z \in \mathbb{S}^2, \\ \tilde{I}(x,y) &= \Big(-\frac{1}{\bar{x}}, -\frac{\bar{y}}{\bar{x}^2}\Big) && \forall (x,y) \in \big(\mathbb{C} \cup \{\infty\}\big)^2. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $\tilde{I}$ est une application de M_k dans lui-même, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in M_k, \quad \tilde{I}(x,y) \in M_k.$$

De plus $\tilde{I}$ est une involution anti-conforme de M_k sans point fixe, le quotient de M_k par $\tilde{I}$ donne donc une surface compacte non orientable N_k de genre k.

Nous pouvons maintenant montrer le résultat principal :

THÉORÈME 1. — *Pour tout entier k, il existe une s.n.o de genre k avec deux bouts et de courbure totale $-10(k+1)\pi$.*

Démonstration. — Appelons Π la première projection de M_k sur $\mathbb{S}^2$:

$$\begin{aligned} \Pi : M_k &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

où $\mathbb{S}^2$ est identifié à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Pour $k = 0$ les exemples donnés à la PROPOSITION 1 vérifient l'énoncé du théorème, nous pouvons donc supposer $k \geq 1$.

Par construction nous avons :

$$\forall (x,y) \in M_k, \quad I \circ \Pi(x,y) = \Pi \circ \tilde{I}(x,y).$$

Ainsi la projection Π de M_k sur $\mathbb{S}^2$ définit une projection $\widetilde{\Pi}$ de N_k sur $\mathbb{P}^2$ (avec $\mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{S}^2/I$) rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} M_k & \xrightarrow{\widetilde{\mathbb{P}}} & N_k & \xrightarrow{\sim} & M_k/\tilde{I} \\ {\scriptstyle \Pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\Pi}} & & \\ \mathbb{S}^2 & \xrightarrow{\mathbb{P}} & \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{S}^2/I, \end{array}$$

où $\mathbb{P}$ et $\widetilde{\mathbb{P}}$ désignent les projections canoniques de $\mathbb{S}^2$ et M_K sur respectivement $\mathbb{P}^2$ et N_k.

Nous en déduisons que $\widetilde{\Pi}$ est un revêtement ramifié de degré $(k+1)$ de N_k sur $\mathbb{P}^2$; les points de ramifications de $\widetilde{\Pi}$ sont

$$\widetilde{\mathbb{P}}(1,0) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbb{P}}(0,0),$$

les images de ces points dans $\mathbb{P}^2$ sont donc 1 et 0.

Considérons maintenant un exemple quelconque d'immersion minimale X_θ donné par la PROPOSITION 1. L'application $\widetilde{X}_\theta$ définie par :

$$\widetilde{X}_\theta(z) = X_\theta \circ \widetilde{\Pi}(z) \qquad \forall z \in N_k - \{\widetilde{\mathbb{P}}(1,0), \widetilde{\mathbb{P}}(0,0)\}$$

est donc une immersion minimale complète de N_k moins deux points dans $\mathbb{R}^3$ car les images des points de branchement de $\widetilde{\Pi}$ coïncident avec les bouts de X_θ.

La courbure totale $\mathbb{C}(\widetilde{X}_\theta)$ de l'immersion $\widetilde{X}_\theta$ est donc :

$$\mathbb{C}(\widetilde{X}_\theta) = \deg(\widetilde{\Pi}) \times (-10\pi) = -10(k+1)\pi.$$

REMARQUE 3.

a) Les exemples donnés par le THÉORÈME 1 sont les analogues des exemples de surfaces minimales orientables de genre quelconque donnés par KLOTZ et SARRIO [5].

b) En employant d'autres techniques, entre autre une partie de celles utilisées par ISHIHARA [3], l'auteur et M.E OLIVEIRA montrerons dans un travail à venir l'existence de s.n.o. de genre 2 qui, contrairement au THÉORÈME 1, ne peuvent pas être obtenues par des revêtements d'autres surfaces.

Dans [8, § 3], l'auteur et H. ROSENBERG définissent la somme non orientable de deux s.n.o. Simplement, si N_1 et N_2 sont deux s.n.o, la somme non orientable de N_1 et N_2, notée $N_1 \widetilde{+} N_2$, est obtenue en faisant la somme dans $\mathbb{R}^3$ de tous les points de N_1 et N_2 possédant la même direction normale (orientée ou non). Si $N_1 = N_2$, la surface $N_1 \widetilde{+} N_2$ est appelé la *moyenne non orientable* de N_1. On obtient ainsi un *hérisson* minimal non orientable, c'est-à-dire une s.n.o possédant un nombre fini de points de branchements de courbure totale -2π, paramétrée par le plan projectif $\mathbb{P}^2$ moins un nombre fini de points, voir [8, § 3].

Par exemple :

- Si N est la caténoïde (i.e. $N = \mathbb{S}^2 - \{0, \infty\}$, $g(z) = z$, $\omega = \mathrm{d}z/z^2$) la moyenne non orientable de N est réduite à un point car N est symétrique par rapport à l'origine.
- Si N est la surface de Enneper (i.e. $N = \mathbb{S}^2 - \{\infty\}$, $g(z) = z$, $\omega = \mathrm{d}z$), la moyenne non orientable de N est la surface de Henneberg (i.e. $N = \mathbb{S}^2 - \{0, \infty\}$, $g(z) = z$, $\omega = (1 - 1/z^4)\,\mathrm{d}z$), voir [8, § 3].

THÉORÈME 2. — *Pour toute s.n.o N donnée par le théorème* 1, *la moyenne non orientable de N est la surface de Henneberg.*

Démonstration. — La surface de Henneberg est paramétrée par

$$\mathbb{S}^2 - \{0, \infty\}$$

et sa représentation de Weierstrass est $g(z) = z$, $\omega = (1 - 1/z^4)\,\mathrm{d}z$. Clairement, il suffit de montrer le résultat pour les immersions non orientables X_θ de $\mathbb{P}^2 - \{0, 1\}$ données par la proposition. Appelons M_θ les s.n.o ainsi obtenues.

La remarque 1 a) montre que l'application de Gauss g_θ de X_θ est de degré 2 près du point 1 ; comme ω_θ a un pôle double au point 1, nous concluons que le bout E de X_θ paramétré par 1 est plat, i.e. que E est asymptote à un plan orthogonal à g_θ. Nous concluons de la démonstration du théorème 2.2 de [8] que $E \tilde{+} E$ est borné ; ainsi seul subsiste dans $M_\theta \tilde{+} M_\theta$ le bout paramétré par 0. La surface obtenue $M_\theta \tilde{+} M_\theta$ ne possède donc qu'un bout ; elle est paramétrée par $\mathbb{P}^2 - \{0\}$ et sa représentation de Weierstrass est de la forme

$$g(z) = z, \quad \omega = P(z)/Q(z)\,\mathrm{d}z,$$

où P et Q sont deux polynômes à coefficients complexes. Comme d'une part chaque pôle de ω est un bout de $M_\theta \tilde{+} M_\theta$ et d'autre part le bout E de M_θ a une projection de degré 3 sur les plans horizontaux, nous déduisons que le seul zéro de Q est 0 et de plus 0 est un zéro de degré 4 de Q, ainsi $\omega = P(z)/z^4$.

Maintenant la condition $I^*(\omega) = -\overline{\omega g^2}$ impose que P est un polynôme de degré 4, puis la même condition donne P de la forme suivante :

$$P(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + \bar{b}z - \bar{a}, \qquad a, b \in \mathbb{C},\ c \in i\mathbb{R}.$$

Les conditions de périodes donnent $\operatorname{Re} \int_\gamma g\omega = 0$ pour $\gamma \in \Pi_1(\mathbb{P}^2 - \{0\})$; en particulier si γ est un lacet autour de 0, nous devons avoir

$$\operatorname{Im} \operatorname{Res}(g\omega) = 0$$

et donc c est réel. Comme nous avions vu précédemment que c est un imaginaire pur, nous concluons que c est nul. Ainsi :

$$\omega = \Big(a + \frac{b}{z} + \frac{\bar{b}}{z^3} + \frac{-\bar{a}}{z^4}\Big)\,\mathrm{d}z.$$

Finalement, comme les formes ω_θ n'ont pas de termes en $1/z$ (voir la Proposition 1), il doit en être de même pour la forme ω et ainsi b est nul (se reporter à [8, th. 2.1] pour voir comment ω est obtenu à partir de ω_θ). Nous en déduisons :

$$\omega = \Big(a - \frac{\bar{a}}{z^4}\Big)\,\mathrm{d}z, \quad g(z) = z.$$

A une homothétie de $\mathbb{R}^3$ près on peut supposer que a est de norme 1 ; nous avons donc $a = \mathrm{e}^{i\,\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Tournons la surface à l'aide de la rotation d'angle $\frac{1}{2}\alpha$ laissant fixe l'axe x_3. En continuant d'appeler (g, ω) la représentation de Weierstrass de la surface ainsi obtenue nous avons

$$g(z) = \mathrm{e}^{i\,\alpha/2} z, \quad \omega = \mathrm{e}^{-i\,\alpha/2}\Big(\mathrm{e}^{i\,\alpha} - \frac{\mathrm{e}^{-i\,\alpha}}{z^4}\Big)\,\mathrm{d}z,$$

d'où

$$\omega = \Big(1 - \frac{1}{(\mathrm{e}^{i\,\alpha/2} z)^4}\Big)\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{i\,\alpha/2} z).$$

En posant $u = \mathrm{e}^{i\,\alpha/2} z$, nous avons

$$g(u) = u, \quad \omega = \Big(1 - \frac{1}{u^4}\Big)\,\mathrm{d}u,$$

ce qui représente bien la surface de Henneberg.

3. Immersion minimale de toutes les structures conformes de $\mathbb{K}^2$

Commençons par déterminer toutes les structures conformes de $\mathbb{K}^2$.

Il est connu que les structures conformes du tore sont obtenues par le quotient de $\mathbb{C}$ par un réseau Γ de $\mathbb{C}$. De plus, si un tore admet une involution anti-conforme sans point fixe, on peut montrer que le réseau Γ définissant la structure conforme du tore est rectangulaire, c'est-à-dire que Γ est engendré par deux vecteurs orthogonaux. Dans [2], on montre qu'un tel tore (i.e. engendré par un réseau rectangulaire) est conformément équivalent à la surface de Riemann de $(\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2$ définie par

$$M = \Big\{(x, y) \in \big(\mathbb{C} - \{\infty\}\big)^2,\ y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)\Big\}$$

où :

$$(**) \qquad e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}, \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_3 < e_2 < e_1.$$

Considérons maintenant l'homographie de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ définie par :

$$T(z) = \frac{e_2\bar{z} + b}{\bar{z} - e_2}, \quad b = e_1^2 + e_3^2 + 3e_1e_3.$$

Un calcul montre que :

- T est une involution (i.e. $T \circ T(z) = z$),
- T n'a pas de point fixe.

Comme de plus T est anti-conforme, le quotient de $\mathbb{S}^2$ par T donne un plan projectif. Définissons de plus l'application $\tilde{I}$ de $(\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2$ par :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \quad \tilde{I}(x,y) = \big(T(x), \sqrt{(b+e_2)(e_2-e_1)(e_2-e_3)}\,\bar{y}\big).$$

De même, un calcul montre que :

- $\tilde{I}$ est une application de M dans M,
- $\tilde{I}$ est une involution anti-conforme de M,
- $\tilde{I}$ n'a pas de point fixe.

Comme M est un tore le quotient de M par $\tilde{I}$ donne une bouteille de Klein $\mathbb{K}^2$. Lorsque e_1, e_2, e_3 varient dans $\mathbb{R}$ tout en vérifiant (**), on obtient ainsi toutes les structures conformes de K^2.

Nous pouvons montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — *Pour toute structure conforme de K^2, il existe une immersion minimale complète dans $\mathbb{R}^3$ avec deux bouts de courbure totale -20π.*

Démonstration. — Elle est analogue à celle du THÉORÈME 1.

Soient Π la première projection de M sur $\mathbb{S}^2$, F la projection de $\mathbb{S}^2$ sur $\mathbb{S}^2/T$ et $\widetilde{F}$ la projection de M sur $M/\tilde{I}$. Par construction nous avons :

$$\forall (x,y) \in M, \quad \Pi \circ \tilde{I}(x,y) = T(x) = T \circ \Pi(x,y).$$

Π va donc définir une projection $\widetilde{\Pi}$ de $M/\tilde{I}$ sur $\mathbb{S}^2/T$. Nous avons donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\widetilde{F}} & M/\tilde{I} \\ {\scriptstyle \Pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\Pi}} \\ \mathbb{S}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{S}^2/T. \end{array}$$

$\widetilde{\Pi}$ est un revêtement ramifié à deux feuillets avec deux points de branchement :

$$\widetilde{F}(e_1,0), \quad \widetilde{F}(e_2,0).$$

Ainsi, comme au THÉORÈME 1, il suffit de trouver une immersion minimale complète X de $\mathbb{S}^2/T - \{e_1, e_2\}$ dans $\mathbb{R}^3$ de courbure totale -10π ; la composée $\widetilde{X}$ de $\widetilde{\Pi}$ avec X donnera l'immersion de $M/\tilde{I} - \{F(e_1,0), F(e_2,0)\}$ cherchée.

Une telle immersion X se relève par T en une immersion de

$$\mathbb{S}^2 - \{e_1, e_2, e_3, \infty\}$$

dans $\mathbb{R}^3$. On remarque que l'homographie f de $\mathbb{S}^2$ définie par

$$f(z) = \sqrt{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)}\, z + e_2$$

envoie

$$\left(\sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_2 - e_3}}, 0, -\sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2}}, \infty\right)$$

sur (e_1, e_2, e_3, ∞) respectivement ; enfin si I désigne l'involution de $\mathbb{S}^2$ définie par

$$I(z) = -\frac{1}{\bar{z}},$$

nous avons par construction

$$f \circ I = T \circ f$$

et le diagramme suivant est donc commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"'] & \mathbb{S}^2 \arrow[d] & \\
\mathbb{S}^2/T \arrow[r] & \mathbb{P}^2 \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{S}^2/I
\end{tikzcd}$$

où la flèche verticale désigne la projection canonique de $\mathbb{S}^2$ sur $\mathbb{P}^2$.

Nous avons donc une équivalence conforme entre

$$\mathbb{S}^2/T - \{e_1, e_2\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^2 - \left\{\sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_2 - e_3}}, 0\right\}.$$

Dans [9], ZHANG construit une immersion minimale complète de courbure totale -10π de $\mathbb{P}^2 - \{a, 0\}$ dans $\mathbb{R}^3$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $a > 1$. Ainsi :

• si $\sqrt{(e_1 - e_2)/(e_2 - e_3)} > 1$, l'immersion de Zhang nous fournit l'immersion cherchée de $\mathbb{S}^2/T - \{e_1, e_2\}$;

• si $\sqrt{(e_1 - e_2)/(e_2 - e_3)} = 1$, nous avons les immersions X_θ de la PROPOSITION 1 ;

• si $\sqrt{(e_1 - e_2)/(e_2 - e_3)} < 1$ on se ramène au premier cas à l'aide de l'homographie $z \mapsto 1/z$ qui est une équivalence conforme entre $\mathbb{P}^2 - \{a, 0\}$ et $\mathbb{P}^2 - \{a^{-1}, 0\}$.

REMARQUE.

Nous ne savons pas si toutes les structures conformes des surfaces compactes non orientables de genre k, avec $k \geq 2$, admettent une immersion minimale dans $\mathbb{R}^3$ avec un nombre fini de bouts. Dans le cas orientable, le problème a été résolu par GACKSTATTER et KUNERT [1]. Ils ont montré que toute surface de Riemann compacte admet une immersion minimale complète dans $\mathbb{R}^3$ avec un nombre fini de bouts. Plus tard, Kichoon YANG [4] a généralisé le dernier résultat en montrant que pour toute surface de Riemann compacte M et pour toute fonction méromorphe f sur M, il existe une fonction méromorphe g sur M telle que $(g, \mathrm{d}f)$ définit une immersion minimale complète de courbure totale finie de $M - \{p_1, \ldots, p_n\}$ dans $\mathbb{R}^3$, où $p_1, \ldots, p_n$ sont les pôles de g et f.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GACKSTATTER (F.) and KUNERT (R.). — *Construktion vollstandiger minimal flachen von endlicher gesomtkrummung*, Arch. Rational Mech. Anal., t. **65**, 1977, p. 289–297.

[2] GERRETSEN (J.) and SANSONE (G.). — *Lectures on the theory of functions of a complex variable.* — P. Noordhoff, Groningen, 1960.

[3] ISHIHARA (T.). — *Complete non-orientable minimal surfaces*, preprint, 1989.

[4] KICHOON (Y.). — *Meromorphic functions on a compact Riemann surface and associated complete minimal surface*, Proc. A.M.S., vol. **105**, 3, 1989.

[5] Klotz (T.) and Sario (L.). — *Existence of complete minimal surfaces of arbitrary connectivity and genus*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., t. **54**, 1965, p. 42–44.

[6] Meeks III (W.H.). — *The classification of complete minimal surfaces with total curvature greater than* -8π, Duke Math. J., t. **48**, 1981, p. 523–535.

[7] Elisa (M.) and De Oliveira (G.G.). — *Some new examples of non-orientable minimal surfaces*, Proc. A.M.S., **98**, n° 4, 1986, p. 629–635.

[8] Rosenberg (H.) and Toubiana (E.). — *Complete minimal surfaces and minimal herissons*, J. Differential Geom., t. **28**, 1988, p. 115–132.

[9] Zhang (S.). — *On complete minimal immersion* $x : \mathbb{RP}^2 - \{a, b\} \to \mathbb{R}^3$ *with total curvature* -10π, preprint, 1990.