BULLETIN DE LA S. M. F.

SLAÏM BEN FARAH
LOTFI KAMOUN

Distributions coniques sur le cône des matrices de rang un et de trace nulle

Bulletin de la S. M. F., tome 118, n^o 3 (1990), p. 251-272
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_3_251_0>

Bull. Soc. math. France,
118, 1990, p. 251–272.

DISTRIBUTIONS CONIQUES SUR LE CÔNE DES MATRICES DE RANG UN ET DE TRACE NULLE

DE

SLAÏM BEN FARAH et LOTFI KAMOUN (*)

RÉSUMÉ. — Nous caractérisons les fonctions moyennes sur le cône $\Xi = \{\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \operatorname{rg}(\xi) = 1 \text{ et } \operatorname{tr}(\xi) = 0\}$ $(n \geq 3)$ qui s'identifie à l'espace homogène $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})/MN$ où MN est un sous-groupe fermé de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$. Ce qui nous a permis, dans le cas $n = 3$, de déterminer toutes les distributions coniques sur Ξ.

ABSTRACT. — We characterize the orbital functions on the cone $\Xi = \{\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \operatorname{rg}(\xi) = 1 \text{ and } \operatorname{tr}(\xi) = 0\}$ $(n \geq 3)$ which identifies with the homogeneous space $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})/MN$ where MN is a closed subgroup of $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$. This permits us, in the case $n = 3$, to determine all the conical distributions on Ξ.

Introduction

Les distributions coniques ont été introduites par S. HELGASON [6] qui les a définies sur l'espace des horocycles d'un espace symétrique riemannien et les a déterminées dans le cas du groupe de Lorentz $\mathrm{SO}_0(1, q)$. MEN CHANG HU [7] en donne une description dans le cas où l'espace symétrique riemannien est de rang un. Également dans le cas de $\mathrm{SO}_0(1, q)$, les distributions coniques ont été étudiées par K. HARZALLAH [5] et A. STRASBURGER [12].

J. FARAUT et K. HARZALLAH [2] ont défini et déterminé les distributions coniques dans le cas de l'espace symétrique pseudo-riemannien isotrope de rang un $\mathrm{O}(p, q)/\mathrm{O}(p-1, q)$. Ce sont des distributions définies sur le cône isotrope de la forme quadratique associée au groupe $\mathrm{O}(p, q)$.

Dans cet article, dont les résultats ont été annoncés dans [1] et [8], on considère le cône Ξ des matrices carrées réelles, d'ordre $n \geq 3$, de rang un et de trace nulle. Ξ est un espace homogène associé à l'espace symétrique pseudo-riemannien non isotrope de rang un $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})/\mathrm{GL}(n-1, \mathbf{R})$. On

(*) Texte reçu le 11 janvier 1990, révisé le 12 juin 1990.
S.B. FARAH, L. KAMOUN, Université du Centre, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, 5019 Monastir, Tunisie

définit les distributions coniques sur Ξ d'une façon analogue à [2]. Dans le cas où $n = 3$ nous donnons une description complète de ces distributions.

1. Le cône Ξ des matrices de rang un et de trace nulle

Pour tout entier $n \geq 3$, on considère le groupe de Lie semi-simple connexe, $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ et le cône

$$\Xi = \Big\{\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{rg}(\xi) = 1 \text{ et } \mathrm{tr}(\xi) = 0\Big\},$$

où d'une façon générale $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices réelles à k lignes et k colonnes. G opère transitivement sur Ξ par conjugaison $g \cdot \xi = g\xi g^{-1}$. Soit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{n-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On définit un automorphisme involutif $\sigma : \mathrm{G} \to G$ par $\sigma(g) = JgJ$. Le sous-groupe des points fixes de σ est :

$$H = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & p & b \\ {}^tq & h & {}^tq \\ b & p & a \end{pmatrix} \text{ tel que } \det(g) = 1,\ h \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R}),\ p, q \in \mathbb{R}^{n-2} \text{ et } a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

où d'une façon générale ${}^tA$ est la transposée de la matrice A, un élément de $\mathbb{R}^k$ étant considéré comme une matrice ligne. H est isomorphe à $\mathrm{S}(\mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{R}))$.

La différentielle de σ, notée encore σ, est l'automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ défini par $\sigma(X) = JXJ$. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ la décomposition symétrique de $\mathfrak{g}$ définie par σ. Soient

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{q} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A} = \mathbb{R} \cdot L.$$

$\mathfrak{A}$ est un sous-espace de Cartan de $(\mathfrak{g}, \sigma)$. Soit μ la forme linéaire sur $\mathfrak{A}$ définie par $\mu(\lambda L) = \lambda$ pour tout λ dans $\mathbb{R}$. Les sous-espaces propres de

$\operatorname{ad} L$ associés respectivement à ± 1 et ± 2 sont

$$\mathfrak{g}^{\mu} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & {}^{t}q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } p, q \in \mathbb{R}^{n-2} \right\},$$

$$\mathfrak{g}^{2\mu} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathfrak{g}^{-\mu} = \sigma(\mathfrak{g}^{\mu}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}^{-2\mu} = \sigma(\mathfrak{g}^{2\mu}).$$

Posons $\mathfrak{N} = \mathfrak{g}^{\mu} \oplus \mathfrak{g}^{2\mu}$ et $\bar{\mathfrak{N}} = \sigma(\mathfrak{n}) = \mathfrak{g}^{-\mu} \oplus \mathfrak{g}^{-2\mu}$. Ce sont des sous-algèbres de Lie nilpotentes de $\mathfrak{g}$.

Soient A, N et $\overline{N}$ les sous-groupes de Lie connexes de G correspondant respectivement aux sous-algèbres de Lie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$ et $\bar{\mathfrak{N}}$. Alors,

$$A = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} \operatorname{expt} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-t) \end{pmatrix} \text{ où } t \in \mathbb{R} \right\}, \text{ avec } a_t \cdot a_s = a_{t+s}\,;$$

$$N = \left\{ n(\alpha, p, q) = \begin{pmatrix} 1 & p & \alpha + \frac{1}{2} p \cdot q \\ 0 & I_{n-2} & {}^{t}q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } p, q \in \mathbb{R}^{n-2} \right\},$$

avec $n(\alpha, p, q) n(\alpha', p', q') = n(\alpha + \alpha' + \frac{1}{2}(p \cdot q' - p' \cdot q), p + p', q + q')$;

$$\overline{N} = \left\{ \bar{n}(\alpha, p, q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^{t}q & I_{n-2} & 0 \\ \alpha + \frac{1}{2} p \cdot q & p & 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } p, q \in \mathbb{R}^{n-2} \right\}$$

avec

$$\bar{n}(\alpha, p, q) \bar{n}(\alpha', p', q') = \bar{n}(\alpha + \alpha' + \tfrac{1}{2}(p \cdot q' - p' \cdot q), p + p', q + q')\,;$$
$$p \cdot q = \sum_{j=1}^{n-2} p_j q_j .$$

Le centraliseur de $\mathfrak{A}$ dans H est le sous-groupe de G,

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{array}{r} \text{tel que } \lambda \in \mathbb{R}^{*} \text{ et } h \in \mathrm{GL}(n-2, \mathbb{R}), \\ \text{avec } \lambda^{2} \det(h) = 1 \end{array} \right\}.$$

M normalise N et MN est le stabilisateur du point $\xi^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pour l'action de G dans Ξ.

Le cône Ξ s'identifie alors à l'espace homogène G/MN. MN est unimodulaire donc Ξ possède une mesure G-invariante qu'on notera $d\xi$.

Soit $\xi \in \Xi$, alors il existe $a = (a_1, A, a_n)$ et $b = (b_1, B, b_n)$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, A et B sont dans $\mathbb{R}^{n-2}$, tels que $\xi = {}^t ab$ et $a \cdot b = 0$. a et b ne sont pas déterminés de façon unique, mais si $\xi = {}^t ab = {}^t a'b'$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $a' = \lambda a$ et $b' = (1/\lambda) b$.

Soit u l'application de Ξ dans $\mathbb{R}$ définie par $u(\xi) = \operatorname{tr} \xi \xi^0$, u est MN-invariante et C^∞.

Proposition 1.1. — *Les orbites du groupe MN dans Ξ sont :*

$$\{\lambda \xi^0\} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \Xi_t = \{\xi \in \Xi \text{ tel que } u(\xi) = t\} \text{ où } t \in \mathbb{R}^*,$$
$$\Omega_1 = \{\xi \in \Xi \text{ tel que } e_n \xi = 0 \text{ et } \xi^t e_1 \neq 0\},$$
$$\Omega_2 = \{\xi \in \Xi \text{ tel que } e_n \xi \neq 0 \text{ et } \xi^t e_1 = 0\},$$
$$\Gamma_1 = \{\xi = {}^t ab \in \Xi_{00} \text{ tel que } A \neq 0 \text{ et } B = 0\},$$
$$\Gamma_2 = \{\xi = {}^t ab \in \Xi_{00} \text{ tel que } A = 0 \text{ et } B \neq 0\},$$

et si $n \geq 4$ on a en plus, $\Gamma = \{\xi = {}^t ab \in \Xi_{00}$ tel que $A \neq 0$ et $B \neq 0\}$ qui est une orbite lorsque $n > 4$ et réunion de deux orbites lorsque $n = 4$, où $\Xi_{00} = \{\xi \in \Xi$ tel que $e_n \xi = 0$ et $\xi^t e_1 = 0\}$ et $\{e_i\,;\ 1 \leq i \leq n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. □

L'ouvert $\Xi^* = \bigcup_{t \neq 0} \Xi_t$ est dense dans Ξ. L'ouvert des points réguliers de u est $\Xi' = \Xi^* \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ et l'ensemble des points critiques de u est $\Xi_{00} = \Gamma \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \mathbb{R}^* \cdot \xi^0$.

Soit $\xi^* = {}^t \xi^0$; on a $u(m a_t n \cdot \xi^*) = \exp(-2t)$ pour tout $m \in M$, $n \in N$ et $t \in \mathbb{R}$. Pour $\xi \in \Xi$ on a $\xi \in MAN \cdot \xi^* \Leftrightarrow u(\xi) > 0$ et $\xi \in MAN \cdot (-\xi^*) \Leftrightarrow u(\xi) < 0$.

D'autre part, $MAN \cdot \xi^* = AN \cdot \xi^*$ ce qui montre que $AN \cdot \xi^* \cup AN \cdot (-\xi^*)$ est un ouvert de Zariski donc dense dans Ξ.

L'expression de la mesure G-invariante sur Ξ dans cet ouvert est donnée par

$$\int_\Xi f(\xi)\, d\xi = \sum_{i=0}^{1} \int_A \int_N f\left[a_t n(\alpha, p, q) \cdot (-1)^i \xi^*\right] dt\, d\alpha\, dp\, dq,$$

où $f \in C_c(\Xi)$.

On considère maintenant l'application ψ de Ξ dans Ξ définie par $\psi(\xi) = J\xi J$. ψ est un difféomorphisme de Ξ et vérifie $\psi(AN\cdot\xi^*) = A\overline{N}\cdot\xi^0$ et $\psi(AN\cdot(-\xi^*)) = A\overline{N}\cdot(-\xi^0)$ ce qui montre que $A\overline{N}\cdot\xi^0 \cup A\overline{N}\cdot(-\xi^0)$ est aussi un ouvert dense de Ξ et l'expression de la mesure $\mathrm{d}\xi$ dans cet ouvert est

$$\int_\Xi f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{i=0}^{1}\int_A\int_N f\big[a_t\bar{n}(\alpha,p,q)\cdot(-1)^i\xi^0\big]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q.$$

2. La fonction moyenne

L'application $u : A\overline{N}\cdot\xi^0 \to \mathbb{R}$ vérifie

$$u\big(a_t\bar{n}(\alpha,p,q)\cdot\xi^0\big) = \exp(-2t)\Big[\tfrac{1}{4}(p\cdot q)^2 - \alpha^2\Big].$$

L'ouvert $A\overline{N}\cdot\xi^0\cup A\overline{N}\cdot(-\xi^0)$ rencontre toutes les MN-orbites dans Ξ et la différentielle de u dans l'ouvert $A\overline{N}\cdot\xi^0$ est :

$$\mathrm{d}_\xi u = \exp(-2t)\Big(-2u(\xi)\exp(2t), -2\alpha, \tfrac{1}{2}q_1(p\cdot q),\dots,\tfrac{1}{2}q_{n-2}(p\cdot q), \tfrac{1}{2}p_1(p\cdot q),\dots,\tfrac{1}{2}p_{n-2}(p\cdot q)\Big)$$

où $\xi = a_t\bar{n}(\alpha,p,q)\cdot\xi^0$.

L'application u est une submersion surjective de Ξ' sur $\mathbb{R}$. Alors, d'après un théorème de HARISH-CHANDRA ([4], p. 192), il existe une application $\mathcal{M} : \mathcal{D}(\Xi') \to \mathcal{D}(\mathbb{R})$ linéaire continue surjective et vérifiant,

$$\forall f\in\mathcal{D}(\Xi')\ \forall g\in\mathcal{D}(\mathbb{R})\qquad \int_{\Xi'} f(\xi)g\big(u(\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

L'application $\mathcal{M}$ se prolonge à toutes les fonctions intégrables sur Ξ, et si f est intégrable $\mathcal{M}f$ est définie presque partout et est intégrable sur $\mathbb{R}$; de plus si f est dans $\mathcal{D}(\Xi)$ alors $\mathcal{M}f$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et à support compact.

Dans ce paragraphe on se propose de trouver les développements asymptotiques des fonctions $\mathcal{M}f$ au voisinage de $x = 0$ et de donner un théorème qui les caractérise.

Si on identifie $A\overline{N}\cdot\xi^0$ à $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{2(n-2)}$ on aura,

$$\text{(II.1)}\qquad \begin{aligned}&\int_{A\overline{N}\cdot\xi^0} f(\xi)g\big(u(\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi\\ &\quad= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^{2(n-2)}} f(t,\alpha,p,q)\,g\Big(\exp(-2t)[\tfrac{1}{4}(p\cdot q)^2-\alpha^2]\Big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\\ &\quad= \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathcal{M}f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{où } g\in\mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ et } f\in\mathcal{D}(A\overline{N}\cdot\xi^0).\end{aligned}$$

La restriction de u à $A\overline{N}\cdot\xi^0$ est la composée

$$\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{2(n-2)}\xrightarrow{B_1}\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\xrightarrow{B_2}\mathbb{R}^2\xrightarrow{B_3}\mathbb{R}$$

où $B_1(t,\alpha,p,q)=(t,\alpha,\frac{1}{2}p\cdot q)$, $B_2(t,\alpha,u)=(t,\alpha^2-u^2)$, et $B_3(t,x)=-\exp(-2t)x$.

Chaque B_i est C^∞-surjective, submersive dans un ouvert dense, dont le complémentaire est de mesure de Lebesgue nulle. On munit les différents $\mathbb{R}^k$ qui apparaissent ci-dessus des mesures de Lebesgue correspondantes. Alors chaque B_i définit une application moyenne $\mathcal{N}_i$ (étendue aux fonctions intégrables à support compact) et l'application $\mathcal{M}$ est la composée $\mathcal{N}_3\circ\mathcal{N}_2\circ\mathcal{N}_1$, en vertu de la transitivité de l'opération image directe des distributions à support compact par une application C^∞. On a alors, pour f dans $\mathcal{D}(A\overline{N}\cdot\xi^0)$ et $x\neq 0$:

$$\mathcal{M}f(x)=\int_{\mathbb{R}}(\mathcal{N}_2\circ\mathcal{N}_1 f)\big(t,-\exp(2t)x\big)\exp(2t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour étudier l'application $\mathcal{M}$ il nous faut étudier les applications $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$. L'idée est d'utiliser les résultats de TENGSTRAND [13] (voir [4] pour le cas $m=1$) que l'on va rappeler en les formulant un peu différemment.

Soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^{2m}$ de signature (m,m) ; $m\geq 1$; pour toute $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2m}\setminus\{0\})$ il existe une fonction $\mathcal{N}f\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que l'on a pour toute $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}}\varphi\big(Q(x)\big)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,\mathcal{N}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On considère l'espace $\mathcal{H}_m$ des fonctions φ sur $\mathbb{R}^*$ qui s'écrivent sous la forme $\varphi=\varphi_0+\eta\varphi_1$ où φ_0 et $\varphi_1\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\eta(t)=Y(t)t^{m-1}$ si m est pair et $\eta(t)=t^{m-1}\operatorname{Log}|t|$ si m est impair, où Y est la fonction de Heaviside.

L'espace $\mathcal{H}_m$ est muni d'une topologie limite inductive d'espaces de Fréchet ; l'application $\mathcal{N}$ se prolonge en une application continue et surjective de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2m})$ sur l'espace $\mathcal{H}_m$.

On revient maintenant à l'étude des fonctions $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$.

Soit $\mathcal{U}_1=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{2(n-2)}\setminus\mathbb{R}^2\times\{0\}$ l'ouvert des points réguliers de B_1 ; il existe donc une application linéaire continue et surjective $\mathcal{N}_1$ de $\mathcal{D}(\mathcal{U}_1)$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ telle que pour toutes $f\in\mathcal{D}(\mathcal{U}_1)$ et $g\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ on a,

$$\text{(II.2)}\qquad \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{2(n-2)}} g\big(t,\alpha,\tfrac{1}{2}p\cdot q\big)f(t,\alpha,p,q)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q = \int_{\mathbb{R}^3} g(t,\alpha,u)\,\mathcal{N}_1 f(t,\alpha,u)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}u.$$

Soit $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2,\mathcal{H}_{n-2})$ l'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ à support compact et à valeurs dans l'espace $\mathcal{H}_{n-2}$ [11] ; il s'identifie à l'espace des fonctions φ sur $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^*$ qui s'écrivent sous la forme :

$$\varphi(t,\alpha,u)=\varphi_0(t,\alpha,u)+\eta(u)\varphi_1(t,\alpha,u)$$

où φ_0 et $\varphi_1\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $\eta(u)=Y(u)u^{n-3}$ si n est pair et $\eta(u)=u^{n-3}\operatorname{Log}|u|$ si n est impair.

LEMME 2.1. — *L'application $\mathcal{N}_1$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{2(n-2)})$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2,\mathcal{H}_{n-2})$ est linéaire continue et surjective.*

Démonstration. — On identifie l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{2(n-2)})$ à l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2,\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2(n-2)}))$, le lemme est donc une version vectorielle du théorème de Tengstrand. $\square$

B_2 est sans point singulier dans l'ouvert $\mathcal{U}_2=\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{R}\times\{0\}$; il existe donc une application $\mathcal{N}_2:\mathcal{D}(\mathcal{U}_2)\to\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ linéaire continue et surjective telle que pour toutes $f\in\mathcal{D}(\mathcal{U}_2)$ et $g\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ on a,

$$\text{(II.3)}\qquad \int_{\mathbb{R}^3} g(t,\alpha^2-u^2)f(t,\alpha,u)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}u=\int_{\mathbb{R}^2} g(t,v)\mathcal{N}_2 f(t,v)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v.$$

LEMME 2.2. — *Pour toute fonction $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, la fonction $\mathcal{N}_2 f$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathcal{H}_1)$ et l'application $\mathcal{N}_2$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathcal{H}_1)$ est linéaire continue et surjective.* $\square$

On est donc amené à caractériser l'image de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2,\mathcal{H}_{n-2})$ par $\mathcal{N}_2$. La formule (II.3) se récrit à l'aide d'un changement de variables

$$\mathcal{N}_2 f(t,v)=\int_{u^2+v>0} f_t\big(\sqrt{u^2+v},u\big)\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+v}}$$

où $f_t(\alpha,u)=\frac{1}{2}(f(t,\alpha,u)+f(t,-\alpha,u))$.

Posons $f_1(t,\alpha,u)=Y(u)u^{n-3}\varphi(t,\alpha,u)$ si n est pair et $f_2(t,\alpha,u)=u^{n-3}\operatorname{Log}|u|\varphi(t,\alpha,u)$ si n est impair ; avec $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. On a,

$$(\mathcal{N}_2 f_1)(t,v)=\int_{\substack{u^2+v>0\\ u>0}}\varphi_t\big(\sqrt{u^2+v},u\big)\frac{u^{n-3}}{\sqrt{u^2+v}}\,\mathrm{d}u$$

et

$$(\mathcal{N}_2 f_2)(t,v)=\int_{\substack{u^2+v>0\\ u>0}}\frac{u^{n-3}}{\sqrt{u^2+v}}\Big[\varphi_t\big(\sqrt{u^2+v},u\big)+\varphi_t\big(\sqrt{u^2+v},-u\big)\Big]\operatorname{Log}u\,\mathrm{d}u.$$

On suppose, pour t et α fixés, que la fonction $u \mapsto \varphi(t,\alpha,u)$ est nulle hors d'un petit voisinage de l'origine.

$$(\mathcal{N}_2 f_1)(t,v) = \int_{\substack{u^2+v>0\\ u>1}} \varphi_t\big(\sqrt{u^2+v},u\big)\frac{u^{n-3}}{\sqrt{u^2+v}}\,\mathrm{d}u + \int_{I_V} \varphi_t\big(\sqrt{u^2+v},u\big)\frac{u^{n-3}}{\sqrt{u^2+v}}\,\mathrm{d}u$$

où $I_V = \{u \in \mathbb{R}\,;\ u^2+v>0 \text{ et } 0<u<1\}$.

La première intégrale est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et à support compact; donc $\mathcal{N}_2 f_1$ admet la même singularité que la deuxième intégrale.

$$\int_{I_V} \varphi_t\big(\sqrt{u^2+v},u\big)\frac{u^{n-3}}{\sqrt{u^2+v}}\,\mathrm{d}u = \sum_{2r+s\le i} \frac{1}{(2r)!\,s!}\,\frac{\partial^{2r+s}\varphi_t}{\partial\alpha^{2r}\partial u^s}(0,0) I_{r,n+s-3}(v) + W_t(v)$$

où $I_{r,s}(v) = \int_{I_V} u^s(u^2+v)^{r-1/2}\,\mathrm{d}u$ et $W_t(v)$ est de classe C^{i+1} au voisinage de $v=0$.

LEMME 2.3. — *Pour i et j dans $\mathbb{N}$ on a :*

i) $I_{1,0}(v) = -\frac14 v \operatorname{Log}|v| + \frac12 v \operatorname{Log}\big[1+(1+v)^{1/2}\big] + \frac12(1+v)^{1/2}$;

ii) $I_{i,0}(v) = (1/2i)(1+v)^{i-1/2} + \big[(2i-1)/2i\big]\, v\, I_{i-1,0}(v)$;

iii) $I_{i,1}(v) = \big[1/(2i+1)\big](1+v)^{i+(1/2)} - Y(v)\big[1/(2i+1)\big]v^i(v)^{1/2}$;

iv) $I_{i,j}(v) = \big[1/(2i+1)\big](1+v)^{i+(1/2)} - \big[(j-i)/(2i+1)\big] I_{i+1,j-2}(v)$.

COROLLAIRE 2.4. — *Pour i et j dans $\mathbb{N}$ on a :*

i) $I_{i,2j}(v) = C_{i,j} v^{i+j} \operatorname{Log}|v| + W_{i,j}(v)$;

ii) $I_{i,2j+1}(v) = C'_{i,j} Y(v) v^{i+j}(v)^{1/2} + V_{i,j}(v)$,

où $C_{i,j}$, $C'_{i,j}$ sont des nombres réels non nuls et où $W_{i,j}$, $V_{i,j}$ sont des fonctions C^∞ dans un petit voisinage de l'origine. □

Ce corollaire montre que l'on a, au voisinage de $v=0$,

$$(\mathcal{N}_2 f_1)(t,v) = \varphi_0(t,v) + v^{(n-4)/2}\operatorname{Log}|v|\,\varphi_1(t,v) + Y(v)v^{(n-4)/2}\sqrt{v}\sum_j C_j(t)v^j,$$

avec

$$C_j(t) = \sum_{r+s=j} C'_{r,s+(n-4)/2}\,\frac{1}{(2r)!\,(2s)!}\,\frac{\partial^{2(r+s)}\varphi_t}{\partial\alpha^{2r}\partial u^{2s}}(0,0).$$

Dans le cas où n est impair on a

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}_2 f_2)(t,v) = \int_{I_V} \Big[\varphi_t\big(\sqrt{u^2+v},u\big) \\ + \varphi_t\big(\sqrt{u^2+v},u\big)\Big] \operatorname{Log} u \frac{u^{n-3}}{\sqrt{u^2+v}}\,\mathrm{d}u + \varphi_0(t,v) \\ = \sum_{r+s\le i} \frac{2}{(2r)!\,(2s)!} \frac{\partial^{2(r+s)}\varphi_t}{\partial\alpha^{2r}\partial u^{2s}}(0,0) J_{r,s+(n-3)/2}(v) + \varphi_0(t,v) + u_t(v),\end{aligned}$$

où $u_t(v)$ est de classe C^{2i+1} au voisinage de $v=0$, $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et

$$J_{i,j}(v) = \int_{I_V} u^{2j}(u^2+v)^{i-(1/2)} \operatorname{Log} u\,\mathrm{d}u.$$

LEMME 2.5. — *Pour tous i et j dans $\mathbb{N}$,*

$$J_{i,j}(v) = D_{i,j} v^{i+j} J_{0,0}(v) + \operatorname{Log}|v|\,\theta_{i,j}(v) + \psi_{i,j}(v)$$

où $D_{i,j}$ sont des constantes non nulles et $\theta_{i,j}$, $\psi_{i,j} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

LEMME 2.6. — *Au voisinage de $v=0$, on a*

$$J_{0,0}(v) = -\tfrac{1}{8}\Big[(\operatorname{Log}|v|)^2 + 2\pi^2 Y(v)\Big] + \theta(v)\operatorname{Log}|v| + \psi(v)$$

où θ et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Ce lemme montre que l'on a

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}_2 f_2)(t,v) = \varphi_0(t,v) + v^{(n-3)/2} \operatorname{Log}|v|\,\varphi_1(t,v) \\ + \Big[(\operatorname{Log}|v|)^2 + 2\pi^2 Y(v)\Big] v^{(n-3)/2} \sum_i d_i(t) v^i\end{aligned}$$

avec

$$d_i(t) = -\sum_{r+s=i} 2D_{r,s+(n-3)/2} \frac{1}{(2r)!\,(2s)!} \frac{\partial^{2(r+s)}\varphi_t}{\partial\alpha^{2r}\partial u^{2s}}(0,0).$$

Soit $\mathcal{K}_i$ ($i=1$ ou 2) l'ensemble des fonctions φ sur $\mathbb{R}^*$ qui s'écrivent sous la forme :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)\log|x| + \eta_i(x)\varphi_2(x)$$

où $\eta_i(x) = Y(x)x^{(n-4)/2}(x)^{1/2}$ si n est pair et où $\eta_i(x) = \big[(\operatorname{Log}|x|)^2 + (-1)^i 2\pi^2 Y(x)\big]x^{(n-3)/2}$ si n est impair; φ_0, φ_1 et $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Il revient au même de dire que $\varphi \in \mathcal{K}_i$ ou de dire que :

i) φ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et φ nulle hors d'un compact

ii) il existe deux suites de nombres (A_k) et (B_k) telles que pour tout entier N la fonction $x \to \varphi(x) - \operatorname{Log}|x| \sum_{k=0}^{N} A_k x^k - \eta_i(x) \sum_{k=0}^{N'} B_k x^k$ soit de classe C^m dès que $N \geq m$ où $N' = N - \frac{1}{2}(n-4)$ si n est pair et $N' = N - \frac{1}{2}(n-3)$ si n est impair.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$; on munit l'espace $\mathcal{K}_{i,k} = \{\varphi \in \mathcal{K}_i ; \operatorname{supp}\varphi \subset [-k,k]\}$ d'une topologie d'espace de Fréchet définie par les semi-normes $p_{\theta,N,m}$, q_r définies ainsi :

i) Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; $\theta \equiv 1$ au voisinage de 0 et $\operatorname{supp}\theta \subset [-k,k]$; pour N et m entiers ; $N \geq m$,

$$p_{\theta,N,m}(\varphi) = \sup_x \left| \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m \left[\varphi(x) - \theta(x)\left(\operatorname{Log}|x| \sum_{i=0}^{N} A_i x^i + \eta_i(x) \sum_{j=0}^{N'} B_j x^j\right)\right]\right|.$$

ii) Pour $r \in \mathbb{N}^*$; $q_r(\varphi) = |A_r| + |B_r|$.

La topologie de l'espace $\mathcal{K}_{i,k}$ ainsi construite est indépendante du choix de θ. On munit l'espace $\mathcal{K}_i$ de la topologie limite inductive des espaces $\mathcal{K}_{i,k}$.

PROPOSITION 2.7. — *L'application* $\mathcal{N}_2 : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2, \mathcal{H}_{n-2}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_1)$ *est linéaire continue surjective.*

Démonstration. — L'étude des fonctions $\mathcal{N}_2 f_1$ et $\mathcal{N}_2 f_2$ nous a montré que pour toute $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2, \mathcal{H}_{n-2})$, la fonction $\mathcal{N}_2 f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_1)$. On utilise le théorème de Borel généralisé aux fonctions à valeurs dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et le LEMME 2.2 pour montrer que $\mathcal{N}_2$ est surjective. Pour la continuité on utilise le théorème du graphe fermé. Supposons que la suite (f_n) converge vers f dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2, \mathcal{H}_{n-2})$ et la suite $(\mathcal{N}_2(f_n))$ converge vers φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_1)$; pour toute $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ nulle dans un petit voisinage de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$; la suite $((\gamma \circ B_2) f_n)$ converge vers $(\gamma \circ B_2) f$, or $(\gamma \circ B_2) f_n \in \mathcal{D}(\mathcal{U}_2)$ donc $\gamma \mathcal{N}_2(f_n) = \mathcal{N}_2(\gamma \circ B_2) f_n$ converge vers $\mathcal{N}_2(\gamma \circ B_2) f$ d'où $\gamma \mathcal{N}_2 f = \gamma \varphi$ et par conséquent $\varphi = \mathcal{N}_2 f$. Le graphe de l'application $\mathcal{N}_2$ est fermé ; elle est donc continue.

Maintenant on est en mesure d'annoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.8. — *L'application* $\mathcal{M} : \mathcal{D}(A\overline{N} \cdot \xi^0) \to \mathcal{K}_1$ *est linéaire continue et surjective.*

Démonstration. — Pour toute $f \in \mathcal{D}(A\overline{N}\cdot\xi^0)$, $(\mathcal{N}_2\circ\mathcal{N}_1)f(t,v) = \varphi_0(t,v)+\varphi_1(t,v)\operatorname{Log}|v|+\eta_1(v)\varphi_2(t,v)$, où φ_0,φ_1 et $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Alors

$$\mathcal{M}f(x) = \psi_0(x)+\psi_1(x)\operatorname{Log}|x|+\eta_1(x)\psi_2(x), \quad \text{avec}$$
$$\psi_0(x) = \int_{\mathbb{R}} [\varphi_0 + 2t(\varphi_1+\varphi_2)]\big(t, -\exp(2t)x\big)\exp(2t)\,\mathrm{d}t,$$
$$\psi_1(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_1\big(t,-\exp(2t)x\big)\exp(2t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et}$$
$$\psi_2(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_2\big(t,\exp(2t)x\big)\exp\big((n-1)t\big)\,\mathrm{d}t\,;$$

donc ψ_0,ψ_1 et $\psi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

On utilise les mêmes arguments que précédemment pour montrer que $\mathcal{M}$ est continue et surjective de $\mathcal{D}(A\overline{N}\cdot\xi^0)$ sur $\mathcal{K}_1$. □

Il nous reste à prolonger l'application $\mathcal{M}$ à $\mathcal{D}(A\overline{N}\cdot(-\xi^0))$. Si on identifie l'ouvert $A\overline{N}\cdot(-\xi^0)$ à $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{2(n-2)}$, on aura pour $g\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $f\in\mathcal{D}(A\overline{N}\cdot(-\xi^0))$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{A\overline{N}\cdot(-\xi^0)} f(\xi)g\big(u(\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi\\ &= \int_{A\overline{N}\cdot\xi^0} f(-\xi)g\big(-u(\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}\tilde{f}(x)g(-x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}\tilde{f}(-x)g(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

où $\tilde{f}(\xi)=f(-\xi)$; $\tilde{f}\in\mathcal{D}(A\overline{N}\cdot\xi^0)$.

Le prolongement de $\mathcal{M}$ à $\mathcal{D}(A\overline{N}\cdot\xi^0)$ montre que $\mathcal{M}$ se prolonge aussi à $\mathcal{D}(A\overline{N}\cdot(-\xi^0))$ et que l'image de $\mathcal{D}(A\overline{N}\cdot(-\xi^0))$ par $\mathcal{M}$ est l'espace $\mathcal{K}_2$.

On considère maintenant l'espace $\mathcal{K}=\mathcal{K}_1+\mathcal{K}_2$; une fonction f est dans $\mathcal{K}$ s'il existe $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2$ et $\varphi_3\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que si n est pair,

$$\begin{aligned}f(x) = \varphi_0(x)+\varphi_1(x)\operatorname{Log}|x| &+ Y(x)x^{(n-4)/2}(x)^{1/2}\varphi_2(x)\\ &+ Y(-x)x^{(n-4)/2}(-x)^{1/2}\varphi_3(x)\end{aligned}$$

et si n est impair,

$$f(x) = \varphi_0(x)+\varphi_1(x)\operatorname{Log}|x| + \big(\operatorname{Log}|x|\big)^2\varphi_2(x)+Y(x)\varphi_3(x).$$

THEORÈME 2.9. — *L'application $\mathcal{M}$ admet un prolongement à $\mathcal{D}(\Xi)$ et c'est une application linéaire continue et surjective de $\mathcal{D}(\Xi)$ sur $\mathcal{K}$.*

Démonstration. — Il existe un nombre fini d'éléments $n_i \in N$; $i \in I$ tel que $\Xi = AN \cdot (\pm\xi^*) \bigcup_{i\in I} n_i\big(A\bar{N} \cdot (\pm\xi^0)\big)$. Le théorème est donc une conséquence du THÉORÈME 2.8.

3. Distributions MN-invariantes

Soit $\mathcal{M}'$ la transposée de $\mathcal{M}$, pour toute T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la distribution $\mathcal{M}'T$ est MN-invariante. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de Ξ on notera $\mathcal{D}'_{MN}(\mathcal{U})$ l'espace des distributions MN-invariantes sur $\mathcal{U}$.

$\mathcal{M}' : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'_{MN}(\Xi')$ n'est pas surjective. En effet, posons $\Xi'_i = \Xi^* \cup \Omega_i$ ($i = 1$ ou 2) ; c'est un ouvert dense de Ξ ne contenant pas de point critique de u. $\Xi'_1 \cup \Xi'_2$ recouvre Ξ'. Soit T la distribution sur Ξ' définie par

$$\langle T, f\rangle = \begin{cases} \mathcal{M} f(0) & \text{si } \operatorname{supp} f \subset \Xi'_1, \\ 0 & \text{si } \operatorname{supp} f \subset \Xi'_2. \end{cases}$$

T est une distribution MN-invariante sur Ξ' n'appartenant pas à $\mathcal{M}'(\mathcal{D}'(\mathbb{R}))$.

PROPOSITION 3.1. — *L'application $\mathcal{M}' : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'_{MN}(\Xi'_1)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — ξ_1 est un plongement régulier de $\mathbb{R}$ dans Ξ'_1. L'application $\psi_1 : MN \times \mathbb{R} \to \Xi'_1$ définie par $\psi_1(mn, t) = mn \cdot \xi_1(t)$ est une submersion surjective (voir [9]). Le résultat annoncé est alors une conséquence du théorème de la page 196 de [4].

PROPOSITION 3.2

- *Toute distribution sur $\mathbb{R}$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $\mathcal{K}$.*
- *Toute distribution MN-invariante sur Ξ'_1 se prolonge en une distribution MN-invariante sur Ξ.*

Démonstration. — Soit $S_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Considérons $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi \equiv 1$ au voisinage de 0. Alors χS_0 est à support compact. Soit m son ordre. Pour toute $\varphi \in \mathcal{K}$ il existe des constantes $A_i(\varphi)$, $B_i(\varphi)$ et $C_i(\varphi)$ telles que la fonction,

$$x \longmapsto \varphi(x) - \Big[\operatorname{Log}|x| \sum_{i=0}^{N} A_i(\varphi)x^i + \mu_1(x) \sum_{i=0}^{N'} B_i(\varphi)x^i + \mu_2(x) \sum_{i=0}^{N'} C_i(\varphi)x^i\Big]$$

soit de classe C^m lorsque $N \geq m$, avec

$$N' = \begin{cases} N-(n-4)/2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ N-(n-3)/2 & \text{si } n \text{ est impair;} \end{cases}$$

$$\mu_1(x) = \begin{cases} Y(x)\sqrt{x} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ (\operatorname{Log}|x|)^2 & \text{si } n \text{ est impair;} \end{cases}$$

et
$$\mu_2(x) = \begin{cases} Y(-x)\sqrt{-x} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ Y(x) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Posons

$$\langle S,\varphi\rangle = \Big\langle S_0, \varphi - \chi\Big\{\operatorname{Log}|x|\sum_{i=0}^{N} A_i(\varphi)x^i + \mu_1(x)\sum_{i=0}^{N'} B_i(\varphi)x^i + \mu_2(x)\sum_{i=0}^{N'} C_i(\varphi)x^i\Big\}\Big\rangle.$$

S convient. Soit maintenant $T \in \mathcal{D}'_{MN}(\Xi'_1)$, il existe $\sigma_T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T = \mathcal{M}'\sigma_T$. Soit S_T un prolongement de σ_T en une forme linéaire continue sur $\mathcal{K}$. Alors $U_T = \mathcal{M}' S_T$ convient. $\square$

PROPOSITION 3.3. — *Soit T une distribution MN-invariante sur Ξ. Alors, $T = \mathcal{M}' S + \Phi$ où S est une forme linéaire continue sur $\mathcal{K}$ et Φ est une distribution MN-invariante sur Ξ à support dans $\overline{\Omega}_2 = \Omega_2 \cup \Xi_{00}$.*

Démonstration. — La restriction de T à l'ouvert Ξ'_1 étant une distribution MN-invariante sur Ξ'_1, se prolonge en une distribution MN-invariante sur Ξ, notée $\mathcal{M}' S$, où S est une forme linéaire continue sur $\mathcal{K}$. Il est clair que $\Phi = T - \mathcal{M}' S$ est une distribution MN-invariante portée par $\overline{\Omega}_2$. $\square$

Dans la suite nous supposons que $n = 3$.

Il résulte de la PROPOSITION 3.3, que la connaissance des distributions MN-invariantes portées par $\overline{\Omega}_2$ entraîne celle de toutes les distributions MN-invariantes sur Ξ.

Pour déterminer les distributions MN-invariantes portées par $\overline{\Omega}_2$, on utilisera les deux cartes de Ξ définies par les applications suivantes :

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Xi$$

$$(a, b\,;\ w, z) \to \begin{pmatrix} a \\ -aw - bz \\ b \end{pmatrix} (w\ 1\ z),$$

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Xi$$

$$(x, y\,;\ u, v) \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ -xu - yv \end{pmatrix} (u\ v\ 1).$$

On appelera D_1 et D_2 respectivement les domaines de ces deux cartes. $D_1 \cup D_2$ recouvre $\overline{\Omega}_2$. On désigne par Δ l'opérateur différentiel qui, dans la carte de domaine D_2, s'exprime par

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x \partial u} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial v}.$$

Si T est une distribution sur Ξ portée par $\overline{\Omega}_2$ alors elle est complètement déterminée par ses restrictions aux ouverts D_1 et D_2. On appelera T_1 (resp. T_2) la restriction de T à D_1 (resp. D_2). Considérons la distribution définie sur Ξ par,

$$\langle L_{s,\varepsilon}, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^*} f(t\xi^0)(\operatorname{sgn} t)^\varepsilon |t|^{s/2+1} \frac{\mathrm{d}t}{|t|}.$$

La distribution $L_{s,\varepsilon}$ est portée par la droite $\mathbb{R}^* \cdot \xi^0$ qui est incluse dans D_2. Dans la carte D_2

$$L_{s,\varepsilon} = (\operatorname{sgn} x)^\varepsilon |x|^{s/2} \otimes \delta \otimes \delta \otimes \delta.$$

THÉORÈME 3.4. — *Soit T une distribution MN-invariante portée par $\overline{\Omega}_2$. Alors T est portée par $\Xi_{0,0}$ et est donnée par*

$$T_1 = \sum_{r=0}^{m_0} a_r \mathbf{1} \otimes \delta^{(r)} \otimes \delta^{(r)} \otimes \mathbf{1},$$

$$\begin{aligned} T_2 = T_0 \otimes \delta \otimes \delta \otimes \delta &+ \sum_{r=0}^{n_0} \Delta^r (\alpha_r L_{r,0} + \beta_r L_{r,1}) \\ &+ c_0 \Big[\mathbf{1} \otimes \Big(Pf \frac{1}{|y|} \otimes \delta \otimes \delta + \delta \otimes \delta \otimes Pf \frac{1}{|v|} \Big) \Big] \\ &+ \sum_{r=1}^{m_0} c_r \Delta^{2r} \Big[x^r \operatorname{Log}|x| \otimes \delta \otimes \delta \otimes \delta \\ &\qquad - x^r \otimes \Big(Pf \frac{1}{|y|} \otimes \delta \otimes \delta + \delta \otimes \delta \otimes Pf \frac{1}{|v|} \Big) \Big] \\ &+ \sum_{r=1}^{m_0} 2c_r \sum_{j=1}^{r} \Big(C_{2r}^j \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2r-j+k} \Big) \frac{\partial^j x^r}{\partial x^j} \otimes \delta^{(2r-j)} \otimes \delta^{(j)} \otimes \delta^{(2r-j)} \end{aligned}$$

avec $T_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$, $a_r, \alpha_r, \beta_r, c_r \in \mathbb{C}, m_0, n_0 \in \mathbb{N}$.

Démonstration

(1) *La restriction de T à D_1 : T_1* est portée par le fermé de D_1, $w = 0$. Alors, d'après le THÉORÈME 36 de [11], T_1 est une somme localement finie de la forme $T_1 = \sum \delta_{(w)}^{(j)} \otimes S_j$ où $S_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R})$.

L'invariance de T par N nous donne les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\Big(b\frac{\partial}{\partial a} - w\frac{\partial}{\partial z}\Big) T_1 = 0,$$

$$\Big[(2wa + bz)\frac{\partial}{\partial a} + wb\frac{\partial}{\partial b} - w^2\frac{\partial}{\partial w} - wz\frac{\partial}{\partial z}\Big] T_1 = 0,$$

et
$$\frac{\partial T_1}{\partial z} = 0\cdot$$

L'invariance de T par M nous donne l'équation aux dérivées partielles et la condition qui suivent :

$$\Big(a\frac{\partial}{\partial a} + b\frac{\partial}{\partial b} - w\frac{\partial}{\partial w} - z\frac{\partial}{\partial z}\Big) T_1 = 0$$

$\forall F \in \mathcal{D}(D_1)$ $\langle T_1, F(-a,-b,-w,-z)\rangle = \langle T_1, F(a,b,w,z)\rangle$, ce qui entraîne que l'on a

$$T_1 = a_0 \Big[\operatorname{Log}|a| \otimes \delta \otimes \delta \otimes \mathbf{1} - \tfrac{1}{2}\, \mathbf{1} \otimes Pf \frac{1}{|b|} \otimes \delta \otimes \mathbf{1} \Big] + \sum_{j=0}^{k_0} \alpha_j\, \mathbf{1} \otimes \delta^{(j)} \otimes \delta^{(j)} \otimes \mathbf{1}\,.$$

2) *La restriction de T à D_2* : T_2 est portée par le fermé de D_2, $u = 0$. Alors, T_2 est une somme localement finie de la forme $T_2 = \sum \delta_{(u)}^{(j)} \otimes S_j$, où $S_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R})$.

L'invariance de T par N nous donne les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\Big(-y\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial v}\Big)T_2 = 0,$$

$$\Big[(2xu + yv)\frac{\partial}{\partial x} + uy\frac{\partial}{\partial y} - u^2\frac{\partial}{\partial u} - uv\frac{\partial}{\partial v}\Big]T_2 = 0,$$

et

$$\Big[vx\frac{\partial}{\partial x} + (ux + 2yv)\frac{\partial}{\partial y} - uv\frac{\partial}{\partial u} - v^2\frac{\partial}{\partial v}\Big]T_2 = 0.$$

L'invariance de T par M nous donne l'équation aux dérivées partielles et la condition qui suivent :

$$\Big(y\frac{\partial}{\partial y} - v\frac{\partial}{\partial v}\Big)T_2 = 0$$

$\forall F \in \mathcal{D}(D_2)$ $\langle T_2, F(x, -y, u, -v)\rangle = \langle T_2, F(x, y, u, v)\rangle$.

Nous déduisons de ces équations que pour tout compact de D_2, il existe un entier k_0 tel que

$$y^{k_0-j+1}\frac{\partial^{k_0-j+1}S_j}{\partial x^{k_0-j+1}} = 0$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$ et, dans le cas où la variable x ne s'annule pas,

$$v^{k_0-j+1}\frac{\partial^{k_0-j+1}S_j}{\partial x^{k_0-j+1}} = 0$$

pour $j \geq 1$ dans l'intérieur du compact.

Ce qui entraîne que, lorsque $y \neq 0$,

$$S_j = \sum_{p=0}^{k_0-j} x^p \otimes B_{p,j}$$

avec $B_{p,j} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$ et, dans le cas où $x \neq 0$,

$$S_j = \sum_{p=0}^{k_0-j} A_{p,j} \otimes \delta^{(p)} \otimes \delta^{(p)} + \sum_{p=0}^{k_0-j} x^p \otimes B_{p,j}$$

avec $A_{p,j} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$ et $B_{p,j} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Par la suite, des calculs assez longs (voir [9]) nous permettent de trouver les restrictions de T_2 aux ouverts $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$. Du principe du recollement des morceaux (voir [11]) il vient que

$$\begin{aligned}
T_2 &= T_0\otimes\delta\otimes\delta\otimes\delta\\
&\quad + c_0\Big[\mathbf{1}\otimes\Big(Pf\frac{1}{|y|}\otimes\delta\otimes\delta+\delta\otimes\delta\otimes Pf\frac{1}{|v|}\Big)\Big]\\
&\quad + \sum_{r=0}^{v_0}\Delta^r\Big[(\alpha_r+\beta_r\operatorname{sgn}x)|x|^{r/2}\otimes\delta\otimes\delta\otimes\delta\Big]\\
&\quad + \sum_{r=1}^{\ell_0}c_r\Delta^{2r}\Big[x^r\operatorname{Log}|x|\otimes\delta\otimes\delta\otimes\delta\\
&\qquad\qquad - x^r\otimes\Big(Pf\frac{1}{|y|}\otimes\delta\otimes\delta+\delta\otimes\delta\otimes Pf\frac{1}{|v|}\Big)\Big]\\
&\quad + \sum_{r=1}^{\ell_0}2c_r\sum_{j=1}^{r}\Big(C_{2r}^{j}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{2r-j+k}\Big)\frac{\partial^j x^r}{\partial x^j}\otimes\delta^{(2r-j)}\otimes\delta^{(j)}\otimes\delta^{(2r-j)}\\
&\qquad\qquad + \sum_{r=0}^{k_0}b_r\Delta^{2r}\Big(x^r\otimes vp\frac{1}{y}\otimes\delta\otimes vp\frac{1}{v}\Big),
\end{aligned}$$

où $T_0\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$. Il faut remarquer que, pour trouver T_2, les calculs se font en fixant un compact de D_2. Ces calculs donnent des distributions dont les supports rencontrent tout compact de D_2, ce qui explique les sommes finies dans l'expression de T_2.

Sachant que T_1 et T_2 coïncident sur $D_1\cap D_2$ nous obtenons le résultat annoncé.

4. Distributions coniques (le cas n = 3)

Soit $\chi_{s,\varepsilon}$, où $s\in\mathbb{C}$ et $\varepsilon=0$ ou 1, le caractère de $\mathbb{R}^*$ défini par $\chi_{s,\varepsilon}(\lambda)=(\operatorname{sgn}\lambda)^{\varepsilon}|\lambda|^{s/2}$. On dira qu'une fonction f définie sur Ξ est $\chi_{s,\varepsilon}$-*homogène* si, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et tout $\xi\in\Xi$,

$$f(\lambda\xi)=\chi_{s,\varepsilon}(\lambda)|\lambda|^{-1}f(\xi)=(\operatorname{sgn}\lambda)^{\varepsilon}|\lambda|^{(s/2)-1}f(\xi).$$

Si φ est une fonction définie sur Ξ et $\lambda\in\mathbb{R}^*$, on posera $\varphi_\lambda(\xi)=\varphi(\xi/\lambda)$.

Soient f une fonction définie sur Ξ, continue et $\chi_{s,\varepsilon}$-homogène et T la distribution associée à f. Nous avons $\int_\Xi F_\lambda(\xi)d\xi=\lambda^2\int_\Xi F(\xi)d\xi$ pour toute F dans $C_c(\Xi)$. Alors,

$$\langle T,\varphi_\lambda\rangle=\chi_{s,\varepsilon}(\lambda)|\lambda|\langle T,\varphi\rangle=(\operatorname{sgn}\lambda)^{\varepsilon}|\lambda|^{(s/2)+1}\langle T,\varphi\rangle$$

$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Xi)$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R}^*$. Ce qui nous conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 4.1. — *Une distribution T sur Ξ est dite $\chi_{s,\varepsilon}$-homogène, si l'on a pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Xi)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$*

$$\langle T, \varphi_\lambda \rangle = \chi_{s,\varepsilon}(\lambda)|\lambda|\langle T, \varphi \rangle = (\operatorname{sgn}\lambda)^\varepsilon |\lambda|^{(s/2)+1}\langle T, \varphi \rangle.$$

On désignera par $E_{s,\varepsilon}(\Xi)$ l'espace des fonctions C^∞ et $\chi_{s,\varepsilon}$-homogène sur Ξ et par $\mathcal{E}'_{s,\varepsilon}(\Xi)$ l'espace des distributions $\chi_{s,\varepsilon}$-homogènes sur Ξ.

LEMME 4.2. — *Pour $f \in \mathcal{D}(\Xi)$, $s \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon = 0$ ou 1 on pose,*

$$f_{s,\varepsilon}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^*} f(t\xi)\chi_{-s,\varepsilon}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.3.1}$$

Alors l'application $f \to f_{s,\varepsilon}$ est linéaire continue et surjective de $\mathcal{D}(\Xi)$ sur $E_{s,\varepsilon}(\Xi)$.

Démonstration. — L'homogénéité de $f_{s,\varepsilon}$ résulte de l'invariance de la mesure $\mathrm{d}t/|t|$ sur $\mathbb{R}^*$. Soit $\Psi \in \mathcal{D}(\Xi)$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}^*} \Psi(t\xi)\mathrm{d}t/|t| = 1$. Alors pour toute $\varphi \in E_{s,\varepsilon}(\Xi)$, $(\varphi\Psi)_{s,\varepsilon} = \varphi$. □

PROPOSITION 4.3. — *Soit L une forme linéaire continue sur $E_{-s,\varepsilon}(\Xi)$. La distribution T sur Ξ définie par*

$$\langle T, f \rangle = L(f_{-s,\varepsilon})$$

est $\chi_{s,\varepsilon}$-homogène. En outre, l'application $L \to T$ est une bijection du dual de $E_{-s,\varepsilon}(\Xi)$ sur $\mathcal{E}'_{s,\varepsilon}(\Xi)$.

La démonstration est analogue à celle donnée par J. FARAUT et K. HARZALLAH dans [2, Proposition 1.1].

DÉFINITION 4.4. — *Une distribution T sur Ξ est dite $\chi_{s,\varepsilon}$-conique si*

1) *T est MN-invariante,*
2) *T est $\chi_{s,\varepsilon}$-homogène.*

On notera $\mathcal{D}'_{s,\varepsilon}(\Xi)$ l'espace des distributions $\chi_{s,\varepsilon}$-coniques sur Ξ.

Considérons la distribution sur Ξ définie par,

$$\langle \Psi_{s,\varepsilon}, f \rangle = \frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{s+2\varepsilon}{4}\right)} \int_\Xi f(\xi)\big(\operatorname{sgn} u(\xi)\big)^\varepsilon \big|u(\xi)\big|^{(s/2)-1}\,\mathrm{d}\xi.$$

Les distributions $\Psi_{s,\varepsilon}$ et $L_{s,\varepsilon}$ sont $\chi_{s,\varepsilon}$-coniques. La distribution $L_{s,\varepsilon}$ est définie pour tout s dans $\mathbb{C}$ tandis que $\Psi_{s,\varepsilon}$ n'est définie que pour $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Nous verrons que $\Psi_{s,\varepsilon}$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ qu'on notera encore $\Psi_{s,\varepsilon}$ et sauf pour des valeurs entières de s, l'espace $\mathcal{D}'_{s,\varepsilon}(\Xi)$ est engendré par $\Psi_{s,\varepsilon}$ et $L_{s,\varepsilon}$.

La restriction de la distribution $\Psi_{s,\varepsilon}$ à l'ouvert Ξ'_1 est une distribution $\chi_{s,\varepsilon}$-conique, elle se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}$ tout entier. La distribution ainsi obtenue est $\chi_{s,\varepsilon}$-conique sur Ξ'_1, non nulle et engendre l'espace des distributions $\chi_{s,\varepsilon}$-coniques sur Ξ'_1. On a pour toute $f \in \mathcal{D}(\Xi)$,

$$\langle \Psi_{s,\varepsilon}, f\rangle = \frac{1}{\Gamma\Big(\dfrac{s+2\varepsilon}{4}\Big)} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{M} f(t)(\operatorname{sgn} t)^{\varepsilon} |t|^{(s/2)-1}\,\mathrm{d}t.$$

Les résultats de GUELFAND [3] nous permettent alors d'affirmer que $\Psi_{s,\varepsilon}$ possède un prolongement méromorphe, noté encore $\Psi_{s,\varepsilon}$, ayant des pôles doubles ou simples en des entiers pairs ≤ 0. Précisément, pour tout j dans $\mathbb{N}$, $(-4j - 2\varepsilon)$ est un pôle double et $(-4j - 2 + 2\varepsilon)$ est un pôle simple.

La distribution $\Psi_{s,\varepsilon}$ définie pour s non entier pair ≤ 0, est une distribution $\chi_{s,\varepsilon}$-conique non nulle sur Ξ.

Pour k dans $\mathbb{N}$, on considère la distribution $\tau_{k,\varepsilon} = \Delta^k(L_{k,\varepsilon})$. On définit la distribution U_0, portée par $\Xi_{0,0}$, de la façon suivante :

$$U_{0\,|\,D_1} = \mathbf{1} \otimes \delta \otimes \delta \otimes \mathbf{1} \quad \text{et}$$

$$U_{0\,|\,D_2} = \mathbf{1} \otimes \Big[Pf\frac{1}{|y|} \otimes \delta \otimes \delta + \delta \otimes \delta \otimes Pf\frac{1}{|v|}\Big] - 2\operatorname{Log}|x| \otimes \delta \otimes \delta \otimes \delta.$$

On a $\operatorname{Res}(\Psi_{s,1}, 0) = a_{0,1}\tau_{0,1} = a_{0,1}L_{0,1}$ $(a_{0,1} \neq 0)$. La distribution $W_{0,1}$ définie par $W_{0,1} = \lim_{s\to 0}[\Psi_{s,1} - (a_{0,1}/s)L_{s,1}]$ est $\chi_{0,1}$-conique sur Ξ.

Distributions coniques portées par $\Xi_{0,0}$.

PROPOSITION 4.5

1) *Si s n'est pas un entier ≤ 0, les distributions $\chi_{s,\varepsilon}$-coniques portées par $\Xi_{0,0}$ sont proportionnelles à $L_{s,\varepsilon}$.*

2) *Si s est un entier impair < 0, les distributions $\chi_{s,\varepsilon}$-coniques portées par $\Xi_{0,0}$ sont de la forme*

$$a_s L_{s,\varepsilon} + b_s \tau_{-s,1-\varepsilon}.$$

3) *Si s est un entier pair < 0, les distributions $\chi_{s,\varepsilon}$-coniques portées par $\Xi_{0,0}$ sont de la forme*

$$a_s L_{s,\varepsilon} + b_s \tau_{-s,\varepsilon}.$$

4) *Si* $s = 0$, *les distributions* $\chi_{0,0}$*-coniques portées par* $\Xi_{0,0}$ *sont de la forme* $a_0 L_{0,0} + b_0 U_0$, *alors que les distributions* $\chi_{0,1}$*-coniques portées par* $\Xi_{0,0}$ *sont proportionnelles à* $L_{0,1}$.

Démonstration. — Soit T une distribution $\chi_{s,\varepsilon}$-conique portée par $\Xi_{0,0}$. T est alors MN-invariante portée par $\overline{\Omega}_2$, donc elle est donnée par le THÉORÈME 3.4. Suivant les notations de ce théorème, la $\chi_{s,\varepsilon}$-homogénéité est équivalente aux systèmes suivants :

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial T_1}{\partial a} + b\dfrac{\partial T_1}{\partial b} = \left(\frac{1}{2}s - 1\right)T_1 \\ \langle T_1, F(-a,-b,w,z)\rangle = (-1)^\varepsilon \langle T_1, F(a,b,w,z)\rangle \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial T_2}{\partial x} + y\dfrac{\partial T_2}{\partial y} = \left(\frac{1}{2}s - 1\right)T_2 \\ \langle T_2, F(-x,-y,u,v)\rangle = (-1)^\varepsilon \langle T_2, F(x,y,u,v)\rangle \end{cases}$$

$\forall F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2\backslash\{0\} \times \mathbb{R}^2)$, ce qui donne les résultats annoncés.

Appelons $\Psi^{-2}_{-4j-2\varepsilon,\varepsilon}$ et $\Psi^{-1}_{-4j-2\varepsilon,\varepsilon}$ les coefficients de la partie singulière du développement de Laurent de $\Psi_{s,\varepsilon}$ au voisinage du pôle double $(-4j - 2\varepsilon)$ et $\Psi^{-1}_{-4j-2+2\varepsilon,\varepsilon}$ le résidu de $\Psi_{s,\varepsilon}$ au pôle simple $(-4j - 2 + 2\varepsilon)$.

$\Psi^{-2}_{-4j-2\varepsilon,\varepsilon}$, $\Psi^{-1}_{-4j-2\varepsilon,\varepsilon}$ et $\Psi^{-1}_{-4j-2+2\varepsilon,\varepsilon}$ sont des distributions MN-invariantes portées par Ξ_{00}. Nous avons $\Psi^{-1}_{-4j-2+2\varepsilon,\varepsilon}$ (resp. $\Psi^{-2}_{-4j-2\varepsilon,\varepsilon}$) est proportionnelle à $\tau_{4j+2-2\varepsilon,\varepsilon}$ (resp. $\tau_{4j+2\varepsilon,\varepsilon}$), la restriction de la distribution $\Psi^{-1}_{-4j-2\varepsilon,\varepsilon}$ à D_1 est proportionnelle à $\mathbf{1} \otimes \delta^{(2j+\varepsilon)} \otimes \delta^{(2j+\varepsilon)} \otimes \mathbf{1}$ alors que sa restriction à D_2 est de la forme

$$\begin{aligned} \alpha_{j,\varepsilon}\tau_{4j+2\varepsilon,\varepsilon} - \beta_{j,\varepsilon}\Delta^{4j+2\varepsilon}\Big[& x^{2j+\varepsilon}\operatorname{Log}|x| \otimes \delta \otimes \delta \otimes \delta \\ & - x^{2j+\varepsilon} \otimes \Big(Pf\frac{1}{|y|} \otimes \delta \otimes \delta + \delta \otimes \delta \otimes Pf\frac{1}{|v|}\Big)\Big] \\ - 2\beta_{j,\varepsilon}\sum_{p=0}^{2j+\varepsilon} b_{p,j,\varepsilon} & \frac{\partial^p x^{2j+\varepsilon}}{\partial x^p} \otimes \delta^{(4j+2\varepsilon-p)} \otimes \delta^{(p)} \otimes \delta^{(4j+2\varepsilon-p)} \end{aligned}$$

avec $b_{0,j,\varepsilon} = 0$, $b_{p,j,\varepsilon} = C^p_{4j+2\varepsilon}\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{4j + 2\varepsilon - p + k}$ lorsque $p \geq 1$ et $\beta_{j,\varepsilon}$ est le coefficient de proportionnalité de $\frac{1}{2}\ \Psi^{-2}_{-4j-2\varepsilon,\varepsilon}$ par rapport à $\tau_{4j+2\varepsilon,\varepsilon}$.

THÉORÈME 4.6

1) *Si* s *n'est pas un entier* ≤ 0, $\dim \mathcal{D}'_{s,\varepsilon}(\Xi) = 2$ *et* $(\Psi_{s,\varepsilon}, L_{s,\varepsilon})$ *est une base de* $\mathcal{D}'_{s,\varepsilon}(\Xi)$.

2) *Si s est un entier impair < 0, $\dim \mathcal{D}'_{s,\varepsilon}(\Xi) = 3$ et $(\Psi_{s,\varepsilon}, \tau_{-s,1-\varepsilon}, L_{s,\varepsilon})$ est une base de $\mathcal{D}'_{s,\varepsilon}(\Xi)$.*

3) *Si s est un entier pair < 0, $\dim \mathcal{D}'_{s,\varepsilon}(\Xi) = 2$ et $(\tau_{-s,\varepsilon}, L_{s,\varepsilon})$ est une base de $\mathcal{D}'_{s,\varepsilon}(\Xi)$.*

4) *Si $s = 0$, $\dim \mathcal{D}'_{0,\varepsilon}(\Xi) = 2$, $(U_0, L_{0,0})$ est une base de $\mathcal{D}'_{0,0}(\Xi)$ et $(W_{0,1}, L_{0,1})$ est une base de $\mathcal{D}'_{0,1}(\Xi)$.*

Démonstration. — Soit T une distribution $\chi_{s,\varepsilon}$-conique sur Ξ. La restriction de T à l'ouvert Ξ'_1 est $\chi_{s,\varepsilon}$-conique donc proportionnelle à $\Psi_{s,\varepsilon}$.

Si s n'est pas un entier pair ≤ 0, $\Psi_{s,\varepsilon}$ se prolonge en une distribution $\chi_{s,\varepsilon}$-conique sur Ξ. Il existe alors $C \in \mathbb{C}$ tel que $T - C\Psi_{s,\varepsilon}$ soit une distribution $\chi_{s,\varepsilon}$-conique portée par $\Xi_{0,0}$. Nous obtenons ainsi 1) et 2) du théorème.

Prenons $s = -4j - 2\varepsilon$. Les restrictions de T et $\Psi^0_{-4j-2\varepsilon,\varepsilon}$ à l'ouvert Ξ'_1 sont proportionnelles car elles sont $\chi_{-4j-2\varepsilon,\varepsilon}$-coniques sur Ξ'_1, donc il existe C_0 dans $\mathbb{C}$ tel que $T - C_0\Psi^0_{-4j-2\varepsilon,\varepsilon}$ soit une distribution MN-invariante portée par Ξ_{00}. Par ailleurs, on a pour toute f dans $\mathcal{D}(\Xi)$

$$\begin{aligned}
&\langle T - C_0\Psi^0_{-4j-2\varepsilon,\varepsilon}, f_\lambda\rangle \\
&\quad = (\operatorname{sgn}\lambda)^\varepsilon |\lambda|^{-2j-\varepsilon+1} \langle T - C_0\Psi^0_{-4j-2\varepsilon,\varepsilon}, f\rangle \\
&\qquad - \tfrac{1}{2}C_0 \operatorname{Log}|\lambda| (\operatorname{sgn}\lambda)^\varepsilon |\lambda|^{-2j-\varepsilon+1} \langle \Psi^{-1}_{-4j-2\varepsilon,\varepsilon}, f\rangle \\
&\qquad - \tfrac{1}{8}C_0 \big(\operatorname{Log}|\lambda|\big)^2 (\operatorname{sgn}\lambda)^\varepsilon |\lambda|^{-2j-\varepsilon+1} \langle \Psi^{-2}_{-4j-2\varepsilon,\varepsilon}, f\rangle.
\end{aligned}$$

D'où, $C_0 = 0$ et alors T est portée par Ξ_{00}.

Prenons maintenant $s = -4j - 2 + 2\varepsilon$. Les restrictions de T et $\Psi^0_{-4j-2+2\varepsilon,\varepsilon}$ à l'ouvert Ξ'_1 sont proportionnelles car elles sont $\chi_{-4j-2+2\varepsilon,\varepsilon}$-coniques sur Ξ'_1, donc il existe C_1 dans $\mathbb{C}$ tel que $T - C_1\Psi^0_{-4j-2+2\varepsilon,\varepsilon}$ soit une distribution MN-invariante portée par Ξ_{00}. On a, pout toute $f \in \mathcal{D}(\Xi)$,

$$\begin{aligned}
&\langle T - C_1\Psi^0_{-4j-2+2\varepsilon,\varepsilon}, f_\lambda\rangle \\
&\quad = (\operatorname{sgn}\lambda)^\varepsilon |\lambda|^{-2j+\varepsilon} \langle T - C_1\Psi^0_{-4j-2+2\varepsilon,\varepsilon}, f\rangle \\
&\qquad - \tfrac{1}{2}C_1 \operatorname{Log}|\lambda| (\operatorname{sgn}\lambda)^\varepsilon |\lambda|^{-2j+\varepsilon} \langle \Psi^{-1}_{-4j-2+2\varepsilon,\varepsilon}, f\rangle.
\end{aligned}$$

D'où :

i) si $-4j - 2 + 2\varepsilon \neq 0$ alors $C_1 = 0$ et par suite T est portée par Ξ_{00} ;

ii) si $-4j - 2 + 2\varepsilon = 0$,

$$T = \alpha L_{0,1} + C_1\left(\Psi^0_{0,1} - a_{0,1}\frac{\mathrm{d}L_{s,1}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\right)$$

or $\Psi^0_{0,1} - a_{0,1}\dfrac{dL_{s,1}}{ds}\Big|_{s=0}$ est égal à $\lim_{s\to 0}\big(\Psi_{s,1} - (a_{0,1}/s)L_{s,1}\big) = W_{0,1}$.

En appliquant la PROPOSITION 4.5, nous obtenons 3) et 4) du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEN FARAH (S.). — Caractérisation des fonctions moyennes sur le cône des matrices de rang un et de trace nulle, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. **304**, **I**, 1987, p. 491–494.

[2] FARAUT (J.) et HARZALLAH (K.). — Distributions coniques associées au groupe orthogonal $O(p,q)$, *J. Math. Pures Appl.*, t. **63**, 1984, p. 81–109.

[3] GUELFAND (I.M.) et CHILOV (G.E.). — *Les distributions, tome 1.* — Dunod, 1972.

[4] HARZALLAH (K.). — Distributions invariantes : une introduction, *École d'été d'analyse harmonique de Tunis* 1984, [Progress in Math. 69], Birkhäuser, 1987.

[5] HARZALLAH (K.). — Distributions coniques et représentations associées à $SO_0(1,q)$., *Lecture notes in Math.*, t. **497**, 1975, p. 211–229.

[6] HELGASON (S.). — A duality for symmetric spaces with applications to group representations, *Adv. in Math.*, t. **5**, 1970, p. 1–154.

[7] HU (M.C.). — Conical distributions for rank one symmetric spaces, *Bull. A.M.S.*, t. **81**, 1975, p. 98–100.

[8] KAMOUN (L.). — Distributions coniques associées à $SL(3,\mathbb{R})$, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. **308**, **I**, 1989, p. 87–90.

[9] KAMOUN (L.). — *Distributions coniques et représentations associées à* $SL(3,\mathbb{R})$. — Thèse de 3ième cycle, Université de Tunis, 1989.

[10] KOSTERS (M.T.) and VAN DIJK (G.). — Spherical distributions on pseudo-riemannian space $SL(n,\mathbb{R})/GL(n-1,\mathbb{R})$, *J. Funct. Anal.*, t. **68**, **2**, 1986.

[11] SCHWARTZ (L.). — *Théorie des distributions.* — Paris, Hermann, 1966.

[12] STRASBURGER (A.). — *On a differential equation for conical distributions case* $SO_0(n,1)$. *Operator algebras and group representations.* — London, Pitman, 1984.

[13] TENGSTRAND (A.). — Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature, *Math. Scand.*, t. **8**, 1960, p. 201–218.