BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHALIS ANOUSSIS

Intégrales invariantes et formules de caractères pour un groupe de Lie connexe à radical co-compact

Bulletin de la S. M. F., tome 120, nº 3 (1992), p. 347-370
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_3_347_0>

Bull. Soc. math. France,
120, 1992, p. 347–370.

INTÉGRALES INVARIANTES ET FORMULES DE CARACTÈRES POUR UN GROUPE DE LIE CONNEXE A RADICAL CO-COMPACT

PAR

MICHALIS ANOUSSIS (*)

RÉSUMÉ. — On considère un groupe de Lie G connexe unimodulaire et à radical co-compact. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe G. Soit ℓ un élément du dual de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$. Sous l'hypothèse que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\ell)$ est réductive et abélienne dans $\mathfrak{g}$, on construit une application $\varphi \mapsto F_{\ell,\varphi}$ de $D(G)$ dans l'espace des fonctions C^∞ sur une partie ouverte et dense de $G(\ell)$. Si le groupe G est compact, $F_{\ell,\varphi}$ est — à un scalaire près — l'intégrale invariante de φ relativement au sous-groupe de Cartan $G(\ell)$ de G. En utilisant cette application, on donne une formule pour la trace de l'opérateur $T(\ell, G)(\varphi)$, où $T(\ell, G)$ est la représentation unitaire du groupe G associée à ℓ.

ABSTRACT. — We consider a connected Lie group with co-compact radical G. Let $\mathfrak{g}$ be the Lie algebra of G. Let ℓ be in the dual of $\mathfrak{g}$. Under the assumption that $\mathfrak{g}(\ell)$ is commutative and reductive in $\mathfrak{g}$, we construct an application $\varphi \mapsto F_{\ell,\varphi}$ from $D(G)$ to the space of C^∞ functions on an open dense subset of $G(\ell)$. If G is compact, $F_{\ell,\varphi}$ is — up to a scalar — the invariant integral of φ relative to the Cartan subgroup $G(\ell)$ of G. Using this, we give a formula for the trace of the operator $T(\ell, G)(\varphi)$, where $T(\ell, G)$ is the unitary representation of G associated to ℓ.

Introduction

Soit G un groupe de Lie connexe, simplement connexe, à radical co-compact unimodulaire. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe G. On suppose qu'il existe une forme linéaire ℓ sur $\mathfrak{g}$, admissible bien polarisable et telle que $\mathfrak{g}(\ell)$ soit réductive dans $\mathfrak{g}$. Le groupe $G(\ell)$ est alors abélien et connexe. D'après [14], on peut associer à ℓ l'une classe d'équivalence des représentations unitaires irréductibles du groupe G qu'on notera $T(\ell, G)$.

(*) Texte reçu le 16 mai 1991.
Michalis ANOUSSIS, Département de Mathématiques, Université d'Aegean, Karlovassi 83200 Samos, Grèce.
Classification AMS : primaire 22E30, secondaire 43E65.

Nous allons démontrer une formule pour le caractère de $T(\ell, G)$. On construit en 4 une application $\varphi \mapsto F_{\ell,\varphi}$ de $D(G)$ dans $C^\infty(G(\ell)')$, où $G(\ell)'$ est une partie ouverte et dense de $G(\ell)$. Cette application possède les propriétés suivantes :

(i) Si g_1 est dans G et si φ_1 est la fonction sur G définie par $\varphi_1(g) = \varphi(g_1 g g_1^{-1})$, on a $F_{\ell,\varphi} = F_{\ell,\varphi_1}$.

(ii) Pour tout φ dans $D(G)$ il existe une partie compacte C_φ de $G(\ell)$ telle que $F_{\ell,\varphi}$ soit nulle en dehors de $C_\varphi Z(G)$.

(iii) Si G est compact, $G(\ell)$ est un tore maximal de G, $G(\ell)'$ est l'ensemble des éléments réguliers de $G(\ell)$ et $F_{\ell,\varphi}$ est, à un scalaire près, l'intégrale invariante de φ relativement à $G(\ell)$, comme elle est définie en [14].

On dira que $F_{\ell,\varphi}$ est l'*intégrale invariante* de φ relativement à ℓ. Contrairement à ce qui se passe dans le cas des groupes de Lie semi-simples, il existe en général des fonctions φ dans $D(G)$ telles que la fonction $F_{\ell,\varphi}$ ne soit pas sommable pour la mesure de Haar sur $G(\ell)$. Soit T une représentation du groupe G dont la classe d'équivalence est $T(\ell, G)$. Soit $\mathrm{d}g$ une mesure de Haar sur le groupe G. On note $\mathrm{d}x$ la mesure de Haar sur le groupe $G(\ell)$ telle que la mesure quotient $\mathrm{d}g/\mathrm{d}x$ corresponde à la mesure $\mathrm{d}b_{O_\ell}$ sur l'orbite O_ℓ. On note $\mathrm{d}z$ une mesure de Haar sur le groupe $Z(G)$ et $\mathrm{d}\dot{x}$ la mesure quotient $\mathrm{d}x/\mathrm{d}z$. On note X_ℓ le caractère unitaire du groupe $G(\ell)$ de différentielle $X \mapsto i\ell(X)$.

THÉORÈME. — *Pour tout φ dans $D(G)$ l'opérateur*

$$T(\varphi) = \int_G \varphi(g) T(g)\,\mathrm{d}g$$

est à trace et on a

$$\operatorname{Tr} T(\varphi) = \int_{G(\ell)/Z(G)} \int_{Z(G)} F_{\ell,\varphi}(xz) X_\ell(xz)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\dot{x},$$

les intégrales successives étant convergentes.

Un cas particulier de ce théorème est obtenu par DUFLO dans [5, chap. IX, prop. 2.4.1].

Nous avons démontré ce théorème dans [4] pour G résoluble. Si G est compact, le théorème résulte facilement de la formule de caractère de H. Weyl.

La formule du caractère démontrée dans [15] est valable pour tout φ dans $D(U)$, où U est un voisinage de l'élément neutre du groupe G. Notre résultat est valable pour tout fonction φ dans $D(G)$.

D'après [1], [2], [7], toute représentation de G de carré intégrable modulo $Z(G)$ est associée à une forme linéaire vérifiant les hypothèses de l'introduction. Le théorème s'applique donc en particulier à de telles représentations.

Plan

0. Principales notations.

0.1. — Si G est un groupe topologique, on note G_0 la composante neutre de G.

0.2. — Soit G un groupe de Lie d' algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$. Si H est un sous-groupe de G, on notera $Z_H(V)$ le centralisateur de V dans H. Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, on notera $Z_{\mathfrak{h}}(V)$ le centralisateur de V dans $\mathfrak{h}$. Le centre de $\mathfrak{g}$ sera noté $Z(\mathfrak{g})$. Soit X une partie de G. On notera $Z_H(X)$ le centralisateur de X dans H. Le centre de G sera noté $Z(G)$.

0.3. — Soient G, $\mathfrak{g}$ comme en 0.2. Supposons donnée une représentation du groupe G dans un espace vectoriel de dimension finie V. On en déduit une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans V. Si v est dans V, on notera $G(v)$ (resp. $\mathfrak{g}(v)$) le stabilisateur (resp. l'annulateur) de v dans G (resp. dans $\mathfrak{g}$).

0.4. — Soit G un groupe localement compact. On notera Δ_G la fonction module sur G. Soient H un sous-groupe fermé de G, $\mathrm{d}g$ et $\mathrm{d}h$ des mesures de Haar à gauche sur G et H. On notera $\Delta_{H,G}$ la fonction sur H définie par $\Delta_{H,G}(h) = \Delta_H(h)\Delta_G(h)^{-1}$. Si $\Delta_{H,G} = 1$, on notera $\mathrm{d}g/\mathrm{d}h$ la mesure quotient de dg par $\mathrm{d}h$ sur l'espace G/H.

0.5. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Si V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{g}$, on notera $[V,W]$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ engendré par les vecteurs $[v,w]$ avec v dans V et w dans W.

0.6. — Soit V un espace vectoriel de dimension finie. On notera V' son dual. Si W est un sous-espace vectoriel de V et si ℓ est dans V', on notera ℓ_W la restriction de ℓ à W. Soit B une forme bilinéaire antisymmétrique sur V. On notera B^W la restriction de B à W et W^B l'orthogonal de W pour B.

0.7. — Si V est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, on notera V^c son complexifié et $x \mapsto \bar{x}$ l'involution de V^c définie par la forme réelle V.

Si λ est dans $(V^c)'$ on notera $\bar{\lambda}$ la forme linéaire sur (V^c) définie par $\bar{\lambda}(X) = \overline{\lambda(\overline{X})}$. On dira que λ est *réelle* (resp. *imaginaire pure*) si $\lambda = \bar{\lambda}$ (resp. $\lambda = -\bar{\lambda}$). Si λ n'est ni réelle ni imaginaire pure on dira que λ est *complexe.* Si B est une forme bilinéaire sur V, on notera par la même lettre l'extension complexe de B à V^c.

0.8. — Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et ses idéaux sont considérés comme G-modules pour la représentation adjointe. Le dual de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ ou de l'un de ses idéaux est considéré comme G-module pour la représentation contragrédiente. Si ℓ est dans $\mathfrak{g}'$, on notera O_ℓ l'orbite de ℓ sous l'action de G. L'orbite O_ℓ porte une mesure G-invariante. On notera $\mathrm{d}b_{O_\ell}$ cette mesure normalisée comme en [4, chap. 2, 2.6]. On notera B_ℓ la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$ définie par $B_\ell(X,Y) = \ell([X,Y])$.

0.9. — Si X est un espace localement compact, on notera $C_c(X)$ l'espace des fonctions continues et à support compact définies sur X et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si X est une variété C^∞, on notera $C^\infty(X)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, définies sur X et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On notera $D(X)$ l'espace $C_c(X) \cap C^\infty(X)$.

1. Construction de représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie connexe à radical co-compact

Soit G un groupe de Lie connexe à radical co-compact. On note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

1.1. — Soit ℓ une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$. Soit W une polarisation positive en ℓ dans $\mathfrak{g}^c$. (Il en existe d'après [8].) D'après [5, chap. 5, lemme 4.3.8], si X est dans $\mathfrak{g}(\ell)$ le nombre $\theta(X) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Trad}_{(\mathfrak{g}^c/W)}\, X$ ne dépend pas du choix de W. On dira que la forme linéaire ℓ est *admissible* s'il existe un caractère du groupe $G(\ell)_0$ de différentielle $X \mapsto i\ell(X) + \theta(X)$. On notera $\widetilde{X}_\ell$ ce caractère. D'après [11, rem. 2, p. 154], cette définition est équivalente à celle de [11]. On dira que ℓ est *bien polarisable* si elle admet une polarisation résoluble qui vérifie la condition de Pukanszky.

1.2. — Soient ℓ une forme linéaire admissible sur $\mathfrak{g}$ et τ une représentation unitaire irréductible du groupe $G(\ell)$ dont la restriction à $G(\ell)_0$ est un multiple de $\widetilde{X}_\ell$. D'après [15], on peut associer au couple (ℓ, τ) une classe d'équivalence des représentations unitaires irréductibles du groupe G.

Notons $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et f la restriction de ℓ à $\mathfrak{n}$. D'après [8], il existe une polarisation positive W en ℓ dans $\mathfrak{g}^c$, stable par $G(\ell)$, admissible pour $\mathfrak{n}$ et telle que $W \cap \mathfrak{n}^c$ soit stable par $G(f)$.

Posons $\mathfrak{d} = W \cap \mathfrak{g}$ et notons D_0 le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{d}$. Le groupe $D = G(\ell)D_0$ est fermé dans G. Le caractère $\widetilde{X}_\ell$ du groupe $G(\ell)_0$ se prolonge en un caractère unitaire du groupe D_0 de différentielle $X \mapsto i\ell(X) + \theta(X)$ (où $\theta(X) = -\frac{1}{2}\operatorname{Im}\operatorname{Trad}_{(\mathfrak{g}^c/W)} X$ pour X dans $\mathfrak{d}$), qu'on note aussi $\widetilde{X}_\ell$. La représentation τ du groupe $G(\ell)$ se prolonge en une représentation du groupe D, notée aussi τ , dont la restriction à D_0 est un multiple de $\widetilde{X}_\ell$. Sur l'espace des fonctions numériques sur G qui vérifient $\varphi(xd) = \Delta_{D,G}(d)\varphi(x)$ pour tout x dans G et pour tout d dans D, on fixe une mesure G-invariante notée $\int_{G/D} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$. On note $C^\infty(\ell, \tau, W, G)$ l'espace des fonctions C^∞ sur G à valeurs dans l'espace de τ qui vérifient :

(i) $\varphi(xd) = \Delta_{D,G}(d)^{1/2}\tau(d)^{-1}\varphi(x)$ pour tout x dans G et pour tout d dans D.

(ii) $\lambda(X)\varphi = (-i\ell(X) + \frac{1}{2}\operatorname{Trad}_{(\mathfrak{g}^c/W)} X)\varphi$, pour tout X dans W et où $\lambda(X)$ est le champ des vecteurs invariant à gauche determiné par X.

(iii) $\int_{G/D} |\varphi|^2\,\mathrm{d}x < +\infty$.

On note $H(\ell, \tau, W, G)$ le complété de $C^\infty(\ell, \tau, W, G)$ pour la norme

$$\varphi \mapsto \Big(\int_{G/D} |\varphi|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}$$

et $T(\ell, \tau, W, G)$ la représentation de G par translations à gauche dans $H(\ell, \tau, W, G)$. La représentation $T(\ell, \tau, W, G)$ est une représentation unitaire irréductible du groupe G et sa classe d'équivalence ne dépend pas du choix de W [15, th. 3.3]. Si le groupe $G(\ell)$ est connexe on a $\tau = \widetilde{X}_\ell$. Dans ce cas, on notera $T(\ell, W, G)$ la représentation $T(\ell, \widetilde{X}_\ell, W, G)$ et $T(\ell, G)$ sa classe d'équivalence.

1.3. — On suppose ici que G est un groupe de Lie compact, connexe, simplement connexe. Soit ℓ une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ admissible et bien polarisable. D'après [11, II.3, Lemme], l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\ell)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Soit A le système des racines associé à $(\mathfrak{g}(\ell)^c, \mathfrak{g}^c)$. Pour α dans A, on note $\mathfrak{g}^\alpha$ le sous-espace radiciel correspondant. Posons

$$A^+ = \{\alpha \in A\,;\ (i\ell, \alpha) > 0\}, \quad A^- = \{\alpha \in A\,;\ -\alpha \in A^+\}.$$

Il est facile de voir que A^+ est un système des racines positives et que $\mathfrak{g}(\ell)^c + \sum_{\alpha \in A^-} \mathfrak{g}^\alpha$ est une polarisation positive en ℓ. Posons

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in A^+} a.$$

D'après [9, 21.14.8 (i) et 21.16.3], il existe un caractère unitaire du groupe $G(\ell)$ de différentielle $\rho_{\mathfrak{g}(\ell)}$. On notera ξ_ρ ce caractère. Pour α dans A, on note ξ_α le caractère unitaire du groupe $G(\ell)$ de différentielle $\alpha_{\mathfrak{g}(\ell)}$. D'après ce qui précède, il existe un caractère unitaire X_ℓ du groupe $G(\ell)$ de différentielle $i\ell_{\mathfrak{g}(\ell)}$. La proposition suivante est bien connue [15, § 5] et [17, 4.9.6] :

PROPOSITION 1.3. — *Le poids $i\ell - \rho$ est dominant pour A^+. La représentation*

$$T\Big(\ell, \mathfrak{g}(l)^c + \sum_{\alpha \in A^-} \mathfrak{g}^\alpha, G\Big)$$

est la représentation unitaire irréductible de G de plus haut poids $i\ell - \rho$. Si x est dans $G(\ell)$ et si $\xi_\alpha(x) \neq 1$ pour tout α dans A, on a

$$\operatorname{Tr} T(\ell, G)(x) = \Big(\sum_{w \in W} \det w\, X_\ell\,(w^{-1}x)\Big)\big(\xi_\rho(x)\big) \prod_{\alpha \in A^+} \big(1 - \xi_{-\alpha}(x)\big)^{-1},$$

où W est le groupe de Weyl associé à A.

2. La structure de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie unimodulaire. On suppose qu'il existe une forme linéaire ℓ sur $\mathfrak{g}$ telle que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\ell)$ soit abélienne et réductive dans $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{r}$ le radical de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. D'après [16, cor. 5.2], il existe un facteur de Levi $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ qui est stable par $\mathfrak{g}(\ell)$. Pour λ dans $(\mathfrak{g}(\ell)^c)'$, avec $\lambda \neq 0$, on note :

$$(\mathfrak{g}^c)_\lambda = \big\{X \in \mathfrak{g}^c\,;\ [A, X] = \lambda(A)X\,;\ \text{pour tout } A \text{ dans } \mathfrak{g}(\ell)^c\big\}$$

et $P(\mathfrak{g}(\ell))$ l'ensemble des λ dans $(\mathfrak{g}(\ell)^c)'$ qui sont différents de 0 et pour lesquels $(\mathfrak{g}^c)_\lambda$ est non trivial. Si λ est dans $P(\mathfrak{g}(\ell))$, $\bar{\lambda}$ est dans $P(\mathfrak{g}(\ell))$

et $(\mathfrak{g}^c)_{\bar{\lambda}} = \overline{(\mathfrak{g}^c)_\lambda}$. Il existe donc un sous-espace vectoriel $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ tel que l'on ait :

$$\mathfrak{m}^c = \sum_{\lambda \in P(\mathfrak{g}(\ell))} \oplus (\mathfrak{g}^c)_\lambda.$$

Notons $\mathfrak{h}$ le centralisateur de $\mathfrak{g}(\ell)$ dans $\mathfrak{g}$. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Si λ est dans $P(\mathfrak{g}(\ell))$, on dira que λ est un *poids* pour $\mathfrak{g}(\ell)$. La proposition suivante se démontre comme la Proposition 2.1 de [4] :

PROPOSITION 2.1.

(a) *On a* $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{r}, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{s} + \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}.$

(b) *La forme linéaire* ℓ *est nulle sur* $\mathfrak{m}$. *Si* λ *est dans* $P(\mathfrak{g}(\ell))$, $-\lambda$ *est dans* $P(\mathfrak{g}(\ell))$ *et la restriction de* B_ℓ *à* $(\mathfrak{g}^c)_\lambda + (\mathfrak{g}^c)_{-\lambda}$ *est non dégénérée. On a* $\dim(\mathfrak{g}^c)_\lambda = \dim(\mathfrak{g}^c)_{-\lambda}$.

(c) *On a* $\operatorname{Ker} B_\ell^{\mathfrak{m}} = \{0\}, \quad \operatorname{Ker} B_\ell^{\mathfrak{h}} = \mathfrak{g}(l) = Z(\mathfrak{h})$.

On note $Z(\mathfrak{h})^\perp$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathfrak{h}$ qui sont nulles sur $Z(\mathfrak{h})$.

PROPOSITION 2.2.

(a) *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$ *est unimodulaire.*

(b) *Soit* H *un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$. *Alors,*

$$H \cdot \ell_{\mathfrak{h}} = \ell_{\mathfrak{h}} + Z(\mathfrak{h})^\perp.$$

Démonstration.

(a) Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Posons $H_1 = Z_G(\mathfrak{g}(\ell))_0$. L algèbre de Lie du groupe H_1 est l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On va définir trois fonctions polynomiales sur $\mathfrak{h}'$:

• Soit E une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{h}/\mathfrak{g}(\ell)$. Pour tout f dans $\mathfrak{h}'$, la forme bilinéaire B_f définit par passage au quotient une forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{g}(\ell)$. On notera $Q_{\mathfrak{h}}(f)$ le pfaffien de cette forme calculé dans la base E.

• Soit E' une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}$. La décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ permet de définir un plongement i de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{g}'$. Soit f dans $\mathfrak{h}'$. On note $Q_{\mathfrak{m}}(f)$ le pfaffien de la forme bilinéaire alternée $B_{i(f)}^{\mathfrak{m}}$ calculé dans la base E'.

• Pour tout f dans $\mathfrak{h}'$, la forme bilinéaire $B_{i(f)}$ définit par passage au quotient une forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\ell) = \mathfrak{h}/\mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{m}$. On notera $Q(f)$ le pfaffien de cette forme calculé dans la base $E \cup E'$.

Le polynôme Q est H_1-invariant et le polynôme $Q_{\mathfrak{h}}$ est semi-invariant pour H_1 de poids $\Delta_{H_1}^{-1}$. D'après l'assertion (c) de la PROPOSITION 2.1.,

$H_1 \cdot \ell_{\mathfrak{h}}$ est un ouvert de $\ell_{\mathfrak{h}} + Z(\mathfrak{h})^{\perp}$. Par conséquent Q est constant sur $\ell_{\mathfrak{h}} + Z(\mathfrak{h})^{\perp}$. Comme $i(\ell_{\mathfrak{h}}) = \ell$, Q est non nul sur $\ell_{\mathfrak{h}} + Z(\mathfrak{h})^{\perp}$. Comme pour tout f dans $\mathfrak{h}'$ on a : $Q(f) = Q_{\mathfrak{h}}(f)Q_{\mathfrak{m}}(f)$, le polynôme $Q_{\mathfrak{h}}$ est constant et non nul sur $\ell_{\mathfrak{h}} + Z(\mathfrak{h})^{\perp}$. On en déduit que $\Delta_{H_1} = 1$, d'où l'assertion.

(b) L'assertion résulte de (a) et de [2, th. 2.9]. □

Le Lemme suivant se démontre facilement :

LEMME 2.3. — *Soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{s}$ et telle que $[\mathfrak{p}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$. Alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{s} \oplus Z_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{s})$. Si de plus $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{s}$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ est réductive et $Z(\mathfrak{p}) = Z_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{s})$.*

PROPOSITION 2.4.

(a) *L'algèbre de Lie $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$.*

(b) *On a $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{s}$.*

(c) *On a $\mathfrak{g}(\ell) = \mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{r}$.*

(d) *L'algèbre de Lie $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{s}$.*

Démonstration.

(a) Posons $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{s}$. D'après le LEMME 2.3, l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ est réductive et $\mathfrak{p} = Z(\mathfrak{p}) \oplus \mathfrak{s}$. Posons $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}(\ell) + Z(\mathfrak{p})$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ est réductive dans $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{s} \oplus Z(\mathfrak{p})$. Il est clair que l'algèbre de Lie $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{s}$ est réductive dans $\mathfrak{s}$. Soit $\mathfrak{k}$ le centralisateur de $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{s}$. D'après [10, prop. 1.7.7 (iii)], l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ est réductive dans $\mathfrak{s}$ et d'après [6, § 6, n° 6, cor. 1], l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$.

D'autre part $\mathfrak{k} = Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{s}) = Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{b}) = Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{g}(\ell)) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$.

(b) L'algèbre de Lie $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$ est réductive dans $\mathfrak{h}$. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{h}$, stable par $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$ et supplémentaire de $Z(\mathfrak{h})$ dans $\mathfrak{h}$. On a :

$$[\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}, \mathfrak{h}] = [\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}, Z(\mathfrak{h}) + V] \subset V.$$

Soit H un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. D'après l'assertion (b) de la PROPOSITION 2.2, il existe x dans H tel que la forme linéaire $x \cdot \ell_{\mathfrak{h}}$ soit nulle sur V. Il en résulte que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} \subset \mathfrak{h}(x \cdot \ell_{\mathfrak{h}}) = x \cdot \mathfrak{h}(\ell_{\mathfrak{h}})$. Vu l'assertion (c) de la PROPOSITION 2.1, l'algèbre de Lie $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$ est contenue dans $\mathfrak{g}(\ell)$. Comme l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{s}$ est contenue dans $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$, l'assertion s'ensuit.

(c) Résulte de (b) et de l'assertion (a) de la PROPOSITION 2.1.

(d) On a $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} = Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{s}) = Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s})$. Pour tout X dans $\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{s}$ l'opérateur $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}} X$ est semi-simple. L'assertion s'ensuit. □

PROPOSITION 2.5.

(a) *Il existe un facteur de Levi* $\mathfrak{s}$ *de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *stable par* $\mathfrak{g}(\ell)$ *et tel que l'on ait* $\mathfrak{g}(\ell_{\mathfrak{r}}) = \mathfrak{s} + \mathfrak{g}(\ell)$.

(b) On a alors $\mathfrak{s}(\ell_{\mathfrak{s}}) = \mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{s}$.

Démonstration.

(a) Posons $\mathfrak{p} = \mathfrak{s} + \mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{r}$. D'après [6, § 6, n° 5, th. 4], l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$. Il existe donc un sous-espace vectoriel V de $\mathfrak{r}$, stable par $\mathfrak{p}$ et supplémentaire de $\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{r}$. On a $V = V \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$. Soient G, H_1 comme dans la démonstration de (a) de la PROPOSITION 2.2. Il existe x dans H_1 tel que la restriction de la forme linéaire $x \cdot \ell_{\mathfrak{h}}$ à $V \cap \mathfrak{h}$ soit nulle. On en déduit que $(x \cdot \ell)_V = 0$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ est contenue dans $\mathfrak{g}(x \cdot \ell_{\mathfrak{r}})$. Posons $\mathfrak{s}_1 = x^{-1} \cdot \mathfrak{s}$. Comme x est dans H_1, l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}_1$ est stable par $\mathfrak{g}(\ell)$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{g}(\ell)$ est contenue dans $\mathfrak{g}(\ell_{\mathfrak{r}})$ et

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{g}(\ell_{\mathfrak{r}}) &= \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{r} + \dim\bigl(\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{r}\bigr) \\ &= \dim \mathfrak{p} = \dim(x^{-1} \cdot \mathfrak{p}). \end{aligned}$$

L'assertion résulte de ce que $x^{-1} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{g}(\ell)$.

(b) Résulte de (a). ∎

PROPOSITION 2.6.

(a) *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{r}(\ell_{\mathfrak{r}})$ *est égale à* $\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{r}$.

(b) *La forme bilinéaire* $B_{\ell}^{\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}}$ *est non dégénérée.*

(c) *Soit* $\mathfrak{s}$ *un facteur de Levi de* $\mathfrak{g}$ *stable par* $\mathfrak{g}(\ell)$ *et tel que l'on ait* $\mathfrak{g}(\ell_{\mathfrak{r}}) = \mathfrak{s} + \mathfrak{g}(\ell)$. *La forme bilinéaire* $B_{\ell}^{\mathfrak{s} \cap \mathfrak{m}}$ *est non dégénérée.*

Démonstration.

(a) résulte de l'assertion (c) de la PROPOSITION 2.4 et de l'assertion (a) de la PROPOSITION 2.5. Soit $\mathfrak{s}$ comme en (c). Les assertions (b) et (c) résultent de l'assertion (c) de la PROPOSITION 2.1 et de ce que les espaces vectoriels $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{r}$ sont orthogonaux pour la forme bilinéaire B_{ℓ}. ∎

Remarque. — Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Des résultats proches aux résultats de ce paragraphe sont obtenus par N. H.ANH [1, 2] lorsque $G(\ell)/Z(G)$ est compact et par M. DUFLO [12, chap. III, § 15] lorsque G est un groupe de Lie algébrique.

3. Lemmes de réduction

Soit G un groupe de Lie connexe, simplement connexe, à radical co-compact, unimodulaire. On note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On suppose qu'il existe une forme linéaire admissible et bien polarisable ℓ sur $\mathfrak{g}$ telle que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\ell)$ soit réductive dans $\mathfrak{g}$. Comme ℓ est bien polarisable, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\ell)$ est abélienne. On note $\mathfrak{r}$ le radical de $\mathfrak{g}$. On fixe un facteur de Levi $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$, stable par $\mathfrak{g}(\ell)$ et tel que $\mathfrak{g}(\ell_{\mathfrak{r}}) = \mathfrak{s} + \mathfrak{g}(\ell)$. (Il en existe d'après la PROPOSITION 2.5.) Soit R (resp. S) le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{r}$ (resp. $\mathfrak{s}$). Les groupes R et S sont fermés et simplement connexes et le groupe G est le produit semi-direct de S par R. Le groupe S est compact semi-simple.

3.1.

LEMME 3.1.1. — *Les groupes $S(\ell_{\mathfrak{s}})$ et $R(\ell_{\mathfrak{r}})$ sont connexes. En outre, on a $G(\ell) = S(\ell_{\mathfrak{s}})R(\ell_{\mathfrak{r}})$.*

Démonstration. — Il résulte des PROPOSITIONS 2.4 et 2.5 que l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}(\ell_{\mathfrak{s}})$ est une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$. Identifions $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s}'$ par la forme de Killing. D'après [11, II.3, Lemme], $\ell_{\mathfrak{s}}$ est semi-simple et régulier. Comme $S(\ell_{\mathfrak{s}}) = Z_s(\ell_{\mathfrak{s}})$, il résulte de [9, 21.7.14] que le groupe $S(\ell_{\mathfrak{s}})$ est connexe. L'algèbre de Lie $\mathfrak{r}$ est unimodulaire et d'après l'assertion (a) de la PROPOSITION 2.6, l'algèbre de Lie $\mathfrak{r}(\ell_{\mathfrak{r}})$ est réductive dans $\mathfrak{r}$. Il résulte de [4, prop. 2.3] que le groupe $R(\ell_{\mathfrak{r}})$ est connexe. D'après les PROPOSITIONS 2.5 et 2.6 et d'après ce qui précède, le groupe $S(\ell_{\mathfrak{s}})R(\ell_{\mathfrak{r}})$ est contenu dans $G(\ell)$. Soit g dans $G(\ell)$. On a $g = xy$ avec x dans S et y dans R. Comme S est contenu dans $G(\ell_{\mathfrak{r}})$, y est dans $G(\ell_{\mathfrak{r}}) \cap R = R(\ell_{\mathfrak{r}})$. Par conséquent x est dans $S \cap G(\ell) \subset S(\ell_{\mathfrak{s}})$ et $G(\ell) = S(\ell_{\mathfrak{s}})R(\ell_{\mathfrak{r}})$. □

LEMME 3.1.2. — *Soit $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il existe une polarisation positive W en ℓ dans $\mathfrak{g}^c$ qui vérifie les conditions suivantes :*

(i) *W est admissible pour $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}^c \cap W$ est stable par $G(\ell_{\mathfrak{n}})$.*

(ii) *W est admissible pour $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{r}^c \cap W$ est stable par $G(\ell_{\mathfrak{r}})$.*

(iii) *$W \cap \mathfrak{s}^c$ est une polarisation en $\ell_{\mathfrak{s}}$ dans $\mathfrak{s}^c$.*

(iv) *W (resp. $W \cap \mathfrak{r}^c$, $W \cap \mathfrak{s}^c$) vérifie la condition de Pukanszky.*

Démonstration. — Soit W_1 une polarisation positive en $\ell_{\mathfrak{n}}$ dans $\mathfrak{n}^c$ stable par $G(\ell_{\mathfrak{n}})$. (Il en existe d'après [8, prop. II].) Notons q la restriction de ℓ à $\mathfrak{r}(\ell_{\mathfrak{n}})$. Soit W_2 une polarisation positive en q dans $\mathfrak{r}(\ell_{\mathfrak{n}})^c$. Soit W_3 une polarisation positive en $\ell_{\mathfrak{s}}$ dans $\mathfrak{s}^c$. (Il en existe d'après [8].)

Posons $W = W_1 + W_2 + W_3$. Il est clair que W vérifie les conditions (i), (ii), (iii) du lemme. D'après [15, prop. 2.2], W vérifie la condition (iv). □

LEMME 3.1.3.

(a) *Soit W la polarisation en ℓ construite dans le Lemme* 3.1.2. *Pour tout X dans $\mathfrak{s}$ on a* $\operatorname{Trad}_{(\mathfrak{r}^c/(\mathfrak{r}^c\cap W))} X = 0$.

(b) *La forme linéaire $\ell_{\mathfrak{r}}$ est admissible. La forme linéaire $\ell_{\mathfrak{s}}$ est admissible.*

(c) *Il existe un caractère unitaire du groupe $G(\ell)$ de différentielle $X \mapsto i\ell(X)$.*

Démonstration.

(a) L'application $X \mapsto \operatorname{Trad}_{(\mathfrak{r}^c/(\mathfrak{r}^c\cap W))} X$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ dans $\mathbb{C}$. Comme $\mathfrak{s}$ est une algèbre de Lie semi-simple, $\operatorname{Trad}_{(\mathfrak{r}^c/\mathfrak{r}^c\cap W))} X = 0$ pour tout X dans $\mathfrak{s}$.

(b) Comme le groupe R est simplement connexe, la forme linéaire $\ell_{\mathfrak{r}}$ est admissible. La forme linéaire ℓ étant admissible, il existe un caractère unitaire du groupe $G(\ell)$ de différentielle $X \mapsto i\ell(X) - \frac{1}{2}\operatorname{Im}\operatorname{Trad}_{(\mathfrak{g}^c/W)} X$. La restriction de ce caractère à $S(\ell_{\mathfrak{s}})$ est un caractère unitaire de $S(\ell_{\mathfrak{s}})$ de différentielle

$$X \to i\ell_{\mathfrak{s}}(X) - \frac{1}{2}\operatorname{Im}\operatorname{Trad}_{(\mathfrak{s}^c/(\mathfrak{s}^c\cap W)} X - \frac{1}{2}\operatorname{Im}\operatorname{Trad}_{(\mathfrak{r}^c/(\mathfrak{r}^c\cap W))} X.$$

L'assertion résulte alors de (a).

(c) Comme le groupe $G(\ell)$ est le produit direct des groupes $S(\ell_{\mathfrak{s}})$ et $R(\ell_{\mathfrak{r}})$ et comme $R(\ell_{\mathfrak{r}})$ est simplement connexe, il suffit de montrer qu'il existe un caractère unitaire du groupe $S(\ell_{\mathfrak{s}})$ de différentielle $X \mapsto i\ell_{\mathfrak{s}}(X)$. D'après la démonstration de l'assertion (b) ci-dessus, il existe un caractère du groupe $S(\ell_{\mathfrak{s}})$ de différentielle $X \mapsto i\ell_{\mathfrak{s}}(X) - \frac{1}{2}\operatorname{Im}\operatorname{Trad}_{(\mathfrak{s}^c/(\mathfrak{s}^c\cap W))} X$. Reprenons les notations de 1.3. On a $\frac{1}{2}\operatorname{Im}\operatorname{Trad}_{(\mathfrak{s}^c/(\mathfrak{s}^c\cap W))} X = \rho(X)$ pour tout X dans $\mathfrak{s}(\ell_{\mathfrak{s}})$. D'après [9, 21.14.8 (i) et 21.16.3], il existe un caractère du groupe $S(\ell_{\mathfrak{s}})$ de différentielle $X \mapsto \rho(X)$. L'assertion s'ensuit. ∎

3.2. — Dans ce qui suit, on utilise en plus les notations de 1.2. La polarisation W en ℓ est celle construite dans le LEMME 3.1.2. Soit s dans S. On définit un opérateur $V(s)$ dans $C^\infty(\ell_{\mathfrak{r}}, W\cap\mathfrak{r}^c, R)$ par $V(s)\varphi(x) = \varphi(s^{-1}xs)$. Il est facile de vérifier que $V(s)$ définit bien un opérateur dans $C^\infty(\ell_{\mathfrak{r}}, W\cap\mathfrak{r}^c, R)$ et que cet opérateur conserve la norme sur $C^\infty(\ell_{\mathfrak{r}}, W\cap\mathfrak{r}^c, R)$. L'opérateur $V(s)$ se prolonge par continuité en un opérateur dans $H(\ell_{\mathfrak{r}}, W\cap\mathfrak{r}^c, R)$ qu'on note aussi $V(s)$. On définit une représentation unitaire $T^e(\ell_{\mathfrak{r}}, W\cap\mathfrak{r}^c, R)$ du groupe G dans $H(\ell_{\mathfrak{r}}, W\cap\mathfrak{r}^c, R)$ par :

$$T^e(\ell_{\mathfrak{r}}, W\cap\mathfrak{r}^c, R)(sr) = V(s)T(\ell_{\mathfrak{r}}, W\cap\mathfrak{r}^c, R)(r),$$

pour s dans S et r dans R. Soit q une forme linéaire admissible et bien polarisable sur $\mathfrak{s}$. Identifions $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s}'$ par la forme de Killing. D'après [11, II.3, Lemme], q est semi-simple et régulier et d'après [9, 21.7.14], le groupe $S(q) = Z_S(q)$ est connexe. Soit U une polarisation positive en q dans $\mathfrak{s}^c$. On note f la forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ définie par $f_\mathfrak{r} = \ell_\mathfrak{r}$, $f_\mathfrak{s} = q$. Il résulte de l'assertion (a) du LEMME 3.1.3. que f est une forme linéaire admissible. Soit $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il est facile de vérifier que $U + W \cap \mathfrak{r}^c$ est une polarisation positive en f dans $\mathfrak{g}^c$, stable par $G(f)$, admissible pour $\mathfrak{n}$ et que $\mathfrak{n}^c \cap (U + W \cap \mathfrak{r}^c) = \mathfrak{n}^c \cap W$ est stable par $G(f_\mathfrak{n}) = G(\ell_\mathfrak{n})$. D'après [15, prop. 2.2], $U + W \cap \mathfrak{r}^c$ vérifie la condition de Pukanszky.

LEMME 3.2.1. — *La représentation du groupe G dans*

$$H(q, U, S) \otimes H(\ell_\mathfrak{r}, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$$

définie par $sr \mapsto T(q, U, S)(s) \otimes T^e(\ell_\mathfrak{r}, W \cap \mathfrak{r}^c, R)(sr)$, pour s dans S et r dans R, est équivalente à la représentation $T(f, U + W \cap \mathfrak{r}^c, G)$.

Démonstration. — Soient $\varphi_1 \in C^\infty(q, U, S)$ et $\varphi_2 \in C^\infty(\ell_\mathfrak{r}, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$. La fonction $B(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$ sur G définie par

$$B(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(sr) = \varphi_1(s)\varphi_2(srs^{-1}),$$

pour s dans S et r dans R, est dans $C^\infty(f, U + W \cap \mathfrak{r}^c, G)$. En multipliant l'opérateur B par un scalaire positif non nul, on peut supposer que c' est une isométrie de $C^\infty(q, U, S) \otimes C^\infty(\ell_\mathfrak{r}, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$ dans $C^\infty(f, U + W \cap \mathfrak{r}^c, G)$. L'opérateur B se prolonge en une isométrie de $H(q, U, S) \otimes H(\ell_\mathfrak{r}, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$ dans $H(f, U + W \cap \mathfrak{r}^c, G)$ et il est facile de voir qu'il entrelace les deux représentations du Lemme. Comme celles-ci sont irréductibles, elles sont équivalentes. ☐

COROLLAIRE 3.2.2. — *La représentation du groupe G dans$H(\ell_\mathfrak{s}, W \cap \mathfrak{s}^c, S) \otimes H(\ell_\mathfrak{r}, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$ définie par $sr \mapsto T(\ell_\mathfrak{s}, W \cap \mathfrak{s}^c, S)(s) \otimes T^e(\ell_\mathfrak{r}, W \cap \mathfrak{r}^c, R)(sr)$, pour s dans S et r dans R, est équivalente à la représentation $T(\ell, W, G)$.*

Soit p la forme linéaire sur $\mathfrak{s}$ qui est égale à $-\frac{1}{2} i \operatorname{Trad}_{(\mathfrak{s}^c/(W \cap \mathfrak{s}^c))} X$ sur $\mathfrak{s}(\ell_\mathfrak{s})$ et qui est nulle sur l'orthogonal de $\mathfrak{s}(\ell_\mathfrak{s})$ dans $\mathfrak{s}$ pour la forme de Killing sur $\mathfrak{s}$. La forme linéaire p est admissible et bien polarisable. L'algèbre de Lie $W \cap \mathfrak{s}^c$ est une polarisation positive en p dans $\mathfrak{s}^c$. D'après la PROPOSITION 1.3, la représentation $T(p, W \cap \mathfrak{s}^c, S)$ est la représentation triviale du groupe S. Soit e la forme sur $\mathfrak{g}$ définie par $e_\mathfrak{r} = \ell_\mathfrak{r}$, $e_\mathfrak{s} = p$. La forme linéaire e est admissible et bien polarisable et le groupe $G(e) = G(\ell)$ est connexe. Le corollaire suivant résulte du LEMME 3.2.1 :

COROLLAIRE 3.2.3. — *La représentation $T^e(\ell_{\mathfrak{r}}, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$ du groupe G est dans la classe d'équivalence $T(e, G)$.*

Soit T un tore maximal dans S. On note $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie. Posons $G_1 = TR$ et $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{t}+\mathfrak{r}$. Soit ℓ_1 la forme linéaire sur $\mathfrak{g}_1$ définie par $(\ell_1)_{\mathfrak{r}} = \ell_{\mathfrak{r}}$, $(\ell_1)_{\mathfrak{t}} = 0$. Le groupe $G_1(\ell_1) = TR(\ell_{\mathfrak{r}})$ est connexe. L'algèbre de Lie $\mathfrak{t}^c + W \cap \mathfrak{r}^c$ est une polarisation positive en ℓ_1, stable par $G_1(\ell_1)$, admissible pour $\mathfrak{n}$ et telle que $\mathfrak{n}^c \cap (\mathfrak{t}^c + W \cap \mathfrak{r}^c)$ soit stable par $G_1((\ell_1)_{\mathfrak{n}}) = G_1(\ell_{\mathfrak{n}})$. D'après [5, chap. IV.3.1.7], la polarisation $\mathfrak{t}^c + W \cap \mathfrak{r}^c$ vérifie la condition de Pukanszky. Il résulte de l'assertion (a) du LEMME 3.1.3 que ℓ_1 est admissible.

LEMME 3.2.4. — *La restriction de $T^e(\ell_{\mathfrak{r}}, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$ à G_1 est équivalente à la représentation $T(\ell_1, \mathfrak{t}^c + W \cap \mathfrak{r}^c, G_1)$.*

Démonstration. — Soit φ dans $C^\infty(\ell_1, \mathfrak{t}^c + W \cap \mathfrak{r}^c, G_1)$. Soit $B\varphi$ la fonction sur R définie par $B\varphi(r) = \varphi(r)$. l'opérateur B envoie

$$C^\infty(\ell_1, \mathfrak{t}^c + W \cap \mathfrak{r}^c, G_1) \text{ dans } C^\infty(\ell_{\mathfrak{r}}, W \cap \mathfrak{r}^c, R).$$

En multipliant B par un scalaire positif non nul on peut supposer que c' est une isométrie. L'opérateur B se prolonge en une isométrie de $H(\ell_1, \mathfrak{t}^c + W \cap \mathfrak{r}^c, G_1)$ dans $H(\ell_{\mathfrak{r}}, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$ et il est facile de voir qu'il entrelace les deux représentations du Lemme. Comme celles-ci sont irréductibles, elles sont équivalentes. $\square$

4. Une intégrale invariante sur le groupe G

On conserve les hypothèses de 3. Les objets $G, S, R, \mathfrak{g}, \mathfrak{s}, \mathfrak{r}, \ell$ sont comme en 3. On utilise les objets $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{m}$, $(\mathfrak{g}^c)_\lambda$, $P(\mathfrak{g}(\ell))$ définis en 2. Le plus grand idéal nilpotent de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est noté $\mathfrak{n}$.

4.1. — Soit F une partie de $P(\mathfrak{g}(\ell))$. On notera $-F$ l'ensemble des poids λ de $P(\mathfrak{g}(\ell))$ tels que $-\lambda$ soit dans F et F_r (resp. F_i, F_c) l'ensemble des poids reéls (resp. imaginaires purs, complexes) contenus dans F. On dira que F est un *système de poids positifs* si :

(i) $F \cap (-F) = \emptyset$, $\quad FU(-F) = P(\mathfrak{g}(\ell))$;

(ii) F_c est stable par l'involution $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ de $(\mathfrak{g}(\ell)^c)'$.

LEMME 4.1.1. — *Soit F un système de poids positifs. Posons*

$$\rho_F = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in F} d_\lambda \cdot \lambda, \qquad où \quad d_\lambda = \dim(\mathfrak{g}^c)_\lambda.$$

Il existe un caractère du groupe $G(\ell)$ de différentielle $X \mapsto \rho_F(X)$.

Démonstration. — Il suffit de montrer qu'il existe un caractère du groupe $S(\ell_{\mathfrak{s}})$ de différentielle $X \mapsto \rho_F(X)$. Soit W la polarisation construite dans la démonstration du LEMME 3.1.2. Il résulte de l'assertion (c) du LEMME 3.1.3 qu'il existe un caractère du groupe $S(\ell_{\mathfrak{s}})$ de différentielle $X \mapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{Trad}_{(\mathfrak{g}^c/W)}\,X$ (ceci puisque $\mathrm{Trad}_{(\mathfrak{g}^c/W)}\,X$ est imaginaire pur pour tout X dans $\mathfrak{s}(\ell_{\mathfrak{s}})$). On a

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Trad}_{(\mathfrak{g}^c/W)}\,X = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in P(\mathfrak{g}(\ell))} (d_\lambda - w_\lambda)\lambda(X),$$

où $w_\lambda = \dim((\mathfrak{g}^c)_\lambda \cap W)$ pour λ dans $P(\mathfrak{g}(\ell))$. Il résulte de la PROPOSITION 2.1 que $w_\lambda + w_{-\lambda} = d_\lambda$. On en déduit que :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Trad}_{(\mathfrak{g}^c/W)}\,X = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in F} (w_{-\lambda} - w_\lambda)\lambda(X).$$

Il est clair qu'il existe un caractère du groupe $S(\ell_{\mathfrak{s}})$ de différentielle $X \mapsto \sum_{\lambda \in F} w_\lambda \cdot \lambda(X)$. Le Lemme résulte alors de ce que

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda \in F} (w_{-\lambda} - w_\lambda) \cdot \lambda + \sum_{\lambda \in F} w_\lambda \cdot \lambda = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in F} d_\lambda \cdot \lambda. \quad \square$$

On définit une forme hermitienne H_ℓ sur $\mathfrak{g}^c$ par $H_\ell(X,Y) = iB_\ell(X,Y)$. Soit λ dans $P(\mathfrak{g}(\ell))_i$. Il résulte de l'assertion (b) de la PROPOSITION 2.1 que la restriction H_ℓ^λ de H_ℓ à $(\mathfrak{g}^c)_\lambda$ est non dégénérée. On notera (p_λ, n_λ) la signature de H_ℓ^λ. Pour λ dans $P(\mathfrak{g}(\ell))$, on note ξ_λ le caractère du groupe $G(\ell)$ de différentielle $X \mapsto \lambda(X)$. Fixons un système de poids positifs F. On note ξ_{ρ_F} le caractère dy groupe $G(\ell)$ de différentielle $X \mapsto \rho_F(X)$, où ρ_F est comme dans le LEMME 4.1.1. Posons pour x dans $G(\ell)$:

$$c_{r,F}(x) = \mathrm{sgn} \prod_{\lambda \in F_r} \left(1 - \xi_{-\lambda}(x)\right)^{d_\lambda}.$$

LEMME 4.1.2. — *Soit $r_{\ell,F}$ la fonction sur $G(\ell)$ définie par :*

$$r_{\ell,F}(x) = (-1)^{i(F)} c_{r,F}(x) \xi_{\rho_F}(x) \prod_{\lambda \in F} \left(1 - \xi_{-\lambda}(x)\right)^{d_\lambda}$$

où $i(F) = \Sigma_{\lambda \in F_i} n_\lambda$. Alors, la fonction $r_{\ell,F}$ ne dépend pas du choix de système de poids positifs F.

Démonstration. — Elle résulte de ce que

$$r_{\ell,F}(x) = \prod_{\lambda\in P(\mathfrak{g}(\ell))_i} \big(\xi_{\lambda/2}(x) - \xi_{-\lambda/2}(x)\big)^{p_\lambda} \times \prod_{\lambda\in P(\mathfrak{g}(\ell))_c} \left|\xi_{\lambda/2}(x) - \xi_{-\lambda/2}(x)\right|^{d_\lambda/2} \times \prod_{\lambda\in P(\mathfrak{g}(\ell))_r} \left|\xi_{\lambda/2}(x) - \xi_{-\lambda/2}(x)\right|^{d_\lambda/2}$$

pour tout x dans $G(\ell)$. ▯

On notera r_ℓ la fonction du LEMME 4.1.2 et $G(\ell)'$ l'ensemble des x appartenant à $G(\ell)$ et tels que $r_\ell(x) \neq 0$. L'ensemble $G(\ell)'$ est un ouvert dense de $G(\ell)$ et son complémentaire dans $G(\ell)$ est de mesure nulle pour la mesure de Haar sur $G(\ell)$.

4.2. — L'algèbre de Lie $\mathfrak{r}$ est unimodulaire et l'algèbre de Lie $\mathfrak{r}(\ell_{\mathfrak{r}})$ est réductive dans $\mathfrak{r}$. D'après la Proposition 2.4 de [4], il existe un sous-groupe fermé, connexe, simplement connexe A de R d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ et un sous-groupe fermé, connexe, simplement connexe, invariant K de R d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) Le groupe R est le produit semi-direct de A par K.

(ii) Le groupe $R(\ell_{\mathfrak{r}})$ est le produit direct des groupes A et $Z(K)$ et $Z(K) = Z(R)_0$. (En particulier $Z(K)$ est connexe.) Comme $[\mathfrak{g}(\ell)\cap\mathfrak{r}, \mathfrak{s}] = [\mathfrak{r}(\ell_{\mathfrak{r}}), \mathfrak{s}] = \{0\}$, on a $Z(K) = Z(G)_0$.

(iii) L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ contient le plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$. Il est clair que $\mathfrak{r} = \mathfrak{h}\cap\mathfrak{r}+\mathfrak{m}\cap\mathfrak{r}$. Comme $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{r} = [\mathfrak{g}(\ell), \mathfrak{r}]$, $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{r}$ est contenu dans $\mathfrak{n}$ et d'après la condition (iii) ci-dessus, $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{r}$ est contenu dans $\mathfrak{k}$. Posons $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{h}$. On note U le sous-groupe analytique de R d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$. Posons $B = AS(\ell_{\mathfrak{s}})\cap G(\ell)'$. Il est clair que B est une partie ouverte et dense de $AS(\ell_{\mathfrak{s}})$. D'après la condition (ii) ci-dessus, on a $G(\ell)' = BZ(G)_0$.

LEMME 4.2. — *L'application* $(x, X, u) \mapsto \exp Xx\exp(-X)u$ *est un difféomorphisme de* $B\times\mathfrak{m}\cap\mathfrak{r}\times U$ *sur* BK.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{u}$. On note $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{n}$ et θ l'application du lemme.

(a) On suppose que $\mathfrak{z}\cap\mathfrak{h} \neq \{0\}$. On pose $\mathfrak{j} = \mathfrak{z}\cap\mathfrak{h}$ et on note J le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{j}$ et π l'application canonique $G \to G/J$. Il est facile de voir en utilisant l'hypothèse de récurrence que θ est bijective. Montrons qu'elle est régulière en tout point (x_0, X_0, u_0) de $B\times\mathfrak{m}\cap\mathfrak{r}\times U$. On note $\mathfrak{b}$ l'algèbre de Lie du groupe $AS(\ell_{\mathfrak{s}})$ et π' (resp. θ')

la différentielle de l'application π (resp. θ). Pour g dans G, on note L_g la différentielle de l'application $x \mapsto gx$ de G dans G.

L'espace tangent à (x_0, X_0, u_0) de la variété $B \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r} \times U$ s'identifie à $L_{x_0}(e)\mathfrak{b} \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r} \times L_{u_0}(e)\mathfrak{u}$ et l'espace tangent au $\theta(x_0, X_0, u_0)$ de la variété BK s'idenfie à $L_{\theta(x_0,X_0,u_0)}(\mathfrak{b} + \mathfrak{k})$. Il résulte de l'hypothèse de récurrence que l'application $\pi'\big(\theta(x_0, X_0, u_0)\big)\theta'(x_0, X_0, u_0)$ est surjective. Par conséquent, l'image par $\theta'(x_0, X_0, u_0)$ de $L_{x_0}(e)\mathfrak{b} \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r} \times L_{u_0}(e)\mathfrak{u}$ contient un sous-espace vectoriel W de $L_{\theta(x_0,X_0,u_0)}(\mathfrak{b} + \mathfrak{k})$, supplémentaire de $L_{\theta(x_0,X_0,u_0)}(\mathfrak{z})$ dans $L_{\theta(x_0,X_0,u_0)}(\mathfrak{b} + \mathfrak{k})$.

D'autre part, l'image par $\theta'(x_0, X_0, u_0)$ de $\{0\} \times \{0\} \times L_{u_0}(e)\mathfrak{z}$ est $L_{\theta(x_0,X_0,u_0)}\mathfrak{z}$. On en déduit que l'application $\theta'(x_0, X_0, u_0)$ est surjective. Comme $\dim(B \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r} \times U) = \dim(BK)$, $\theta'(x_0, X_0, u_0)$ est un isomorphisme.

(b) On suppose que $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$. L'idéal $\mathfrak{z}$ est alors contenu dans $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$ et la démonstration du lemme dans ce cas est analogue à la démonstration ci-dessus. $\square$

4.3. — On conserve les notations de 4.2. On note H le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et H_1 le sous-groupe analytique de G d' algèbre de Lie $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{r}$.

LEMME 4.3.1. — *Le groupe H est le centralisateur de $G(\ell)$ dans G.*

Démonstration. — L'image de $Z_G(G(\ell))$ par l'homomorphisme canonique $p : G \to G/R = S$ est contenu dans $Z_s(S(\ell_\mathfrak{s})) = S(\ell_\mathfrak{s})$. On en déduit que $Z_G(G(\ell))$ est contenu dans $S(\ell_\mathfrak{s})R$. Posons $G_1 = S(\ell_\mathfrak{s})R$. Notons $\mathfrak{g}_1$ l'algèbre de Lie du groupe G_1 et ℓ_1 la restriction de ℓ à $\mathfrak{g}_1$. Le groupe G_1 est résoluble, connexe, unimodulaire et $\mathfrak{g}_1(\ell_1) = \mathfrak{g}(\ell)$. L'assertion résulte alors de [4, Proposition 2.1 (d)]. $\square$

LEMME 4.3.2. — *Soient φ dans $C_c(G)$ et x dans $G(\ell)'$. La fonction $g \mapsto \varphi(gxg^{-1})$ est à support compact modulo H sur G.*

Démonstration. — Comme $G(\ell)' = BZ(G)_0$, il existe y dans B et z dans $Z(G)_0$ tels que $x = yz$. Notons C le support de φ. Soient s dans S, X dans $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$, h_1 dans H_1 tels que l'on ait $g = s \exp X h_1$. Comme gxg^{-1} est dans C, $\exp Xy \exp(-X)$ est dans $SCSz^{-1}$. D'après le LEMME 4.2, X est dans une partie compacte $C(x, \varphi)$ de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$, indépendante de g. Soit $C(x, \varphi)'$ l'image de $C(x, \varphi)$ par l'application exponentielle. On a $g \in SC(x, \varphi)'H$, d'où le Lemme. $\square$

L'application canonique $G \to G/H$ définit un isomorphisme de $\mathfrak{m}$ sur l'espace tangent $T_H(G/H)$ au point H de la varieté G/H. On identifie $\mathfrak{m}$ et $T_H(G/H)$ par cet isomorphisme. Comme G et H sont unimodulaires, il existe une unique forme différentielle G-invariante sur G/H dont la valeur au point H est la forme extérieure

$$\frac{1}{(2\pi)^m\, m\,!}\, B_\ell^{\mathfrak{m}} \wedge \cdots \wedge B_\ell^{\mathfrak{m}} \qquad \bigl(m = \tfrac{1}{2} \dim \mathfrak{m} \ \text{ facteurs}\bigr).$$

On notera $\mathrm{d}m_\ell$ la mesure sur G/H définie par cette forme. Soit φ une fonction dans $D(G)$. Soit x dans $G(\ell)'$. La fonction $g \mapsto \varphi(gxg^{-1})$ définit, par passage au quotient, une fonction sur G/H et, d'après le LEMME 4.3.2, cette fonction est dans $C_c(G/H)$. On notera $F_{\ell,\varphi}$ la fonction sur $G(\ell)'$ definie par

$$F_{\ell,\varphi}(x) = r_\ell(x) \int_{G/H} \varphi(gxg^{-1})\, \mathrm{d}m_\ell(g),$$

où r_ℓ est la fonction sur $G(\ell)$ définie en 4.1. Soit $\mathrm{d}t$ la mesure de Haar sur $S(\ell_{\mathfrak{s}})$ de masse totale 1. Notons $\mathrm{d}s$ la mesure de Haar sur S telle que la mesure quotient $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ corresponde à la mesure $\mathrm{d}b_{O_{\ell_{\mathfrak{s}}}}$ sur l'orbite $O_{\ell_{\mathfrak{s}}}$. Posons, pour φ dans $D(G)$, $\widetilde{\varphi}(g) = \int_S \varphi(sgs^{-1})\,\mathrm{d}s$. Notons $\mathrm{d}X$ la mesure sur $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$ définie par la forme extérieure

$$\frac{1}{(2\pi)^n\, n\,!}\, B_\ell^{\mathfrak{m}\cap\mathfrak{r}} \wedge \cdots \wedge B_\ell^{\mathfrak{m}\cap\mathfrak{r}}, \qquad \bigl(n = \tfrac{1}{2} \dim \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r} \ \text{ facteurs}\bigr).$$

Il est facile de voir que pour tout x dans $G(\ell)'$ on a :

$$F_{\ell,\varphi}(x) = r_\ell(x) \int_{\mathfrak{m}\cap\mathfrak{r}} \widetilde{\varphi}\bigl(\exp X x \exp(-X)\bigr)\, \mathrm{d}X.$$

Il résulte alors du LEMME 4.2 que pour toute fonction φ dans $D(G)$ la fonction $F_{\ell,\varphi}$ est dans $C^\infty(C(\ell)')$.

Remarques

(i) Soit g_1 dans G. Posons $\varphi_1(g) = \varphi(g_1 g g_1^{-1})$. Il est clair que $F_{\ell,\varphi} = F_{\ell,\varphi_1}$.

(ii) Supposons G compact. Le groupe $G(\ell)$ est alors un sous-groupe de Cartan de G. La fonction $F_{\ell,\varphi}$ est à un scalaire près l'intégrale invariante de φ relativement au sous-groupe de Cartan $G(\ell)$, comme elle est définie en [14].

(iii) Contrairement à ce qui se passe dans le cas des groupes de Lie semi-simples (cf. [14]), il existe en général des fonctions φ dans $D(G)$ telles que la fonction $F_{\ell,\varphi}$ ne soit pas sommable pour la mesure de Haar sur $G(\ell)$. On peut voir cela dans l'exemple donné en [3, 3.4]. Si φ est dans $D(G)$, on dira que $F_{\ell,\varphi}$ est l'*intégrale invariante* de φ relativement à ℓ.

4.4. — Soit D un sous-groupe discret du centre de G. Posons $\widetilde{G} = G/D$. On suppose que la fonction r_ℓ est constante sur les classes de $G(\ell)$ modulo D. La fonction r_ℓ définie par passage au quotient une fonction sur $\widetilde{G}(l) = G(\ell)/D$, qu'on notera aussi r_ℓ. On peut alors définir comme en 4.3, pour toute fonction φ dans $D(\widetilde{G})$, l'intégrale invariante $F_{\ell,\varphi}$ de φ relativement à ℓ.

4.5. — Posons $G_1 = S(\ell_{\mathfrak{s}})R$. l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$ du groupe G_1 est égale à $\mathfrak{s}(\ell_{\mathfrak{s}}) + \mathfrak{r}$. On note ℓ_1 la forme linéaire sur $\mathfrak{g}_1$ définie par $(\ell_1)_{\mathfrak{r}} = \ell_{\mathfrak{r}}$, $(\ell_1)_{\mathfrak{s}(\ell_{\mathfrak{s}})} = 0$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$ est résoluble unimodulaire et l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1(\ell_1) = \mathfrak{g}(\ell)$ est réductive dans $\mathfrak{g}_1$. Soit $P(\mathfrak{g}_1(\ell_1))$ l'ensemble des poids de la représentation $X \mapsto \mathrm{ad}_{(\mathfrak{g}_1^c)}X$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1(\ell_1)^c$. Soit P_1 le système des racines associé à $(\mathfrak{g}(\ell)^c, (\mathfrak{s} + \mathfrak{g}(\ell))^c)$. Il est clair que $P(\mathfrak{g}(\ell)) = P(\mathfrak{g}_1(\ell_1)) \cup P_1$. Soit F_1 un système de poids positifs dans $P(\mathfrak{g}_1(\ell_1))$. D'après le LEMME 4.1.1 et d'après [9, 21.14.8 (i) et 21.16.3], il existe un caractère du groupe $G_1(\ell_1) = G(\ell)$ de différentielle $X \mapsto \rho_{F_1}(X)$, où

$$\rho_{F_1} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in F_1} d_\lambda \cdot \lambda \quad \text{et} \quad d_\lambda = \dim(\mathfrak{g}_1^c)_\lambda.$$

On en déduit que la fonction r_{ℓ_1} est définie sur $G_1(\ell_1) = G(\ell)$. Soit $\mathrm{d}t$ la mesure de Haar sur $S(\ell_{\mathfrak{s}})$ de masse totale 1. Notons $\mathrm{d}s$ la mesure de Haar sur S telle que la mesure quotient $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ corresponde à la mesure $\mathrm{d}b_{O_{\ell_{\mathfrak{s}}}}$ sur l'orbite $O_{\ell_{\mathfrak{s}}}$. Soit φ dans $D(G)$. On notera $\widetilde{\varphi}$ la fonction sur G définie par $\widetilde{\varphi}(g) = \int_S \varphi(sgs^{-1})\,\mathrm{d}s$ et $\bar{\varphi}$ la fonction sur G_1 définie par $\bar{\varphi}(tr) = r_{\ell_{\mathfrak{s}}}(t)\widetilde{\varphi}(tr)$, pour t dans $S(\ell_{\mathfrak{s}})$ et r dans R.

LEMME 4.5. — *Pour tout φ dans $D(G)$ et pour tout x dans $G(\ell)'$, on a l'égalité $F_{\ell,\varphi}(x) = F_{\ell_1,\bar{\varphi}}(x)$.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que le deuxième membre de l'égalité du Lemme a un sens puisque $G(\ell)'$ est contenu dans $G_1(\ell_1)'$. Il résulte du LEMME 4.3.1. que $Z_{G_1}(G_1(\ell_1)) = Z_G(G(\ell)) = H$. On a :

$$F_{\ell_1,\bar{\varphi}}(x) = r_{\ell_1}(x) \int_{G_1/H} \bar{\varphi}(g_1 x g_1^{-1})\,\mathrm{d}m_{\ell_1}(g_1).$$

Soient t dans $S(\ell_{\mathfrak{s}})$, r dans R tels que $x = tr$. On a $g_1 tr g_1^{-1} = tt^{-1} g_1 tr g_1^{-1}$. Pour tout g_1 dans G_1, $t^{-1} g_1 tr g_1^{-1}$ est dans R et d'après la définition de $\bar{\varphi}$, on a $\bar{\varphi}(g_1trg_1^{-1}) = r_{\ell_{\mathfrak{s}}}(t)\widetilde{\varphi}(g_1trg_1^{-1})$. Comme $P(\mathfrak{g}(\ell)) = P(\mathfrak{g}_1(\ell_1)) \cup P_1$, on a $r_{\ell_1}(tr)r_{\ell_{\mathfrak{s}}}(t) = r_\ell(tr)$. Par conséquent :

$$F_{\ell_1,\bar{\varphi}}(x) = r_\ell(x)\int_{G_1/H} \widetilde{\varphi}(g_1xg_1^{-1})\,\mathrm{d}m_{\ell_1}(g_1).$$

D'après le choix de la mesure $\mathrm{d}s$, ceci est égal à $F_{\ell,\varphi}(x)$. ▯

5. La formule du caractère

Les hypothèses sont celles de 3. Les objets G, S, R, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$, ℓ sont comme en 3. Pour φ dans $D(G)$ la fonction $F_{\ell,\varphi}$ est définie en 4.3. On note X_ℓ le caractère unitaire du groupe $G(\ell)$ de différentielle $X \mapsto i\ell(X)$. (Un tel caractère existe d'après l'assertion (c) du LEMME 3.1.3.). Soit $\mathrm{d}g$ une mesure de Haar sur le groupe G. On note $\mathrm{d}x$ la mesure de Haar sur le groupe $G(\ell)$ telle que la mesure quotient $\mathrm{d}g/\mathrm{d}x$ corresponde à la mesure $\mathrm{d}b_{O_\ell}$ sur l'orbite O_ℓ. Soit $\mathrm{d}z$ une mesure de Haar sur $Z(G)$. On note $\mathrm{d}\dot{x}$ la mesure quotient $\mathrm{d}x/\mathrm{d}z$ sur $G(\ell)/Z(G)$.

THÉORÈME 5.1. — *Soient T une représentation du groupe G dont la classe d'équivalence est $T(\ell, G)$ et φ une fonction dans $D(G)$. L'opérateur $T(\varphi) = \int_G \varphi(g)T(g)dg$ est à trace et sa trace est donnée par la formule*

$$\operatorname{Tr} T(\varphi) = \int_{G(\ell)/Z(G)} \int_{Z(G)} F_{\ell,\varphi}(xz)X_\ell(xz)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\dot{x},$$

les intégrales successives étant convergentes.

Démonstration

a) Supposons d'abord G compact. On va montrer que le théorème est vrai pour toute fonction continue sur G.

Posons $T = G(\ell)$. Soient $\mathrm{d}k$ et $\mathrm{d}t$ les mesures de Haar sur les groupes G et T de masse totale 1. On utilise les notations de la PROPOSITION 1.3. Posons pour t dans T :

$$D(t) = \xi_\rho(t) \prod_{\alpha\in A^+} \big(1 - \xi_{-\alpha}(t)\big).$$

Si t est dans T et tel que $D(t) \neq 0$, on note :

$$c_T(t) = \Big(\sum_{w\in W} \det w X_\ell(w^{-1}tw)\Big) D(t)^{-1}.$$

D'après la PROPOSITION 1.3 et d'après la formule d'intégration de H. Weyl [17, 4.8.2], pour toute fonction φ continue sur G on a :

$$\operatorname{Tr}\Big(\int_G \varphi(k)T(k)\,\mathrm{d}k\Big) = \frac{1}{|W|}\int_T |D(t)|^2 c_T(t)\int_{G/T}\varphi(ktk^{-1})\,\mathrm{d}\dot{k}\,\mathrm{d}t,$$

où $\mathrm{d}\dot{k}$ est la mesure quotient $\mathrm{d}k/\mathrm{d}t$. Pour tout w dans W, on a :

$$\begin{aligned}\int_T \overline{D(t)}\det w X_\ell(w^{-1}tw)&\int_{G/T}\varphi(ktk^{-1})\,\mathrm{d}\dot{k}\,\mathrm{d}t\\ &= \det w\int_T \overline{D(wtw^{-1})}X_\ell(t)\int_{G/T}\varphi\big(kwtw^{-1}k^{-1}\big)\,\mathrm{d}\dot{k}\,\mathrm{d}t\\ &\qquad= \det w\int_T \overline{D(wtw^{-1})}X_\ell(t)\int_{G/T}\varphi(ktk^{-1})\,\mathrm{d}\dot{k}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

D'après [17, 4.9.2], $D(wtw^{-1}) = \det wD(t)$. Il en résulte que

$$\operatorname{Tr}\Big(\int_G \varphi(k)T(k)\,\mathrm{d}k\Big) = \int_T \overline{D(t)}X_\ell(t)\int_{G/T}\varphi(ktk^{-1})\,\mathrm{d}\dot{k}\,\mathrm{d}t.$$

Soient c_1, c_2 les nombres strictement positifs tels que l'on ait $\mathrm{d}k = c_1\,\mathrm{d}g$, $\mathrm{d}t = c_2\,\mathrm{d}x$. On a $\mathrm{d}\dot{k} = c_1c_2^{-1}\,\mathrm{d}m_\ell$. On en déduit que :

$$\operatorname{Tr}\Big(\int_G \varphi(g)T(g)\,\mathrm{d}g\Big) = \int_{G(\ell)} \overline{D(x)}X_\ell(x)\int_{G/G(\ell)}\varphi(gxg^{-1})\,\mathrm{d}m_\ell(g)\,\mathrm{d}x.$$

Pour terminer la démonstration du théorème pour G compact, il suffit de montrer que $r_\ell(x) = \overline{D(x)}$ pour tout x dans $G(\ell) = T$. Il est clair que A^- est un système de poids positifs dans $P(\mathfrak{g}(\ell)) = A$. D'après le LEMME 4.1.2, $r_\ell(x) = (-1)^{i(A^-)}\overline{D(x)}$. Comme $\mathfrak{g}(\ell)^c + \sum_{\alpha\in A^-}(\mathfrak{g}^c)_a$ est une polarisation positive en ℓ, on a $i(A^-) = 0$.

b) Reprenons les notations du COROLLAIRE 3.2.2. Posons :

$$T_1 = T(\ell_{\mathfrak{s}}, W\cap\mathfrak{s}^c, S),\quad T_2 = T^e(\ell_{\mathfrak{r}}, W\cap\mathfrak{r}^c, R).$$

D'après le COROLLAIRE 3.2.2, la représentation du groupe G définie par $sr \mapsto T_1(s)\otimes T_2(sr)$, pour s dans S et r dans R, est équivalente à la représentation T. On note $H(T_1)$ (resp.$H(T_2)$) l'espace de la représentation T_1 (resp. T_2). Soit $\mathrm{d}t$ la mesure de Haar sur le groupe $S(\ell_{\mathfrak{s}})$ de masse totale 1. Soit $\mathrm{d}s$ la mesure de Haar sur le groupe S telle que la mesure quotient $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ corresponde à la mesure $\mathrm{d}b_{O_{\ell_s}}$ sur l'orbite O_{ℓ_s}. On notera $\mathrm{d}r$ la mesure de Haar sur le groupe R telle que l'on ait $\mathrm{d}g = \mathrm{d}s\,\mathrm{d}r$.

Posons $n = \dim T_1$. Soit $e_1, \dots, e_n$ (resp. $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$) une base orthonormée de $H(T_1)$ (resp.de $H(T_2)$). On a :

$$\operatorname{Tr} T(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_S \int_R \varphi(sr)\big(T_1(s)e_i, e_i\big)\big(T_2(sr)f_j, f_j\big)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s.$$

On va montrer que la somme

$$I = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_S \left| \int_R \varphi(sr)\big(T_1(s)e_i, e_i\big)\big(T_2(sr)f_j, f_j\big)\,\mathrm{d}r \right| \mathrm{d}s$$

est finie. Posons, pour s dans S,

$$A(s) = \int_R \varphi(sr)T_2(sr)\,\mathrm{d}r, B(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \big|\big(A(s)f_j, f_j\big)\big|.$$

D'après [4, th. 5.1], la représentation $r \mapsto T_2(r)$ du groupe R est traçable. Par conséquent, pour tout s dans S, l'opérateur $A(s)$ est à trace. On note $|\ \ |_1$ la norme de l'espace des opérateurs à trace sur $H(T_2)$. [12, chap. XI, § 9]. Il résulte de la démonstration de [12, chap. XI, § 9, Lemme 13, (b)] que $B(s) \leq |A(s)|_1$. On a :

$$\begin{aligned} I = \sum_{i=1}^{n} \int_S \sum_{j\in\mathbb{N}} \big|\big(T_1(s)e_i, e_i\big)\big(A(s)f_j, f_j\big)\big|\,\mathrm{d}s \\ \leq \sum_{i=1}^{n} \int_S B(s)ds = \sum_{i=1}^{n} \int_S \big|A(s)\big|_1\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

L'application $s \mapsto |A(s)|_1$ est continue. On en déduit que la somme I est finie. Comme

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in\mathbb{N}} \left| \int_S \int_R \varphi(sr)(T_1(s)e_i, e_i)\big(T_2(sr)f_j, f_j\big)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s \right| \leq I,$$

l'opérateur $T(\varphi)$ est à trace. D'après ce qui précède, on a :

$$\operatorname{Tr} T(\varphi) = \int_S c_{T_1}(s) \operatorname{Tr} A(s)\,\mathrm{d}s, \quad \text{où} \quad c_{T_1}(s) = \sum_{i=1}^{n} \big(T_1(s)e_i, e_i\big).$$

Posons $a(s) = \operatorname{Tr} A(s)$. La fonction a est continue. Il résulte alors de (a) que :

$$\operatorname{Tr} T(\varphi) = \int_{S(\ell_{\mathfrak{s}})} X_\ell(t) r_{\ell_{\mathfrak{s}}}(t) \int_{S/S(\ell_{\mathfrak{s}})} a(sts^{-1})\,\mathrm{d}\dot{s}\,\mathrm{d}t,$$

où $\mathrm{d}\dot{s}$ est la mesure quotient $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ sur $S/S(\ell_{\mathfrak{s}})$.

c) On va calculer $\int_{S/S(\ell_{\mathfrak{s}})} a((sts^{-1})\,\mathrm{d}\dot{s}$. On a :

$$\begin{aligned}\int_{S/S(\ell_{\mathfrak{s}})} a(sts^{-1})\,\mathrm{d}\dot{s} &= \int_S a(sts^{-1})\,\mathrm{d}s\\ &= \int_S \operatorname{Tr}\Big(\int_R \varphi(sts^{-1}r) T_2(sts^{-1}r)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Comme pour tout s dans S $\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{r}} s) = 1$, on a :

$$\begin{aligned}\int_S a(sts^{-1})\,\mathrm{d}s &= \int_S \operatorname{Tr}\Big(\int_R \varphi(strs^{-1}) T_2(strs^{-1})\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s\\ &= \int_S \operatorname{Tr}\Big(T_2(s) \int_R \varphi(strs^{-1}) T_2(tr)\,\mathrm{d}r T_2(s)^{-1}\Big)\,\mathrm{d}s\\ &= \int_S \operatorname{Tr}\Big(\int_R \varphi(strs^{-1}) T_2(tr)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

L'application $s \mapsto \int_R \varphi(strs^{-1}) T_2(tr)\,\mathrm{d}r$ est une application continue de S dans l'espace des opérateurs à trace sur $H(T_2)$. Par conséquent, on a

$$\int_S a(sts^{-1})\,\mathrm{d}s = \operatorname{Tr}\Big(\int_R \widetilde{\varphi}(tr) T_2(tr)\,\mathrm{d}r\Big),$$

où $\widetilde{\varphi}$ est la fonction sur G définie par $\widetilde{\varphi}(g) = \int_S \varphi(sgs^{-1})\,\mathrm{d}s$.

d) Soit $\bar{\varphi}$ la fonction sur $S(\ell_{\mathfrak{s}})R$ définie par

$$\bar{\varphi}(tr) = X_\ell(t) r_{\ell_{\mathfrak{s}}}(tr) \widetilde{\varphi}(r)$$

où t est dans $S(\ell_{\mathfrak{s}})$ et r est dans R. La fonction $\bar{\varphi}$ est dans $D(S(\ell_{\mathfrak{s}})R)$. L'application $t \mapsto \int_R \bar{\varphi}(tr) T_2(tr)\,\mathrm{d}r$ est une application continue de $S(\ell_{\mathfrak{s}})$ dans l'espace des opérateurs à trace sur $H(T_2)$. D'après ce qui précède, on a :

$$\operatorname{Tr} T(\varphi) = \operatorname{Tr} \int_{S(\ell_{\mathfrak{s}})R} \bar{\varphi}(tr) T_2(tr)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t.$$

Soit ℓ_1 la forme linéaire sur $\mathfrak{s}(\ell_{\mathfrak{s}}) + \mathfrak{r}$ définie par $(\ell_1)_{\mathfrak{s}(\ell_{\mathfrak{s}})} = 0$, $(\ell_1)_{\mathfrak{r}} = \ell_{\mathfrak{r}}$. Il résulte du LEMME 3.2.4 et de [4, prop. 4.1] que

$$\operatorname{Tr} T(\varphi) = \int_{G(\ell)/Z(R)_0} \int_{Z(R)_0} F_{\ell_1,\bar{\varphi}}(xz) X_{\ell_1}(xz)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\dot{x},$$

où X_{ℓ_1} est le caractère unitaire du groupe $G(\ell)$ de différentielle $X \mapsto i\ell_1(X)$ et les mesures $\mathrm{d}\dot{x}$ et $\mathrm{d}z$ sont déterminées de la manière suivante : $\mathrm{d}z$ est une mesure de Haar sur le groupe $Z(R)_0$, $\mathrm{d}\dot{x}$ est la mesure quotient $\mathrm{d}x/\mathrm{d}z$ où $\mathrm{d}\dot{x}$ est la mesure de Haar sur le groupe $G(\ell)$ telle que la mesure quotient $(\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r)/\mathrm{d}x$ corresponde à la mesure $\mathrm{d}b_{O_{\ell_{\mathfrak{r}}}}$ sur l'orbite $O_{\ell_{\mathfrak{r}}}$. On montre comme dans le LEMME 4.5 que, pour tout x dans $G(\ell)'$, on a :

$$F_{\ell,\varphi}(x)X_\ell(x) = F_{\ell_1,\bar{\varphi}}(x)X_{\ell_1}(x).$$

Comme $[\mathfrak{g}(\ell)\cap\mathfrak{r},\mathfrak{s}] = \{0\}$, on a $Z(R)_0 = Z(G)_0$. On montre, comme dans la démonstration de [4, th. 5.1], que pour tout x dans $G(\ell)'$ la fonction $z \mapsto F_{\ell,\varphi}(xz)$ est absolument intégrable pour la mesure de Haar sur $Z(G)$. On a

$$\mathrm{Tr}\, T(\varphi) = \int_{G(\ell)/Z(G)} \int_{Z(G)} F_{\ell,\varphi}(xz)X_\ell(xz)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\dot{x},$$

où $\mathrm{d}z$ est une mesure de Haar sur $Z(G)$, $\mathrm{d}x$ la mesure de Haar sur le groupe $G(\ell)$ telle que la mesure quotient $(\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r)/\mathrm{d}x$ corresponde à la mesure $\mathrm{d}b_{O_{\ell_{\mathfrak{r}}}}$ sur l'orbite $O_{\ell_{\mathfrak{r}}}$ et $\mathrm{d}\dot{x}$ la mesure quotient $\mathrm{d}x/\mathrm{d}z$. D'autre part la mesure quotient $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ correspond à la mesure $\mathrm{d}b_{O_{\ell_{\mathfrak{s}}}}$ sur l'orbite $O_{\ell_{\mathfrak{s}}}$ et $\mathrm{d}g = \mathrm{d}s\,\mathrm{d}r$. On en déduit que la mesure quotient $\mathrm{d}g/\mathrm{d}x$ correspond à la mesure $\mathrm{d}b_{O_\ell}$ sur l'orbite O_ℓ. Le théorème est demontré. $\square$

COROLLAIRE 5.2. — *Le support de la distribution $\varphi \mapsto \mathrm{Tr}\,T(\ell,G)(\varphi)$ est contenu dans l'adhérence de l'ensemble des conjugués des éléments de $G(\ell)$.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANH (N.H.). — Lie groups with square integrable representations, *Ann. of Math.*, t. **104**, 1976, p. 431–458.

[2] ANH (N.H.). — Classification of connected unimodular Lie groups with discretes series, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, t. **30**, **1**, 1980, p. 159–192.

[3] ANOUSSIS (M.). — *Sur les caractères des groupes de Lie résolubles*, Thèse de troisième cycle, Paris VII, 1985.

[4] ANOUSSIS (M.). — Sur les caractères des groupes de Lie résolubles, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, t. **41**, **1**, 1991, p. 27–48.
[5] BERNAT (P.) et al. — *Représentations des groupes de Lie résolubles.* — Dunod, Paris, 1972.
[6] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie, chapitre I, Algèbres de Lie.* — Hermann, Paris, 1960.
[7] CHARBONNEL (J.-Y.). — La formule de Plancherel pour un groupe de Lie résoluble connexe, *Lecture Notes in Math.*, t. **587**, 1977, p. 32–76.
[8] CHARBONNEL (J.-Y.) et KHALGUI (M.S.). — Polarisations pour un certain type des groupes de Lie, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **287**, **A**, 1976, p. 915–917.
[9] DIEUDONNE (J.-D.). — *Eléments d'analyse, vol. V.* — Gauthier-Villars, Paris, 1975.
[10] DIXMIER (J.). — *Algèbres enveloppantes.* — Gauthier-Villars, Paris, 1974.
[11] DUFLO (M.). — *Construction des représentations unitaires d'un groupe de Lie*, Cours d'été du CIME, Cortona, 1980.
[12] DUFLO (M.). — Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques, *Acta Math.*, t. **149**, 1982, p. 154–213.
[13] DUNFORD (N.) et SCHWARTZ (J.). — *Linear operators, part. II.* — Interscience, New-York, 1963.
[14] HARISH -CHANDRA. — A formula for semi-simple Lie groups, *Amer. J. Math.*, t. **79**, 1957, p. 733–760.
[15] KHALGUI (M.S.). — Sur les caractères des groupes de Lie à radical co-compact, *Bull. Soc. Math. France*, t. **109**, 1981, p. 331–372.
[16] MOSTOW (G.P.). — Fully reducible subgroups of algebraic groups, *Amer. J. Math.*, t. **78**, 1956, p. 200–221.
[17] WALLACH (N.). — *Harmonic analysis on homogeneous spaces.* — Dekker, New-York, 1973.