

# BULLETIN DE LA S. M. F.

CHRISTINE LESCOP

## **Un algorithme pour calculer l'invariant de Walker**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 118, n° 3 (1990), p. 363-376

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1990\\_\\_118\\_3\\_363\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_3_363_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## UN ALGORITHME POUR CALCULER L'INVARIANT DE WALKER

PAR

CHRISTINE LESCOP (\*)

---

RÉSUMÉ. — En 1988, Kevin WALKER a étendu l'invariant de Casson aux sphères d'homologie rationnelle. Cette note décrit un procédé simple et programmable pour calculer l'invariant de Walker d'une sphère d'homologie rationnelle connue par l'un de ses diagrammes de chirurgies. (On appelle diagramme de chirurgie la projection régulière d'un entrelacs dont chaque composante est pondérée par un rationnel.)

ABSTRACT. — In his thesis, Kevin WALKER extends the invariant defined by A. CASSON for homology 3-spheres to rational homology spheres (3-manifolds with the same rational homology as  $S^3$ ). The modification of Walker's invariant after a surgery on a single knot which transforms a rational homology sphere to another rational homology sphere is given by a Surgery Formula (see paragraph 0).

In this paper, we describe a simple and programmable process to calculate Walker's invariant of a rational homology sphere given by one of its surgery diagrams. (We call a surgery diagram a regular projection of a link, each component of which is framed by a rational number; we use Rolfsen's conventions to define the manifold presented by such a diagram (see [R], p. 259–260)).

The first section shows how to modify the diagram in a simple way so that the computation reduces to a finite sequence of applications of the Surgery Formula.

The second section is devoted to describe elementary methods to do it. Section 0 states a few results of Walker.

### Introduction

Dans sa thèse, K. WALKER décrit une extension de l'invariant, défini par A. CASSON pour les sphères d'homologie entière, aux sphères d'homologie rationnelle (variétés de dimension 3, compactes, orientées, qui ont la même homologie rationnelle que  $S^3$ ).

Une formule de Chirurgie (voir paragraphe 0) exprime la modification de l'invariant de Walker lors d'une chirurgie sur un nœud qui transforme une sphère d'homologie rationnelle en une autre sphère d'homologie rationnelle.

---

(\*) Texte reçu le 12 avril 1990.

C. LESCOP, Université de Nantes, Département de Mathématiques, 2 rue de la Houssinière, 44072 Nantes Cedex 03, France.

Cette note décrit un procédé simple et programmable pour calculer l'invariant de Walker d'une sphère d'homologie rationnelle connue par l'un de ses diagrammes de chirurgies. (On appelle *diagramme de chirurgie* la projection régulière d'un entrelacs dont chaque composante est pondérée par un rationnel et on utilise les conventions de ROLFSEN (voir [R], p. 259–260) pour définir la variété présentée par un tel diagramme.)

Le premier paragraphe montre comment modifier simplement le diagramme de sorte que le calcul se réduise à une suite finie d'applications de la Formule de Chirurgie. Le deuxième paragraphe décrit des méthodes élémentaires pour appliquer la Formule.

Le paragraphe 0 énonce quelques résultats de K. WALKER.

## 0. Résultats de Walker

### Notations :

Soit  $N$  un *cercle d'homologie rationnelle* (variété compacte orientée de dimension 3 de même homologie rationnelle que  $S^1$ ) :

$\langle , \rangle$  symbolise la forme d'intersection sur le tore  $\partial N$  bord de  $N$  orienté comme bord de  $N$  avec la convention de la normale intérieure dernier vecteur de base.

Si  $a$  est un *élément primitif* de  $H_1(\partial N)$  (élément non nul représenté par une courbe simple  $\hat{a}$  de  $\partial N$ ) et si  $h$  est un difféomorphisme de  $S^1 \times S^1$  dans  $\partial N$  qui envoie  $S^1 \times \{\bullet\}$  sur  $\hat{a}$ ,  $N_a$  désigne la variété  $D^2 \times S^1 \cup_h N$ .

On appelle *longitude entière* de  $N$  un générateur du noyau (isomorphe à  $\mathbb{Z}$ ) de l'application ( $i_* : H_1(\partial N) \rightarrow H_1(N)$ ) induite par l'inclusion.

$\Delta(N)$  désigne le polynôme d'Alexander normalisé de  $N$ .

$s(q, p)$  désigne la somme de Dedekind, définie pour les couples  $(p, q)$  de  $\mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z}$ , par

$$s(q, p) = \sum_{i=1}^{|p|} ((i/p)) ((qi/p)),$$

où  $((x))$  est nul si  $x$  est élément de  $\mathbb{Z}$  et égal à  $(x - E(x) - \frac{1}{2})$  sinon.

sign est la fonction signe classique :

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

THÉORÈME (WALKER [W]). — Il existe une unique fonction  $\lambda$  de l'ensemble des classes de sphères d'homologie rationnelle modulo les difféomorphismes orientés dans  $\mathbb{Q}$  telle que :

1)  $\lambda(S^3) = 0$ .

2) Pour tout cercle d'homologie rationnelle  $N$ , si  $\nu$  est une longueur entière de  $N$ , quels que soient les éléments primitifs  $a$  et  $b$  de  $H_1(\partial N)$  tels que le produit  $(\langle a, \nu \rangle \langle b, \nu \rangle)$  soit non nul, on a la Formule de Chirurgie :

$$\lambda(N_b) = \lambda(N_a) + \tau(a, b; \nu) + \left[ \frac{\langle a, b \rangle}{(\langle a, \nu \rangle \langle b, \nu \rangle)} \right] \cdot \Delta''(N)(1)$$

où, si  $x$  et  $y$  sont deux éléments de  $H_1(\partial N)$  tels que  $\langle x, y \rangle = 1$  et  $\nu = \delta y$  avec  $\delta \in \mathbb{Z}$  :

$$\begin{aligned} \tau(a, b; \nu) = & - \text{sign}\langle y, a \rangle s(\langle x, a \rangle, \langle y, a \rangle) + \text{sign}\langle y, b \rangle s(\langle x, b \rangle, \langle y, b \rangle) \\ & + \left[ \frac{(\delta^2 - 1) \cdot \langle a, b \rangle}{12 \langle a, \nu \rangle \langle b, \nu \rangle} \right]. \end{aligned}$$

La fonction  $\lambda$  possède alors, entre autres, les propriétés :

3) Pour toutes sphères d'homologie rationnelle  $M_1$  et  $M_2$  :

$$\lambda(M_1 \# M_2) = \lambda(M_1) + \lambda(M_2)$$

(‘#’ symbolise la somme connexe).

4) Pour toute sphère d'homologie entière  $H$  :  $\lambda(H) = 2\lambda_c(H)$ . ( $\lambda_c$  est l'invariant de Casson de [M].)

5) Pour toute sphère d'homologie rationnelle  $M$  telle que  $H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  soit trivial  $4|H_1(M)|^2 \lambda(M) \equiv \mu(M) \pmod{16}$  ( $\mu$  désigne l'invariant de Rohlin).

### 1. Modification du diagramme

Notations :

Soit  $D$  un diagramme de chirurgie, projection régulière d'un entrelacs à  $n$  composantes,  $K_1, K_2, \dots, K_n$ , pondérées respectivement par les rationnels  $r_1, r_2, \dots, r_n$ .

- Les composantes de  $D$  sont les nœuds  $K_1, K_2, \dots, K_n$ .
- On note  $D_k$ , pour  $k$  appartenant à  $\{0, 1, \dots, n\}$ , le diagramme obtenu à partir de  $D$  en oubliant les composantes  $K_{k+1}, K_{k+2}, \dots, K_n$ .
- $\chi(D)$  désigne la variété présentée par le diagramme  $D$ .

•  $D$  est dit *admissible* si, pour tout  $k$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\chi(D_k)$  est une sphère d'homologie rationnelle.

Le but de ce paragraphe est de décrire un procédé économique pour transformer un diagramme de chirurgie qui présente une sphère d'homologie rationnelle en un diagramme admissible qui présente la même variété.

*Remarque.* — K. WALKER décrit, lors de la démonstration combinatoire du Théorème énoncé au paragraphe 0 ([W], Chapitre 5), une méthode pour rendre un diagramme admissible adaptée à l'utilisation théorique qu'il en donne. La méthode proposée ici est mieux adaptée au calcul pratique décrit dans cette note.

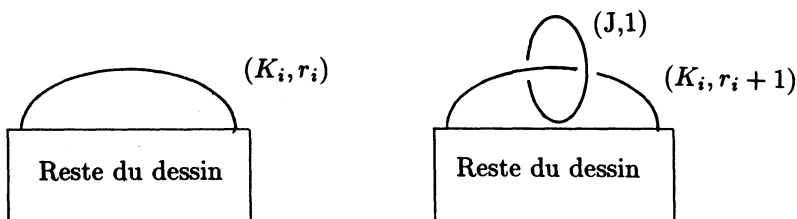
### a. Description de la modification globale du diagramme.

On définit sur les diagrammes de chirurgie les deux opérations suivantes :

*Renumérotation* : permutation des indices de numérotation du diagramme.

*Insertion* : insertion à la  $j^{\text{ième}}$  place d'une composante triviale  $J$ , pondérée par 1, méridienne d'une composante  $K_i$  ( $i < j$ ) dont le coefficient de pondération  $r_i$  est alors augmenté de un.

Le dessin du diagramme subit la transformation :



“Insérer à la  $j^{\text{ième}}$  place” a modifié les notations de la manière suivante : après l'insertion, les couples  $(K_k, r_k)$  de  $D$  s'écrivent  $(K_{k+1}, r_{k+1})$ , pour  $k$  supérieur ou égal à  $j$  et le couple  $(K_j, r_j)$  désigne le couple  $(J, 1)$ .

Ces opérations ne modifient pas le type de difféomorphisme de la variété présentée et suffisent à rendre tout diagramme de sphère d'homologie rationnelle admissible ; plus précisément, on a la :

**PROPOSITION.** — Soit  $D$  un diagramme de chirurgie à  $n$  composantes qui présente une sphère d'homologie rationnelle ; il existe un diagramme  $D'$  admissible obtenu à partir de  $D$  par :

- au plus  $(n-1)$  insertions de composantes méridiennes de composantes distinctes de  $D$ , et,
- une renumérotation.

On évalue la difficulté à rendre un diagramme admissible à l'aide de la notion suivante : soit  $D$  un diagramme à  $n$  composantes qui présente une sphère d'homologie rationnelle, on dit que  $((i_j)_{j=1, \dots, k}; s)$  jalonne  $D$  si  $k, i_1, i_2, \dots, i_k$  et  $s$  sont des entiers tels que :

- $i_1 < i_2 < \dots < i_k, i_k = n$ ;
- $\chi(D_{i_j})$  est une sphère d'homologie rationnelle pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, k\}$ ;
- $s$  désigne l'entier  $\sup(\{0\} \cup \{j \text{ tels que } i_j = j\})$ .

Les entiers  $i_1, i_2, \dots, i_k$  sont alors appelés *jalons* du diagramme.

Le lemme suivant permet alors de démontrer la proposition par récurrence :

LEMME (Amélioration élémentaire de  $D$ ). — Soit  $D$  un diagramme à  $n$  composantes, qui présente une sphère d'homologie rationnelle, jalonné par  $((i_j)_{j=1, \dots, k}; s)$ ; alors il existe  $D'$  tel que :

- si c'est possible (premier cas),  $D'$  est obtenu à partir de  $D$  après une renumérotation éventuelle des composantes indicées dans

$$\{i_s + 1, i_s + 2, \dots, i_{s+1}\},$$

et  $D'$  est jalonné par  $((i_1, i_2, \dots, i_s, (i_s + 1), i_{s+1}, \dots, i_k); s')$ ;

- sinon (deuxième cas),  $D'$  est obtenu à partir de  $D$  après :  
— une renumérotation des composantes indicées dans

$$\{i_s + 1, i_s + 2, \dots, i_{s+1}\};$$

— l'insertion d'une composante méridienne de la composante d'indice  $(i_s + 1)$  à la  $(i'_{s+2} + 1)$ <sup>ième</sup> place, et  $D'$  est jalonné par  $((i'_j)_{j=1, \dots, k'}; s')$  où les ensembles  $\{i'_{s+2} + 1\}$  et

$$\{i_1, i_2, \dots, i_s, (i_s + 1), i'_{s+2}, (i_{s+1} + 1), \dots, (i_k + 1)\}$$

sont inclus dans  $\{(i'_j)_{j=1, \dots, k'}\}$ .

*Démonstration de la proposition :*

Le lemme est admis, il sera démontré au b. On démontre la proposition par récurrence sur  $(n - k)$  (avec les notations de l'énoncé du lemme) et

en supposant qu'on ne modifie le diagramme que par des applications successives du lemme :

- si  $(n - k)$  est nul,  $D$  est admissible;
- sinon, une application du lemme diminue strictement  $(n - k)$  sans insérer de composante méridienne d'une composante  $K_\ell$ , insérée ou déjà enlacée par une composante insérée, puisqu'une telle composante  $K_\ell$  est encadrée par les jalons  $\ell$  et  $(\ell - 1)$ .  $\square$

*Remarques :*

- La liste de jalons utilisée peut ne pas être exhaustive, dans la pratique elle ne le sera pas pour des raisons d'économie de calcul; au début du procédé,  $D$  est jalonné par  $(n; 0)$ .
- Le nombre de composantes à insérer par ce procédé dans le diagramme  $D$  de l'énoncé du lemme est majoré par  $(n - k)$ .

### b. Description d'une modification élémentaire du diagramme.

*Interprétation matricielle du problème et définitions :*

La "Framing matrix"  $F(D)$  d'un diagramme  $D$  à  $n$  composantes  $K_i$ , pondérées respectivement par les rationnels présentés sous la forme réduite  $(\alpha_i/\beta_i)$ , est définie, après une orientation arbitraire des composantes de  $D$ , comme suit :

$$F(D) = [f_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n},$$

où, si  $\text{lk}(K_i, K_j)$  désigne le nombre d'enlacement de deux composantes  $K_i$  et  $K_j$  :

$$\begin{aligned} f_{ii} &= \alpha_i, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \\ \text{et } f_{ij} &= \beta_j \text{lk}(K_i, K_j) \quad \text{pour } i \neq j \text{ et } \{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}; \end{aligned}$$

$F(D)$  est une matrice de présentation de  $H_1(\chi(D))$  sur  $\mathbb{Z}$  et  $D$  est admissible si et seulement si  $\det(F(D_k))$  est non nul pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ . Ceci ramène le problème de départ à un problème matriciel pour l'étude duquel on introduit les notations :

- Soit  $M$  une matrice carrée d'ordre  $n$  et soit  $j, k, \ell$  et  $m$ , quatre entiers compris entre 1 et  $n$  tels que  $j$  et  $\ell$  soient respectivement inférieurs à  $k$  et à  $m$ . On note  $M(j, \dots, k; \ell, \dots, m)$  la sous-matrice de  $M$ , intersection des lignes  $j, (j + 1), \dots, k$ , et des colonnes  $\ell, (\ell + 1), \dots, m$ ; la matrice  $M(j, \dots, k; j, \dots, k)$  est aussi notée  $M(j, \dots, k)$ .

- On utilisera les types suivants d'opérations matricielles :

O1 : multiplication d'une ligne par un entier non nul;

O2 : opération O2( $i, j$ ) qui consiste à ajouter à la  $i^{\text{ième}}$  ligne un multiple entier de la  $j^{\text{ième}}$  ligne ( $i \neq j$ );

O2<sup>+</sup> : opération O2( $i, j$ ) où  $i$  est strictement supérieur à  $j$ .

*Démonstration du lemme :*

Par hypothèse,  $\det(F(D_i))$  est non nul pour  $i$  variant de 1 à  $s$ . Les opérations O1 et O2<sup>+</sup>( $i, j$ ), avec des éléments  $j$  de  $\{1, \dots, s\}$ , suffisent donc à trianguler  $F(D)$  jusqu'au rang  $s$ , *i.e.* à transformer  $F(D)$  en une matrice  $F_s(D)$  telle que  $F_s(D)_{ij}$  soit nul pour les couples ( $i, j$ ) tels que  $i$  est strictement supérieur à  $j$  et  $j$  est inférieur ou égal à  $s$ .

Si il existe un élément  $j$  de  $\{i_s + 1, \dots, i_{s+1}\}$  tel que  $F_s(D)_{jj}$  est non nul, échanger les indices de numérotation ( $i_s + 1$ ) et  $j$  suffit à obtenir un diagramme  $D'$  satisfaisant aux conditions du lemme (premier cas).

Sinon, le premier cas est exclu, mais quitte à renuméroter les composantes indicées dans  $\{i_s + 1, \dots, i_{s+1}\}$ , il existe un élément  $j$  de  $\{i_s + 2, \dots, i_{s+1}\}$  tel que  $\det(F_s(D)(i_s + 1, \dots, j))$  soit non nul et que  $\det(F_s(D)(i_s + 2, \dots, j))$  soit nul, insérer une composante, méridienne de la composante d'indice ( $i_s + 1$ ), à la  $(j + 1)^{\text{ième}}$  place suffit alors à obtenir un diagramme  $D'$  satisfaisant aux conditions du lemme (deuxième cas).  $\square$

*Remarque.* — La matrice  $F(D)$  est triangulée une seule fois au cours du procédé global.

COMPLÉMENT. — Méthode pratique pour la recherche de  $j$  (si le premier cas a été exclu).

Après une renumérotation judicieuse des composantes de  $D$ , les opérations de type O1, O2<sup>+</sup>( $j, i$ ) et O2( $2, j$ ), où  $j$  (resp.  $i$ ) désigne un élément de  $\{3, \dots, i_{s+1} - i_s\}$  (resp. de  $\{2, \dots, i_{s+1} - i_s\}$ ), suffisent à transformer la matrice  $F_s(D)(i_s + 1, \dots, i_{s+1})$  en une matrice carrée  $M$  d'ordre  $(i_{s+1} - i_s)$  telle qu'il existe un élément  $c$  de  $\{1, \dots, (i_{s+1} - i_s)\}$  vérifiant :

- $\forall i \in \{1, \dots, c - 1\}, M_{1i} = 0;$
- $M_{1c} \neq 0;$
- $\forall (i, k) \in \{1, \dots, c - 1\} \times \{1, \dots, (i_{s+1} - i_s)\}, k > i + 1 \Rightarrow M_{ki} = 0;$
- $\forall i \in \{2, \dots, c - 1\}, M_{2i} = 0.$

Cette transformation est effectuée selon un procédé algorithmique élémentaire (proche de l'algorithme de Gauss) qui décèle progressivement la "renumérotation judicieuse" citée.

Si, après la transformation,  $M_{2c}$  est nul, on a obtenu le  $j$  cherché ( $j = i_s + c$ ); sinon, on modifie la numérotation des composantes indicées dans  $\{i_s + 1, \dots, i_s + c\}$  de sorte que la composante d'indice ( $i_s + 1$ ) ait pour nouvel indice ( $i_s + c$ ), on pose des jalons en ( $i_s + c - 1$ ) et en ( $i_s + c$ ) (si ( $i_s + c$ ))



est différent de  $i_{s+1}$ ) et on réitère le procédé avec les nouveaux jalons (la taille de la matrice  $F_s(D)$  ( $i_s + 1, \dots, i_{s+1}$ ) a strictement diminué).

## 2. Application de la Formule de Chirurgie

On reprend les notations du paragraphe 1 en supposant de plus  $D$  admissible pour exposer le calcul de  $[\lambda(\chi(D_n)) - \lambda(\chi(D_{n-1}))]$ .

Soit  $N$  le cercle d'homologie rationnelle  $\chi(D_{n-1}) \setminus K_n$ , soit  $m$  le méridien de  $K_n$  tel que le nombre d'enlacement  $\text{lk}(K_n, m)$  soit égal à un, soit  $\ell$  la longueur entière de  $(S^3 \setminus K_n)$  orientée par  $K_n$  et soit  $\nu (= pm + q\ell)$  une longueur entière de  $N$  ( $p$  et  $q$  appartiennent à  $\mathbb{Z}$ ). La Formule de Chirurgie permet d'écrire :

$$\begin{aligned} [\lambda(\chi(D_n)) - \lambda(\chi(D_{n-1}))] = \\ \tau(m, \alpha_n m + \beta_n \ell; pm + q\ell) + \frac{\Delta''(N)(1)\beta_n}{[q(\alpha_n q - \beta_n p)]} \end{aligned}$$

et le calcul consiste simplement à évaluer les différents termes du membre de droite (ou membre du dessous) de cette équation.

**a. Calcul d'une longueur entière de  $N$ .** — ( $\nu = pm + q\ell$ ) est une longueur entière de  $N$  si et seulement si il existe un  $(n-1)$ -uplet d'entiers  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  vérifiant :

$$(1) \quad F(D)(1, \dots, n-1) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{q}{\beta_n} F(D)(1, \dots, n-1; n);$$

$$(2) \quad \text{pgcd}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, q) = 1;$$

$$(3) \quad p = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \text{lk}(K_i, K_n) x_i.$$

On peut remplacer dans l'équation matricielle (1) la matrice  $F(D)$  par la matrice triangulaire supérieure  $F_n(D)$  obtenue au paragraphe 1. Ainsi, le  $n$ -uplet  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, q)$  peut être obtenu par une méthode de remontée qui calcule, pour  $j$  décroissant de  $(n-1)$  à 1, une solution non nulle, entière, minimale,  $(\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j+1}, \dots, \tilde{x}_{n-1}, \tilde{q})$  du système :

$$F_n(D)(j, \dots, n-1) \begin{pmatrix} \tilde{x}_j \\ \dots \\ \tilde{x}_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{\tilde{q}}{\beta_n} F_n(D)(j, \dots, n-1; n).$$

**b. Calcul de  $\tau(m, \alpha_n m + \beta_n \ell; pm + q\ell)$ .**

PROPOSITION. — Si le nombre d'intersection  $\langle m, \ell \rangle$  est égal à 1 et si  $\alpha$  est positif, ( $\tau = \tau(m, \alpha m + \beta \ell; pm + q\ell)$ ) est donné par les deux formules :

- si  $\alpha$  est nul,  $\tau = (p^2 + q^2 + 1)/12pq - \text{sign}(pq)/4$ ;
- sinon,

$$\tau = -s(\beta, \alpha) + \frac{1}{12} \left[ \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{[q(\alpha q - \beta p)]} + \frac{p}{q} - \frac{p}{[\alpha(\alpha q - \beta p)]} \right] - \frac{1}{4} \left[ \text{sign} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) - \text{sign} \left( \frac{\beta}{[q(\alpha q - \beta p)]} \right) \right].$$

*Démonstration*

• Le cas ( $\alpha = 0$ ) résulte de la loi de réciprocité de Dedekind ([R-G], Chapitre 2, Théorème 1) : Pour tout couple  $(p, q)$  d'entiers strictement positifs premiers entre eux, on a :

$$s(p, q) + s(q, p) = \frac{p^2 + q^2 + 1}{12pq} - \frac{1}{4}.$$

• Le lemme 7.16 de [W], qui s'écrit : Pour tout couple  $(a, b)$  d'éléments primitifs de  $H_1(\partial N)$  et pour tout couple  $(\ell_1, \ell_2)$  d'éléments de  $H_1(\partial N)$  tel que le produit  $(\langle a, \ell_1 \rangle \langle a, \ell_2 \rangle \langle b, \ell_1 \rangle \langle b, \ell_2 \rangle)$  soit non nul, on a :

$$\begin{aligned} \tau(a, b; \ell_2) - \tau(a, b; \ell_1) = & \\ & + \frac{1}{12} \left[ \left[ \frac{\langle a, b \rangle}{\langle a, \ell_1 \rangle \langle b, \ell_1 \rangle} \right] - \left[ \frac{\langle a, b \rangle}{\langle a, \ell_2 \rangle \langle b, \ell_2 \rangle} \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[ \frac{\langle \ell_1, \ell_2 \rangle}{\langle a, \ell_1 \rangle \langle a, \ell_2 \rangle} \right] + \left[ \frac{\langle \ell_1, \ell_2 \rangle}{\langle b, \ell_1 \rangle \langle b, \ell_2 \rangle} \right] \right] \\ & - \frac{1}{4} \left[ \text{sign} \left( \frac{\langle a, b \rangle}{\langle a, \ell_1 \rangle \langle b, \ell_1 \rangle} \right) - \text{sign} \left( \frac{\langle a, b \rangle}{\langle a, \ell_2 \rangle \langle b, \ell_2 \rangle} \right) \right], \end{aligned}$$

permet, dans le cas où  $\alpha$  est strictement positif, d'exprimer  $\tau(m, \alpha m + \beta \ell; pm + q\ell)$  en fonction de  $(\tau(m, \alpha m + \beta \ell; \ell) = -s(\beta, \alpha))$ . □

**c. Calcul de  $\Delta''(N)(1)$ .**

*Définition du polynôme non normalisé de  $N$  :  $\tilde{\Delta}(N)$ .*

Soit  $L(N)$  le  $\mathbb{Z}$ -module  $(H_1(N)/\text{Torsion})$  isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , soit  $\tilde{\varphi}$  la surjection naturelle de  $\Pi_1(N)$  dans  $L(N)$ , et soit  $\theta$  un isomorphisme de  $L(N)$  dans  $\mathbb{Z}$ .

Le morphisme composé  $\theta \tilde{\varphi}$ , noté  $\varphi$ , envoie un lacet sur le nombre d'intersection de ce lacet avec une surface bordée par la longitude entière  $\nu$  de  $N$ , on peut donc fixer  $\theta$  de sorte que  $\varphi(m)$  soit égal à  $q$ ; dans ce cas, si  $m_i$  désigne le méridien de  $K_i$  orienté pour enlacer positivement  $K_i$ ,  $\varphi(m_i)$  est égal à  $(-\beta_i x_i)$  où  $x_i$  a été obtenu au a.

Le polynôme d'Alexander non normalisé de  $N$ ,  $\tilde{\Delta}(N)$ , est défini aux unités de  $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$  près, comme un générateur du premier idéal d'Alexander associé à  $\varphi$  (voir [C-F], Chapitre 7).

Savoir que le polynôme d'Alexander du tore plein est un et que le polynôme d'Alexander de la somme connexe d'un cercle d'homologie rationnel  $C$  et d'une sphère d'homologie rationnelle est égal au polynôme d'Alexander de  $C$ , permet de simplifier le diagramme  $D$  pour le calcul de  $\tilde{\Delta}(N)$  et de se ramener au cas où toutes les composantes de  $D$  croisent dessous sur le dessin. Sous cette hypothèse supplémentaire,  $\tilde{\Delta}(N)$  peut être calculé à l'aide de la présentation par générateurs et relations de  $\Pi_1(N)$  suivante :

*Description de la présentation de  $\Pi_1(N)$  utilisée.*

Le point base est supposé à l'infini.

- Les générateurs  $u_1, u_2, \dots, u_A$  correspondent naturellement aux  $A$  arcs du diagramme (composantes connexes de la projection de l'entrelacs) : un générateur est représenté par un méridien de l'arc  $\alpha$  auquel il correspond, relié au point base par un chemin vertical au dessus de  $\alpha$  et orienté de manière à enlacer positivement la composante de  $\alpha$ .

- Les relations sont :

- les  $(A - n)$  relations associées aux croisements du diagramme n'appartenant pas à un ensemble  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$  arbitraire de  $n$  croisements tel que la composante  $K_i$  croise dessous au croisement  $\gamma_i$  :

la relation associée au croisement		la relation associée au croisement
$\begin{array}{ccc} u_j & \uparrow & u_k \\ &   & \\ & u_h & \end{array}$		$\begin{array}{ccc} u_j & \downarrow & u_k \\ &   & \\ & u_h & \end{array}$
est $u_k u_h (u_j)^{-1} (u_h)^{-1}$ ,		est $u_h u_k (u_h)^{-1} (u_j)^{-1}$ ,
[le type de ce croisement est -];		[le type de ce croisement est +];

- les  $(n - 1)$  relations correspondant aux chirurgies effectuées : si  $\lambda$  est le mot en notant tous les arcs sous lesquels on passe avec la puissance convenable (1 ou -1 suivant que le croisement correspondant est de type + ou -), lorsqu'on parcourt la composante  $K_i$ , selon son orientation, d'un point d'un arc  $j$  au même point, et si  $e$  désigne le nombre d'enlacement

de  $K_i$  et de sa longitude parallèle sur la projection, la relation associée à la chirurgie effectuée sur  $K_i$  s'écrit :

$$\prod_{k=1}^{|\beta|} \left( \lambda_{u_j}^{(E(k(\alpha - e\beta)/\beta) - E((k-1)(\alpha - e\beta)/\beta))} \right),$$

où le produit non commutatif  $\prod_{k=1}^n v_k$  se lit  $v_1 v_2 \dots v_n$ . Ces relations sont notées  $r_1, r_2, \dots, r_{A-1}$ .

*Remarque.* — Cette présentation est très facile à faire lire à un ordinateur si on utilise un codage judicieux des arcs et des croisements.

**Calcul de  $\tilde{\Delta}(N)$ .**

Soit  $F$  le groupe libre engendré par  $u_1, u_2, \dots, u_A$ . La dérivation  $\partial/\partial u_k$  est définie comme suit :  $\partial/\partial u_k$  est l'unique application  $\mathbb{Q}$ -linéaire de  $\mathbb{Q}[F]$  dans lui-même vérifiant :

- $\frac{\partial}{\partial u_k}(mw) = m \frac{\partial}{\partial u_k}(w) + \frac{\partial}{\partial u_k}(m), \quad \forall m, w \in F, \text{ et}$
- $\frac{\partial}{\partial u_k}(u_\ell)$  est égal au symbole de Kronecker  $\delta_{k\ell}$ , pour  $k$  et  $\ell$  éléments de  $\{1, \dots, A\}$ .

Si un arc  $j$  de  $D$  fait partie d'une composante  $K_i$  telle que  $x_i$  est non nul,  $[\tilde{\Delta}(N)(1 - t^{\beta_j x_i})/(1 - t)]$  est égal, aux unités de  $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$  près, au déterminant de la matrice  $[d_{k\ell}]_{1 \leq k \leq A, k \neq j, 1 \leq \ell \leq A-1}$  où  $d_{k\ell}$  est égal à  $\varphi(\partial/\partial u_k(r_\ell))$ .

*Remarques :*

Soit  $\tilde{N}$  le revêtement de  $N$  associé à  $\varphi$ , l'isomorphisme  $\theta$  et l'action naturelle de  $L(N)$  sur  $\tilde{N}$  induisent une structure naturelle de  $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ -module sur  $H_1(\tilde{N}; \mathbb{Q})$ . K. WALKER définit, dans [W], le polynôme d'Alexander de  $N$  comme le déterminant d'une matrice de présentation de  $H_1(\tilde{N}; \mathbb{Q})$  sur  $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ . La décomposition cellulaire de  $N$  sous jacente dans la présentation de  $\Pi_1(N)$  décrite ci-dessus permet de vérifier aisément la concordance des deux définitions.

Si on place judicieusement les composantes insérées sur le dessin, et si on efface du diagramme toute composante insérée sur laquelle on a déjà effectué la chirurgie, en redonnant au coefficient de la composante qu'elle enlace sa valeur initiale, la taille des, au plus  $(2n - 1)$ , déterminants à calculer est majorée par le nombre de croisements du diagramme initial. (Une composante insérée au paragraphe 1 a un indice de numérotation supérieur à la composante qu'elle enlace.)

**Calcul de  $\Delta''(N)(1)$ .**

Si  $\tilde{\Delta}(N)$  est un polynôme d'Alexander de  $N$ , le polynôme d'Alexander normalisé de  $N$  est égal à  $qt^k\tilde{\Delta}(N)$ , où  $q$  et  $k$  appartiennent respectivement à  $\mathbb{Q}$  et à  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$  et sont choisis de sorte que  $\Delta(N)$  prenne la valeur un en un et vérifie  $\Delta(N)(t) = \Delta(N)(t^{-1})$ . (Cette dernière condition impose la nullité de  $\Delta'(N)(1)$ ).

Si  $\tilde{\Delta}(N)$  a pour développement de Taylor, en 1, à l'ordre 2


$$\tilde{\Delta}(N)(1+x) = a + bx + cx^2 + O(x^3),$$

$\Delta''(N)(1)$  est égal à  $(ab + 2ac - b^2)/(a^2)$ .

Cette idée, que je dois à P. VOGEL, réduit considérablement les calculs puisqu'elle permet de calculer des déterminants de matrices à coefficients dans  $\mathbb{Z}[x]/(x^3)$  à la place des déterminants exhibés dans le "Calcul de  $\tilde{\Delta}(N)$ ".

*Remarque.* — Malgré cette dernière simplification, les calculs les plus longs de l'algorithme seront ces derniers calculs de déterminants, c'est pourquoi on s'est attaché au paragraphe 1 à minimiser le nombre de croisements et à insérer les composantes tôt dans le diagramme.

*Exemple :* Soit  $R$  le revêtement cyclique d'ordre 3 de  $S^3$ , ramifié au dessus du nœud de trèfle

$T :$    $[H_1(R; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ .

Le revêtement  $R$  est présenté par le diagramme suivant :



transformé par le procédé du paragraphe 1 en



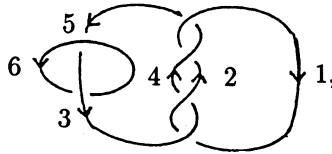
On peut vérifier que les techniques exposées au paragraphe 2 donnent les

résultats attendus :

- $\lambda(\chi(D_1)) = 0$ , ( $\chi(D_1)$  est difféomorphe à  $S^3$ ).
- $\lambda(\chi(D_2)) = \frac{1}{8}$ , ( $\chi(D_2)$  est l'espace lenticulaire  $L(4, -1)$ .)

Le calcul de  $([\lambda(\chi(D_3)) - \lambda(\chi(D_2))] = \frac{1}{8})$  est détaillé ci-dessous :

- a)  $(x_1, x_2, p, q) = (0, 1, 0, 2)$ .
- b)  $\tau(m, m + \ell; 2\ell) = \frac{1}{16}$ .
- c) Avec la numérotation des arcs et les orientations du dessin :



la présentation de  $\Pi_1(N)$  décrite au c) s'écrit :

$$\langle u_1, u_2, \dots, u_6; r_1, r_2, \dots, r_5 \rangle$$

avec les relations :

- |   |  |  |
|---|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• associées aux croisements</li> </ul> |  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• associées aux chirurgies</li> </ul> |
| $r_1 = u_3 u_2 (u_3)^{-1} (u_1)^{-1}$ ,                                       |  | $r_4 = u_2 u_1 u_6 u_3$ ,  |
| $r_2 = u_2 u_4 (u_2)^{-1} (u_3)^{-1}$ ,                                       |  | $r_5 = u_3 u_4$ .  |
| $r_3 = u_6 u_3 (u_6)^{-1} (u_5)^{-1}$ ,                                       |  |  |

On supprime simultanément  $r_3$  et  $u_5$  de la présentation, puis  $u_6$  et  $r_4$ . (Il existe toujours deux simplifications de ce style lorsqu'on effectue la chirurgie sur une composante insérée.)

Ici, deux réductions supplémentaires permettent d'obtenir la présentation de  $\Pi_1(N)$  :  $\Pi_1(N) = \langle u_2, u_4; u_2 u_4 (u_2)^{-1} u_4 \rangle$ , d'où on déduit aisément :  $\tilde{\Delta}(N) = 1 + t$ , puis  $\Delta''(N)(1) = \frac{1}{4}$ .

La Formule de Chirurgie permet de conclure

$$[\lambda(\chi(D_3)) - \lambda(\chi(D_2))] = \frac{1}{8}.$$

On en déduit que l'invariant de Walker du revêtement cyclique ramifié d'ordre 3 de  $S^3$  au-dessus de  $T$  est égal à  $\frac{1}{4}$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [B-L] BOYER (S.) and LINES (D.). — Surgery Formulae for Casson's invariant and extensions to homology lens spaces, *J. Reine Angew. Math.*, à paraître.
- [C-F] CROWELL (R.H.) and FOX (R.H.). — *Introduction to knot theory*. — Ginn, 1963.
- [M] MARIN (A.). — Un nouvel invariant pour les sphères d'homologie de dimension 3, (d'après Casson), *Séminaire Bourbaki*, n° 693, Février 1988.
- [R] ROLFSEN (D.). — *Knots and links*. — Publish or Perish, 1976.
- [R-G] RADEMACHER (H.) and GROSSWALD (E.). — Dedekind sums, *The Carus Mathematical monographs*, n° 16.
- [W] WALKER (K.). — An extension of Casson's Invariant, *Thesis*, University of California at Berkeley, in preparation, preliminary draft November 8, 1989.
-