BULLETIN DE LA S. M. F.

COLETTE ANNÉ

Principe de Dirichlet pour les formes différentielles

Bulletin de la S. M. F., tome 117, nº 4 (1989), p. 445-450
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_4_445_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 445–450.

PRINCIPE DE DIRICHLET POUR LES FORMES DIFFÉRENTIELLES

PAR

COLETTE ANNÉ (*)

RÉSUMÉ. — Nous montrons ici, par la géometrie, qu'une forme harmonique sur une variété à bord et identiquement nulle au bord est partout nulle.

ABSTRACT. — We show here, using geometry, that an harmonic form on a manifold with boundary, which equals zero on the boundary is identically zero.

Introduction

Le but de ce texte est de compléter l'article de DUFF et SPENCER [DS] qui énoncent (Theorem 1, p. 137) un principe d'existence et d'unicité du prolongement harmonique à partir de la valeur au bord pour les formes différentielles en démontrant l'unicité :

THÉORÈME. — *Soit (X, g) une variété riemannienne à bord Y, si ω est une p-forme différentielle harmonique sur X dont la valeur est nulle en chaque point de Y, alors ω est nulle.*

Ce problème semble être résolu par les théorèmes d'unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs de type principal (voir [H]) ; mais ces théorèmes bien plus généraux quant aux hypothèses prises sur l'opérateur, paraissent difficiles à adapter à cette situation très géométrique où on étudie les sections d'un fibré sur une variété. Il m'a semblé donc plus simple de garder la globalité et la géometrie du problème en utilisant les dérivées covariantes pour démontrer une inégalité du type Carleman au voisinage du bord (LEMME), suivant en ceci l'esprit de la méthode développée par ARONSZAJN [A]. Rappelons que cette méthode a été reprise récemment par DONNELLY et FEFFERMAN ([DF]) pour donner une majoration de l'ordre d'annulation d'une fonction propre du Laplacien sur

(*) Texte reçu le 12 décembre 1988, révisé le 13 avril 1989.
C. ANNÉ, Institut Fourier, B.P. 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France.

une variété riemannienne compacte en fonction de la valeur propre, elle avait aussi été développée par ARONSZAJN, KRZYWICKI et SZARSKI [AKS] pour montrer qu'une forme harmonique infiniment nulle en un point était identiquement nulle; ce résultat est plus fin que celui qui est démontré ici et la démonstration en est longue et délicate, j'ai donc préféré ne pas l'utiliser. Je remercie Josef DODZIUK de m'avoir indiqué cette référence peu connue.

Démonstration du théorème

Montrons d'abord que ω est nulle dans un voisinage tubulaire du bord. Dans les coordonnées normales au bord, si t est la distance au bord, la métrique s'écrit $dt^2 + g(t)$ et définit ainsi une famille C^∞, au voisinage de zéro, de métriques sur Y ; ω s'écrit $\omega_1 + dt \wedge \omega_2$ et par hypothèse ω_1 et ω_2 sont identiquement nulles en $t = 0$. D'après la formule de Stokes, il en résulte que ω est fermée et cofermée, ce qui signifie, si $'$ désigne la dérivation par rapport à t, d_Y la différentielle extérieure de Y et $*_t$ l'opérateur de Hodge de la métrique $g(t)$:

$$d_Y\omega_1 = 0, \quad \omega_1' = d_Y\omega_2, \quad D_Y *_t \omega_2 = 0, \quad (*_t\omega_2)' = (-1)^p d_Y *_t \omega_1.$$

On voit alors que ω est nulle à l'ordre ∞ en $t = 0$: posons $u = \int_0^t \omega_2 ds$, ainsi $\omega_1 = du$ et $u' = \omega_2$ et u vérifie

$$d_Y *_t u' = 0, \qquad (*_t u')' = (-1)^p d_Y *_t d_Y u.$$

L'équation en ω est elliptique donc u est de classe C^∞ et admet un développement limité en t, mais $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$, la deuxième équation entraîne donc que u est nulle à l'ordre infini en $t = 0$ et aussi ω.

On peut alors utiliser les méthodes de Aronszajn, notre résultat découle d'une inégalité du type Carleman :

LEMME. — *Soit α une p-forme à support dans le voisinage tubulaire $[0, t_0]$ de Y et nulle à l'ordre ∞ en $t = 0$, il existe une constante C, qui dépend de la géométrie de X au voisinage de Y, telle que si t_0 est plus petit que C, α vérifie l'inégalité :*

$$\forall n \in N, \quad \int_X t^{-n-1}|\alpha(t)|^2 \leq 4 \int_X t^{-n+1}\big(|d\alpha|^2 + |\delta\alpha|^2\big).$$

Remarque. — Ici la norme des formes différentielles est celle canoniquement associée à la structure riemannienne de X, l'opérateur différentiel d

et son adjoint pour cette structure euclidienne δ agissent sur les formes de X.

Voyons d'abord comment ce lemme suffit à notre résultat. En multipliant ω par une fonction de t nulle pour $t > t_0$ et égale à 1 vers 0, on obtient une forme α dans les hypothèses du lemme et fermée et cofermée pour $0 \leq t \leq t_1 < t_0$. En multipliant l'inégalité du lemme par t_1^n on obtient à droite une expression bornée en n, donc $\int_{t<t_1} (t/t_1)^{-n} |\omega|^2$ doit être bornée, ce qui n'est possible que si ω est nulle sur ce petit tube.

Démonstration du LEMME. — Soit $y \in Y$, au voisinage de ce point la forme volume de X s'écrit : $v(t,y)dt\,dy$, par ailleurs α étant nulle en 0 et en t_0, on a $0 = \int \partial/\partial t(t^{-n}\left|\alpha(t)\right|^2 v(t,y))\,dt$. Notons T le champ de vecteurs $\partial/\partial t$ et D la connexion de Levi-Civita de X, α vérifie donc :

$$\int_0^{t_0} nt^{-n-1}\left|\alpha(t)\right|^2 v(t,y)\,dt = 2\int_0^{t_0} t^{-n}\langle D_T\alpha, \alpha\rangle v(t,y)\,dt + \int_0^{t_0} t^{-n}\left|\alpha(t)\right|^2 v'(t,y)\,dt.$$

Si M est un majorant de $|v'/v|$ sur un voisinage tubulaire de Y de longueur $\tau \geq t_0$ fixé on obtient par intégration sur Y puis avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\Big(\frac{n - Mt_0}{2}\Big)^2 \int_X t^{-n-1}|\alpha|^2 \leq \int_X t^{-n+1}|D_T\alpha|^2.$$

Regardons maintenant $I = \int_X t^{-n+1}(|d\alpha|^2 + |\delta\alpha|^2)$.

En décomposant α : $\alpha = \alpha_1 + dt \wedge \alpha_2$, si δ_t est l'adjoint de d_Y pour la métrique $g(t)$, c'est-à-dire que dans un repère orthonormé mobile $(T, e_1, \ldots, e_{d-1})$ on a les formules (voir [B, p. 119] pour les détails) :

$$d_Y = \sum_i e_i^* \wedge D_{e_i} \quad \text{et} \quad \delta_t = -\sum_i D_{e_i} e_i^* \rfloor\ ,$$

$$d\alpha = d_Y\alpha_1 + dt \wedge \big(D_T\alpha_1 - d_Y\alpha_2\big) \quad \text{et} \quad \delta\alpha = \delta_t\alpha_1 - D_T\alpha_2 - dt \wedge \delta_t\alpha_2.$$

Donc

$$I = \int_I t^{-n+1}\Big(|D_T\alpha|^2 + |d_Y\alpha_1|^2 + |\delta_t\alpha_1|^2 + |d_Y\alpha_2|^2 + |\delta_t\alpha_2|^2 - 2\big(\langle\delta_t\alpha_1, D_T\alpha_2\rangle + \langle D_T\alpha_1, d_Y\alpha_2\rangle\big)\Big)\ ;$$

$$\begin{aligned} A &= -2\int_X t^{-n+1}\big(\langle\delta_t\alpha_1, D_T\alpha_2\rangle + \langle D_T\alpha_1, d_Y\alpha_2\rangle\big) \\ &= -2\int_X t^{-n+1}\big(\langle\alpha_1, d_Y D_T\alpha_2\rangle + \langle D_T\alpha_1, d_Y\alpha_2\rangle\big) \\ &= -2\int_X t^{-n+1}\Big(\frac{\partial}{\partial s}\langle\alpha_1, d_Y\alpha_2\rangle + \langle\alpha_1, (d_Y D_T - D_T d_Y)\alpha_2\rangle\Big). \end{aligned}$$

Le défaut à ce que $(d_Y D_T - D_T d_Y)$ soit un terme de courbure, et donc un opérateur borné, est dans le repère mobile précédent, en $D_{[e_i,T]}$. On peut construire ce repère par transport parallèle le long des géodésiques normales à Y, alors $[e_i,T] = D_{e_i}T$ est toujours orthogonal à T et ce défaut est borné par la norme de l'opérateur de connexion de Levi-Civita intrinsèque à $(Y,g(t))$; en appliquant la formule de Weißenböck à cette connexion on obtient alors si r est une borne supérieure de l'opérateur de courbure sur $(Y,g(t))$ pour $0 \leq t \leq \tau$, qu'il existe une constante c_1 telle que

$$\int_{Y_t} \big|\langle \alpha_1, (d_Y D_T - D_T d_Y)\alpha_2\rangle\big| \leq \\ c_1\Big(\int_{Y_t} |\alpha_1|^2\Big)^{1/2}\Big(\int_{Y_t} |d_Y\alpha_2|^2 + |\delta_t\alpha_2|^2 + r|\alpha_2|^2\Big)^{1/2}$$

En intégrant par parties le premier membre de A on obtient :

$$\begin{aligned} &-2(n-1)\int_X t^{-n}\langle\alpha_1, d_Y\alpha_2\rangle + 2\int_X t^{-n+1}\langle\alpha_1, d_Y\alpha_2\rangle\Big(\frac{v'}{v}\Big) \\ &= -(n-1)\int_X t^{-n}\langle\alpha_1, d_Y\alpha_2\rangle - (n-1)\int_X t^{-n}\langle\delta_t\alpha_1, \alpha_2\rangle \\ &\qquad + 2\int_X t^{-n+1}\langle\alpha_1, d_Y\alpha_2\rangle\Big(\frac{v'}{v}\Big). \end{aligned}$$

On peut alors borner A ainsi (si $|\ |_t$ représente ici la norme intégrale sur $(Y,g(t))$ des formes différentielles) :

$$\begin{aligned} |A| \leq \big(n-1+2t_0(c_1+M)\big)&\int_0^{t_0} t^{-n}|\alpha_1|_t|d_Y\alpha_2|_t \\ &+ (n-1)\int_0^{t_0} t^{-n}|\alpha_2|_t|\delta_t\alpha_1|_t \\ &+ 2c_1t_0\int_0^{t_0} t^{-n}|\alpha_1|_t|\delta_t\alpha_2|_t + 2rc_1t_0^2\int_0^{t_0} t^{-n}|\alpha_1|_t|\alpha_2|_t \end{aligned}$$

ce qui nous permet de minorer I :

$$\begin{aligned} I \geq \int_X & t^{-n+1}|D_T\alpha|^2 \\ &- \Big(\Big(\frac{n-1+2t_0(c_1+M)}{2}\Big)^2 + c_1t_0 + rc_1t_0^2\Big)\int_X t^{-n-1}|\alpha_1|^2 \\ &- \Big(\Big(\frac{n-1}{2}\Big)^2 + rc_1t_0^2\Big)\int_X t^{-n-1}|\alpha_2|^2. \end{aligned}$$

En utilisant la minoration précédente de $\int_X t^{-n+1}|D_T\alpha|^2$ on en déduit l'existence d'une constante c_2 qui dépend de la géométrie de X sur le voisinage tubulaire de longueur τ de Y telle que :

$$\int_X t^{-n+1}\big(|d\alpha|^2+|\delta\alpha|^2\big)\geq \frac{1}{4}\Big(2n(1-c_2t_0)-(1+c_2t_0)^2\Big)\int_X t^{-n-1}|\alpha|^2.$$

En choisissant t_0 on peut rendre cette constante supérieure à $1/4$, ce qui termine la démonstration du lemme.

Pour conclure il suffit alors de construire le double $\widetilde{X}$ de X et de lisser la métrique sur un tube autour de Y où l'on est assuré que ω est nulle, par symétrisation de ω on obtient une forme harmonique nulle sur un ouvert, elle est donc partout nulle : considérons

$$\mathfrak{W}=\Big\{U,\text{ouvert de }\widetilde{X}\mid \omega|_U=0\Big\}\quad\text{et}\quad F=\bigcup_{U\in\mathfrak{W}}U\,;$$

on a vu que $\mathfrak{W}$ était non vide; si F est différent de $\widetilde{X}$, il existe dans F un point p dont la distance au complémentaire de F est inférieure au rayon d'injectivité de $\widetilde{X}$. Définissons alors $R=\sup\{\rho\mid B(p,\rho)\in\mathfrak{W}\}$, R est inférieur au rayon d'injectivité, la sphère de rayon R autour de p est donc une sous-variété de $\widetilde{X}$ sur laquelle, par continuité, ω étant nulle dans la boule ouverte de rayon R, ω est nulle. On peut donc refaire les calculs précédents sur la variété à bord $\widetilde{X}\backslash B(p,R)$, il en résulte l'existence d'une boule de rayon $R_1>R$ sur laquelle ω est nulle, ce qui contredit la définition de R; et donc $F=\widetilde{X}$.

BIBLIOGRAPHIE

[A] Aronszajn (N.). — A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order, *Journ. de Math.*, t. **XXXVI**, 1957, p. 235–249.

[AKS] Aronszajn (N.), Krzywicki (A.) and Szarski (J.). — A unique continuation theorem for exterior differential forms on Riemannian manifolds, *Ark. Mat.*, t. **Bd 4 nr 34**, 1962, p. 417–453.

[B] Bérard (P.). — *Spectral Geometry : Direct and Inverse Problems.* — Lecture Notes, 1986.

[DF] Donnelly (H.) and Fefferman (C.). — Nodal sets of eigenfunctions on Riemmannian manifolds, *Invent. Math.*, t. **93** Fasc. 1, 1988, p. 161–183.

[DS] Duff (G.F.D.) and Spencer (D.C.). — Harmonic tensors on riemannian manifolds with boundary, *Ann. of Math.*, t. **56** n° 1, 1952, p. 128–156.

[H] Hörmander (L.). — *The Analysis of Linear Partial Differential Operators IV.* — Springer-Verlag, 1985.