BULLETIN DE LA S. M. F.

CLAUDE SABBAH

Lieu des pôles d'un système holonome d'équations aux différences finies

Bulletin de la S. M. F., tome 120, nº 3 (1992), p. 371-396
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_3_371_0>

Bull. Soc. math. France,
120, 1992, p. 371–396.

LIEU DES PÔLES D'UN SYSTÈME HOLONOME D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES

PAR

CLAUDE SABBAH (*)

RÉSUMÉ. — Nous montrons que tout système holonome algébrique d'équations aux différences finies admet une base dans laquelle les pôles des matrices des opérateurs de translation sont contenus dans une réunion d'hyperplans affines dont la direction linéaire est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

ABSTRACT. — We show that every holonomic system of algebraic finite difference equations admits a basis for which the poles of the translation matrices are contained in a finite union of affine hyperplanes having a linear direction with coefficients in $\mathbb{Z}$.

0. Introduction

0.1. — Soit $\mathbb{C}(s)$ le corps des fractions rationnelles à p variables $s = (s_1, \ldots, s_p)$. Un *système rationnel holonome d'équations aux différences finies* (noté EDF) $\mathfrak{M}(s)$ est par définition un $\mathbb{C}(s)$-espace vectoriel de dimension finie r muni d'opérateurs de translation inversibles $\tau_1, \ldots, \tau_p$ qui commutent, qui sont $\mathbb{C}$-linéaires et qui satisfont les relations de commutation :

$$\begin{aligned} \tau_i \cdot s_j &= s_j \cdot \tau_i && \text{si } i \neq j, \\ \tau_i \cdot s_i &= (s_i + 1) \cdot \tau_i && \forall\, i = 1, \ldots, p. \end{aligned}$$

Soit $\boldsymbol{m}$ une $\mathbb{C}(s)$-base de $\mathfrak{M}(s)$ et $A_i(s) \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}(s))$ la matrice de τ_i dans cette base. La commutation des τ_i s'exprime par la relation

$$A_i(s + \mathbf{1}_j) \cdot A_j(s) = A_j(s + \mathbf{1}_i) \cdot A_i(s) \tag{0.2}$$

(*) Texte reçu le 16 mai 1991, révisé le 10 octobre 1991.

Claude SABBAH, Unité Associée au C.N.R.S. D 0169, Centre de Mathématiques, École Polytechnique F 91128 Palaiseau Cedex. E-mail : sabbah@cmep.polytechnique.fr.

Keywords : équations aux différences finies, transformation de Mellin, $\mathcal{D}$-module holonome.

Classification AMS : 32C38, 39A10.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1992/371/$ 5.00

pour tous $i, j = 1, \ldots, p$, où $\mathbf{1}_i$ désigne le i-ième vecteur de la base naturelle de $\mathbb{C}^p$. Le fait que τ_i soit inversible signifie que A_i est inversible et la matrice de τ_i^{-1} dans la base $\boldsymbol{m}$ est égale à :

$$A_i(s - \mathbf{1}_i)^{-1}.$$

Si $\boldsymbol{m}' = B(s) \cdot \boldsymbol{m}$ est une autre base, avec $B(s) \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}(s))$ la matrice $A_i'(s)$ de τ_i dans la base $\boldsymbol{m}'$ est donnée par :

$$A_i'(s) = B(s + \mathbf{1}_i) \cdot A_i(s) \cdot B(s)^{-1}. \tag{0.3}$$

L'ensemble des classes d'isomorphisme de systèmes holonomes d'EDF de dimension r est donc le quotient de l'ensemble des $(A_1, \ldots, A_p)$ dans $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C}(s))^p$ satisfaisant la relation de commutation (0.2) modulo la relation de cobord (0.3).

0.4. — Une solution méromorphe de $\mathfrak{M}(s)$ est un homomorphisme $\mathbb{C}(s)\langle \tau, \tau^{-1} \rangle$-linéaire de $\mathfrak{M}(s)$ dans l'espace $\mathrm{Mer}(\mathbb{C}^p)$ des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^p$ (ce dernier est naturellement muni d'une structure de module à gauche sur l'anneau des opérateurs aux différences $\mathbb{C}(s)\langle \tau, \tau^{-1} \rangle$). Si on choisit une base $\boldsymbol{m}$ de $\mathfrak{M}(s)$, l'image de cette base par une solution est un r-vecteur $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ de fonctions méromorphes qui satisfait le système :

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(s + \mathbf{1}_i) \\ \vdots \\ \varphi_r(s + \mathbf{1}_i) \end{bmatrix} = A_i(s) \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(s) \\ \vdots \\ \varphi_r(s) \end{bmatrix}.$$

Si $B(s) \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}(s))$, le r-vecteur

$$B(s) \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(s) \\ \vdots \\ \varphi_r(s) \end{bmatrix}$$

est alors solution d'un système équivalent au précédent.

0.5. — Les systèmes holonomes d'EDF généralisent les relations de contiguité satisfaites par les fonctions hypergéométriques classiques. Pour celles-ci, le système d'EDF est de dimension 1 sur $\mathbb{C}(s)$. La structure d'un tel système est alors simple : on montre facilement (voir [16], ce résultat a été aussi retrouvé par M. SATO vers 1970 [21], voir aussi [11]) que tout tel système est isomorphe au système satisfait par la fonction

$$c_1^{s_1} \cdots c_p^{s_p} \prod_L \prod_\alpha \Gamma\big(L(s) - \alpha\big)^{\gamma_{L,\alpha}}$$

avec L et α comme ci-dessous, $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{C}^*$ et $\gamma_{L,\alpha} \in \mathbb{Z}$. Nous allons montrer une généralisation de ce résultat pour tout système holonome d'EDF :

THÉORÈME 0.6. — *Soit $\mathfrak{M}(s)$ un système rationnel holonome d'EDF. Il existe une base $\boldsymbol{m}$ de $\mathfrak{M}(s)$ dans laquelle pour tout $i = 1,\ldots,p$ la matrice de τ_i et celle de τ_i^{-1} ont pour pôles une réunion d'hyperplans d'équation $L(s)-\alpha = 0$ où L parcourt un ensemble fini de formes linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ premiers entre eux et α un ensemble fini de nombres complexes.*

0.7. — La démonstration de ce théorème se fait en plusieurs temps. Nous considérons un système algébrique holonome d'EDF (défini sur l'anneau $\mathbb{C}[s]\langle\tau,\tau^{-1}\rangle$) tel que :

$$\mathfrak{M}(s) = \mathbb{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}[s]} \mathfrak{M}.$$

Nous montrons qu'après localisation hors d'une réunion d'hyperplans du type voulu le module

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}} \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{C}[s]_{\mathrm{loc}} \otimes_{\mathbf{C}[s]} \mathfrak{M}$$

est de type fini (§ 1) et projectif (§ 2) sur $\mathbb{C}[s]_{\mathrm{loc}}$ (qui désigne l'anneau localisé considéré). Nous utilisons ici les techniques développées dans [19] à propos des polynômes de Bernstein à plusieurs variables. Si l'on appelle *lieu singulier* de $\mathfrak{M}$ l'ensemble des points de $\mathbb{C}^p$ au voisinage desquels $\mathfrak{M}$ n'est pas localement libre, ce résultat signifie que le lieu singulier de $\mathfrak{M}$ est une réunion d'hyperplans comme ci-dessus.

Au § 3 nous montrons que, quitte à localiser encore, ce module est libre en utilisant de plus le théorème de Quillen-Souslin [18]. Le point délicat est la construction d'un réseau particulier ($\mathbb{C}[s]$-sous-module de type fini) de $\mathfrak{M}$. Nous montrons un peu plus : l'ouvert sur lequel le module est localement libre peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts qui sont des complémentaires d'hyperplans, sur chacun desquels le module est libre. Autrement dit, ce module localement libre peut être représenté par un cocycle pour lequel les matrices de changement de cartes (ainsi que leurs inverses) ont des pôles le long d'hyperplans du type décrit ci-dessus.

0.8. — Très peu de travaux ont été consacrés jusqu'à présent aux systèmes holonomes d'EDF à plusieurs variables. Signalons toutefois les articles [1] et [17] sur ce sujet, ainsi que des travaux plus anciens sur les systèmes hypergéométriques. Voici une série de questions qui semblent intéressantes :

(Q_1). — On peut montrer, en adaptant la preuve de [11, § 4] faite pour les systèmes de Gauss-Manin, que si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module holonome régulier (y compris à l'infini) sur le tore T^p et si $\mathfrak{M}(s)$ désigne son transformé de Mellin rationnel (voir § 1), l'espace des solutions de $\mathfrak{M}(s)$ à valeurs dans les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^p$ à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini est un espace vectoriel sur le corps des fonctions rationnelles en $T_j = \exp(-2i\pi s_j)$ ($j = 1,\dots,p$) de dimension égale à $\dim_{\mathbb{C}(s)} \mathfrak{M}(s)$. Par ailleurs, d'après J.-P. RAMIS (voir [2]), ce résultat est aussi vrai lorsque le nombre de variables p est 1, sans hypothèse de régularité. Étendre ce résultat pour p quelconque nécessite sans doute une meilleure connaissance de la structure des $\mathcal{D}$-modules holonomes irréguliers. Plus généralement, on aimerait avoir des théorèmes d'indice pour les systèmes holonomes d'EDF.

(Q_2). — Il doit être possible de définir le complexe des solutions analytiques d'un système d'EDF comme étant un complexe de faisceaux sur le tore quotient de $\mathbb{C}^p$ par les translations, et de coordonnées T_j introduites ci-dessus. Lorsque $\mathfrak{M}$ est holonome, ce complexe doit être à cohomologie de type fini sur $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ (autrement dit doit être un faisceau algébrique cohérent sur ce tore), et lorsque $\mathfrak{M}$ est transformé de Mellin d'un $\mathcal{D}$-module holonome régulier (y compris à l'infini) sur le tore, ce complexe doit s'identifier, par un *théorème de comparaison*, au complexe des sections globales $\boldsymbol{R}\Gamma(\mathcal{F} \otimes \mathfrak{L})$, où $\mathcal{F}$ est le complexe des solutions de $\mathcal{M}$ et $\mathfrak{L}$ le système local naturel de rang 1 (sur l'anneau $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$) sur le tore (voir [11, § 3, rem. 3]).

(Q_3). — Montrer une correspondance de Riemann-Hilbert pour les systèmes holonomes d'EDF. Lorsque $p = 1$, il existe des énoncés (voir [4], [14]). Le résultat doit sans doute s'appuyer sur une étude locale en $s = \pm\infty$, donnée par [10] dans le cas “régulier à l'infini” et par [9] dans le cas général. Le calcul des matrices de connexion soulevé dans [1] semble se rattacher à ce type de question.

(Q_4). — Les bases que nous construisons dans le THÉORÈME 0.6 ne sont pas de nature géométrique. Pour obtenir des bases correspondant par exemple à celles construites par A. VARCHENKO [23] dans le cas d'un arrangement d'hyperplans, il faut probablement faire intervenir une filtration de Hodge de $\mathfrak{M}$.

Je remercie François LOESER pour les nombreuses discussions que nous avons eues à ce sujet. Notamment lui est due l'idée d'utiliser ici le théorème de Quillen-Souslin.

1. Finitude

1.1. — Nous rappelons d'abord quelques notations utilisées dans [11].

Soit $T^p \simeq (\mathbb{C}^*)^p$ le tore complexe de dimension p et soit $\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$ l'algèbre des opérateurs différentiels algébriques sur T^p, où $t=(t_1,\dots,t_p)$ et $t\partial_t=(t_1\partial_{t_1},\dots,t_p\partial_{t_p})$. La correspondance $\tau_i=t_i$ et $s_i=-t_i\partial_{t_i}$ identifie cette algèbre à l'algèbre $\mathbb{C}[s]\langle\tau,\tau^{-1}\rangle$ des opérateurs aux différences finies, c'est-à-dire l'algèbre quotient de l'algèbre libre engendrée par $\mathbb{C}[s]$ et $\mathbb{C}[\tau,\tau^{-1}]$ par les relations introduites au § 0.1.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{T^p}$-module cohérent (à gauche), $\mathcal{M}(T^p)$ le $\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$-module des sections globales de $\mathcal{M}$ (ici, $\mathcal{D}_{T^p}$ désigne le faisceau des opérateurs différentiels algébriques sur T^p). Nous appellerons *transformé de Mellin algébrique de* $\mathcal{M}$, noté $\mathfrak{M}(\mathcal{M})$, le module $\mathcal{M}(T^p)$ vu comme $\mathbb{C}[s]\langle\tau,\tau^{-1}\rangle$-module. Nous dirons que $\mathfrak{M}(\mathcal{M})$ est un *système algébrique holonome* d'équations aux différences finies si $\mathcal{M}$ est $\mathcal{D}_{T^p}$-holonome.

Nous avons montré (voir [11, th. 1.2.1]) que tout système rationnel holonome d'EDF $\mathfrak{M}(s)$ peut s'écrire

$$\mathfrak{M}(s)=\mathbb{C}(s)\otimes_{\mathbb{C}[s]}\mathfrak{M},$$

où $\mathfrak{M}$ est le transformé de Mellin d'un $\mathcal{D}_{T^p}$-module holonome $\mathcal{M}$.

Oublions la correspondance introduite ci-dessus et considérons le module $\mathcal{M}[s]t^s$ sur l'anneau $\mathbb{C}[s]\langle\tau,\tau^{-1}\rangle\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{D}_{T^p}$. En tant que $\mathbb{C}[s]\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_{T^p}$-module on a

$$\mathcal{M}[s]t^s=\mathbb{C}[s]\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{M}$$

et l'action de $t\partial_t$ est donnée par

$$t_i\partial_{t_i}\cdot(1\otimes m)=1\otimes(t_i\partial_{t_i}m)+s_i\otimes m$$

et celle de τ par

$$\tau_i\cdot\big(P(s)\otimes m\big)=P(s+\mathbf{1}_i)\otimes t_im.$$

Alors $\mathcal{M}[s]t^s$ est un $\mathbb{C}[s]\langle\tau,\tau^{-1}\rangle\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{D}_{T^p}$-module à gauche cohérent. Si $\mathcal{B}$ est une partie multiplicative de $\mathbb{C}[s]$, nous notons $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}$ l'anneau obtenu en inversant les éléments de $\mathcal{B}$. Nous définissons ainsi $\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s$. Soit $j:T^p\hookrightarrow(\mathbb{P}^1)^p=X$ l'inclusion.

THÉORÈME 1.2. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{T^p}$-module holonome. Il existe une partie multiplicative $\mathcal{B}$ engendrée par les translatées par des entiers d'un nombre fini de formes affines $L(s)-\alpha$, où L et α sont comme dans* 0.6, *telle que $j_+\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s$ soit $\mathcal{D}_X[s]_{\mathcal{B}}$-cohérent.*

1.3. — Nous prenons ici les notations de [6] pour les foncteurs sur les $\mathcal{D}$-modules algébriques. Il est immédiat de vérifier que $j_+\mathcal{M}[s]t^s$ est cohérent sur $\mathcal{D}_X[s]\langle\tau,\tau^{-1}\rangle$. Plus précisément, considérons une carte $\mathbb{C}^p$ de X, par exemple la carte de coordonnées $t_1,\dots,t_p$ et notons encore $j : T^p \hookrightarrow \mathbb{C}^p$ l'inclusion. Alors $j_+\mathcal{M}$ est encore $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^p}$-holonome, d'après [3]. La donnée de $j_+\mathcal{M}$ est équivalente à la donnée des sections globales $j_+\mathcal{M}(\mathbb{C}^p)$. Ce dernier module n'est autre que $\mathcal{M}(T^p)$ vu comme $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module (*via* l'inclusion $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle \subset \mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$). Ainsi $\mathcal{M}(T^p)$ est de type fini sur $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$. Nous allons vérifier que $j_+\mathcal{M}[s]t^s$ est cohérent sur $\mathbb{C}[s]\langle\tau^{-1}\rangle \otimes \mathcal{D}_{\mathbb{C}^p}$. Soit $m \in \mathcal{M}(T^p)$ un générateur de $\mathcal{M}(T^p)$ sur $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ (qui existe d'après le théorème de Stafford, voir par exemple [5]). Tout élément de $\mathcal{M}(T^p)[s]t^s$ s'écrit $(P(t,\partial_t,s)\cdot m)t^s$ et l'on a

$$\begin{aligned}\tau_i\cdot\big[(\partial_{t_i}m)t^s\big] &= (t_i\partial_{t_i}m)t^s\\ &= (t_i\partial_{t_i}-s_i)(mt^s)\end{aligned}$$

donc

$$(\partial_{t_i}m)t^s = \tau_i^{-1}(t_i\partial_{t_i}-s_i)(mt^s)$$

ce qui prouve que $(P(t,\partial_t,s)\cdot m)t^s \in \mathbb{C}[t,s]\langle\partial_t\rangle\langle\tau^{-1}\rangle\cdot mt^s$. □

COROLLAIRE 1.4. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{T^p}$-module holonome. Si $\mathcal{B}$ est comme dans* 1.2, *le transformé de Mellin localisé* $\mathfrak{M}(\mathcal{M})_{\mathcal{B}} \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathbb{C}[s]} \mathfrak{M}(\mathcal{M})$ *est de type fini sur* $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}$.

Démonstration. — Soient $T^p_{\mathcal{B}} = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}[t,t^{-1}]$ et p la projection $T^p_{\mathcal{B}} \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}$. On a [11, Lemme 1.2.2] :

$$\mathfrak{M}(\mathcal{M})_{\mathcal{B}} = p_+\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s.$$

On utilise alors la propriété de composition des images directes et la conservation de la cohérence par image directe propre (voir [6], dont la démonstration s'étend au cas “avec paramètres” considéré ici) : on a $p = \pi\circ j$, avec $\pi : (\mathbb{P}^1_{\mathcal{B}})^p \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}$ propre. Du THÉORÈME 1.2 on déduit que $p_+\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s = \pi_+[j_+\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s]$ est de type fini sur $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}$. □

La suite de ce paragraphe sera consacrée à la preuve du THÉORÈME 1.2.

1.5. — Soit Σ un éventail de $(\mathbb{Q}^p)^*$ (espace des formes linéaires sur $\mathbb{Q}^p$) subdivisant l'éventail correspondant à $X = (\mathbb{P}^1)^p$ et X_Σ la variété torique associée, *que nous supposerons toujours lisse dans la suite* (nous dirons alors que l'éventail est *régulier*; voir par exemple [7], [8], [15], [22] pour toutes les notions concernant les variétés toriques). On dispose donc d'une modification *propre* $\rho_\Sigma : X_\Sigma \to X$ et d'une inclusion $j_\Sigma : T^p \hookrightarrow X_\Sigma$ avec $\rho_\Sigma\circ j_\Sigma = j$. Il suffit donc de montrer qu'il existe un tel éventail Σ et une famille $\mathcal{B}$ du type voulu tels que $j_{\Sigma+}\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s$ soit $\mathcal{D}_{X_\Sigma}[s]_{\mathcal{B}}$-cohérent.

Par ailleurs la question est locale sur X et il suffit de se placer au voisinage de chaque orbite de l'action torique. Nous ne considèrerons que l'orbite de dimension 0 définie par $t_1 = \cdots = t_p = 0$, les autres cas se traitant de manière analogue. Nous nous plaçons donc dans la carte $\mathbb{C}^p$ de coordonnées $t_1, \ldots, t_p$ et nous cherchons un éventail qui subdivise le premier octant de $(\mathbb{Q}^p)^*$.

1.6. — Nous allons indiquer les propriétés des multi-filtrations qui nous seront utiles. Nous renvoyons à [19] pour les propriétés élémentaires. Soit $V\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ la p-filtration indexée par $\mathbb{Z}^p$ pour laquelle t_i est de degré $-\mathbf{1}_i$ et ∂_{t_i} de degré $\mathbf{1}_i$ (si $\mathbf{1}_i$ désigne le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{Z}^p$). Cette p-filtration s'étend de manière naturelle à $\mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$: on donne le degré $\mathbf{1}_i$ à t_i^{-1}. Notons qu'on dispose sur $\mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$ de plusieurs filtrations de ce type (t_i de degré ε_i avec $\varepsilon_i = \pm 1$), chacune correspondant à une carte naturelle $\mathbb{C}^p \subset (\mathbb{P}^1)^p$. Nous avons utilisé ici la carte de coordonnées $t_1, \ldots, t_p$, mais nous utiliserons aussi les autres cartes plus loin. Remarquons que pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}^p$ tel que $\sigma_i \leq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, p$, on a :

$$V_\sigma\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle = V_\sigma\mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle.$$

Soit Γ un cône (convexe, polyédral, rationnel, fermé) dans le premier octant de $(\mathbb{Q}^p)^*$. On définit comme dans *loc. cit.* la p-filtration ${}^\Gamma V\mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$ indexée par $\mathbb{Z}^p$.

Soit $\mathcal{N}$ un $\mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$-module de type fini. Une p-filtration $U\mathcal{N}$ est bonne (pour $V\mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$) si le module de Rees

$$\mathcal{R}_U(\mathcal{N}) \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{\sigma\in\mathbb{Z}^p} U_\sigma\mathcal{N} \cdot v^\sigma \subset \mathcal{N}[v, v^{-1}]$$

est de type fini sur l'anneau de Rees $\mathcal{R}_V\mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$ défini de manière analogue, où $v = (v_1, \ldots, v_p)$ sont de nouvelles variables. On définit aussi ${}^\Gamma U\mathcal{N}$ pour tout cône Γ comme ci-dessus et si $U\mathcal{N}$ est V-bonne, alors ${}^\Gamma U\mathcal{N}$ est ${}^\Gamma V$-bonne. Soit $\mathbb{Z}^p \subset \mathbb{Q}^p$ le réseau standard. On considère l'anneau torique $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap \mathbb{Z}^p]$ associé au cône Γ. Alors

$$\mathcal{R}_{{}^\Gamma U}(\mathcal{N}) \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{\sigma\in\mathbb{Z}^p} {}^\Gamma U_\sigma\mathcal{N} \cdot v^\sigma$$

est un $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap \mathbb{Z}^p]$-module.

Le résultat suivant est une adaptation du théorème d'aplatissement de Hironaka, analogue à celle donnée dans [19]. Nous indiquerons comment s'y ramener en appendice (§ 1.12).

THÉORÈME 1.7. — *Soit $\mathcal{N}$ un $\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$-module de type fini et $U\mathcal{N}$ une p-filtration V-bonne. Il existe un éventail Σ^+ (qu'on peut supposer régulier) subdivisant le premier octant de $(\mathbb{Q}^p)^*$ tel que pour tout cône Γ de Σ^+, $\mathcal{R}\mathrm{r}_U(\mathcal{N})$ soit plat sur $\mathbb{C}[\check{\Gamma}\cap\mathbb{Z}^p]$.*

Si Γ est un cône régulier de platitude pour $U\mathcal{N}$ (i.e comme dans le théorème) et si $L_1,\dots,L_p$ sont les formes linéaires primitives sur les arêtes de Γ, on a en particulier pour tout $\sigma\in\mathbb{Z}^p$

$$
{}^{\Gamma}U_\sigma\mathcal{N}=\bigcap_{i=1}^{p}{}^{L_i}U_{L_i(\sigma)}=\bigcap_{L}{}^{L}U_{L(\sigma)}, \tag{1.8}
$$

où la dernière intersection est prise pour toutes les formes linéaires primitives dans Γ. Par ailleurs, la p-filtration $\overline{U}\mathcal{N}$ définie par

$$
\overline{U}_\sigma\mathcal{N}=\bigcap_{L}{}^{L}U_{L(\sigma)},
$$

où l'intersection est prise pour toutes les formes linéaires primitives dans le premier octant de $(\mathbb{Q}^p)^*$, est aussi une p-filtration V-bonne, appelée p-filtration saturée de $U\mathcal{N}$.

1.9. — On note $X_\Gamma=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[\check{\Gamma}\cap\mathbb{Z}^p]$ la variété torique affine associée au cône Γ. Nous supposerons (comme nous l'avons déjà indiqué) que X_Γ est lisse (en particuler Γ est simplicial). Si Γ est de dimension k, la variété X_Γ est isomorphe à $\mathbb{C}^k\times(\mathbb{C}^*)^{p-k}$. Soit $\rho_\Gamma: X_\Gamma\to\mathbb{C}^p$ la modification naturelle et $j_\Gamma:(\mathbb{C}^*)^p\to X_\Gamma$ l'inclusion. Si Γ est de dimension p, on a un système de coordonnées $u_1,\dots,u_p$ sur X_Γ tel que ρ_Γ soit monomiale. Si Γ' est une face de Γ, $X_{\Gamma'}$ est un ouvert de Zariski dense de X_Γ défini par des équations $(u_j\neq 0)_{j\in J}$ avec $J\subset\{1,\dots,p\}$, de sorte que $X_{\Gamma'}$ hérite des coordonnées de X_Γ.

PROPOSITION 1.10. — *Il existe un éventail (régulier) Σ^+ subdivisant le premier octant de $(\mathbb{Q}^p)^*$ et pour chaque cône Γ de dimension p de Σ^+ des polynômes $b_{\Gamma,i}\in\mathbb{C}[\lambda]-\{0\}$ $(i=1,\dots,p)$ tels que pour toute p-filtration $W\mathcal{M}(T^p)$ de $\mathcal{M}(T^p)$ (identifié à $(j_{\Gamma+}\mathcal{M})(X_\Gamma)$) bonne pour $V\mathbb{C}[u,u^{-1}]\langle u\partial_u\rangle$ il existe des entiers n_i pour lesquels on a pour tout $\sigma\in\mathbb{Z}^p$:*

$$
\Big(\prod_{k=-n_i}^{n_i}b_{\Gamma,i}(u_i\partial_{u_i}+k+\sigma_i)\Big)\cdot W_\sigma\big(\mathcal{M}(T^p)\big)\subset W_{\sigma-\mathbf{1}_i}\big(\mathcal{M}(T^p)\big).
$$

Démonstration. — Commençons par remarquer comme dans [20, § 1.3] que si la propriété est vraie pour une bonne p-filtration W elle est vraie pour toute bonne p-filtration. Soit alors $U\mathcal{M}(T^p)$ une p-filtration de $\mathcal{M}(T^p)$ bonne pour $V\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$. A tout cône Γ de dimension p dans le premier octant de $(\mathbb{Q}^p)^*$ on associe une p-filtration ${}^{\Gamma}U\mathcal{M}(T^p)$ bonne pour ${}^{\Gamma}V\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$ comme indiqué plus haut. Par ailleurs on a un isomorphisme

$$\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle \simeq \mathbb{C}[u,u^{-1}]\langle u\partial_u\rangle$$

induit par ρ_Γ, où t_j est un monôme en les u_i et, si $L_1,\dots,L_p$ sont les formes linéaires primitives sur les arêtes de Γ, on a $u_i\partial_{u_i} = L_i(t\partial_t)$. Cet isomorphisme identifie ${}^{\Gamma}V\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$ à $V\mathbb{C}[u,u^{-1}]\langle u\partial_u\rangle$ avec un changement d'indice induit par un isomorphisme de $\mathbb{Z}^p$, que nous sous-entendrons dans la suite

$${}^{\Gamma}V_s\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle = V_{s'}\mathbb{C}[u,u^{-1}]\langle u\partial_u\rangle$$

avec $s'_i = L_i(s)$. Par suite ${}^{\Gamma}U\mathcal{M}(T^p)$ est bonne pour $V\mathbb{C}[u,u^{-1}]\langle u\partial_u\rangle$. Nous allons montrer la proposition pour une bonne p-filtration obtenue de cette manière.

Soient alors m un générateur de $\mathcal{M}(T^p)$ sur $\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$ et

$$U\mathcal{M}(T^p) = V\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle \cdot m$$

et soit Σ^+ un éventail de platitude pour $U\mathcal{M}(T^p)$. Pour tout cône Γ de dimension p de Σ^+, on a

$${}^{\Gamma}U\mathcal{M}(T^p) = V\mathbb{C}[u,u^{-1}]\langle u\partial_u\rangle \cdot m$$

et on déduit la proposition dans ce cas en utilisant la relation de Bernstein pour chaque fonction u_i et la relation (1.8) (voir [19, § 3]). ∎

Terminons maintenant la preuve du THÉORÈME 1.2. Soit Γ un cône de dimension p de Σ^+ (donné par la proposition précédente) ; posons comme plus haut

$$s'_i = L_i(s) \qquad i = 1,\dots,p,$$

et soit τ'_i l'opérateur de translation associé. On a :

$$\mathcal{M}[s]t^s = \mathcal{M}[s']u^{s'}.$$

Soit $m \in \mathcal{M}(T^p)$. De manière analogue à [20, § 1], on déduit des identités de Bernstein pour m les identités suivantes pour $mu^{s'}$

$$\begin{aligned} B_{\Gamma,i}(-s'_i)\cdot(mu^{s'}) &= P(u,\partial_u,s')\cdot\tau'_i(mu^{s'}) \\ &= \tau'_i Q(u,\partial_u,s')\cdot(mu^{s'}), \end{aligned}$$

où $B_{\Gamma,i}(-s'_i)$ est égal au produit $\prod_{k=-n_i}^{n_i} b_{\Gamma,i}(-s'_i+k)$ pour la p-filtration $V\mathbb{C}[u,u^{-1}]\langle u\partial_u\rangle\cdot m$.

Nous avons déjà indiqué au § 1.3 que le module $j_{\Gamma+}\mathcal{M}[s']u^{s'}$ est cohérent sur $\mathcal{D}_{X_\Gamma}[s']\langle {\tau'}^{-1}\rangle$ et est engendré par $mu^{s'}$ si m est un générateur de $(j_{\Gamma+}\mathcal{M})(X_\Gamma)$. Soit $\mathcal{B}_\Gamma$ la partie multiplicative engendrée par les polynômes $B_{\Gamma,i}(-s'_i+\sigma_i)$ avec $\sigma_i\in\mathbb{N}^*$. Si on inverse $\mathcal{B}_\Gamma$, la relation ci-dessus implique que pour tout $k\geq 1$ on a :

$$\tau_i'^{-k}\cdot(mu^{s'})\in\mathcal{D}_{X_\Gamma}[s']_{\mathcal{B}_\Gamma}.$$

Donc $j_{\Gamma+}\mathcal{M}[s']_{\mathcal{B}_\Gamma}u^{s'}$ est cohérent sur $\mathcal{D}_{X_\Gamma}[s']_{\mathcal{B}_\Gamma}$. $\square$

1.11. — Résumons la construction de la famille $\mathcal{B}$. Fixons un générateur m de $\mathcal{M}(T^p)$. Considérons les points fixes de l'action torique de $(\mathbb{C}^*)^p$ sur $X=(\mathbb{P}^1)^p$, c'est-à-dire les points dont les coordonnées sont 0 ou ∞. Chaque point fixe correspond à un octant de $(\mathbb{Q}^p)^*$. Nous choisissons alors un éventail Σ de $(\mathbb{Q}^p)^*$ qui induit (ou raffine) l'éventail fourni dans chaque octant par la Proposition 1.10 pour la p-filtration de $\mathcal{M}(T^p)$ engendrée par m sur la p-filtration de $\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$ associée à cet octant. Pour chaque cône Γ de dimension p de Σ, soit $\mathcal{B}_\Gamma\subset\mathbb{C}[s]$ la partie multiplicative engendrée par les $B_{\Gamma,i}(-L_i(s_1,\dots,s_p)+k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Enfin soit $\mathcal{B}$ la partie multiplicative engendrée par les $\mathcal{B}_\Gamma$. Cette famille convient pour le Théorème 1.2.

1.12. Appendice : démonstration du théorème 1.7

Reprenons les notations du § 1.6. Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_V\big(\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle\big) &= \bigoplus_\sigma V_\sigma\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle\cdot v^\sigma, \\ \mathcal{R}_V\big(\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle\big) &= \bigoplus_\sigma V_\sigma\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle\cdot v^\sigma \\ &= \mathbb{C}[t]\langle t\partial_t\rangle\otimes_{\mathbf{C}}\mathbb{C}[w,w^{-1}], \end{aligned}$$

avec $w_i=t_iv_i^{-1}\in\mathcal{R}_V(\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle)$. On a

$$\mathcal{R}_V\big(\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle\big)=\mathcal{R}_V\big(\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle\big)[w^{-1}]$$

et on en déduit que $\mathcal{R}_V(\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle)$ est plat sur $\mathcal{R}_V(\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle)$. De la même manière, on voit que pour tout cône Γ on a

$$\mathcal{R}_{\Gamma V}\big(\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle\big) = \mathcal{R}_{\Gamma V}\big(\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle\big) \otimes_{\mathcal{R}_V\left(\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle\right)} \mathcal{R}_V\big(\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle\big).$$

On en déduit qu'il suffit de montrer le théorème pour un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module $\mathcal{N}$. Par un argument de fidèle platitude et du fait de la compacité de $(\mathbb{P}^1)^p$, on est ramené à montrer le résultat pour un module $\mathcal{N}^{\mathrm{an}}$ sur l'anneau $\mathcal{D}^{\mathrm{an}}_{(\mathbb{P}^1)^p}$, qui est l'énoncé local montré dans [19]. $\square$

2. Projectivité

2.1. Dualité et image directe. — Nous utiliserons ci-dessous les résultats sur la dualité et l'image directe démontrés par exemple dans [6], étendus au cas des $\mathcal{D}_X[s]_{\mathcal{B}}$-modules cohérents, où $\mathcal{B}$ est une partie multiplicative dans $\mathbb{C}[s]$. Les démonstrations sont identiques, du fait que l'anneau de paramètres $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}$ est un anneau nœthérien régulier. Nous noterons $\mathbb{D}$ le foncteur de dualité de $D^b_{\mathrm{coh}}\big(\mathcal{D}_X[s]_{\mathcal{B}}\big)$ et de la même manière celui de $D^b_{\mathrm{tf}}\big(\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}\big)$ (complexes bornés de $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}$-modules à cohomologie de type fini). On a un théorème de bidualité $\mathbb{D}\circ\mathbb{D}\simeq \mathrm{Id}$ et un théorème de dualité relative pour un morphisme propre $\pi : X \to Y$: $\pi_+\mathbb{D} = \mathbb{D}\pi_+$. Enfin, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{T^p}$-module holonome, nous noterons $\mathcal{M}^*$ le $\mathcal{D}_{T^p}$-module holonome dual, à savoir le $\mathcal{D}_{T^p}$-module à gauche correspondant au $\mathcal{D}_{T^p}$-module à droite $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{D})$ (voir par exemple [5]).

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{T^p}$-module holonome et soit $\mathcal{B}$ une partie multiplicative de $\mathbb{C}[s]$ construite comme au § 1.11. Nous allons montrer :

Théorème 2.2. — *Soit $\mathfrak{M}$ le transformé de Mellin de $\mathcal{M}$. Alors $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}\otimes_{\mathbb{C}[s]}\mathfrak{M}$ est projectif de type fini sur $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}$.*

Le point-clé pour la démonstration du Théorème 2.2 est la :

Proposition 2.3. — *Dans les conditions de* 2.2 *on a un isomorphisme dans la catégorie dérivée $D^b(\mathcal{D}_X[s]_{\mathcal{B}})$*

$$\mathbb{D}j_+\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s \simeq j_+\mathbb{D}\big(\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s\big).$$

Admettons ce résultat pour le moment. Le terme de droite dans la proposition s'exprime à l'aide du lemme suivant :

Lemme 2.4. — *On a $\mathbb{D}\big(\mathcal{M}[s]t^s\big) = \mathcal{M}^*[s]t^{-s}$.*

Preuve. — Fixons une résolution libre de $\mathcal{M}(T^p)$ sur $\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$:

$$\cdots \to \mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle^{r_{i+1}} \xrightarrow{\cdot A_i} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle^{r_i} \xrightarrow{\cdot A_{i-1}} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\cdot A_0} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle^{r_0} \longrightarrow \mathcal{M} \to 0$$

où $\cdot A_i$ désigne la multiplication à droite par une matrice à r_{i+1} lignes et r_i colonnes. Une résolution libre de $\mathcal{M}[s]t^s$ est obtenue en considérant

$$\cdots \to \mathbb{C}[t,t^{-1},s]\langle t\partial_t\rangle^{r_i} \xrightarrow{\cdot A_{i-1}(t\partial_t - s)} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\cdot A_0(t\partial_t - s)} \mathbb{C}[t,t^{-1},s]\langle t\partial_t\rangle^{r_0} \longrightarrow \mathcal{M}[s]t^s \to 0.$$

On en déduit, pour les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^j$, que

$$\mathcal{H}^j\big(\mathbb{D}\mathcal{M}[s]t^s\big) = \begin{cases} \{0\} & \text{pour } j \neq 0, \\ \mathcal{M}^*[s]t^{-s-1} \simeq \mathcal{M}^*[s]t^{-s} & \text{pour } j = 0. \end{cases} \quad \square$$

Démonstration du théorème 2.2. — Soit π la projection

$$X \times \operatorname{Spec} \mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}.$$

On a $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}} \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathbb{C}[s]} \mathfrak{M} = \pi_+ j_+ \mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}} t^s$. Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}\mathfrak{M}_{\mathcal{B}} &= \mathbb{D}\pi_+ j_+ \mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}} t^s \\
&= \pi_+ \mathbb{D} j_+ \mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}} t^s && \text{(dualité relative pour un morphisme propre)} \\
&= \pi_+ j_+ \mathbb{D}\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}} t^s && \text{(Proposition 2.3)} \\
&= \pi_+ j_+ \mathcal{M}^*[s]_{\mathcal{B}} t^{-s} && \text{(Lemme 2.4 et platitude de } \mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}} \text{ sur } \mathbb{C}[s]).
\end{aligned}$$

Si ι désigne l'involution $s_i \mapsto -s_i$ (pour tout $i = 1, \dots, p$) sur $\mathbb{C}[s]$ et si M est un $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}$-module, on note ιM le $\mathbb{C}[s]_{\iota\mathcal{B}}$-module muni de l'action composée avec ι. Alors si $\mathfrak{M}^*$ est le transformé de Mellin de $\mathcal{M}^*$, on a :

$$\mathbb{D}\mathfrak{M}_{\mathcal{B}} = \pi_+ j_+ \mathcal{M}^*[s]_{\mathcal{B}} t^{-s} = [\iota\mathfrak{M}^*]_{\mathcal{B}} = \iota[\mathfrak{M}^*_{\iota\mathcal{B}}].$$

En particulier $\mathbb{D}\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}$ est concentré en degré 0, c'est-à-dire

$$\operatorname{Ext}^j_{\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}}\big(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}, \mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}\big) = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq 0$$

et donc $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}$ est projectif sur $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}$. $\square$

Remarque. — La démonstration ci-dessus montre aussi que $(\mathfrak{M}^*)_{\iota\mathcal{B}}$ est de type fini et projectif sur $\mathbb{C}[s]_{\iota\mathcal{B}}$ (la projectivité utilise la bidualité $\mathbb{D}\mathbb{D}\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s \simeq \mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s$ dans $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X[s]_{\mathcal{B}})$).

2.5. $\mathcal{D}[s]_{\mathcal{B}}$-modules spécialisables. — Avant de passer à la démonstration de 2.3, nous allons étendre à l'anneau $\mathcal{D}[s]_{\mathcal{B}}$ (où $\mathcal{B}$ est ici une partie multiplicative de $\mathbb{C}[s]$ et $s = (s_1, \dots, s_p)$) les notions et résultats sur la spécialisation de $\mathcal{D}$-modules (voir par exemple [13]). Soit donc Z une variété algébrique lisse sur $\mathbb{C}$ et Y_1 une hypersurface lisse de Z. Considérons sur $\mathcal{D}_Z[s]_{\mathcal{B}} \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{D}_Z$ la filtration

$$^1V\big(\mathcal{D}_Z[s]_{\mathcal{B}}\big) \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathbf{C}} {}^1V(\mathcal{D}_Z),$$

où $^1V\mathcal{D}_Z$ est la filtration de $\mathcal{D}_Z$ associée à l'hypersurface Y_1 : sur un ouvert affine U de Z on a

$$^1V_k\mathcal{D}_Z(U) = \big\{P \in \mathcal{D}_Z(U) \mid P \cdot \mathcal{I}_{Y_1}(U)^j \subset \mathcal{I}_{Y_1}(U)^{j-k} \quad \forall j \in \mathbb{Z}\big\}$$

si $\mathcal{I}_{Y_1}$ désigne l'idéal de Y_1. Nous dirons qu'un $\mathcal{D}_Z[s]_{\mathcal{B}}$-module cohérent $\mathcal{N}$ est *spécialisable le long de* (Y_1, s_1) si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

(S_1) Dans toute carte affine U de Z, si t_1 est une équation de Y_1, il existe une filtration $^1U\mathcal{N}$ indexée par $\mathbb{Z}$ et bonne pour $^1V_k\mathcal{D}_Z[s]_{\mathcal{B}}$ qui admet un polynôme de Bernstein, c'est-à-dire qu'il existe $b_1 \in \mathbb{C}[\lambda] - \{0\}$ avec, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$b_1(t_1\partial_{t_1} + s_1 + k) \cdot {}^1U_k\mathcal{N} \subset {}^1U_{k-1}\mathcal{N}.$$

(S_2) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $b_1(s_1 + k) \in \mathcal{B}$.

De la même manière que dans [13], on vérifie les résultats suivants :

1) Si les propriétés (S_1) et (S_2) sont satisfaites pour un bonne filtration locale, elles le sont pour toute bonne filtration locale.

2) La catégorie des $\mathcal{D}_Z[s]_{\mathcal{B}}$-modules spécialisables le long de (Y_1, s_1) est abélienne et stable par extensions.

3) Cette catégorie est aussi stable par dualité, de même que la sous-catégorie de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_Z[s]_{\mathcal{B}})$ formée des complexes à cohomologie spécialisable. Il suffit en effet de le montrer pour la première catégorie, et de plus la question est locale. On procède dans ce cas comme dans *loc. cit.* en considérant une résolution par des modules spécialisables élémentaires.

Soient $i_1 : Y_1 \hookrightarrow Z$ l'inclusion et $j_1 : Z - Y_1 \hookrightarrow Z$ l'inclusion complémentaire. Si $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{D}_Z[s]_{\mathcal{B}}$-module cohérent ou un objet de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_Z[s]_{\mathcal{B}})$, on note $j_{1+}j_1^+\mathcal{N}$ le localisé de $\mathcal{N}$ hors de Y_1 et :

$$i_{1+}i_1^!\mathcal{N} = \boldsymbol{R}\Gamma_{[Y_1]}\mathcal{N}.$$

On a un triangle distingué de $D^b(\mathcal{D}_Z[s]_{\mathcal{B}})$ (voir [6, VI 8.3]) :

$$\begin{tikzcd} i_{1+}i_1^!\mathcal{N} \arrow[rr] & & \mathcal{N} \arrow[dl] \\ & j_{1+}j_1^+\mathcal{N} \arrow[ul, "+1"] & \end{tikzcd}$$

LEMME 2.6. — *Pour $\mathcal{N}$ dans $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_Z[s]_{\mathcal{B}})$ à cohomologie spécialisable le long de (Y_1, s_1), le morphisme*

$$\mathcal{N} \longrightarrow j_{1+}j_1^+\mathcal{N}$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — D'une part le problème est local sur Z et d'autre part on peut se ramener au cas d'un $\mathcal{D}_Z[s]_{\mathcal{B}}$-module cohérent spécialisable. Soit t_1 une équation de Y_1 dans une carte affine U de Z. Alors $i_1^!\mathcal{N}$ est représenté par le complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{|U} \xrightarrow{t_1\cdot} \mathcal{N}_{|U} \longrightarrow 0.$$

Nous allons montrer que $i_1^!\mathcal{N} \simeq 0$, autrement dit que la multiplication par t_1 est bijective. Soit ${}^1U\mathcal{N}$ une filtration bonne pour ${}^1V\mathcal{D}_Z[s]_{\mathcal{B}}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le morphisme induit par la multiplication à gauche par t_1

$$\mathrm{gr}_k^{{}^1U}\mathcal{N} \xrightarrow{t_1\cdot} \mathrm{gr}_{k-1}^{{}^1U}\mathcal{N}$$

est bijectif : il suffit de voir que les composés $\partial_{t_1}t_1$ et $t_1\partial_{t_1}$ le sont; cela résulte de ce que chacun a un polynôme minimal dont le terme constant est $b_1(s_1 + k - 1)$ donc inversible dans $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}$, d'après ($\mathrm{S}_2$). Par ailleurs, pour $k \ll 0$ l'application

$${}^1U_k\mathcal{N} \xrightarrow{t_1\cdot} {}^1U_{k-1}\mathcal{N}$$

est bijective, puisque c'est vrai pour ${}^1V\mathcal{D}_Z[s]_{\mathcal{B}}$. On en déduit le lemme. □

On déduit de ce lemme et de la stabilité par dualité de la catégorie des objets à cohomologie spécialisable les deux quasi-isomorphismes :

$$\mathbb{D}\big(j_{1+}j_1^+\mathcal{N}\big) \xleftarrow{\sim} \mathbb{D}\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} j_{1+}j_1^+\mathbb{D}\mathcal{N}.$$

2.7. — Donnons-nous maintenant p hypersurfaces lisses $Y_1, \dots, Y_p$ de Z et considérons la catégorie des $\mathcal{D}_Z[s]_{\mathcal{B}}$-modules spécialisables séparément le long de $(Y_1, s_1), \dots, (Y_p, s_p)$. Soit $j : Z - \bigcup_{i=1}^p Y_i \hookrightarrow Z$ l'inclusion. Pour tout $\mathcal{N}$ dans $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_Z[s]_{\mathcal{B}})$ à cohomologie dans cette catégorie, le morphisme naturel

$$\mathcal{N} \longrightarrow j_+j^+\mathcal{N}$$

est un quasi-isomorphisme. On le montre par récurrence sur p. On a

$$\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} j_{1+}j_1^+\mathcal{N}$$

et donc $j_{1+}j_1^+\mathcal{N}$ reste dans la catégorie. Par suite, on a :

$$\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} j_{2+}j_2^+\big(j_{1+}j_1^+\mathcal{N}\big).$$

Mais on a trivialement $j_2^+j_{1+} = j_{1+}j_2^+$ dans $D^b(\mathcal{D}_Z[s]_{\mathcal{B}})$, de sorte qu'on peut continuer le procédé. On en déduit, pour $\mathcal{N}$ dans cette catégorie, un quasi-isomorphisme :

$$\mathbb{D}\big(j_+j^+\mathcal{N}\big) \simeq j_+j^+\mathbb{D}\mathcal{N}. \tag{2.8}$$

Démonstration de la proposition 2.3. — Soient Σ un éventail régulier subdivisant $(\mathbb{Q}^p)^*$, $\rho_\Sigma : X_\Sigma \to X$ la modification propre associée et $j_\Sigma : T^p \hookrightarrow X_\Sigma$ l'inclusion. Il suffit de montrer que l'on a

$$\mathbb{D}j_{\Sigma+}\big(\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s\big) \simeq j_{\Sigma+}\mathbb{D}\big(\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s\big)$$

puisqu'en composant avec l'image directe par ρ_Σ on en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{D}j_+\big(\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s\big) &\simeq \mathbb{D}\rho_{\Sigma+}j_{\Sigma+}\big(\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s\big)\\ &\simeq \rho_{\Sigma+}\mathbb{D}j_{\Sigma+}\big(\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s\big)\\ &\simeq j_+\mathbb{D}\big(\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s\big).\end{aligned}$$

Par ailleurs, le problème est local sur X_Σ et il suffit de montrer que l'on a

$$\mathbb{D}j_{\Gamma+}\big(\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s\big) \simeq j_{\Gamma+}\mathbb{D}\big(\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}}t^s\big)$$

pour tout cône Γ de Σ et que le quasi-isomorphisme est compatible aux restrictions lorsque Γ' est une face de Γ.

Choisissons alors pour Σ l'éventail utilisé pour construire $\mathcal{B}$ (voir § 1.11) et soit Γ un cône de Σ. Supposons, pour simplifier les notations, que Γ est de dimension p et contenu dans le premier octant de $(\mathbb{Q}^p)^*$. Soient $u_1, \ldots, u_p$ les coordonnées sur X_Γ considérées au § 1.9. Notons $Y_{\Gamma,i}$ les hypersurfaces $u_i = 0$ $(i = 1, \ldots, p)$. Reprenons les notations introduites dans la démonstration de la PROPOSITION 1.10.

LEMME 2.9. — *Dans ces conditions, $j_{\Gamma+}\mathcal{M}[s']_{\mathcal{B}_\Gamma} u^{s'}$ est spécialisable le long de $(Y_{\Gamma,1}, s'_1), \ldots, (Y_{\Gamma,p}, s'_p)$.*

Démonstration. — Soit $m \in \big(j_{\Gamma+}\mathcal{M}\big)(X_\Gamma) \simeq \mathcal{M}(T^p)$. De la PROPOSITION 1.10 appliquée à la p-filtration $V\mathbb{C}[u, u^{-1}]\langle u\partial_u\rangle \cdot m$ on déduit, pour tout $i = 1, \ldots, p$, des identités

$$B_{\Gamma,i}(u_i\partial_{u_i}) \cdot m = u_i P_i(u, u\partial_u) \cdot m$$

avec $P_i \in V_{0,\ldots,0}\mathbb{C}[u]\langle\partial_u\rangle = \mathbb{C}[u]\langle u\partial_u\rangle$ et $B_{\Gamma,i}(-s'_i) \in \mathcal{B}_\Gamma$. On déduit que pour tout i on a

$$B_{\Gamma,i}(u_i\partial_{u_i} - s'_i) \cdot (mu^{s'}) = u_i P_i(u, u\partial_u - s') \cdot (mu^{s'}),$$

ce qui implique que $j_{\Gamma+}\mathcal{M}[s']_{\mathcal{B}_\Gamma} u^{s'} (\simeq j_{\Gamma+}\mathcal{M}[s]_{\mathcal{B}_\Gamma} t^s)$ est spécialisable le long de chaque hypersurface $Y_{\Gamma,i}$. $\square$

La compatibilité aux restrictions résulte de la construction de 2.7. La PROPOSITION 2.3 est maintenant conséquence immédiate de ce lemme et de (2.8). $\square$

3. Liberté

Dans la suite, nous ne considèrerons que des parties multiplicatives $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}[s]$ engendrées par une famille d'éléments de la forme

$$L(s) - \alpha + k,$$

où L parcourt un ensemble fini de formes linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ premiers entre eux, α un ensemble fini A de nombres complexes et k parcourt un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$. Nous allons montrer :

THÉORÈME 3.1. — *Soit $\mathfrak{M}$ un système algébrique holonome d'EDF. Il existe une partie multiplicative $\mathcal{B}$ telle que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}$ soit libre de type fini sur $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}$.*

Démonstration du théorème 0.6. — Soit $\mathfrak{M}(s)$ un système rationnel holonome d'EDF de dimension r. D'après [11, th. 1.2.1], il existe un système algébrique holonome $\mathfrak{M}$ avec $\mathfrak{M}(s) = \mathbb{C}(s) \otimes_{\mathbb{C}[s]} \mathfrak{M}$ et le THÉORÈME 3.1 nous fournit $\mathcal{B}$ tel que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}$ soit $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}$-libre (de rang r). Soit $\boldsymbol{m}$ une base de $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}$. Alors pour tout $i = 1, \dots, p$ la matrice de τ_i et celle de τ_i^{-1} sont à éléments dans $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}$ (puisque $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}$ est stable par τ_i et τ_i^{-1}), ce qui est le résultat voulu. $\square$

Démonstration du théorème 3.1.

LEMME 3.2. — *Il suffit de montrer le théorème pour les modules sans $\mathbb{C}[s]$-torsion.*

Démonstration. — En effet, soit $\mathfrak{M}'$ la $\mathbb{C}[s]$-torsion de $\mathfrak{M}$. On vérifie facilement que $\mathfrak{M}'$ est un $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$-sous-module de type fini de $\mathfrak{M}$. Par suite, d'après le théorème de finitude 1.2, il existe $\mathcal{B}'$ avec $\mathfrak{M}'_{\mathcal{B}'} = \{0\}$ et on en déduit le lemme. $\square$

DÉFINITION 3.3. — Un *réseau* $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}(s)$ est un sous-$\mathbb{C}[s]$-module de type fini de $\mathfrak{M}$ tel que $\mathbb{C}(s) \otimes_{\mathbb{C}[s]} \mathfrak{N} = \mathfrak{M}(s)$.

Dans la suite, nous supposerons que $\mathfrak{M}$ n'a pas de $\mathbb{C}[s]$-torsion. Le cas où $p = 1$ se démontre comme suit : soit $\mathfrak{N}$ un réseau de $\mathfrak{M}(s)$ contenu dans $\mathfrak{M}$ (l'existence d'un tel réseau est immédiate). Si $\mathfrak{M}$ est sans $\mathbb{C}[s]$-torsion, il en est de même de $\mathfrak{N}$ et donc $\mathfrak{N}$ est libre sur $\mathbb{C}[s]$. Soit $\mathcal{B}$ une partie multiplicative (donnée par le THÉORÈME 1.2 par exemple) telle que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}$ soit de type fini sur $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}$. Puisque

$$\mathbb{C}(s) \otimes_{\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}} \mathfrak{N}_{\mathcal{B}} = \mathbb{C}(s) \otimes_{\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}} \mathfrak{M}_{\mathcal{B}},$$

il existe $\mathcal{B}'$ engendrée par un nombre fini d'éléments telle que $\mathfrak{N}_{\mathcal{B}\cup\mathcal{B}'} = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}\cup\mathcal{B}'}$. Mais $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ a la forme voulue, car $p = 1$, d'où le résultat.

Pour p quelconque, le choix d'un réseau n'est pas aussi simple. Nous allons d'abord considérer le comportement par restriction à un hyperplan. Soit L une forme linéaire comme plus haut, $\alpha \in \mathbb{C}$ et notons $H_{L,\alpha}$ l'hyperplan d'équation $L(s) - \alpha = 0$ dans $\mathbb{C}^p$. Choisissons des formes linéaires $L_1, \dots, L_{p-1}, L_p = L$ qui forment une base de $\mathbb{Z}^p \subset (\mathbb{Q}^p)^*$. Le tore T^p se décompose alors en produit $T_L^{p-1} \times T^L$ où T^L est de dimension 1. La projection $T^p \to T^L$ est donnée par

$$(t_1, \dots, t_p) \longmapsto t_1^{\ell_1} \cdots t_p^{\ell_p} = t^L$$

si $\ell_1, \dots, \ell_p$ sont les coefficients de L. Soit enfin $\mathcal{N}_{L,\alpha}$ le $\mathcal{D}_{T^L}$-module engendré par u^α, si $u = t^L$ est la coordonnée choisie sur T^L.

LEMME 3.4. — *Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{T^p}$-module holonome et $\mathfrak{M}(\mathcal{M})$ son transformé de Mellin. Soit $i_{L,\alpha} : H_{L,\alpha} \hookrightarrow \mathbb{C}^p$ l'inclusion. Alors les groupes de cohomologie de $\boldsymbol{L}i^*_{L,\alpha}\mathfrak{M}(\mathcal{M})$ sont des systèmes holonomes d'EDF sur $H_{L,\alpha}$. Si $\mathfrak{M}(\mathcal{M})$ n'a pas de $\mathbb{C}[s]$-torsion, on a $\boldsymbol{L}i^*_{L,\alpha}\mathfrak{M}(\mathcal{M}) = i^*_{L,\alpha}\mathfrak{M}(\mathcal{M})$.*

Démonstration. — On voit d'abord que

$$\boldsymbol{L}i^*_{L,\alpha}\mathfrak{M}(\mathcal{M}) = \boldsymbol{L}i^*_{L,0}\mathfrak{M}\left(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{T^p}} \mathcal{N}_{L,\alpha}\right).$$

On est ainsi ramené au cas où $\alpha = 0$. Alors $\boldsymbol{L}i^*_{L,0}\mathfrak{M}(\mathcal{M}) = \mathfrak{M}\left(p_{L+}\mathcal{M}\right)$ si $p_L : T^p \to T^{p-1}_L$ est la projection. Ceci donne l'holonomie. Enfin la dernière assertion est claire. $\square$

Remarque. — Puisque $\mathcal{N}_{L,\alpha} = \mathcal{N}_{L,\alpha+k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on voit que, par une identification évidente on a :

$$\boldsymbol{L}i^*_{L,\alpha}\mathfrak{M}(\mathcal{M}) \simeq \boldsymbol{L}i^*_{L,\alpha+k}\mathfrak{M}(\mathcal{M}).$$

Le choix d'un réseau est donné par la proposition ci-dessous, qui généralise [11, cor. 2.5.2].

PROPOSITION 3.5. — *Soit $\mathcal{B}$ une partie multiplicative comme au* § 1.11. *Il existe alors un réseau $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ tel que :*

1) $\mathfrak{N}_{\mathcal{B}} = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}$.

2) *Pour tout hyperplan $H = H_{L,\alpha}$ de $\mathbb{C}^p$ d'équation $L(s) - \alpha \notin \mathcal{B}$ (avec L et α comme plus haut) on a :*

$$\left(\mathfrak{N}_{|H}\right)_{\mathcal{B}|H} \simeq \left(\mathfrak{M}_{|H}\right)_{\mathcal{B}|H}.$$

3) *Pour tous L, α tels que $L(s) - \alpha \in \mathcal{B}$, il existe deux systèmes holonomes $\mathfrak{M}'_{L,\alpha}$ et $\mathfrak{M}''_{L,\alpha}$ sur $H = H_{L,\alpha}$ tels qu'on ait une suite exacte :*

$$0 \to \left(\mathfrak{M}'_{L,\alpha}\right)_{\mathcal{B}|H} \to \left(\mathfrak{N}_{|H}\right)_{\mathcal{B}|H} \to \left(\mathfrak{M}_{|H}\right)_{\mathcal{B}|H} \to \left(\mathfrak{M}''_{L,\alpha}\right)_{\mathcal{B}|H} \to 0.$$

Nous avons noté

$$\mathfrak{N}_{|H} = \mathbb{C}[s]/\big(L(s) - \alpha\big) \otimes_{\mathbf{C}[s]} \mathfrak{N} = \mathbb{C}[s]/\big(L(s) - \alpha\big) \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{C}[s]} \mathfrak{N}$$

et de même pour $\mathfrak{M}$ (la deuxième égalité est due au fait que $\mathfrak{M}$ est supposé sans $\mathbb{C}[s]$-torsion). De même, $\mathcal{B}|H$ est l'image de $\mathcal{B} - (L(s) - \alpha)\mathbb{C}[s]$ dans $\mathbb{C}[s]/(L(s) - \alpha)$. La proposition sera montrée plus loin.

COROLLAIRE 3.6. — *Si* $\mathfrak{N}$ *est un réseau satisfaisant les propriétés de* 3.5, *il existe une partie multiplicative* $\mathcal{B}'$ *telle que* $\mathfrak{N}_{\mathcal{B}'}$ *soit localement libre sur* $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}'}$ *et que pour tout hyperplan* H *d'équation* $L(s)-\alpha=0$ *(comme plus haut)* $(\mathfrak{N}_{|H})_{\mathcal{B}'|H}$ *soit localement libre sur* $(\mathbb{C}[s]/(L(s)-\alpha))_{\mathcal{B}'|H}$.

Démonstration du corollaire. — Pour $\mathfrak{N}$ et $\mathcal{B}$ comme en 3.5, on a $\mathfrak{N}_{\mathcal{B}} = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}$, donc $\mathfrak{N}_{\mathcal{B}}$ est localement libre sur $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}$ d'après le THÉORÈME 2.2. Il existe par suite, puisque $\mathfrak{N}$ est de type fini sur $\mathbb{C}[s]$, une partie $\mathcal{B}''$ contenue dans $\mathcal{B}$ et engendrée par un nombre fini de fonctions affines telle que $\mathfrak{N}_{\mathcal{B}''}$ soit localement libre sur $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}''}$.

Soit H un hyperplan. Si l'équation de H n'est pas dans $\mathcal{B}''$, l'assertion du corollaire est claire. Supposons donc que $H = H_{L,\alpha}$ est dans $\mathcal{B}''$. Il existe une partie multiplicative $\mathcal{B}(H) \subset \mathbb{C}[s]$ telle que les modules

$$\left(\mathfrak{M}'_{L,\alpha}\right)_{\mathcal{B}(H)|H}, \quad \left[\operatorname{Ker}\left(\mathfrak{M}_{|H} \to \mathfrak{M}''_{L,\alpha}\right)\right]_{\mathcal{B}(H)|H}$$

soient localement libres sur l'anneau des polynômes sur H localisé hors de $\mathcal{B}(H)|H$.

Nous prenons alors pour $\mathcal{B}'$ la partie multiplicative engendrée par $\mathcal{B}''$ et les $\mathcal{B}(H)$ pour H dans $\mathcal{B}''$, qui convient, d'après la PROPOSITION 3.5. $\square$

Nous allons maintenant appliquer le théorème de Quillen-Souslin sous la forme du théorème 3 de [18]. Pour cela, soit $P \in \mathbb{C}[s]$ tel que le localisé $\mathfrak{N}_{(P)}$ soit *libre* sur $\mathbb{C}[s]_{(P)}$, où $\mathfrak{N}$ est un réseau donné par la PROPOSITION 3.5. Quitte à faire un changement linéaire rationnel de coordonnées $s_1,\dots,s_p$ (ce qui ne change pas la forme des éléments de $\mathcal{B}$), nous pouvons supposer que P est sous forme de Weierstrass relativement à s_p. Considérons alors la projection sur les $(p-1)$ premières coordonnées.

LEMME 3.7. — *Il existe une partie multiplicative* $\mathcal{B}_{p-1} \subset \mathbb{C}[s_1,\dots,s_{p-1}]$ *telle que* $\mathfrak{N}_{\mathcal{B}_{p-1}}$ *soit projectif sur* $\mathbb{C}[s_1,\dots,s_{p-1}]_{\mathcal{B}_{p-1}}[s_p]$.

Démonstration. — Commençons par définir la partie $\mathcal{B}_{p-1}$. Reprenons pour cela les notations du COROLLAIRE 3.6. Pour tout hyperplan H défini par un élément de $\mathcal{B}''$, $\mathcal{B}(H)|H$ est engendrée par une famille de fonctions affines sur H. Projetons les hyperplans correspondants dans $\mathbb{C}^{p-1}$ (pour tout H de $\mathcal{B}''$) : on obtient une famille d'hyperplans de $\mathbb{C}^{p-1}$. Par définition, $\mathcal{B}_{p-1}$ est engendré par les (images inverses des) fonctions affines s'annulant sur un hyperplan de cette famille. Pour montrer que $\mathfrak{N}_{\mathcal{B}_{p-1}}$ est projectif, il suffit de montrer que $\mathfrak{N}_{\mathcal{B}_{p-1}}$ est localement libre en tout point d'un hyperplan H défini par un élément de $\mathcal{B}''$. Cela résulte de la définition de $\mathcal{B}(H) \mid H$. $\square$

Nous voyons alors que si l'on pose $A = \mathbb{C}[s_1, \ldots, s_{p-1}]_{\mathcal{B}_{p-1}}$ et si $A(s_p)$ désigne l'anneau obtenu à partir de $A[s_p]$ en inversant la famille des polynômes de Weierstrass relativement à s_p, le $\mathbb{C}[s]$-module $\mathfrak{N}$ vérifie :

1) $\mathfrak{N}_{\mathcal{B}_{p-1}}$ est $A[s_p]$-projectif;

2) $A(s_p) \otimes_{A[s_p]} \mathfrak{N}_{\mathcal{B}_{p-1}}$ est $A(s_p)$-libre (puisque $\mathfrak{N}_{(P)}$ est libre sur $\mathbb{C}[s]_{(P)}$).

Le théorème 3 de *loc. cit.* montre que $\mathfrak{N}_{\mathcal{B}_{p-1}}$ est $A[s_p]$-libre et donc, si $\mathcal{B}$ désigne la partie multiplicative engendrée dans $\mathbb{C}[s]$ par $\mathcal{B}_{p-1}$ et la partie donnée par 3.5, $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}$ ($= \mathfrak{N}_{\mathcal{B}}$) est $\mathbb{C}[s]_{\mathcal{B}}$-libre, ce qui montre le THÉORÈME 3.1. □

Remarque. — Nous avons en fait montré le résultat suivant : pour toute projection linéaire assez générale $\pi : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^{p-1}$ et dont les composantes sont des formes linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$, le module $\mathfrak{N}$ est libre en restriction à l'ouvert U_π complémentaire dans $\mathbb{C}^p$ de la famille formée des hyperplans de $\mathcal{B}''$ et des hyperplans de la forme $\pi^{-1}\pi(H')$, où H' est un élément de $\mathcal{B}(H) \mid H$, avec $H \in \mathcal{B}''$. La famille d'ouverts U_π, pour π variant dans un ensemble dense de projections, forme un recouvrement de l'ouvert $U = \mathbb{C}^p - \bigcup_{H\in\mathcal{B}''} H$. On obtient ainsi tous les résultats énoncés au § 0.7.

Démonstration de la proposition 3.5. — Nous allons reprendre les constructions faites au § 1.6. Plaçons-nous dans la carte $\mathbb{C}^p$ de $X = (\mathbb{P}^1)^p$ de coordonnées $t_1, \ldots, t_p$ et soient $V\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ et $V\mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$ les p-filtrations introduites au § 1.6. Soit $U\mathcal{M}(T^p)$ une p-filtration bonne pour $V\mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$ d'un $\mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$-module holonome $\mathcal{M}(T^p)$. Par exemple, si $m \in \mathcal{M}(T^p)$ est un générateur, on peut prendre :

$$U\mathcal{M}(T^p) = V\mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle \cdot m.$$

Soit Σ^+ un éventail de platitude pour $U\mathcal{M}(T^p)$ et notons $\mathrm{sk}^1(\Sigma^+)$ l'ensemble des formes linéaires primitives sur le 1-squelette de Σ^+. Alors la p-filtration $\overline{U}\mathcal{M}(T^p)$ définie pour $\sigma \in \mathbb{Z}^p$ par

$$\overline{U}_\sigma\mathcal{M}(T^p) = \bigcap_{L\in\mathrm{sk}^1(\Sigma^+)} {}^L U_{L(\sigma)}\mathcal{M}(T^p)$$

est bonne pour $V\mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$. De plus, le terme de gauche ne dépend pas de l'éventail de platitude choisi. Pour construire un réseau $\mathfrak{N}$ nous allons prendre l'intersection de tels $\overline{U}_\sigma\mathcal{M}(T^p)$ pour les différentes cartes de X.

Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$. Chaque ε correspond à une carte X_ε de X, à savoir la carte centrée en $t_i^{\varepsilon_i} = 0$ pour tout i.

Notons ${}^{\varepsilon}V\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$ la p-filtration correspondante, pour laquelle t_i est de degré $-\varepsilon_i$. Si $m \in \mathcal{M}(T^p)$ est un générateur, posons

$$
\begin{aligned}
{}^{\varepsilon}U\mathcal{M}(T^p) &= {}^{\varepsilon}V\mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle \cdot m,\\
{}^{\varepsilon}\overline{U}_{\sigma}\mathcal{M}(T^p) &= \bigcap_{L\in \mathrm{sk}^1(\Sigma_{\varepsilon}^+)} {}^{L,\varepsilon}U_{L(\sigma)}\mathcal{M}(T^p)
\end{aligned}
$$

où Σ_{ε}^+ est un éventail de platitude pour ${}^{\varepsilon}U\mathcal{M}(T^p)$.

Soit $(\sigma^+,\sigma^-) \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{Z}^p$ et posons, pour chaque ε,

$$\sigma^{(\varepsilon)} = \big(\sigma_1^{(\varepsilon_1)},\dots,\sigma_p^{(\varepsilon_p)}\big).$$

Soit enfin :

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{(\sigma^+,\sigma^-)} = \bigcap_{\varepsilon}\ \bigcap_{L\in \mathrm{sk}^1(\Sigma_{\varepsilon}^+)} \Big[{}^{L,\varepsilon}U_{L(\sigma^{(\varepsilon)})}\mathcal{M}(T^p)\Big].$$

LEMME 3.8. — *$\mathcal{N}$ est un $\mathbb{C}[t\partial_t]$-module de type fini.*

Admettons ce lemme. Nous allons voir que si $\mathfrak{N}$ désigne le $\mathbb{C}[s]$-sous-module correspondant à $\mathcal{N}$ par transformation de Mellin de $\mathcal{M}$, alors $\mathfrak{N}$ est un réseau satisfaisant les propriétés de 3.5. Fixons ε et $L \in \mathrm{sk}^1(\Sigma_{\varepsilon}^+)$. Notons $\mathcal{M}(T^p) = \mathfrak{M}$. La relation de Bernstein dans la direction L implique, après localisation hors de la partie $\mathcal{B}$ donnée par (1.11), que l'inclusion ${}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M} \hookrightarrow {}^{L}U_{\lambda+1}\mathfrak{M}$ est un isomorphisme pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$ (nous identifions ici s et $-t\partial_t$). On en déduit que $\mathfrak{N}_{\mathcal{B}} = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}$, d'où la première partie.

Soit $H = H_{L,\alpha}$ l'hyperplan d'équation $L(s)-\alpha = 0$. Si $L(s)-\alpha \notin \mathcal{B}$, on peut restreindre à H l'égalité précédente pour obtenir le deuxième point.

Supposons donc que $L(s)-\alpha \in \mathcal{B}$ et notons $\mathcal{B}_H = \mathcal{B} - (L(s)-\alpha)\mathbb{C}[s]$. Pour simplifier les notations, nous supposerons que les coefficients de L sont ≥ 0. Alors le même argument que ci-dessus montre que $\mathfrak{N}_{\mathcal{B}_H}$ est isomorphe à

$$[{}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M} \cap {}^{-L}U_{\mu}\mathfrak{M}]_{\mathcal{B}_H}$$

avec $\lambda = L(\sigma^{(-\mathbf{1})})$, $\mu = -L(\sigma^{(\mathbf{1})})$ et $\mathbf{1} = (1,\dots,1)$, $-\mathbf{1} = (-1,\dots,-1)$. Nous avons aussi noté ${}^{-L}U = {}^{-L,(\mathbf{1})}U$.

Puisqu'on suppose $\mathfrak{M}$ sans torsion, on a

$$
\begin{aligned}
&\big[{}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M} \cap {}^{-L}U_{\mu}\mathfrak{M}\big]_{|H}\\
&\qquad = \mathrm{Coker}\Big[{}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M} \cap {}^{-L}U_{\mu}\mathfrak{M} \xrightarrow{L(s)-\alpha} {}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M} \cap {}^{-L}U_{\mu}\mathfrak{M}\Big]
\end{aligned}
$$

et on en déduit une application :

$$a : [{}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M} \cap {}^{-L}U_{\mu}\mathfrak{M}]_{|H} \longrightarrow \mathfrak{M}_{|H}.$$

Pour montrer que $\operatorname{Ker} a$ $(= \mathfrak{M}'_{L,\alpha})$ et $\operatorname{Coker} a$ $(= \mathfrak{M}''_{L,\alpha})$ sont deux systèmes holonomes sur H, il suffit de le montrer pour les deux applications b et c :

$$\begin{aligned} {}[{}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M}]_{|H} &\xrightarrow{\quad b \quad} \mathfrak{M}_{|H}, \\ [{}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M} \cap {}^{-L}U_{\mu}\mathfrak{M}]_{|H} &\xrightarrow[c]{} [{}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M}]_{|H}. \end{aligned}$$

Considérons d'abord le diagramme de suites exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & {}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M} \arrow[r, "L(s)-\alpha"] \arrow[d] & {}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M} \arrow[r] \arrow[d] & {[{}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M}]_{|H}} \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{M} \arrow[r, "L(s)-\alpha"'] & \mathfrak{M} \arrow[r] & \mathfrak{M}_{|H} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Alors $\operatorname{Ker} b$ et $\operatorname{Coker} b$ sont respectivement égaux au noyau et conoyau de :

$$\mathfrak{M}/{}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M} \xrightarrow{L(s)-\alpha} \mathfrak{M}/{}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M}. \tag{3.9}$$

On filtre ce quotient par ${}^{L}U\mathfrak{M}$ et on remarque que si ℓ est assez grand, l'application

$$\operatorname{gr}_{\ell}^{{}^{L}U}\mathfrak{M} \xrightarrow{L(s)-\alpha} \operatorname{gr}_{\ell}^{{}^{L}U}\mathfrak{M}$$

est bijective en considérant le polynôme minimal de $L(s)$ sur ce gradué. On peut donc remplacer (3.9) par

$${}^{L}U_{\ell}\mathfrak{M}/{}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M} \xrightarrow{L(s)-\alpha} {}^{L}U_{\ell}\mathfrak{M}/{}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M}$$

pour $\ell \geq \lambda$ assez grand. De plus, on voit que ${}^{-L}U\mathfrak{M}$ induit sur ce quotient une filtration finie, toujours en considérant le polynôme minimal de $L(s)$ sur ce quotient (voir [11, lemme 2.5.6]).

Le même argument montre que $\operatorname{Ker} c$ et $\operatorname{Coker} c$ sont égaux au noyau et conoyau de

$$\begin{aligned}&{}^{L}U_{\ell}\mathfrak{M} \cap {}^{-L}U_{\mu}\mathfrak{M} / {}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M} \cap {}^{-L}U_{\mu}\mathfrak{M} \\ &\qquad\xrightarrow{L(s)-\alpha} {}^{L}U_{\ell}\mathfrak{M} \cap {}^{-L}U_{\mu}\mathfrak{M} / {}^{L}U_{\lambda}\mathfrak{M} \cap {}^{-L}U_{\mu}\mathfrak{M}.\end{aligned}$$

On vérifie maintenant que pour tout ℓ, $\operatorname{gr}_{\ell}^{{}^{L}U}\mathfrak{M}$ est un système holonome d'EDF à $(p-1)$ variables : supposons d'abord que L soit la forme linéaire associée à la coordonnée s_p. Si on considère la compactification $X = \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$ de T^p et si Y est l'hypersurface $t_p = 0$, alors $\operatorname{gr}_{\ell}^{{}^{L}U}(j_+\mathcal{M})$ est un $\mathcal{D}_Y$-module cohérent pour tout ℓ car il est $\operatorname{gr}_0^{{}^{L}V}\mathcal{D}_X = \mathcal{D}_Y[t_p\partial_{t_p}]$-cohérent et $t_p\partial_{t_p}$ y admet un polynôme minimal. On montre aussi qu'il est $\mathcal{D}_Y$-holonome (voir par exemple [13]). Ceci donne le résultat lorsque $L(s) = s_p$. Dans le cas général, on considère la décomposition déjà introduite $T^p = T_L^{p-1} \times T^L$ et on applique le même argument à une compactification respectant cette décomposition. Ceci termine la preuve de la PROPOSITION 3.5. $\square$

Démonstration du lemme 3.8. — Avant de montrer le lemme, nous allons montrer un énoncé analogue mais plus simple. Soit D le diviseur $X - T^p$ et $\mathcal{I}_D$ son idéal dans $\mathcal{O}_X$. Soit $V_{\mathbf{0}}\mathcal{D}_X$ le sous-faisceau de $\mathcal{D}_X$ formé localement des opérateurs qui préservent toute puissance de $\mathcal{I}_D$. Fixons des coordonnées dans la carte $\mathbb{C}^p$ déjà considérée ($\varepsilon = \mathbf{1}$). Considérons le recouvrement de X par les ouverts Ω intersections de cartes X_ε introduites plus haut. Pour tout tel ouvert Ω on a une identification

$$V_{\mathbf{0}}\mathcal{D}_X(\Omega) \simeq \mathcal{O}(\Omega)\langle t\partial_t\rangle$$

compatible avec les morphismes de restriction. Soit $\mathcal{U}$ un $V_{\mathbf{0}}\mathcal{D}_X$-module à gauche cohérent. Alors les groupes de cohomologie $H^*(X,\mathcal{U})$ sont munis d'une structure de $\mathbb{C}[t\partial_t]$-module, ce qu'on voit en considérant le complexe de Čech de $\mathcal{U}$ relatif à ce recouvrement et l'identification ci-dessus.

ASSERTION 3.10. — *Ce sont des $\mathbb{C}[t\partial_t]$-modules de type fini.*

En effet, on se ramène par des arguments standards au cas où $\mathcal{U} = V_{\mathbf{0}}\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ où $\mathcal{F}$ est $\mathcal{O}_X$-cohérent. On a alors $\mathcal{U}(\Omega) \simeq \mathbb{C}[t\partial_t] \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{F}(\Omega)$ et par suite :

$$H^*(X,\mathcal{U}) \simeq \mathbb{C}[t\partial_t] \otimes_{\mathbf{C}} H^*(X,\mathcal{F}). \qquad \square$$

Soit maintenant Ω un ouvert du recouvrement considéré. On peut écrire

$$\Omega = \mathbb{C}^{J_0} \times \mathbb{C}^{J_\infty} \times (\mathbb{C}^*)^I$$

avec $J_0 \bigsqcup J_\infty \bigsqcup I = \{1, \dots, p\}$, l'origine de $\mathbb{C}^{J_0}$ est donnée par $t_j = 0$ pour $j \in J_0$ et celle de $\mathbb{C}^{J_\infty}$ par $t_j = \infty$ pour $j \in J_\infty$. On définit une filtration de $\mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$ indexée par $\mathbb{Z}^{\operatorname{card}(J_0 \cup J_\infty)}$ en posant

$$^{\Omega}V_{\sigma_{J_0}, \sigma_{J_\infty}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle = \sum_{\sigma_I \in \mathbb{Z}^I} {}^{\varepsilon}V_{\sigma_{J_0}, \sigma_{J_\infty}, \sigma_I} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle,$$

où ε correspond à une carte quelconque X_ε contenant Ω (c'est-à-dire $\varepsilon_j = 1$ si $j \in J_0$ et $\varepsilon_j = -1$ si $j \in J_\infty$). Le résultat ne dépend pas de la carte X_ε choisie. La multi-filtration ${}^{\Omega}V\mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$ induit une multi-filtration ${}^{\Omega}V\mathcal{O}(\Omega)\langle t\partial_t\rangle$ et on voit comme dans le cas des cartes Ω_ε que

$$^{\Omega}\mathcal{U}\mathcal{M}(T^p) \overset{\text{déf}}{=} {}^{\Omega}V\mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle \cdot m \subset \mathcal{M}(T^p)$$

est une multi-filtration bonne pour ${}^{\Omega}V\mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$ et en particulier chaque terme

$$^{\Omega}\mathcal{U}\mathcal{M}(T^p)_{\sigma_{J_0}, \sigma_{J_\infty}}$$

est de type fini sur ${}^{\Omega}V\mathcal{O}(\Omega)\langle t\partial_t\rangle$.

Fixons $(\sigma^+, \sigma^-) \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{Z}^p$ et posons

$$\mathcal{U}_{(\sigma^+, \sigma^-)}(\Omega) = {}^{\Omega}\mathcal{U}_{(\sigma^+_{J_0}, \sigma^-_{J_\infty})}\mathcal{M}(T^p)$$

pour tout ouvert Ω. Par construction et du fait de la remarque ci-dessus, $\mathcal{U}_{(\sigma^+, \sigma^-)}$ est un faisceau $V_0\mathcal{D}_X$-cohérent. On déduit en particulier de 3.10 que $\Gamma(X, \mathcal{U}_{(\sigma^+, \sigma^-)})$ est de type fini sur $\mathbb{C}[t\partial_t]$. En utilisant l'inclusion $\mathcal{U}_{(\sigma^+, \sigma^-)}(\Omega) \subset \mathcal{M}(T^p)$ pour tout Ω, on en déduit que

$$\Gamma(X, \mathcal{U}_{(\sigma^+, \sigma^-)}) = \bigcap_{\Omega} {}^{\Omega}\mathcal{U}_{(\sigma^+_{J_0}, \sigma^-_{J_\infty})}\mathcal{M}(T^p)$$

l'intersection étant prise sur tous les ouverts du recouvrement.

Esquissons maintenant la preuve du LEMME 3.8. On choisit pour tout ε un éventail de platitude $\Sigma'^{+}_{\varepsilon}$ pour la p-filtration ${}^{\varepsilon}U\mathcal{M}(T^p) = {}^{\varepsilon}V\mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle \cdot m$. Soit Σ un éventail (régulier) définissant une modification propre

$$\rho_\Sigma : X_\Sigma \longrightarrow X.$$

Tout ε définit une carte X_ε de X et aussi un octant de $(\mathbb{Q}^p)^*$, image du premier octant par l'application linéaire diagonale de matrice :

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_p \end{pmatrix}.$$

Soit Σ_ε^+ la trace sur le premier octant de $A_\varepsilon(\Sigma)$. Nous supposerons que Σ_ε^+ raffine Σ'^+_ε pour tout ε, autrement dit que Σ_ε^+ est aussi un éventail de platitude pour ${}^\varepsilon U\mathcal{M}(T^p)$. Soit D_Σ le diviseur à croisements normaux $X_\Sigma - T^p$. On définit de manière analogue à ce qu'on a fait plus haut un faisceau $V_0\mathcal{D}_{X_\Sigma}$ et on a un énoncé de finitude pour les sections globales d'un $V_0\mathcal{D}_{X_\Sigma}$-module cohérent. On définit alors un faisceau ${}^\Sigma\mathcal{U}_{(\sigma^+,\sigma^-)}$ qui est $V_0\mathcal{D}_{X_\Sigma}$-cohérent : par exemple, si Γ est un cône de Σ dans le premier octant, Γ correspond à un ouvert affine X_Γ de X_Σ et on pose

$$^\Sigma\mathcal{U}_{(\sigma^+,\sigma^-)}(X_\Gamma) = {}^\Gamma U_{\sigma^+}\mathcal{M}(T^p)$$

avec les notations déjà utilisées de [19]. Du fait de la platitude, on a

$$^\Gamma U_{\sigma^+}\mathcal{M}(T^p) = \bigcap_{L\in \mathrm{sk}^1(\Gamma)} {}^L U_{L(\sigma^+)}\mathcal{M}(T^p)$$

d'après loc. cit. Alors le LEMME 3.8 résulte du fait que :

$$\mathcal{N}_{(\sigma^+,\sigma^-)} = \Gamma\big(X_\Sigma, {}^\Sigma\mathcal{U}_{(\sigma^+,\sigma^-)}\mathcal{M}(T^p)\big). \quad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AOMOTO (K.). — *Les équations aux différences finies et les intégrales de fonctions multiformes*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, t. **22**, 1975, p. 271–297 et t. **26**, 1979, p. 519–523.

[2] BARKATOU (M.). — *Thèse*, Université de Grenoble, 1989.

[3] BERNSTEIN (J.). — *The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter*, Functional Anal. Appl., t. **6**, 1972, p. 273–285.

[4] BIRKHOFF (G.D.) and TRJITSINSKY (W.J.). — *Analytic theory of singular difference equations*, Acta Math., t. **60**, 1933, p. 1–89.

[5] BOREL (A.) et al. — *Algebraic $\mathcal{D}$-modules, Perspectives in Math.* — Boston, Academic Press, 1987.

[6] BOREL (A.). — *Algebraic $\mathcal{D}$–modules*, chap. VI à IX de [5], p. 207–352.

[7] BRYLINSKI (J.-L.). — *Éventails et variétés toriques*, Séminaire sur les singularités des surfaces, Lecture Notes in Math., t. **777**, 1980, p. 248–288.

[8] Danilov (V.I.). — *The geometry of toric varieties*, Russian Math. Surveys, t. **33**, 1978, p. 97–154.
[9] Duval (A.). — *Thèse*, Université de Strasbourg, 1984.
[10] Fitzpatrick (W.J.) and Grimm (L.J.). — *Convergent factorial series solutions of linear difference equations*, J. Differential Equations, t. **29**, 1978, p. 345–361.
[11] Loeser (F.) et Sabbah (C.). — *Équations aux différences finies et déterminants d'intégrales de fonctions multiformes*, Comment. Math. Helv., t. **66**, 1991, p. 458–503.
[12] Mebkhout (Z.). — *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}$-modules cohérents.* — Paris, Hermann, 1989.
[13] Mebkhout (Z.) et Sabbah (C.). — *$\mathcal{D}$–modules et cycles évanescents*, Appendice à [12].
[14] Norlund (N.E.). — *Leçons sur les équations linéaires aux différences finies.* — Paris, Gauthier-Villars, 1929.
[15] Oda (T.). — *Convex bodies and algebraic geometry*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), Band 15, Springer Verlag 1988.
[16] Ore (O.). — *Sur la forme des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables*, J. Math. Pures Appl., t. **9**, 1930, p. 311–326.
[17] Praagman (C.). — *Formal decomposition of n commuting partial difference operators*, Duke Math., t. **51**, 1984, p. 331–353.
[18] Quillen (D.). — *Projective modules over polynomial rings*, Invent. Math., t. **36**, 1976, p. 167–171.
[19] Sabbah (C.). — *Proximité évanescente, I. La structure polaire d'un $\mathcal{D}$-module*, Appendice en collaboration avec F. Castro, Compositio Math., t. **62**, 1987, p. 283–328.
[20] Sabbah (C.). — *Proximité évanescente, II. Équations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques*, Compositio Math., t. **64**, 1987, p. 213–241.
[21] Sato (M.). — *Theory of prehomogeneous vector spaces* (notes by Shintani, translated by M. Muro), Nagoya Math. J., t. **120**, 1990, p. 1–34.
[22] Teissier (B.). — *Variétés toriques et polytopes, Séminaire Bourbaki*, Lecture Notes in Math., t. **901**, 1980, p. 71–84.
[23] Varchenko (A.N.). — *Beta function of Euler, Vandermond determinant, Legendre equation and critical values of linear functions on configuration of hyperplanes*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., t. **53**, 1989, p. 1206–1235 et t. **54**, 1990, p. 146–158.