

# BULLETIN DE LA S. M. F.

MARIUS VAN DER PUT

MARC REVERSAT

## **Construction analytique rigide de variétés abéliennes**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 117, n° 4 (1989), p. 415-444

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1989\\_\\_117\\_4\\_415\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_4_415_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CONSTRUCTION ANALYTIQUE RIGIDE DE VARIÉTÉS ABÉLIENNES

PAR

MARIUS VAN DER PUT et MARC REVERSAT (\*)

---

RÉSUMÉ. — Soient  $R$  un anneau de valuation (non nécessairement discrète),  $K$  son corps des fractions,  $0 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 0$  une extension d'un  $R$ -schéma abélien  $A$  par une tore  $T$  sur  $R$  déployé et  $\Lambda \subset G \otimes_R K$  un sous-groupe libre de rang le rang de  $T$ . Si  $\Lambda$  est un réseau de  $G \otimes_R K$  (cf. (1.6)), alors  $(G \otimes_R K)/\Lambda$  est canoniquement muni d'une structure de groupe analytique propre sur  $K$ . La partie principale de ce travail consiste à donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $(G \otimes_R K)/\Lambda$  soit une variété abélienne.

ABSTRACT. — Let  $R$  be a complete valuation ring (may be not discrete) and  $K$  its field of fraction. Let  $0 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 0$  be an extension of an abelian  $R$ -scheme  $A$  by a split  $R$ -torus and let  $\Lambda \subset G \otimes_R K$  be a free subgroup of rank  $= rk(T)$ . If  $\Lambda$  satisfies some other natural conditions (we say that  $\Lambda$  is a lattice in  $G \otimes_R K$ ), then  $(G \otimes_R K)/\Lambda$  is canonically a proper rigid analytic group over  $K$ . The main part of this work is to give necessary and sufficient condition for  $(G \otimes_R K)/\Lambda$  to be an abelian variety.

### Introduction

Soit  $\Lambda$  un réseau de  $\mathbb{C}^g$ , alors le tore analytique  $\mathbb{C}^g/\Lambda$  est une variété abélienne si et seulement si il existe une forme hermitienne  $H : \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}$  définie positive telle que  $(\text{im } H)(\Lambda \times \Lambda)$  soit inclus dans  $\mathbb{Z}$  (cf. [M1, p. 35]).

Cette construction de variétés abéliennes se généralise à la situation où le corps de base  $K$  est complet pour une valeur absolue non archimédienne. Plusieurs résultats ont été obtenus, selon au moins deux points de vue :

(1) Soit  $\Lambda$  un réseau multiplicatif du tore algébrique  $T = (K^*)^g$ . Le tore analytique rigide  $T/\Lambda$  est une variété abélienne si et seulement si il

---

(\*) Texte reçu le 19 septembre 1988, révisé le 12 mai 1989.

M. VAN DER PUT, Mathematisch Instituut, Rijksuniversiteit, Postbus 800, 9700 Av. Groningen, Pays-Bas.

M. REVERSAT, Univ. Paul Sabatier, Mathématiques, Bât. 1R2, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France.

existe un homomorphisme  $\varphi : \Lambda \rightarrow X(T)$ , où  $X(T)$  désigne le groupe des caractères de  $T$ , tel que la forme  $H : \Lambda \times \Lambda \rightarrow K^*$ ,  $H(\lambda_1, \lambda_2) = \varphi(\lambda_1)(\lambda_2)$ , soit symétrique et que la forme  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda \times \Lambda \rightarrow -\log |H(\lambda_1, \lambda_2)| \in \mathbb{R}$  soit définie positive (cf. [G1] et [F-vdP1, p. 198]).

(2) Soit  $R$  un anneau noëthérien, intègre, complet pour la topologie  $I$ -adique, où  $I \neq (0)$  est un idéal de  $R$ . Soient  $K$  le corps des fractions de  $R$ ,  $T$  un tore algébrique déployé sur  $R$  de rang  $g$  et  $\Lambda \subset T(K)$  un sous-groupe libre de rang  $g$ . On suppose qu'il existe un homomorphisme  $\varphi : \Lambda \rightarrow X(T)$  ( $X(T)$  désigne le groupe des caractères de  $T$ ) tel que la forme  $H : \Lambda \times \Lambda \rightarrow K^*$ ,  $H(\lambda_1, \lambda_2) = \varphi(\lambda_1)(\lambda_2)$ , soit symétrique et que  $H(\lambda, \lambda) \in I$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ . Dans [M2], D. MUMFORD a construit un schéma en groupes sur  $R$ , qu'on notera (abusivement) " $T/\Lambda$ ", tel que sa fibre générique (" $T/\Lambda$ ")  $\otimes_R K$  soit une variété abélienne.

La construction (2) peut se résumer (en simplifiant) de la manière suivante. On construit à partir du tore algébrique  $T$  sur  $R$  un schéma formel  $\mathcal{C}$  sur  $R$  muni d'une action discrète de  $\Lambda$ . Le schéma formel  $\mathcal{C}/\Lambda$  est algébrisable et donne le schéma en groupe " $T/\Lambda$ ". Lorsque  $R$  est un anneau de valuation discrète complet, le lien entre (1) et (2) est le suivant : l'espace analytique rigide  $\mathcal{C} \otimes_R K$  sur  $K$ , associé au schéma formel  $\mathcal{C}$  est en fait l'espace analytique rigide  $T^{\text{an}}$  obtenu par analytification du tore algébrique  $T \otimes_R K$  sur  $K$  et l'espace analytique  $(\mathcal{C}/\Lambda) \otimes_R K$  s'identifie à  $T^{\text{an}}/\Lambda$ , le quotient dans la catégorie des espaces analytiques de  $T^{\text{an}}$  par le sous-groupe discret  $\Lambda$ . On voit que le point de vue (1) est plus restrictif que (2), puisqu'on se limite au cas où  $R$  est un anneau de valuation et que l'on ne construit que la fibre générique (" $T/\Lambda$ ")  $\otimes_R K$ . Cependant (1) a l'avantage d'être élémentaire, à condition d'admettre quelques propriétés des espaces analytiques, et sa démonstration est proche du cas complexe ; en particulier la construction de l'espace analytique  $T^{\text{an}}/\Lambda$  est évidente et il n'y a pas à faire le choix d'un schéma formel  $\mathcal{C}$ .

La construction suivante généralise (2).

(3) Soient  $R$  et  $K$  vérifiant les hypothèses de (2). Soit  $A$  un schéma abélien sur  $R$  et  $G$  une extension de  $A$  par un tore déployé  $T$  sur  $R$ . On a donc une suite exacte de schémas en groupes sur  $R$

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Soit  $\Lambda \subset G(K)$  un sous-groupe libre de rang le rang de  $T$ . C.-L. CHAI ([C, chapitre 2]) et G. FALTINGS ([F]) ont donné un ensemble de conditions portant sur  $\Lambda$  et  $G$  permettant de construire un schéma en groupes " $G/\Lambda$ " sur  $R$ , tel que sa fibre générique " $(G/\Lambda) \otimes_R K$ " soit une variété abélienne sur  $K$ .

Le but de notre article est de donner la construction (3), lorsque le corps  $K$  est valué complet non-archimédien, en termes d'espaces analytiques rigides, c'est-à-dire à la manière de (1). Nous avons voulu simplifier les conditions sur  $\Lambda$  et  $G$ , donner des démonstrations élémentaires, proches de celles de [M1, p. 35], [G1], et [F-vdP1, p. 198]. Signalons que des énoncés et des idées allant dans le sens de ce travail se trouvent depuis longtemps dans [R].

On peut décrire nos résultats principaux de la manière suivante. Soient  $R$  un anneau de valuation (non nécessairement discrète) complet,  $K$  son corps des fractions,  $A$  un schéma abélien sur  $R$ ,  $G$  une extension de  $A$  par un tore algébrique  $T$  sur  $R$  (on a donc une suite exacte  $0 \rightarrow T \rightarrow G \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 0$ ),  $X(T)$  le groupe de caractères de  $T$ ,  $\tau : X(T) \rightarrow \text{Pic}^0(A)(R)$  l'homomorphisme de groupes associé à  $G$  et  $\Lambda$  un sous-groupe de  $G(K)$ . On a  $A(K) = A(R)$ , d'où (la dernière flèche provient de  $-\log |\cdot|$ ).

$$\begin{aligned} \ell : G(K) &\longrightarrow \frac{G(K)}{G(R)} \xrightarrow{\sim} \frac{T(K)}{T(R)} \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}(X(T), K^*/R^*) \longrightarrow \text{Hom}(X(T), \mathbb{R}). \end{aligned}$$

On dit que le sous-groupe  $\Lambda$  de  $G(K)$  est un réseau si  $\ell$  est injectif sur  $\Lambda$  et si  $\ell(\Lambda)$  est un réseau de  $\text{Hom}(X(T), \mathbb{R})$ . Si  $\Lambda$  est un réseau de  $G(K)$ ,  $(G \otimes_R K)/\Lambda$  est canoniquement muni d'une structure de groupe analytique propre sur  $K$  (cf. (1.6.3)). Le THÉORÈME (2.1) affirme que  $(G \otimes_R K)/\Lambda$  est une variété abélienne si et seulement si il existe  $\varphi$  et  $D$  possédant les propriétés suivantes :

(i)  $\varphi : \Lambda \rightarrow X(T)$  est un homomorphisme de groupe tel que la forme sur  $\Lambda \times \Lambda$ ,  $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \ell(\lambda_1)(\varphi(\lambda_2))$ , soit symétrique définie et positive;

(ii)  $D$  est un diviseur ample sur  $A$  tel que pour tout  $\lambda \in \Lambda$  on ait  $\tau(\varphi(\lambda)) = [\pi(\lambda)^*D - D] \in \text{Pic}^0(A)$ ;

(iii) pour tout  $\lambda \in \Lambda$  soit  $h(\lambda)$  la fonction rationnelle sur  $G$  qui est déterminée à une constante multiplicative près par les deux conditions suivantes :

- le diviseur de  $h(\lambda)$  est  $\lambda^* \pi^* D - \pi^* D$ ;
- $h(\lambda)(tg) = \varphi(\lambda)(t) \cdot h(\lambda)(g)$  pour tout  $t \in T$  et  $g \in G$ ;

alors, pour tout  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$  et tout  $g \in G$

$$h(\lambda_1)(\lambda_2 g) \cdot [h(\lambda_1)(g)]^{-1} = h(\lambda_2)(\lambda_1 g) \cdot [h(\lambda_2)(g)]^{-1}.$$

Il apparaît clairement à la suite de notre énoncé que la variété abélienne  $(G \otimes_R K)/\Lambda$  ne dépend pas des choix de  $\varphi$  et  $D$  ainsi que du choix des

nombreux isomorphismes de faisceaux inversibles figurant dans [C] et [F] puisque nous les avons supprimés.

On peut formuler d'autres versions des assertions (i), (ii) et (iii), par exemple :  $(G \otimes_R K)/\Lambda$  est une variété abélienne si et seulement si il existe un diviseur  $D$  sur  $A$  tel que :

(iv)  $D$  est ample et  $\pi(\Lambda) \cap \text{Support}(D) = \emptyset$ ;

(v) pour tout  $\lambda \in \Lambda$  il existe une fonction  $h(\lambda)$  rationnelle sur  $G$ , de diviseur  $\lambda^{-1}\pi^*D - \pi^*D$ , telle que  $h(\lambda)(1) = 1$ ;

(vi) la forme  $H : \Lambda \times \Lambda \rightarrow K^*$ ,  $H(\lambda_1, \lambda_2) = h(\lambda_1)(\lambda_2)$  est bilinéaire et symétrique. Composée avec  $-\log |\cdot|$ , elle donne une forme définie positive.

Les outils analytiques utilisés dans la démonstration de notre théorème principal (THÉOREME (2.1)) figurent essentiellement dans les paragraphes (1.4) — quelques résultats sur le groupe de Picard d'un espace analytique — et (1.7) — une décomposition de l'espace  $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})$  suivant le groupe des caractères  $X(T)$  de  $T$ . Notre méthode nous permet également d'obtenir diverses autres propriétés de  $G/\Lambda$  ou de  $A$  (paragraphe 3), ou encore de donner une démonstration d'un résultat, inverse du problème précédent, énoncé par M. RAYNAUD ([R, théorème 2]) selon lequel si  $(G \otimes_R K)/\Lambda$  est une variété abélienne et si  $A \otimes_R K$  est un groupe analytique propre (une variété abéloïde) avec bonne réduction, alors  $A \otimes_R K$  est une variété abélienne (THÉOREME (3.5)).

Dans la suite de cet article, les lettres  $A$ ,  $G$ ,  $T$  changent de sens, elles désignent les objets précédents *définis sur  $K$* . Pour les notions fondamentales de géométrie analytique rigide, nous renvoyons à [B-G-R], [G-vdP] et [F-vdP1].

## 1. Analyse rigide sur une extension d'une variété abélienne par un tore

**(1.1) Notations.** — Soient  $K$  un corps quelconque,  $A/K$  une variété abélienne,  $\text{Pic}^0(A) = \text{Pic}^0(A)(K)$  le groupe des classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles  $\mathcal{L}$  sur  $A$  tels que :

(i)  $\mathcal{L}$  est défini sur  $K$ ;

(ii)  $a^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}$  pour tout point  $a$  de  $A$ .

Soient  $T/K$  un tore algébrique déployé,  $X(T)$  son groupe de caractères et  $\tau : X(T) \rightarrow \text{Pic}^0(A)$  un homomorphisme de groupes.

A l'homomorphisme  $\tau$  on associe une extension de  $A$  par  $T$ . C'est une suite exacte de groupes algébriques commutatifs :

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

On sait que l'ensemble des classes d'isomorphismes des extensions  $G$  de  $A$  par  $T$  définies sur  $K$ , est isomorphe à  $\mathcal{H}om(X(T), \text{Pic}^0(A))$ . Dans le numéro suivant on rappelle la construction de  $G$  à partir de l'homomorphisme  $\tau$ .

**(1.2) Construction de l'extension  $G$  (Rappels).** — Pour tout  $x \in X(T)$ , on choisit un faisceau inversible  $\mathcal{O}_x$  sur  $A$  tel que :

- (i)  $\tau(x)$  est la classe d'isomorphisme de  $\mathcal{O}_x$ ;
- (ii)  $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_A$ ;
- (iii)  $\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_A} \mathcal{O}_y = \mathcal{O}_{x+y}$  pour tout  $x, y \in X(T)$ .

Alors  $\bigoplus_{x \in X(T)} \mathcal{O}_x$  est une algèbre quasi-cohérente et commutative sur  $A$ . On définit la variété  $G$  par  $G = \mathbf{Spec}(\bigoplus \mathcal{O}_x)$  (cf. [H, p. 128, ex. 5–17]). Soit  $\pi : G \rightarrow A$  le morphisme canonique. La fibre  $\pi^{-1}(\{1_A\})$  de l'élément neutre  $1_A$  de  $A$  est égale à  $\mathbf{Spec}(\bigoplus \mathcal{O}_x(1_A))$ , où l'on a écrit  $\mathcal{O}_x(1_A) = \mathcal{O}_{x,1_A}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{x,1_A}}$ ,  $\mathfrak{m}$  étant l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{A,1_A}$ . Dans la fibre  $\pi^{-1}(\{1_A\})$  on choisit un point, noté  $1_G$ . Ce point correspond à un homomorphisme de  $K$ -algèbres  $1_G^* : \bigoplus \mathcal{O}_x(1_A) \rightarrow K$ .

On écrit  $e_x \in \mathcal{O}_x(1_A)$  pour l'élément unique tel que  $1_G^*(e_x) = 1$ . Alors  $\bigoplus \mathcal{O}_x(1_A) = \bigoplus_X K e_x$  s'identifie à l'algèbre affine  $\mathcal{O}(T)$  de  $T$  et en particulier  $e_x$  s'identifie au caractère  $x \in X(T)$ .

Soit  $m_A$  la multiplication de  $A$ . Il faut maintenant construire une multiplication  $m : G \times G \rightarrow G$  telle que :

- (i) le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{m} & G \\ \pi \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ A \times A & \xrightarrow{m_A} & A \end{array}$$

- (ii)  $1_G$  est l'élément neutre de  $G$ ;

- (iii) la restriction de  $m$  à la fibre  $\pi^{-1}(\{1_A\})$  est la loi de groupe de  $T$ .

De plus, il faut montrer que  $m$  est complètement déterminé par (i), (ii) et (iii).

On observe que le produit fibré  $G \times_A (A \times A)$  est égal à  $\mathbf{Spec}(\bigoplus m_A^* \mathcal{O}_x)$  et que  $G \times G$  est égal à  $\mathbf{Spec}((\bigoplus_x p_1^* \mathcal{O}_x) \otimes (\bigoplus_y p_2^* \mathcal{O}_y))$  où  $p_1, p_2 : A \times A \rightarrow A$  sont les deux projections.

Le morphisme  $m$  est alors donné par un morphisme d'algèbres quasi-cohérentes sur  $A \times A$ ,

$$m^* : \bigoplus_x m_A^* \mathcal{O}_x \longrightarrow \bigoplus_{x,y} (p_1^* \mathcal{O}_x \otimes p_2^* \mathcal{O}_y).$$

Comme la classe de  $\mathcal{O}_x$  appartient à  $\text{Pic}^0(A)$  on sait ([M1, p. 74]) qu'il existe un isomorphisme

$$u_x : m_A^* \mathcal{O}_x \xrightarrow{\sim} p_1^* \mathcal{O}_x \otimes p_2^* \mathcal{O}_x.$$

L'isomorphisme  $u_x$  est unique à une constante (de  $K^*$ ) près. On normalise  $u_x$  par

$$u_x(1_A \times 1_A) : \mathcal{O}_x(1_A) \longrightarrow \mathcal{O}_x(1_A) \otimes \mathcal{O}_x(1_A)$$

envoie  $e_x$  sur  $e_x \otimes e_x$ .

On définit maintenant  $m^* = \bigoplus u_x$ . Une vérification simple montre que  $m$  est une loi de groupe et que (i), (ii), (iii) sont vrais. De plus on voit aisément que  $m$  est déterminé par (i), (ii), (iii).

**(1.3) Les variétés analytiques  $A$  et  $G$ .** — Désormais on suppose que le corps  $K$  est complet pour une valuation non-archimédienne. On suppose de plus que la valuation de  $K$  est discrète ou que  $K$  est algébriquement clos (une condition plus faible, à savoir que la valuation de  $K$  soit discrète ou que  $K$  soit stable (cf. [G-vdP, p. 98]) serait suffisante).

On écrit  $K^0$  et  $\bar{K}$  pour l'anneau de valuation de  $K$  et le corps des restes de  $K$ . On désigne maintenant par  $A, G, T$  les espaces analytiques sur  $K$  et on écrit  $\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_G$ , etc pour les faisceaux structuraux analytiques. Les faisceaux algébriques seront notés par  $\mathcal{O}_A^{\text{alg}}, \mathcal{O}_G^{\text{alg}}$ , etc.

Remarquons que le théorème GAGA affirme que des objets analytiques de  $A$  (diviseurs, faisceaux cohérents, morphismes, ...) correspondent biunivoquement avec des objets algébriques de  $A$  ([Kö]).

Pour toute la suite on fait l'hypothèse suivante sur  $A$  :

(1.3.1) *Hypothèse.* — Il existe une réduction analytique  $r : A \rightarrow \bar{A}$  telle que  $\bar{A}$  soit non-singulière.

(1.3.2) *Remarque.* — Par définition ([G-vdP, p. 116]) cela veut dire qu'il existe un recouvrement pur affinoïde admissible  $\{U_i\}$  de  $A$ , tel que  $\bar{A}$ , le recollement des réductions canoniques  $\bar{U}_i$  des  $U_i$ , soit non-singulier.

Supposons que la valuation de  $K$  soit discrète et que le modèle minimal de Néron  $\mathcal{A}/K^0$  de  $A$  soit projectif. Soit  $\mathcal{A}_f$  le schéma formel sur  $K^0$

obtenu en complétant  $\mathcal{A}$  le long de sa fibre spéciale  $\mathcal{A} \otimes \bar{K}$ . Alors la fibre spéciale  $\mathcal{A}_f \otimes \bar{K}$  de  $\mathcal{A}_f$  est égale à  $\mathcal{A} \otimes \bar{K}$  et la fibre générique  $\mathcal{A}_f \otimes K$  s'identifie à l'espace analytique  $A$ . Dans ce cas  $\mathcal{A}_f \otimes \bar{K}$  est une réduction analytique de  $A$  et l'hypothèse (1.3.1) est satisfaite.

On peut montrer (la démonstration est assez technique) que l'hypothèse sur  $A$  implique l'existence d'un schéma abélien  $\mathcal{A}/K^0$  avec  $\mathcal{A} \otimes K = A$ . Par conséquent, dans le cas d'une valuation discrète, notre hypothèse est équivalente à : le modèle minimal de Néron de  $A$  est projectif.

(1.3.3) *Notations.* — Un *ouvert formel* de  $A$  est un sous-ensemble affinoïde de  $A$  de la forme  $r^{-1}(V)$  où  $V \subset \bar{A}$  est un ouvert affine. Un *recouvrement formel* de  $A$  est un recouvrement admissible de  $A$  par des ouverts formels.

Pour une algèbre affinoïde réduite  $B$  sur  $K$  on écrit  $B^0 = \{f \in B; \|f\| \leq 1\}$  et  $\bar{B} = B^0 \otimes \bar{K}$  où  $\|\cdot\|$  désigne la norme spectrale de  $B$ ;  $B^*$ ,  $B^{0*}$  et  $\bar{B}^*$  désignent des éléments inversibles de  $B$ ,  $B^0$  et  $\bar{B}$ . On utilisera les mêmes notations pour les faisceaux, par exemple  $\mathcal{O}_A^0$ ,  $\mathcal{O}_A^*$ ,  $\mathcal{O}_A^{0*}$ , ...

(1.4) **Quelques résultats sur le groupe de Picard.** — On écrit  $\text{Pic}(X)$  pour le groupe des classes d'isomorphismes des faisceaux inversibles (analytiques si  $X$  est un espace analytique ou bien algébriques si  $X$  est une variété algébrique). Pour un anneau  $B$ ,  $\text{Pic}(B)$  est le groupe des classes d'isomorphismes des  $B$ -modules projectifs de rang 1. Remarquons que si  $X$  est un espace affinoïde, on a  $\text{Pic}(X) = \text{Pic}(\mathcal{O}(X))$  où  $\mathcal{O}(X)$  est l'algèbre des fonctions holomorphes sur  $X$  ([F-vdP1], p. 124).

PROPOSITION. — Soit  $Z/K$  un espace affinoïde, connexe, réduit, tel que sa réduction canonique  $r : Z \rightarrow \bar{Z}$  soit non-singulière. Soit  $T/K$  un tore algébrique analytifié. Alors

$$(1.4.1) \quad \text{Pic}(Z) \cong \text{Pic}(\bar{Z});$$

$$(1.4.2) \quad \text{Pic}(Z \times T) \cong \text{Pic}(Z).$$

*Démonstration de (1.4.1).* — Soit  $B = \mathcal{O}(Z)$  et alors  $\bar{B} = \mathcal{O}(\bar{Z})$ . On a deux flèches naturelles,

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(B^0) & \longrightarrow & \text{Pic}(B) = \text{Pic}(Z) \\ \downarrow & & \\ \text{Pic}(\bar{B}) = \text{Pic}(\bar{Z}) & & \end{array}$$



définies par  $M \rightarrow M \otimes B$  et  $M \rightarrow M \otimes \bar{B}$ . Dans [H-vdP], on montre que les deux flèches sont des isomorphismes. Des démonstrations moins élémentaires se trouvent dans [B-L, F-vdP2].

*Démonstration de (1.4.2).* — Soit  $X(T)$  le groupe des caractères de  $T$ . Alors chaque fonction  $f \in \mathcal{O}(Z \times T)$  s'écrit de façon unique comme

$$f = \sum f_x \cdot x$$

où  $f_x \in \mathcal{O}(Z)$  pour  $x \in X(T)$  et tel que, pour tout  $t \in T$ ,  $\lim_x \|f_x\| |x(t)| = 0$ . Les éléments inversibles sont de la forme  $g \cdot x$  avec  $g \in \mathcal{O}(Z)^*$  et  $x \in X(T)$ .

Pour l'espace affinoïde  $Z \times \{t \in K; 0 < R_1 \leq |t| \leq R_2\}$  on a des résultats comparables : les fonctions holomorphes sont de la forme  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n t^n$  avec  $f_n \in \mathcal{O}(Z)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\lim \|f_n\| R^n = 0$  pour tout  $R$ ,  $R_1 \leq R \leq R_2$ . Les fonctions holomorphes inversibles ont la forme  $g \cdot t^n (1+h)$  où  $g \in \mathcal{O}(Z)^*$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  et  $h \in \mathcal{O}(Z \times \{t \in K; 0 < R_1 \leq |t| \leq R_2\})$  satisfaisant  $\|h\| < 1$ . Pour l'espace affinoïde  $Z \times \{t \in K; |t| \leq R\}$ , les fonctions inversibles sont de la forme  $g(1+th)$  où  $g \in \mathcal{O}(Z)^*$  et  $\|th\| < 1$ . La démonstration de ces propriétés se ramène aisément au cas connu où  $Z$  est un seul point.

Remarquons que, lorsque  $Z$  est un polydisque, (1.4.2) peut se déduire de [Gr] (en particulier proposition 2, paragraphe v-3), voir aussi [G2] et [vdP1]. Nous montrons (1.4.2) par récurrence sur  $h$ , le rang de  $T$ .

Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $Z \times T$  où  $T = K^*$ , donc  $h = 1$ . On pose  $T^0 = \{t \in K^*; |t| = 1\}$ . Alors

$$\text{Pic}(Z \times T^0) \cong \text{Pic}(Z \times T^0) = \text{Pic}(\bar{Z} \times \mathbb{G}_{1,k}) \cong \text{Pic}(\bar{Z}) = \text{Pic}(Z).$$

On peut donc supposer que  $\mathcal{L}|_{Z \times T^0}$  est trivial, il faut en déduire que  $\mathcal{L}$  est trivial.

Sur  $Z \times K$  on définit un faisceau inversible  $\mathcal{L}'$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'|_{Z \times \{t \in K; |t| \leq 1\}} &= \mathcal{O}; \\ \mathcal{L}'|_{Z \times \{t \in K; |t| \geq 1\}} &= \mathcal{L}|_{Z \times \{t \in K; |t| \geq 1\}}. \end{aligned}$$

Pour tout  $R \in |K^*|$  et  $R > 1$ , on peut appliquer (1.4.1) à  $\mathcal{L}'|_{Z \times \{t \in K; |t| \leq R\}}$ . Cela montre que  $\mathcal{L}'|_{Z \times \{t \in K; |t| \leq R\}}$  est libre pour tout  $R$ .

Afin de montrer que  $\mathcal{L}'$  est libre on prend une suite  $1 < R_1 < R_2 < \dots$  d'éléments de  $|K^*|$  avec une limite infinie. Posons  $D_n = \{t \in K; |t| \leq R_n\}$ . La restriction de  $\mathcal{L}'$  à  $Z \times D_n$  est engendrée par un élément  $e_n$ .

Alors  $e_{n+1} = u_n e_n$  pour certains éléments  $u_n \in \mathcal{O}(Z \times D_n)^*$ . Si on trouve une suite d'éléments  $v_n \in \mathcal{O}(Z \times D_n)^*$  telle que  $u_n = v_{n+1}^{-1} v_n$

pour tout  $n$ , les éléments  $v_n e_n$  se recollent en une section globale de  $\mathcal{L}'$  engendrant  $\mathcal{L}'$ .

Chaque  $u_n \in \mathcal{O}(Z \times D_n)^*$  se décompose sous la forme  $u_n = a_n(1 + tb_n)$  où  $a_n \in \mathcal{O}(Z)^*$  et  $b_n \in \mathcal{O}(Z \times D_n)$  avec  $\|tb_n\| < 1$ .

On pose maintenant

$$v_n = \left( \prod_{i=1}^{n-1} a_i^{-1} \right) \left( \prod_{k=n}^{\infty} (1 + tb_k) \right)$$

et on constate facilement que le produit infini converge sur  $Z \times D_n$ . Alors  $u_n = v_{n+1}^{-1} v_n$  pour tout  $n \geq 1$  montre que  $\mathcal{L}'$  est trivial.

Cela implique que  $\mathcal{L}|Z \times \{t \in K^*; |t| \geq 1\}$  est trivial. De la même façon on voit que  $\mathcal{L}|Z \times \{t \in K^*; |t| \leq 1\}$  est trivial. La surjectivité de l'application  $\alpha$  de

$$\mathcal{O}^*(Z \times \{t \in K^*; |t| \leq 1\}) \times \mathcal{O}^*(Z \times \{t \in K^*; |t| \geq 1\})$$

dans  $\mathcal{O}^*(Z \times \{t \in K^*; |t| = 1\})$ , donnée par  $(a, b) \mapsto ab$ , montrera que  $\mathcal{L}$  est trivial.

Pour montrer que  $\alpha$  est surjective on décompose tout élément  $f$  de  $\mathcal{O}^*(Z \times \{t \in K^*; |t| = 1\})$  :  $f = at^n(1 + h)$  où  $a \in \mathcal{O}^*(Z)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $h = \sum a_n t^n$  est un élément de  $\mathcal{O}(Z \times \{t \in K^*; |t| = 1\})$  vérifiant  $\|h\| = \max(\|a_n\|) = |\pi| < 1$ .

La partie  $at^n$  se trouve dans l'image de  $\alpha$ . On écrit

$$(1 + h) = \left( 1 + \sum_{m \geq 0} a_m t^m \right) \left( 1 + \sum_{m < 0} a_m t^m \right) (1 + h_1).$$

Les deux premiers termes se trouvent dans

$$\mathcal{O}^*(Z \times \{t \in K^*; |t| \leq 1\}) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}^*(Z \times \{t \in K^*; |t| \geq 1\}).$$

Le dernier terme satisfait  $\|h_1\| \leq |\pi|^2$ . On applique le même procédé à  $(1 + h_1)$ , donc

$$(1 + h_1) = \left( 1 + \sum_{m \geq 0} a_m t^m \right) \left( 1 + \sum_{m < 0} a'_m t^m \right) (1 + h_2)$$

avec  $\|h_2\| \leq |\pi|^3$ . On continue avec  $(1 + h_2)$ , etc. Par passage à la limite on trouve que  $(1 + h)$  est dans l'image de  $\alpha$ . Cela achève la démonstration pour  $h = 1$ .

Supposons maintenant que  $h > 1$ . On pose  $T = T_{h-1} \times K^*$ . Comme  $Z \times \{t \in K^*; |t| = 1\}$  est un affinoïde connexe avec une réduction non-singulière, on peut supposer d'après l'hypothèse de récurrence que la restriction de  $\mathcal{L}$  à  $Z \times T_{h-1} \times \{t \in K^*; |t| = 1\}$  est triviale.

Il faut de nouveau montrer que cela implique que  $\mathcal{L}$  est trivial. On définit  $\mathcal{L}'$  sur  $Z \times T_{h-1} \times K$  par le recollement de  $\mathcal{L}$  sur  $Z \times T_{h-1} \times \{t \in K; |t| \geq 1\}$  et  $\mathcal{O}$  sur  $Z \times T_{h-1} \times \{t \in K; |t| \leq 1\}$ . L'hypothèse de récurrence montre que  $\mathcal{L}'$  est trivial sur chaque  $Z \times T_{h-1} \times \{t \in K; |t| \leq R\}$  avec  $R \in |K^*|$ .

Comme dans le cas  $h = 1$  on montre que  $\mathcal{L}'$  est trivial. Il s'ensuit que  $\mathcal{L}$  est trivial sur  $Z \times T_{h-1} \times \{t \in K^*; |t| \leq 1\}$  et sur  $Z \times T_{h-1} \times \{t \in K^*; |t| \geq 1\}$ .

En remarquant que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^*(Z \times T_{h-1} \times \{t \in K^*; |t| = 1\}) \\ = \mathcal{O}^*(Z \times \{t \in K^*; |t| = 1\}) \cdot X(T) \end{aligned}$$

on en conclut, comme dans le cas  $h = 1$ , que  $\mathcal{L}$  est trivial sur  $Z \times T$ . Ceci achève la démonstration de (1.4.2).

**(1.5) Faisceaux inversibles sur  $A$  et  $G$ .** — Pour formuler des conséquences de (1.4) nous avons besoin de quelques notations.

D'abord  $T^0 = \{t \in T; |x(t)| = 1 \text{ pour tout } x \in X(T)\}$  est un sous-groupe affinoïde de  $T$ . Pour un groupe analytique  $H$  on écrit  $\text{Pic}^0(H) = \{[\mathcal{L}] \in \text{Pic}(H); [h^*\mathcal{L}] = [\mathcal{L}] \text{ pour tout } h \in H\}$ .

DES COROLLAIRES DE (1.4).

(1.5.1) *Chaque faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $A$  se trivialise sur un recouvrement formel  $\{r^{-1}V_i\}$  de  $A$ . De plus le 1-cocycle correspondant à  $\mathcal{L}$  peut être choisi à coefficients dans  $\mathcal{O}_A^{0*}$ . En d'autres termes  $\text{Pic}(A) = H^1(\bar{A}, r_*\mathcal{O}_A^*) = H^1(\bar{A}, r_*\mathcal{O}_A^{0*})$ .*

(1.5.2) *Le morphisme analytique  $\pi : G \rightarrow A$  se trivialise sur un recouvrement formel  $\{r^{-1}V_i\}$  de  $A$ . Plus précisément, il existe des isomorphismes  $\theta_i : \pi^{-1}r^{-1}V_i \xrightarrow{\sim} (r^{-1}V_i) \times T$  tels que :*

(i) *les diagrammes suivants sont commutatifs*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}r^{-1}V_i & \xrightarrow{\theta_i} & (r^{-1}V_i) \times T \\ \downarrow \pi & \swarrow pr_1 & \\ r^{-1}V_i; & & \end{array}$$

- (ii)  $\theta_i$  commute avec l'action de  $T$  ;  
 (iii)  $\theta_j \circ \theta_i^{-1} : (r^{-1}V_{ij}) \times T \rightarrow (r^{-1}V_{ij}) \times T$  est de la forme  $(z, t) \rightarrow (z, f_{ij}(z)t)$  où  $f_{ij} : r^{-1}V_{ij} \rightarrow T^0$  est un morphisme analytique ;  
 (iv)  $\theta_i(1_G) = (1_A, 1_T)$  si  $i$  est tel que  $1_A \in r^{-1}V_i$ .

(1.5.3) Chaque faisceau inversible sur  $G$  se trivialise sur un recouvrement  $\{\pi^{-1}r^{-1}V_i\}$  où  $\{r^{-1}V_i\}$  est un recouvrement formel de  $A$ . En d'autres termes :

$$\text{Pic}(G) = H^1(\bar{A}, r_*\pi_*\mathcal{O}_G^*).$$

(1.5.4) Il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow K^* \longrightarrow \mathcal{O}(G)^* \longrightarrow X(T) \xrightarrow{\tau} \text{Pic}(A) \xrightarrow{\pi^*} \text{Pic}(G) \longrightarrow 0.$$

(1.5.4)' Remarque : Si  $x \in \ker \tau$ , on notera encore  $x$  l'élément de  $\mathcal{O}(G)^*$  antécédant de  $x$  qui restreint à  $T$  redonne  $x$ . On a alors  $x(g_1g_2) = x(g_1)x(g_2)$  pour tout  $g_1, g_2$  dans  $G$ .

(1.5.5) Il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow K^* \longrightarrow \mathcal{O}(G)^* \longrightarrow X(T) \xrightarrow{\tau} \text{Pic}^0(A) \xrightarrow{\pi^*} \text{Pic}^0(G) \longrightarrow 0.$$

*Démonstrations.*

(1.5.1). — Soit  $\{r^{-1}W_j\}$  un recouvrement formel de  $A$ . On applique (1.4.1) à chaque  $\mathcal{L}|r^{-1}W_j$  et on obtient ainsi un recouvrement formel  $\{r^{-1}V_i\}$  plus fin, tel que chaque  $\mathcal{L}|r^{-1}V_i$  soit trivial. Le 1-cocycle  $\{\xi_{ij}\}$  de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $\{r^{-1}V_i\}$  peut s'écrire  $\xi_{ij} = \lambda_{ij}\eta_{ij}$  où  $\{\lambda_{ij}\}$  est un 1-cocycle à coefficients dans  $K^*$  et où  $\eta_{ij} \in \mathcal{O}_A^{0*}(r^{-1}V_{ij})$  pour tout  $i, j$ .

Comme le 1-cocycle  $\{\lambda_{ij}\}$  est trivial on trouve un 1-cocycle  $\{\eta_{ij}\}$  pour  $\mathcal{L}$  à coefficients dans  $r_*\mathcal{O}_A^{0*}$ .

(1.5.2). — Il existe un recouvrement de  $A$  par des ouverts de Zariski trivialisant le morphisme de groupes algébriques  $\pi : G \rightarrow A$  et ayant les propriétés (i) et (ii) de l'énoncé. Soit  $\{U_i\}$  un recouvrement affinoïde admissible de  $A$ , plus fin que ce recouvrement de Zariski. Alors on a des isomorphismes analytiques  $H_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times T$  tels que  $H_i(z) = (\pi(z), h_i(z))$  et  $h_i(tz) = t \cdot h_i(z)$  pour tout  $t \in T$  et  $z \in \pi^{-1}U_i$ . En plus  $H_j \circ H_i^{-1}$  s'écrit explicitement comme  $(u, t) \rightarrow (u, f_{ij}(u) \cdot t)$  où  $f_{ij} : U_{ij} \rightarrow T$  sont des fonctions holomorphes et où  $\{f_{ij}\}$  est un 1-cocycle. Pour  $x \in X(T)$ , le 1-cocycle  $\{x \circ f_{ij}\}$  décrit le faisceau  $\mathcal{O}_x$ .

Soit  $r^{-1}V$  un ouvert formel de  $A$  tel que chaque  $\mathcal{O}_x|r^{-1}V$  soit trivial. La restriction de  $\{f_{ij}\}$  à  $r^{-1}V$  est donc triviale et peut s'écrire  $f_{ij} = a_i^{-1}a_j$  où les fonctions  $a_i : U_i \cap r^{-1}V \rightarrow T$  sont holomorphes.

Soit  $K_i : \pi^{-1}(U_i \cap r^{-1}V) \xrightarrow{\sim} (U_i \cap r^{-1}V) \times T$  donné par  $K_i(z) = (\pi(z), a_i(\pi z) \cdot h_i(z))$ . Les isomorphismes  $K_i$  se recollent en un isomorphisme  $K : \pi^{-1}(r^{-1}V) \xrightarrow{\sim} (r^{-1}V) \times T$  ayant la propriété  $K(z) = (\pi(z), k(z))$  et  $k(zt) = t \cdot k(z)$  pour  $t \in T$ . On applique (1.5.1) à  $\mathcal{O}_x$  où  $x$  parcourt une base de  $X(T)$ . Cela donne un recouvrement formel de  $A$  avec les propriétés (i), (ii) et (iii). On peut normaliser tel que (iv) soit vrai.

(1.5.3). — Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $G$ . On prend d'abord un recouvrement formel  $\{r^{-1}W_j\}$  de  $A$  satisfaisant à (1.5.2). On applique (1.4.2) et (1.4.1) à chaque  $\mathcal{L}|_{\pi^{-1}r^{-1}W_j}$  et on obtient un recouvrement formel plus fin  $\{r^{-1}V_i\}$  tel que chaque  $\mathcal{L}|_{\pi^{-1}r^{-1}V_i}$  soit trivial.

(1.5.4). — Sur  $\bar{A}$  on a une suite exacte de faisceaux  $0 \rightarrow r_*\mathcal{O}_A^* \rightarrow r_*\pi_*\mathcal{O}_G^* \rightarrow X(T) \rightarrow 0$  où  $X(T)$  est le faisceau constant sur  $\bar{A}$  de fibre  $X(T)$ . D'après (1.5.1) et (1.5.3) on trouve une suite exacte

$$0 \longrightarrow K^* \longrightarrow G^*(G) \longrightarrow X(T) \longrightarrow \text{Pic}(A) \xrightarrow{\pi^*} \text{Pic}(G) \longrightarrow 0 = H^1(\bar{A}, X(T)).$$

On vérifie sans difficultés que l'application  $X(T) \rightarrow \text{Pic}(A)$  n'est autre que  $X(T) \xrightarrow{\tau} \text{Pic}^0(A) \subset \text{Pic}(A)$ .

(1.5.5). — Il suffit de remarquer que  $\pi^* : \text{Pic}^0(A) \rightarrow \text{Pic}^0(G)$  est également surjectif.

(1.5.6) *Remarque.* — La suite (1.5.4) est l'analogue analytique de la suite algébrique

$$0 \longrightarrow K^* \longrightarrow \mathcal{O}^*(G)^{\text{alg}} \longrightarrow X(T) \longrightarrow \text{Pic}(A)^{\text{alg}} \longrightarrow \text{Pic}(G)^{\text{alg}} \longrightarrow 0$$

(cf. [C, p. 76]). Comme  $A$  est une variété projective  $\text{Pic}(A) = \text{Pic}(A^{\text{alg}})$  et (1.5.4) s'identifie terme par terme avec la suite du cas algébrique.

### (1.6) $G^0$ et les réseaux de $G$ .

(1.6.1) *Définition de  $G^0$ .* — On reprend la notation  $T^0 = \{t \in T; |x(t)| = 1 \text{ pour tout } x \in X(T)\}$ . Soit  $\{r^{-1}V_i\}$  un recouvrement formel de  $A$  avec les propriétés de (1.5.2). Alors  $G^0 := \bigcup_i \theta_i^{-1}(r^{-1}V_i) \times T^0$  est un ouvert analytique quasi-compact de  $G$ . Une vérification triviale montre que  $G^0$  est un sous-groupe de  $G$  et que  $G^0$  ne dépend pas des choix de  $\{r^{-1}V_i\}$  et  $\{\theta_i\}$ .

(1.6.2). — Soient  $G(K)$ ,  $G^0(K)$ ,  $T(K)$ ,  $T^0(K)$  les points de  $G$ ,  $G^0$ ,  $T$ ,  $T^0$  à valeurs dans  $K$ . D'après la définition de  $G^0$  on a un isomorphisme de groupes

$$T(K)/T^0(K) \longrightarrow G(K)/G^0(K).$$

Considérons l'homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \ell : G(K) &\longrightarrow G(K)/G^0(K) \xrightarrow{\sim} T(K)/T^0(K) \xrightarrow{\sim} \\ &\mathcal{H}om(X(T), K^*/K^{0*}) = \mathcal{H}om(X(T), |K^*|) \longrightarrow \mathcal{H}om(X(T), \mathbb{R}) \end{aligned}$$

où la dernière flèche provient de “ $-\log |\cdot|$ ”.

Un sous-groupe  $\Lambda$  de  $G(K)$  est appelé un *réseau* si  $\ell : \Lambda \rightarrow \mathcal{H}om(X(T), \mathbb{R})$  est injectif et si  $\ell(\Lambda)$  est un réseau de l'espace vectoriel réel  $\mathcal{H}om(X, (T), \mathbb{R})$ .

(1.6.3) PROPOSITION. — *Pour tout réseau  $\Lambda$  de  $G(K)$ , le quotient  $G/\Lambda$  a une structure de groupe analytique propre sur  $K$ , telle que  $q : G \rightarrow G/\Lambda$  soit un isomorphisme local.*

*Démonstration.* — Elle est très voisine de celles de [F-vdP1, p. 19] et [G, paragraphe 1-3].

Soit  $X_1, \dots, X_h$  une base de  $X(T)$  et  $\varepsilon > 0$  avec  $e^\varepsilon \in |K^*|$ , tel que le réseau  $\ell(\Lambda)$  rencontre  $\{a \in \mathcal{H}om(X(T), \mathbb{R}) ; |a(x_i)| \leq \varepsilon \text{ pour } i = 1, \dots, h\}$  en  $\{0\}$ . Soit  $\{r^{-1}V_i\}_i$  un recouvrement formel de  $A$  ayant les propriétés de (1.5.2). Avec les notations de (1.5.2) on définit

$$G^\varepsilon = \bigcup_i \theta_i^{-1} \left( (r^{-1}V_i) \times \{t \in T ; e^{-\varepsilon} \leq |x_j(t)| \leq e^\varepsilon \text{ pour tout } j\} \right).$$

Alors  $G^\varepsilon$  est un ouvert quasi-compact de  $G$ . Soit  $\delta$  vérifiant  $e^\varepsilon \in |K^*|$  et  $0 < \delta < \varepsilon$ , alors  $G^\delta$  est intérieur à  $G^\varepsilon$ . La restriction de l'application ensembliste  $q : G \rightarrow G/\Lambda$  à  $G^\varepsilon$  est injective. En plus il existe un nombre fini d'éléments  $t_1, \dots, t_n \in T$  tel que  $G/\Lambda = \bigcup_i q(t_i G^\delta)$ . La structure analytique de  $G/\Lambda$  est donnée par un recollement évident des  $\{t_i G^\varepsilon\}$ .  $G/\Lambda$  est propre parce que  $G/\Lambda = \bigcup_i q(t_i G^\delta)$  et  $q(t_i G^\delta)$  est intérieur à  $q(t_i G^\varepsilon)$ . Ce qui reste de l'énoncé est facile à vérifier.

(1.6.4) COROLLAIRE (Comparer avec [O-vdP]). — *L'anneau des endomorphismes analytiques de  $G/\Lambda$  est égal à*

$$\{\alpha \in \text{End}(G) ; \alpha(\Lambda) \subseteq \Lambda\}.$$

*Démonstration.* —  $G$  est simplement connexe, au sens analytique rigide ([vdP2]). Le morphisme  $q : G \rightarrow G/\Lambda$  est alors le revêtement analytique

universel. En particulier chaque endomorphisme  $\beta$  de  $G/\Lambda$  se relève (de façon unique) en  $\alpha \in \text{End}(G)$  avec  $\alpha(\Lambda) \subseteq \Lambda$ . L'autre inclusion est une conséquence directe de la propriété universelle habituelle de  $G/\Lambda$ .

(1.6.5) COROLLAIRE. — *Il existe une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \ker \tau \longrightarrow \text{Hom}(\Lambda, K^*) \longrightarrow \text{Pic}^0(G/\Lambda) \xrightarrow{q^*} \text{Pic}^0(G) \longrightarrow 0$$

où l'application  $\ker \tau \rightarrow \text{Hom}(\Lambda, K^*)$  est ainsi définie : si  $x \in \ker \tau$ , on a  $\mathcal{O}_x = f\mathcal{O}_\Lambda$  où  $f$  est une fonction méromorphe sur  $A$ ; pour  $\lambda \in \Lambda$  soit  $C_\lambda \in K^*$  tel que  $f(\lambda) = C_\lambda f$ , alors  $\lambda \mapsto C_\lambda$  est l'image de  $x$  dans  $\text{Hom}(\Lambda, K^*)$ .

*Démonstration.* — La surjectivité de  $q^*$ ; soit  $[\mathcal{L}] \in \text{Pic}^0(G)$ . Il faut construire une  $\Lambda$ -linéarisation de  $\mathcal{L}$ , c'est-à-dire une famille d'isomorphismes  $\alpha(\lambda) : \lambda^*\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$  avec  $\alpha(\lambda_1\lambda_2) = \alpha(\lambda_1) \circ \lambda_1^*(\alpha(\lambda_2))$  pour tout  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ . Comme  $\mathcal{L} \cong \pi^*\mathcal{M}$  pour un  $\mathcal{M} \in \text{Pic}^0(A)$  (cf. (1.5.5)), il suffit de construire une  $\Lambda$ -linéarisation de  $\mathcal{M}$ . On remarque que  $\mathcal{M}^{\text{alg}}$  définit une extension  $B$  de  $A^{\text{alg}}$  par le groupe multiplicatif  $\mathbb{G}_1$  :

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_1 \longrightarrow B \xrightarrow{\rho} A^{\text{alg}} \longrightarrow 0$$

correspondant à  $\sigma : X(\mathbb{G}_1) = \mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}^0(A^{\text{alg}})$  avec  $\sigma(1) = [\mathcal{M}^{\text{alg}}]$ . Soit  $h : \Lambda \rightarrow B(K)$  un homomorphisme de groupes avec  $\rho \circ h = \pi : \Lambda \rightarrow A^{\text{alg}}$ . Alors  $h$  donne une  $\Lambda$ -linéarisation de  $\mathcal{M}^{\text{alg}}$ . En effet la multiplication par  $h(\lambda)$  sur  $B = \text{Spec}(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{M}^{\text{alg}})^n)$  donne des isomorphismes  $\bigoplus_n (\mathcal{M}^{\text{alg}})^n \rightarrow \bigoplus_n \pi(\lambda)^*(\mathcal{M}^{\text{alg}})^n$  et en particulier un isomorphisme  $\beta(\lambda) : \pi(\lambda)^*\mathcal{M}^{\text{alg}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\text{alg}}$ . De  $h(\lambda_1\lambda_2) = h(\lambda_1)h(\lambda_2)$  on conclut  $\beta(\lambda_1\lambda_2) = \beta(\lambda_1) \circ \pi(\lambda_1)^*(\beta(\lambda_2))$  pour tout  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ . D'où, avec GAGA, une  $\Lambda$ -linéarisation de  $\mathcal{M}$ .

*Le noyau de  $q^*$*  : soit  $[\mathcal{L}] \in \ker q^*$ . Alors  $q^*\mathcal{L}$  est engendré par une section globale  $e$ . L'action naturelle de  $\Lambda$  sur  $q^*\mathcal{L}$  s'écrit  $\lambda(e) = Z_\lambda(g) \cdot e$  où  $\lambda \mapsto Z_\lambda(g)$  est un 1-cocycle pour le groupe  $\Lambda$  à valeurs dans  $\mathcal{O}(G)^*$ . On voit que  $\mathcal{L}$  est trivial si et seulement si le 1-cocycle  $\lambda \mapsto Z_\lambda(g)$  est trivial. Donc il existe  $f \in \mathcal{O}_G(G)^*$  tel que, pour tout  $\lambda \in \Lambda$  et  $g \in G$   $Z_\lambda(g) = f(\lambda^{-1}g)/f(g)$ ; il résulte de (1.5.5) que  $Z_\lambda$  est invariant sous  $T$ , donc constant.

*Exactitude en  $\text{Hom}(\Lambda, q^*)$*  : soit  $\sigma \in \text{Hom}(\Lambda, q^*)$  tel que son image dans  $\text{Pic}^0(G/\Lambda)$  soit  $[\mathcal{O}_{G/\Lambda}]$ , alors il existe  $f \in \mathcal{O}_G(G)^*$  tel que  $f(\lambda \cdot) = \sigma(\lambda)f$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ . Soit  $x \in \ker \tau$  tel que  $f(tg) = x(t)f(g)$  pour tout  $t \in T$  et  $g \in G$ . Clairement  $\sigma$  est l'image de  $x$  par  $\ker \tau \rightarrow \text{Hom}(\Lambda, K^*)$ .

(1.6.6) *Remarque* (sur (1.6.5)). — La démonstration de la surjectivité de  $q^*$  peut se faire sans utiliser la structure algébrique de  $A$ , en définissant de manière analytique l'extension de  $A$  par  $K^*$  associée à  $\mathcal{M}$  (cf. PROPOSITION (3.1)).

**(1.7) Décomposition de  $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})$ .**

*Notations.* — Soit  $D$  un diviseur de  $A$  et soit  $\pi^*D$  l'image inverse de  $D$ . Le faisceau inversible analytique sur  $G$  correspondant à  $\pi^*D$  sera noté  $\mathcal{O}_{\pi^*D}$ . Pour tout  $x \in X(T)$  on pose :

$$H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x = \left\{ f \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D}) ; f(tg) = x(t)f(g) \right. \\ \left. \text{pour tout } t \in T \text{ et tout } g \in G \right\}.$$

PROPOSITION.

(1.7.1) On a l'isomorphisme  $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x \cong H^0(A, \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_x)$  et  $\dim_K H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x < \infty$  ;

(1.7.2)  $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x$  possède une norme canonique ;

(1.7.3)  $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D}) = \widehat{\bigoplus}_x H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x$  où  $\widehat{\bigoplus}$  désigne l'ensemble des sommes infinies  $\sum a_x$  tel que, pour tout  $t \in T$   $\lim_x \|a_x\|, |x(t)| = 0$ .

*Démonstration.* — Un recouvrement formel  $\{r^{-1}V_i\}$  de  $A$  trivialise  $\pi : G \rightarrow A$  et le diviseur  $D$ . En particulier il existe une fonction méromorphe  $e_i$  sur  $r^{-1}V_i$  de diviseur  $-D|_{r^{-1}V_i}$ . La norme de l'algèbre affinoïde  $\mathcal{O}(r^{-1}V_i)$  est multiplicative parce que  $\overline{\mathcal{O}(r^{-1}V_i)} = \mathcal{O}_{\bar{A}}(V_i)$  n'a pas de diviseurs de zéro. La norme de  $\mathcal{O}(r^{-1}V_i)$  induit alors une valuation sur le corps des fractions de  $\mathcal{O}(r^{-1}V_i)$ . On normalise  $e_i$  par  $\|e_i\| = 1$ . Alors on a

$$H^0(\pi^{-1}r^{-1}V_i, \mathcal{O}_{\pi^*D}) = \mathcal{O}(\pi^{-1}r^{-1}V_i)e_i.$$

L'isomorphisme  $T$ -équivariant  $\theta_i : \pi^{-1}r^{-1}V_i \xrightarrow{\sim} (r^{-1}V_i) \times T$  implique une décomposition canonique :

$$\mathcal{O}(\pi^{-1}r^{-1}V_i) = \widehat{\bigoplus_x \mathcal{O}(\pi^{-1}r^{-1}V_i)_x}$$

où

(i)  $\mathcal{O}(\pi^{-1}r^{-1}V_i)_x = \{f \in \mathcal{O}(\pi^{-1}r^{-1}V_i) ; f(tg) = x(t)f(g) \text{ pour tout } t \in T \text{ et tout } g \in G\}$  ;

(ii) la norme sur  $\mathcal{O}(\pi^{-1}r^{-1}V_i)_x$  est la norme spectrale sur  $G^0 \cap \pi^{-1}r^{-1}V_i = \theta_i^{-1}((r^{-1}V_i) \times T^0)$  ;



(iii)  $\widehat{\bigoplus}$  a le sens de (1.7.3).

Comme  $e_i$  est  $T$ -invariant on obtient une décomposition

$$H^0(\pi^{-1}r^{-1}V_i, \mathcal{O}_{\pi^*D}) = \widehat{\bigoplus} = H^0(\pi^{-1}r^{-1}V_i, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x$$

où  $H^0(\pi^{-1}r^{-1}V_i, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x = \mathcal{O}(\pi^{-1}r^{-1}V_i)_x e_i \cong H^0(r^{-1}V_i, \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_x)$  est muni de la norme  $\|f_x e_i\| = \|f_x\|$ .

Remarquons que  $\dim_K H^0(A, \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_x) < \infty$  parce que  $A/K$  est propre. On déduit la proposition du fait que  $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})$  est le noyau de

$$d : \bigoplus_i H^0(\pi^{-1}r^{-1}V_i, \mathcal{O}_{\pi^*D}) \longrightarrow \bigoplus_{i < j} H^0(\pi^{-1}r^{-1}V_i, \mathcal{O}_{\pi^*D})$$

et que  $d$  respecte l'action de  $T$ .

La norme sur  $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x$  ne dépend pas des choix de  $\{r^{-1}V_i\}$  et de  $\{e_i\}$ . En effet, soit  $r^{-1}V$  un ouvert formel de  $A$  tel que  $\pi^{-1}r^{-1}V \cong (r^{-1}V) \times T$ . Alors  $\pi^{-1}r^{-1}V \cap G^0 \cong (r^{-1}V) \times T^0$  est un affinoïde tel que la norme spectrale soit multiplicative. Alors  $\|f\|$ , pour  $f \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x$ , est égal à la norme de la restriction  $f$  ;  $\pi^{-1}r^{-1}V \cap G^0$ .

(1.7.4) *Remarque.* — La proposition reste valable si on remplace  $\mathcal{O}_D$  par un faisceau cohérent analytique  $\mathcal{M}$  sur  $A$ . Dans ce cas, plus général, il faut faire un choix convenable des normes sur  $H^0(G, \pi^*\mathcal{M})_x$ .

**(1.8) Diviseurs  $T$ -invariants sur  $G$ .** — Pour l'énoncé du théorème principal nous avons besoin du

LEMME. — Soit  $F$  un diviseur de  $G$ , invariant par l'action de  $T$ , et soit  $h$  une fonction méromorphe avec  $(h) = F$ . Alors :

(1) Il existe un caractère  $x \in X(T)$  tel que  $h(tg) = x(t)h(g)$  pour  $t \in T$ .

(2) Soit  $h_1$  une autre fonction méromorphe avec  $(h_1) = F$ . Alors  $h_1 = c \cdot y \cdot h$  où  $c \in K^*$ ,  $y \in \ker \tau \subset X(T)$  vu comme fonction inversible sur  $G$ . En plus  $h_1(tg) = y(t)x(t)h_1(g)$  pour  $t \in T$ .

*Démonstration.* — La fonction méromorphe  $(t, g) \rightarrow h(tg)h(g)^{-1}$  est inversible sur  $T \times G$ . D'après (1.5.4), appliqué à  $T \times G$ ,  $h(tg)h(g)^{-1} = cx(t)y(g)$  avec  $c \in K^*$ ,  $x \in X(T)$ ,  $y \in \ker \tau$  (cf. (1.5.4)'). En faisant  $t = 1$ , il vient  $c = 1$  et  $y = 0$ . Cela montre (1). Finalement (2) est une conséquence immédiate de (1.5.4).

(1.9) *Remarque.* — Tous les résultats de ce paragraphe 1, (sauf 1.5.2) sont vrais si  $A$  n'a plus de structure algébrique, mais est un groupe analytique propre possédant une réduction analytique non singulière

(cf. (1.6.6)). L'assertion (1.5.2) est vrai sans que  $A$  ait une structure algébrique, mais sous l'hypothèse que l'extension de groupes analytiques  $0 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 0$  soit localement triviale (cf. (3.1)).

## 2. La variété analytique $G/\Lambda$

On utilise les notations du paragraphe 1 et l'hypothèse (1.3.1). Le résultat principal de notre travail est le suivant.

(2.1) THÉORÈME. — *On suppose que  $A$  possède une réduction analytique  $r : A \rightarrow \bar{A}$  non singulière. Soit  $\Lambda$  un réseau de  $G(K)$ . Alors  $G/\Lambda$  est une variété abélienne si et seulement si il existe un diviseur ample  $D$  sur  $A$  et un homomorphisme  $\varphi : \Lambda \rightarrow X(T)$  tel que :*

(i) le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \subset G(K) & \xrightarrow{\pi} & A(K) \\ \varphi \downarrow & & \Phi_D \downarrow \\ X(T) & \xrightarrow{\tau} & \text{Pic}^0(A) \end{array}$$

où  $\Phi_D$  est la polarisation associée à  $D$  ;

(ii) la forme bilinéaire

$$\Lambda \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \longmapsto \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \ell(\lambda_1)(\varphi(\lambda_2))$$

est symétrique et définie positive ;

(iii) pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , soit  $h(\lambda)$  la fonction méromorphe sur  $G$ , déterminée à une constante près (cf. (1.8)) par :

$$(h(\lambda)) = \lambda^{-1} \pi^* D - \pi^* D \quad \text{et} \quad h(\lambda)(tg) = \varphi(\lambda)(t)h(\lambda)(g),$$

alors, pour tout  $\lambda_1, \lambda_2$  appartenant à  $\Lambda$

$$h(\lambda_1)(\lambda_2 g) \cdot [h(\lambda_1)(g)]^{-1} = h(\lambda_2)(\lambda_1 g) \cdot [h(\lambda_2)(g)]^{-1}.$$

(2.2) Démonstration de " $\Rightarrow$ ". — On suppose que  $G/\Lambda$  est une variété abélienne. Soit  $E$  un diviseur ample sur  $G/\Lambda$ . D'après (1.5.4), il existe un diviseur  $D$  sur  $A$  avec  $q^* E \sim \pi^* D$ . Soit  $\Theta$  une fonction méromorphe sur

$G$  avec  $(\Theta) = q^*E - \pi^*D$ . Posons, pour  $\lambda \in \Lambda$ ,  $h(\lambda)(g) = \Theta(g) \cdot \Theta(\lambda g)^{-1}$ . Alors  $(h(\lambda)) = \lambda^{-1}\pi^*D - \pi^*D$ . Comme  $\lambda^{-1}\pi^*D - \pi^*D$  est invariant par  $T$ , il existe d'après (1.8) un caractère  $\varphi(\lambda) \in X(T)$  tel que  $h(\lambda)(tg) = \varphi(\lambda)(t)h(\lambda)(g)$ .

L'égalité triviale  $h(\lambda_1\lambda_2)(g) = h(\lambda_1)(\lambda_2g) \cdot h(\lambda_2)(g)$  montre que l'application  $\varphi : \Lambda \rightarrow X(T)$  est un homomorphisme et en même temps l'égalité (iii). En plus on a  $\Phi_D(\pi(\lambda)) = [\pi(\lambda^{-1})D - D]$  et  $\pi^*(\pi(\lambda^{-1})D - D) = (h(\lambda))$ . Donc  $\Phi_D(\pi(\lambda)) = \tau(\varphi(\lambda))$  et on a vérifié (i). Pour  $t \in T$  le diviseur de  $g \rightarrow \Theta(tg)\Theta(g)^{-1}$  est  $t^*q^*E - q^*E = q^*(q(t)^*E - E)$ . On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T \subset G & \xrightarrow{q} & G/\Lambda \\ \downarrow S & & \downarrow \Phi_E \\ \mathcal{H}om(\Lambda, K^*) & \longrightarrow & \text{Pic}^0(G/\Lambda) \end{array}$$

où  $S$  est donné par  $S(t)(\lambda) = \varphi(\lambda)(t^{-1})$ . Le noyau de  $\Phi_E \circ q$  est un groupe de type fini. Si  $\varphi$  n'est pas injectif le noyau de  $S$  est un sous groupe algébrique de  $T$  de dimension positive. Donc  $\varphi$  est injectif.

Montrons maintenant la propriété (ii). Pour cela il faut trouver le lien entre les fonctions  $\{h(\lambda)\}$  et la forme bilinéaire  $\langle , \rangle$ . Soit  $c : \Lambda \rightarrow G^0(K)$  un homomorphisme de groupes tel que  $\lambda \cdot c(\lambda)^{-1} \in T(K)$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ . Posons  $Q(\lambda) = -\log \|h(\lambda)\|$ , où  $\|$  est la norme de (1.7.2). Une combinaison des formules :

$$\begin{aligned} h(\lambda_1\lambda_2)(g) &= h(\lambda_1)(\lambda_2g) \cdot h(\lambda_2)(g), \\ h(\lambda_1)(\lambda_2g) &= \varphi(\lambda_1)(\lambda_2c(\lambda_2)^{-1}) \cdot h(\lambda_1)(c(\lambda_2)g), \\ \langle \lambda_2, \lambda_1 \rangle &= -\log |\varphi(\lambda_1)(\lambda_2c(\lambda_2)^{-1})|, \\ \|h(\lambda_1)\| &= \|h(\lambda_1)(c(\lambda_2)g)\|, \end{aligned}$$

(parce que  $c(\lambda_2) \in G^0(K)$ ) donne

$$\langle \lambda_2, \lambda_1 \rangle = Q(\lambda_1\lambda_2) - Q(\lambda_1) - Q(\lambda_2).$$

Donc  $\langle , \rangle$  est symétrique. De plus  $Q(\lambda) = (1/2)\langle \lambda, \lambda \rangle + L(\lambda)$ , où  $L : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  est linéaire. Considérons la décomposition  $\Theta = \sum \Theta_x$  de (1.7). La formule  $h(\lambda)(g) \cdot \Theta(\lambda g) = \Theta(g)$  implique alors  $h(\lambda)(g) \cdot \Theta_x(\lambda g) = \Theta_{x+\varphi(\lambda)}(g)$  pour tout  $x \in X(T)$  et  $\lambda \in \Lambda$ .

Fixons  $x_0 \in X(T)$  avec  $\Theta_{x_0} \neq 0$ . Alors on a :

$$\begin{aligned}\Theta_{x_0+\varphi(\lambda)}(g) &= h(\lambda)(g) \cdot x_0(\lambda c(\lambda)^{-1}) \cdot \Theta_{x_0}(c(\lambda)g), \\ -\text{Log } \|\Theta_{x_0+\varphi(\lambda)}\| &= Q(\lambda) - \log |x_0(\lambda c(\lambda)^{-1})| - \log \|\Theta_{x_0}\|.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que  $-\log \|\Theta_{x_0+\varphi(\lambda)}\| = \frac{1}{2} \langle \lambda, \lambda \rangle + a(\lambda) + b$ , où  $a : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  est linéaire et où  $b \in \mathbb{R}$ . La propriété (1.7.3) implique  $\langle \lambda, \lambda \rangle > 0$  pour  $\lambda \neq 0$ , donc  $\varphi$  est injectif et cela montre (ii).

Il nous reste à montrer que  $D$  est ample. On peut faire une démonstration rapide en utilisant que  $A$  et  $\text{Pic}^0(A)$  sont des variétés abéliennes.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G/\Lambda & \xrightarrow{\Phi_E} & \text{Pic}^0(G/\Lambda) \\ q \uparrow & & \downarrow q^* \\ G & \xrightarrow{\Phi_{q^*E} = \Phi_{\pi^*D}} & \text{Pic}^0(G) \\ \pi \downarrow & & \uparrow \pi^* \\ A & \xrightarrow{\Phi_D} & \text{Pic}^0(A). \end{array}$$

$\pi^*\Phi_D$  est surjectif parce que  $\Phi_E$  et  $q^*$  sont surjectifs (cf. (1.6.5)). Le noyau de  $\pi^*$  est un groupe de type fini d'après (1.5.5). Alors le conoyau de  $\Phi_D$  est un groupe de type fini. Comme  $\Phi_D$  est un morphisme de variétés abéliennes il s'ensuit que  $\Phi_D$  est surjectif. Cela implique que  $D$  est ample.

**(2.3) Le plongement projectif associé à  $3D$ .** — Dans ce paragraphe, nous montrons l'existence d'un plongement analytique  $\phi : A \rightarrow \mathbb{P}(H^0(A, \mathcal{O}_{3D}))$  utilisant seulement la structure analytique de  $A$ . Il y a deux raisons pour cela. D'abord la démonstration servira de modèle pour la réciproque du théorème (2.1) (cf. paragraphe (2.4)), ensuite elle conduit à un résultat plus fort (cf. (3.5)). Rappelons que les idées utilisées ici sont essentiellement dues à A. WEIL (voir par exemple [W]).

Rappelons (cf. (1.9)) que les résultats du paragraphe 1 sont valables sans que  $A$  soit algébrisable en faisant l'hypothèse que *l'extention de groupes analytiques*  $0 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 0$  est localement triviale (cf. (3.1)), hypothèse que nous faisons dans ce paragraphe.

Pour commencer on suppose que  $E$  est très ample et que  $E$  et  $D$  sont symétriques (i.e. si  $i : A \rightarrow A$  est défini par  $i(a) = a^{-1}$ , on a  $i^*E \simeq E$  et  $i^*D \simeq D$ ). D'abord un lemme :

(2.3.1) LEMME. — Il existe une fonction méromorphe  $f(a, b, z)$  sur  $A \times A \times A$  telle que pour tout  $a, b \in A$  fixés le diviseur de  $f(a, b, z)$  soit  $aD + bD + a^{-1}b^{-1}D - 3D$ .

Démonstration. — Soit  $M$  un diviseur sur un groupe analytique commutatif  $H$ . On écrit  $\mathcal{V}_3(M)$  pour le diviseur

$$m_{123}^*M - m_{12}^*M - m_{13}^*M - m_{23}^*M + m_1^*M + m_2^*M + m_3^*M$$

sur  $H \times H \times H$  où pour  $I \subset \{1, 2, 3\}$ ,  $m_I : H \times H \times H \rightarrow H$  est le morphisme  $m_I(z_1, z_2, z_3) = \prod_{i \in I} z_i$ .

Soit  $f$  une fonction méromorphe sur  $H$ , alors  $\mathcal{V}_3(f)$  désigne la fonction méromorphe sur  $H \times H \times H$ ,

$$(f \circ m_{123})(f \circ m_{12})^{-1}(f \circ m_{13})^{-1}(f \circ m_{23})^{-1}(f \circ m_2)(f \circ m_3).$$

$G/\Lambda$  est une variété abélienne, d'après GAGA le diviseur  $E$  est algébrique et le corollaire 2 p. 58 de [M1] affirme que  $\mathcal{V}_3(E)$  est le diviseur d'une fonction rationnelle (et donc méromorphe)  $f_1$  sur  $(G/\Lambda)^3$ .

La fonction méromorphe  $f_2 = \mathcal{V}_3(\Theta)^{-1}f_1$  sur  $G^3$  a pour diviseur  $\mathcal{V}_3(\pi^*D)$ . Pour  $t_1, t_2, t_3 \in T$ , la fonction  $f_2(t_1g_1, t_2g_2, t_3g_3)f_2(g_1, g_2, g_3)^{-1}$  est inversible sur  $G^3$ , invariante par  $\Lambda^3$ , donc égale à une constante  $c(t_1, t_2, t_3) \in K^*$ .

Parce que  $f_2(1, 1, g_3) \in \mathcal{O}(G)^*$  il existe un caractère  $x \in \ker \tau \subset X(T)$  avec  $c(1, 1, t_3) = x(t_3)$ . La symétrie implique  $c(t_1, t_2, t_3) = x(t_1t_2t_3)$ .

Alors  $f_3(g_1, g_2, g_3) = x(g_1^{-1}g_2^{-1}g_3^{-1})f_2(g_1, g_2, g_3)$  est invariante par  $T^3$ . On écrit  $f_4$  pour la fonction méromorphe sur  $A^3$  déduite de  $f_3$ . Le diviseur de  $f_4$  est  $\mathcal{V}_3(D)$  et  $f(a, b, z) = f_4(a, b, z)f_4(a, a^{-1}, z)^{-1}f_4(b^{-1}, b, z)^{-1}$  possède les propriétés du lemme.

(2.3.2) COROLLAIRE. —  $\mathcal{O}_{3D}$  est engendré par  $H^0(A, \mathcal{O}_{3D})$ .

Démonstration. — Pour  $P \in A$  on prend  $a, b \in A$  tels que  $P \notin aD \cup bD \cup a^{-1}b^{-1}D$ . Alors  $f(a, b, z) \in H^0(A, \mathcal{O}_{3D})$  ne s'annule pas en  $P$  comme section de  $\mathcal{O}_{3D}$ .

(2.3.3) COROLLAIRE. —  $\mathcal{O}_{3D}$  induit un morphisme analytique

$$\phi : A \longrightarrow \mathbb{P}^d \quad \text{où} \quad \mathbb{P}^d = \mathbb{P}(H^0(A, \mathcal{O}_{3D})).$$

Démonstration. — Soit  $u_0, \dots, u_d$  une base de  $H^0(A, \mathcal{O}_{3D})$ , alors  $\phi(P) = (u_0(P) : u_1(P) : \dots : u_d(P)) \in \mathbb{P}^d$ . Sur un recouvrement affinoïde admissible de  $A$  on vérifie que  $\phi$  est un morphisme d'espaces analytiques.

(2.3.4) LEMME. —  $\phi$  est injectif.

*Démonstration.* — Soient  $z_1$  et  $z_2$  dans  $A$  tels que  $\phi(z_1) = \phi(z_2)$ , alors  $u(z_1) = u(z_2)$  pour tout  $u \in H^0(A, \mathcal{O}_{3D})$  puisque  $1 \in H^0(A, \mathcal{O}_{3D})$ .

Soient  $X_1, X_2, X_3 \in X(T)$  avec  $X_1 + X_2 + X_3 = 0$  et soient  $\alpha_i \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_{x_i}$ ,  $\alpha_i \neq 0$ . Alors, si  $f$  est donné par (2.3.1),

$$u(g) = \alpha_1(g_1^{-1}g)\alpha_2(g_2^{-1}g)\alpha_3(g_1g_2g)f(\pi(g_1), \pi(g_2), \pi(g))$$

appartient à  $H^0(A, \mathcal{O}_{3D})$  pour tout  $g_1, g_2$  dans  $G$ . Nous avons supposé que  $D$  est symétrique, donc  $H^0(G, \pi^*\mathcal{O}_D)_x \neq 0$  implique  $H^0(G, \pi^*\mathcal{O}_D)_{-x} \neq 0$ . Pour  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\alpha_1 \in H^0(G, \pi^*\mathcal{O}_D)_{x_1}$ , on peut trouver  $X_2, X_3$  et  $\alpha_2 \neq 0$ ,  $\alpha_3 \neq 0$  avec  $X_1 + X_2 + X_3 = 0$  et  $\alpha_i \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_{x_i}$ .

Prenons  $Z_1, Z_2 \in G$  avec  $\pi(Z_1) = z_1$ ,  $\pi(Z_2) = z_2$ . Alors  $a(Z_1) = a(Z_2)$  implique que le diviseur de la fonction  $g \rightarrow \alpha_1(g^{-1}Z_1)\alpha_1(g^{-1}Z_2)^{-1}$ , méromorphe sur  $A$ , est égal à  $z_2i^*D - z_1i^*D$ , où  $i$  est l'application inverse de  $A$ . Pour  $\alpha_1 = 1$  on a  $z_2i^*D = z_1i^*D$ . Posons  $\delta = Z_1Z_2^{-1}$ . Alors  $g \mapsto \alpha_1(\delta g) \cdot \alpha(g)^{-1}$  est une fonction inversible sur  $A$ , donc égale à une constante  $c(\alpha_1) \in K^*$ . Si  $\alpha, \beta$  sont dans  $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_{x_1}$  on constate que  $c(\alpha + \beta) = c(\alpha) = c(\beta)$ , alors  $c(\alpha)$  ne dépend que de  $X_1$  et nous écrivons alors  $c(X_1)$  au lieu de  $c(\alpha)$ . Revenons à la fonction  $u$  précédente, on voit que  $c(X_1)c(X_2)c(X_3) = 1$  si  $X_1 + X_2 + X_3 = 0$ . Donc  $X \rightarrow c(X)$  est un homomorphisme de groupes  $X(T) \rightarrow K^*$ . Un changement de  $\delta$  en  $\delta t$  avec  $t \in T$  convenablement choisi nous donne  $\alpha(\delta g) = \alpha(g)$  pour tout  $\alpha \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x$  et tout  $x$ . L'égalité reste valable pour tout  $\alpha \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})$  et est donc valable pour  $\Theta$  et tout  $h(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Comme  $H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_E)$  est un sous-espace de  $\Theta^{-1}H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})$ , il vient  $\delta \in \Lambda$  parce que  $E$  est très ample. Finalement,  $h(\lambda)(g) = h(\lambda)(\delta g)$  pour tout  $g \in G$  implique  $\langle \lambda, \delta \rangle = 0$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , donc  $\delta = 1$  et  $\phi$  est injectif.

(2.3.5) LEMME. — Pour tout point  $P$  de  $A$  l'application des espaces tangents  $T_{A,P} \rightarrow T_{\mathbf{P}^d, \phi(P)}$ , induite par  $\phi$ , est injective.

*Démonstration.* — Soit  $P \in A$  et soit  $e : \mathcal{O}_{A,P} \rightarrow K$  une dérivation. Après une translation de  $D$ , on peut supposer que  $P \notin \text{support de } D$ . Alors  $\mathcal{O}_{A,P}$  s'identifie à  $\mathcal{O}_{3D,P}$  et il faut montrer que  $e(u) = 0$  pour tout  $u \in H^0(A, \mathcal{O}_{3D})$  implique  $e = 0$ .

Soit  $Q$  un point de  $G$  avec  $\pi(Q) = P$  et soit  $e' : \mathcal{O}_{G,Q} \rightarrow K$  une dérivation telle que

$$e = \mathcal{O}_{A,P} \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{O}_{G,Q} \xrightarrow{e'} K.$$

Comme dans la démonstration de (2.3.4) on prend

$$u(g) = \alpha_1(g_1^{-1}g)\alpha_2(g_2^{-1}g)\alpha_3(g_1g_2g)f(\pi(g_1), \pi(g_2), \pi(g)).$$

Remarquons que  $g \mapsto e'(k(ag))$  est une fonction méromorphe en  $a$ , si  $k$  est une fonction méromorphe.

Posons  $k_i(a) = e'(\alpha_i(a^{-1}g))\alpha_i(a^{-1}Q)^{-1}$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Puisque  $u$  et  $g \rightarrow f(\pi(g_1), \pi(g_2), \pi(g))$  sont dans  $H^0(A, \mathcal{O}_{3D})$ ,

$$k_1(g_1) + k_2(g_2) + k_3(g_1^{-1}g_2^{-1}) = 0 \quad \text{pour tout } g_1, g_2.$$

Cela implique que chaque  $k_i$  est nul.

Donc  $e'(v) = 0$  pour tout  $v \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x$  et aussi pour tout  $v \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})$ . Comme dans (2.3.4) on en conclut que  $e'$  est nul sur les éléments de  $H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_E)$ . On a  $\mathcal{O}_{G,Q} \cong \mathcal{O}_{G/\Lambda, q(Q)}$  donc  $e' = 0$  parce que  $E$  est très ample. Cela montre  $e = 0$  et le lemme est montré.

(2.3.6) *Fin de la démonstration de (2.3).* — On peut recopier [F-vdP1, p. 201] pour montrer que  $\phi : A \rightarrow \mathbb{P}^d$  donne un isomorphisme analytique entre  $A$  et la variété projective  $\phi(A) \subset \mathbb{P}^d$ .

L'image  $X$  de  $\phi$  est un sous espace analytique de  $\mathbb{P}^d([K])$ . Le théorème GAGA affirme que  $X$  est algébrique. D'après (2.3.4) et (2.3.5),  $\phi : A \rightarrow X$  est bijective et localement un isomorphisme dans le sens faible. D'après un résultat de GRAUERT-GERRITZEN [G-G], cela implique que  $\phi$  est un isomorphisme d'espaces analytiques.

Encore par GAGA,  $\phi$  est aussi un isomorphisme de variétés algébriques.

(2.4) *Démonstration de " $\Leftarrow$ ".* — Maintenant  $\varphi, D$  et les propriétés (i), (ii), (iii) sont données. On définit  $a(\lambda_1, \lambda_2) \in K^*$  par la formule  $h(\lambda_1\lambda_2)(g) = a(\lambda_1, \lambda_2)h(\lambda_1)(\lambda_2g)h(\lambda_2)(g)$  et on constate

$$\begin{aligned} a(\lambda_1, \lambda_2) &= a(\lambda_2, \lambda_1), \\ a(\lambda_1\lambda_2, \lambda_3)a(\lambda_1, \lambda_2) &= a(\lambda_1, \lambda_2\lambda_3)a(\lambda_2, \lambda_3). \end{aligned}$$

Donc  $a(\dots)$  est un 2-cocycle symétrique, à valeurs dans  $K^*$ . Le groupe  $\Lambda$  étant libre, il existe une fonction  $b : \Lambda \rightarrow K^*$  avec  $b(\lambda_1\lambda_2)b(\lambda_1)^{-1}b(\lambda_2)^{-1} = a(\lambda_1, \lambda_2)$  pour tout  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ . On remplace  $h(\lambda)$  par  $b(\lambda)^{-1}h(\lambda)$  et alors

$$h(\lambda_1\lambda_2)(g) = h(\lambda_1)(\lambda_2g) \cdot h(\lambda_2)(g) \quad \text{pour } \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda.$$

D'après (2.2),  $-\log \|h(\lambda)\| = \frac{1}{2}\langle \lambda, \lambda \rangle + L(\lambda)$ , où  $L : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  est linéaire. La condition (ii) et (1.7.3) impliquent  $\Theta := \sum_{\lambda \in \Lambda} h(\lambda) \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})$ . Le diviseur  $\pi^*D + (\Theta)$  est invariant par  $\Lambda$ , parce que  $h(\lambda)(g)\Theta(\lambda g) = \Theta(g)$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ . Désignons par  $E$  le diviseur de  $G/\Lambda$  tel que  $q^*E = (\Theta) + \pi^*D$ .

On peut supposer que  $D = 2D_1$ , avec  $D_1$  très ample et  $[-1]^*D_1 = D_1$ ; on va montrer que  $3E$  donne un plongement analytique  $\phi : G/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}^d =$

$\mathbb{P}(H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_{3E}))$ . Le raisonnement (2.3.6) montrera alors que  $G/\Lambda$  est une variété projective. Le théorème GAGA affirmera que les morphismes analytiques  $m : G/\Lambda \times G/\Lambda \rightarrow G/\Lambda$  (multiplication) et  $i : G/\Lambda \rightarrow G/\Lambda$  (inverse) sont des morphismes algébriques. Donc  $G/\Lambda$  sera une variété abélienne.

Pour montrer que  $\mathcal{O}_{3E}$  donne un plongement analytique  $\phi : G/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}^d$  on procède comme dans (2.3) :

(2.4.1) LEMME. — *Il existe une fonction méromorphe  $f(a, b, z)$  sur  $(G/\Lambda)^3$  telle que, pour tout  $a, b \in G/\Lambda$  fixés, le diviseur de  $f(a, b, z)$  est égal à  $aE + bE + a^{-1}b^{-1}E - 3E$ .*

*Démonstration.* — Les notations sont celles de la démonstration de (2.3.1). Il suffit de montrer que  $\mathcal{V}_3(E)$  est trivial. Le lemme du cube pour  $D_1$  et  $A$  montre qu'il existe une fonction méromorphe  $k$  sur  $A^3$  telle que  $\mathcal{V}_3(D_1) = (k)$ . Soient  $\theta_1$  et  $E_1$  définis à partir de  $D_1$  comme le sont juste avant  $\theta$  et  $E$  à partir de  $D$ . On a donc  $q^*E_1 = \pi^*D_1 + (\theta_1)$ , d'où  ${}^*(q^3)\mathcal{V}_3(E_1) = (f)$  où  $f = (k \circ \pi^3) \times \mathcal{V}_3(\theta_1)$  (cf. (2.3.1)). Il suffit de prouver que  $f^2$  est invariant sous  $\Lambda^3$ . Soit  $H$  le groupe d'automorphismes de  $G^3$  engendré par le groupe symétrique  $S_3$ ,  $[-1]$  et  $\Lambda^3$ . Pour  $h \in H$ , on constate que la restriction de  $(f \circ h) \times f^{-1}$ , qui appartient à  $\mathcal{O}(G^3)^*$ , est constante sur  $T^3$ . D'après (1.5.4) on a donc :  $(f \circ h) \times f^{-1} \in K^*$ . La structure du groupe  $H$  implique que l'image de l'homomorphisme  $h \rightarrow (f \circ h) \times f^{-1} \in K^*$  est  $\{\pm 1\}$  (en effet, l'image des commutateurs est triviale et  $H$  rendu abélien est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ). Donc  $f^2$  est invariant sous  $\Lambda^3$  et, si  $E = 2E_1$ ,  $\mathcal{V}_3(E)$  est trivial.

On en déduit, comme en (2.3.1)

(2.4.2) COROLLAIRE. —  $\mathcal{O}_{3E}$  est engendré par  $H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_{3E})$ .

(2.4.3) COROLLAIRE. —  $\mathcal{O}_{3E}$  induit un morphisme analytique

$$\phi : G/\Lambda \longrightarrow \mathbb{P}^d \quad \text{où} \quad \mathbb{P}^d = \mathbb{P}(H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_{3E})).$$

(2.4.4) LEMME. —  $\phi$  est injectif.

*Démonstration.* — Soient  $z_1, z_2 \in G/\Lambda$  avec  $\phi(z_1) = \phi(z_2)$ , alors  $u(z_1)u(z_2)^{-1} = 1$  pour tout  $u \in H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_{3E})$ . Pour  $\alpha \in H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_E)$ ,  $\alpha \neq 0$ , et  $a, b \in G/\Lambda$  la fonction  $\alpha(a^{-1}z)\alpha(b^{-1}z)\alpha(abz)f(a, b, z)$  appartient à  $H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_{3E})$ .

Comme dans (2.3.4), on obtient  $\delta_1 = z_1 z_2^{-1} \in G/\Lambda$  satisfaisant  $\delta_1 E = E$  et  $\alpha(\delta_1 z) = \alpha(z)$  pour tout  $\alpha \in H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_E)$ . Soit  $\delta \in G$  avec  $q(\delta) = \delta_1$ . Le diviseur de  $\Theta(g)\Theta(g\delta)^{-1}$  est  $-\pi^*D + \delta^{-1}\pi^*D$ . Alors  $\Theta(g)\Theta(g\delta)^{-1}$  appartient à  $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_y$  pour un certain  $y \in X(T)$ , puisque son diviseur est invariant sous  $T$ .



L'égalité  $\sum_{\lambda} h(\lambda)(g) = \sum_{\mu} \Theta(g) \Theta(g\delta)^{-1} h(\mu)(g\delta)$  implique  $h(\lambda_0)(g) = \Theta(g) \Theta(g\delta)^{-1}$  pour certain  $\lambda_0 \in \Lambda$ .

On remplace  $\delta$  par  $\delta\lambda_0^{-1}$  et on trouve :

$$\Theta(g\delta) = \Theta(g) \quad \text{et} \quad h(\lambda)(g\delta) = h(\lambda)(g) \quad \text{pour tout } \lambda \in \Lambda.$$

Pour tout  $y \in X(T)$  et  $f_y \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_y$  l'élément

$$\alpha = (1/\Theta(g)) \sum_{\lambda \in \Lambda} h(\lambda)(g) f_y(\lambda g)$$

appartient à  $H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_E)$ . Les égalités  $\alpha(\delta g) = \alpha(g)$  et  $\Theta(\delta g) = \Theta(g)$  impliquent  $f_y(\delta g) = f_y(g)$ .

Cette égalité avec  $y = 0$  implique  $\delta \in T$  parce que  $D$  est très ample. Pour  $y \in X(T)$  l'égalité implique  $y(\delta) = 1$ . Donc  $\delta = 1$ ,  $z_1 = z_2$  et  $\phi$  est injectif.

(2.4.5) LEMME. — *Pour tout point  $P$  de  $G/\Lambda$  l'application des espaces tangents  $T_{G/\Lambda, P} \rightarrow T_{\mathbf{P}^d, \phi(P)}$ , induite par  $\phi$ , est injective.*

*Démonstration.* — On peut supposer que  $P \notin \text{support de } E$  et alors  $\mathcal{O}_{G/\Lambda, P}$  s'identifie  $\mathcal{O}_{3E, P}$ . Soit  $\varphi : \mathcal{O}_{G/\Lambda, P} \rightarrow K$  une dérivation. Il faut montrer que  $e(u) = 0$  pour tout  $u \in H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_{3E})$  implique  $e = 0$ .

Soit  $Q$  un point de  $G$  avec  $q(Q) = P$  et désignons par  $e'$  la dérivation  $\mathcal{O}_{G, Q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{G/\Lambda, P} \xrightarrow{e'} K$ .

On choisit  $u$  de la forme  $u = \alpha(a^{-1}z)\alpha(b^{-1}z)\alpha(abz)f(a, b, z)$  où  $f$  est défini en (2.4.1) et où  $\alpha \in H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_E)$  est de la forme  $\alpha = \sum h(\lambda)(g) f_y(\lambda g)$  avec  $f_y \in H^0(\mathcal{O}_{\pi^*D})_y$ .

Comme dans (2.3.5) on en conclut  $e'(f_y) = 0$  pour tout  $f_y \in H^0(\mathcal{O}_{\pi^*D})_y$ .

L'application  $\bigoplus_{y \in X(T)} H^0(\mathcal{O}_{\pi^*D})_y \rightarrow \mathcal{O}_{G, Q}/m_{-Q}^2$  est surjective parce que  $D$  est très ample. Cela entraîne  $e' = 0$ . Donc  $e = 0$  et le lemme est montré.

### 3. Variations sur le même thème

(3.1) **Variétés abéloïdes.** — Nous reprenons la notion de variété abéloïde de M. RAYNAUD [R].

Une variété abéloïde  $A/K$  est un groupe analytique commutatif, connexe, propre sur  $K$ .

Le groupe  $\text{Pic}^0(A)$  est défini comme dans (1.5). Les auteurs ne savent pas donner à  $\text{Pic}^0(A)$  une structure de variété abéloïde lorsque  $A$  n'est pas une variété abélienne et possède une bonne réduction.

Soit  $T/K$  un tore algébrique déployé. Une extension d'une variété abéloïde  $A$  par le tore  $T$  est un groupe analytique  $G/K$  muni d'un morphisme de groupes analytiques  $\pi : G \rightarrow A$  tel que

- (i)  $\ker \pi \cong T$ ;
- (ii) localement, pour la topologie de Grothendieck sur  $A$ ,  $\pi$  est un produit de  $A$  par  $T$ .

La condition (ii) veut dire qu'il existe un recouvrement affinoïde admissible  $\{A_i\}$  de  $A$  et des isomorphismes analytiques  $\theta_i : \pi^{-1}(A_i) \xrightarrow{\sim} A_i \times T$  tels que

- (a) est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(A_i) & \xrightarrow[\theta_i]{\sim} & A_i \times T \\ \downarrow \pi & \nearrow \text{pr}_1 & \\ A_i & & \end{array}$$

- (b)  $\theta_i$  est  $T$ -équivariant.

(3.2) PROPOSITION. — Soit  $A/K$  une variété abéloïde et soient  $T/K$  un tore algébrique déployé,  $X(T)$  son groupe des caractères. Alors l'ensemble des classes d'isomorphismes des extensions de  $A$  par  $T$  est isomorphe à  $\mathcal{H}om(X(T), \text{Pic}^0(A))$ .

Démonstration. — Soit une extension  $\pi : G \rightarrow A$ , donnée. L'isomorphisme  $\theta_i : \pi^{-1}(A_i) \xrightarrow{\sim} A_i \times T$  est de la forme  $\theta_i(z) = (\pi(z), f_i(z))$  où  $f_i(tz) = tf_i(z)$  pour tout  $t \in T$ . Si  $i \neq j$ ,  $\theta_j \circ \theta_i^{-1}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \theta_j \circ \theta_i^{-1} : A_{ij} \times T &\longrightarrow A_{ij} \times T \\ (z, t) &\longmapsto (z, tf_{ij}(z)) \end{aligned}$$

où  $\{f_{ij}\}$  est un 1-cocycle. Pour tout  $x \in X(T)$ ,  $\{x \circ f_{ij}\}$  est un 1-cocycle à valeurs dans  $\mathbb{G}_m$  et définit un faisceau inversible sur  $A$ . On trouve ainsi un homomorphisme  $\tau : X(T) \rightarrow \text{Pic}(A)$ .

Soit  $x \in X(T)$ ,  $x \neq 0$ , et soit  $T' = \ker(x : T \rightarrow K^*)$ . Le groupe analytique  $G' = G/T'$  est une extension de  $A$  par  $K^* = \mathbb{G}_m$ . Soient  $a \in A$  et  $b \in G'$  avec image  $a$ . Alors la multiplication par  $b$  sur  $G'$  induit un isomorphisme  $a^* \mathcal{O}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_x$  où  $\mathcal{O}_x$  est le faisceau inversible sur  $A$  avec  $[\mathcal{O}_x] = \tau(x)$ . Donc  $\tau$  est un homomorphisme de  $X(T)$  dans  $\text{Pic}^0(A)$ .

D'autre part, soit  $\tau : X(T) \rightarrow \text{Pic}^0(A)$  un homomorphisme donné. On se donne un recouvrement admissible  $\{A_i\}$  de  $A$  trivialisant tous les  $\tau(x) = [\mathcal{O}_x]$  pour  $x \in X(T)$ . Il existe des fonctions holomorphes  $f_{ij} : A_{ij} \rightarrow T$  telles que  $\{x \circ f_{ij}\}_{ij}$  décrit  $\tau(x)$  pour tout  $x \in X(T)$ .

On recolle maintenant les espaces analytiques  $A_i \times T$  suivant les isomorphismes  $A_{ij} \times T \rightarrow A_{ij} \times T$ ,  $(z, t) \rightarrow (z, t f_{ij}(z))$ . Cela définit  $\pi : G \rightarrow A$ . La structure de groupe analytique sur  $G$  (compatible avec les autres données) se déduit de :

$$m^* \mathcal{O}_x \cong p_1^* \mathcal{O}_x \otimes p_2^* \mathcal{O}_x \quad \text{où} \quad m, p_1, p_2 : A \times A \longrightarrow A$$

sont la multiplication et les deux projections, (cf. (1.2)). Le lemme suivant achève donc la démonstration de (3.2).

(3.3) LEMME. — Soit  $\mathcal{L} \in \text{Pic}^0(A)$ , alors le faisceau inversible  $m^* \mathcal{L} \otimes p_1^* \mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^* \mathcal{L}^{-1}$  sur  $A \times A$  est trivial.

*Démonstration.* — Le théorème des morphismes propres de R. KIEHL ([K, théorème 3.3]) appliqué à  $\mathcal{M} = m^* \mathcal{L} \otimes p_1^* \mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^* \mathcal{L}^{-1}$  et  $p_1 : A \times A \rightarrow A$  montre que  $\mathcal{N} := (p_1)_* \mathcal{M}$  est un faisceau analytique cohérent ; le théorème des fonctions formelles ([K, théorème 3.7]) et le fait que  $\mathcal{M}|_{\{a\} \times A}$  soit trivial pour tout  $a \in A$ , montre que  $\mathcal{N}$  est en fait un faisceau inversible. De plus  $p_1^* \mathcal{N} \cong \mathcal{M}$ . On a les mêmes propriétés avec  $p_2$ . On peut montrer facilement qu'étant donné un ouvert admissible affinoïde  $U$  de  $A$  on a  $p_1^* \mathcal{N}(A \times U) \cong \mathcal{N}(A) \otimes_K \mathcal{O}_A(U)$ , d'où l'on déduit, puisque  $(p_2)_* \mathcal{M}$  est inversible :

$$(p_2)_* \mathcal{M} \cong (p_2)_* p_1^* \mathcal{N} \cong \mathcal{O}_A.$$

Par conséquent  $\mathcal{M} \simeq p_2^* (p_2)_* \mathcal{M}$  est trivial.

(3.4) Remarque. — Soit  $A$  une variété abéloïde possédant une réduction analytique  $r : A \rightarrow \bar{A}$  avec  $\bar{A}$  non singulière. Soit  $G$  une extension de  $A$  par un tore déployé (analytifié)  $T/K$ . Tous les résultats du paragraphe 1 sont encore valables pour  $G$ , on peut définir en particulier  $G^0$  et la notion de réseau  $\Lambda$ , donner à  $G/\Lambda$  une structure canonique de variété abéloïde. La démonstration de (2.3) s'applique alors à  $G/\Lambda$ , on en déduit le théorème suivant, d'abord énoncé par M. RAYNAUD ([R, p. 176]).

(3.5) THÉORÈME. — Soit  $A$  une variété abéloïde sur  $K$  possédant une réduction analytique  $r : A \rightarrow \bar{A}$  avec  $\bar{A}$  non singulière. Soit  $\Lambda$  un réseau dans une extension  $G$  de  $A$  par un tore déployé  $T/K$ . Supposons que  $G/\Lambda$  soit une variété abélienne, alors  $A$  est également une variété abélienne.

**(3.6) Le dual de  $G/\Lambda$ .**

PROPOSITION. — Soient  $G^{\text{alg}}$  une extension d'une variété abélienne  $A^{\text{alg}}/K$  avec bonne réduction par une tore  $T^{\text{alg}}/K$  et  $\Lambda$  un réseau de  $G$ . Alors  $\text{Pic}^0(G/\Lambda)$  est une variété abéloïde. Si  $G/\Lambda$  est une variété abélienne,  $\text{Pic}^0(G/\Lambda)$  est l'analytifié de  $\text{Pic}^0((G/\Lambda)^{\text{alg}})$ .

Rappelons que  $G, A, \dots$  désignent les analytifiés des variétés algébriques  $G^{\text{alg}}, A^{\text{alg}}, \dots$ . Le  $\text{Pic}^0(\cdot)$  d'un espace analytique est défini en (1.5).

Démonstration. — Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $A$  avec  $[\mathcal{L}] \in \text{Pic}^0(A^{\text{alg}})$ . On sait (cf. (1.6.5)) que  $\mathcal{L}$  possède une  $\Lambda$ -linéarisation  $\alpha$ , c'est-à-dire une famille d'isomorphismes  $\alpha(\lambda) : \pi(\lambda)^*\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$  avec  $\alpha(\lambda_1\lambda_2) = \alpha(\lambda_1) \circ \pi(\lambda_1)^*\alpha(\lambda_2)$  pour tout  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ .

On définit une relation d'équivalence sur des couples  $(\mathcal{L}, \alpha)$  par :  $(\mathcal{L}_1, \alpha_1) \sim (\mathcal{L}_2, \alpha_2)$  s'il existe un isomorphisme  $f : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$  tel que les diagrammes suivants sont commutatifs ( $\lambda \in \Lambda$ ) :

$$\begin{array}{ccc} \pi(\lambda)^*\mathcal{L}_1 & \xrightarrow{\pi(\lambda)^*f} & \pi(\lambda)^*\mathcal{L}_2 \\ \alpha_1(\lambda) \downarrow & & \downarrow \alpha_2(\lambda) \\ \mathcal{L}_1 & \xrightarrow{f} & \mathcal{L}_2 \end{array}$$

Soit  $H$  l'ensemble des classes d'isomorphisme des couples  $(\mathcal{L}, \alpha)$ . On voit aisément que  $H$  est un groupe commutatif et qu'on a une suite exacte de groupes

$$0 \longrightarrow T_\Lambda \longrightarrow H \xrightarrow{\rho} \text{Pic}^0(A^{\text{alg}}) \longrightarrow 0$$

où  $T_\Lambda$  est le tore algébrique ayant  $\Lambda$  pour groupe de caractères. On montre que, en tant que groupe,  $H$  s'identifie à l'extension de la variété abélienne  $\text{Pic}^0(A)$  par  $T_\Lambda$ , donnée par l'homomorphisme  $\Lambda \xrightarrow{\pi} A \xrightarrow{\sim} \text{Pic}^0((A^{\text{alg}})^t)$ . On a écrit  $(A^{\text{alg}})^t = \text{Pic}^0(A^{\text{alg}})$  pour la variété duale de  $A$ .

Soit  $[(\mathcal{L}, \alpha)] \in H$ . Alors  $\pi^*\mathcal{L}$  sur  $G$  possède la  $\Lambda$ -linéarisation  $\pi^*\alpha$  et induit ainsi un élément de  $\text{Pic}^0(G/\Lambda)$  noté  $(\pi^*\mathcal{L}, \alpha)/\Lambda$ . Cela définit un homomorphisme  $\sigma : H \rightarrow \text{Pic}^0(G/\Lambda)$ , qui est surjectif, car il résulte de

(1.5.4) et (1.6.5) le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 T_\Lambda & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}om(\Lambda, K^*) & & \\
 \cap & & \downarrow & & \\
 H & \xrightarrow{\sigma} & \text{Pic}^0(G/\Lambda) & \longrightarrow & \text{Pic}^0(G)
 \end{array}$$

Le sous-groupe  $\Lambda$  de  $G$  induit une action de  $\Lambda$  sur les  $\mathcal{O}_x$ , notée  $\alpha_x$ . On vérifie que pour tout  $x$   $\pi^*\mathcal{O}_x \simeq \mathcal{O}_G$  et que cet isomorphisme est compatible avec les actions de  $\Lambda$ , donc  $(\pi^*\mathcal{O}_x, \alpha_x)/\Lambda \simeq \mathcal{O}_{G/\Lambda}$ . On a donc une suite nulle  $X(T) \rightarrow H \xrightarrow{\sigma} \text{Pic}^0(G/\Lambda)$ . L'homomorphisme  $X(T) \rightarrow H$  est injectif parce que  $\Lambda$  est un sous-groupe de  $G$ , son image (toujours notée  $X(T)$ ) est un réseau de  $H$  puisque  $\Lambda$  est un réseau de  $G$ . Montrons que  $\ker \sigma \subset X(T)$ . Soit  $[(\mathcal{L}, \alpha)] \in \ker \sigma$ , alors  $(\mathcal{L}, \alpha) \sim (\mathcal{O}_x, c\alpha_x)$  pour un certain  $x \in X(T)$  et un certain homomorphisme  $c: \Lambda \rightarrow K^*$ . Le faisceau  $\pi^*\mathcal{L}$  est engendré par une section  $\Lambda$ -invariante, dont il existe  $y \in \ker \tau \subset X(T)$  (cf. (1.6.5)) avec  $c(\lambda) = y(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ . Donc  $(\mathcal{L}, \alpha) \sim (\mathcal{O}_{x+y}, \alpha_{x+y})$ . On a donc prouvé l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow H \longrightarrow \text{Pic}^0(G/\Lambda) \longrightarrow 0$$

$X(T)$  étant un réseau de  $H$ , il en résulte une structure de variété abéloïde sur  $\text{Pic}^0(G/\Lambda)$ .

Supposons maintenant que  $G/\Lambda$  soit une variété abélienne. Il faut comparer les structures analytiques de  $H/X(T)$  et de l'analytifié de  $\text{Pic}^0((G/\Lambda)^{\text{alg}})$ . Pour cela il est nécessaire de construire un faisceau inversible  $\mathcal{U}$  sur  $(G/\Lambda) \times H$  tel que pour tout  $h = [(\mathcal{L}, \alpha)] \times H$ , la fibre  $\mathcal{U}_h$  sur  $G/\Lambda$  soit isomorphe à  $(\pi^*\mathcal{L}, \alpha)/\Lambda$ . Cette construction est pénible et trop longue pour être donnée ici. La propriété universelle du faisceau de Poincaré s'étend à la catégorie des espaces analytiques ([B-L, proposition 1.1]). Il en résulte que  $H \rightarrow \text{Pic}^0((G/\Lambda)^{\text{alg}})$  est un morphisme d'espaces analytique, localement un isomorphisme. La division par  $X(T)$  donne l'isomorphisme d'espaces analytiques  $H/X(T) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}^0((G/\Lambda)^{\text{alg}})$ .

**(3.7) Une formule pour la dimension de  $H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_{nE})$ .** — On se met dans la situation du THÉORÈME (2.1) avec  $D, \varphi$  et les propriétés (i), (ii) et (iii). Soit  $E$  le diviseur de  $G/\Lambda$  défini par  $q^*E \sim \pi^*D$  (cf. (2.4)). Alors, pour tout entier  $n > 0$ :

$$\dim H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_{nE}) = n^{(\dim G/\Lambda)} \cdot (\#X(T)/\varphi(\Lambda)) \cdot \dim H^0(A, \mathcal{O}_D).$$

En effet,  $\Theta^n H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_{nE})$  est le sous espace des  $f \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D}^n)$  ayant la propriété

$$h(\lambda)(g)^n f(\lambda g) = f(g).$$

Soit  $Y$  un ensemble de représentants de  $X(T)/n\varphi(\Lambda)$ , alors un tel  $f$  s'écrit

$$\sum_{y \in Y} \sum_{\lambda \in \Lambda} h(\lambda)(g)^n f_y(\lambda g)$$

où  $f_y \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D}^n)_y$  pour tout  $y \in Y$ . Ensuite  $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D}^n)_y \cong H^0(A, \mathcal{O}_y \otimes \mathcal{O}_D^n) \cong H^0(A, \mathcal{O}_D^n)$  parce que  $\mathcal{O}_D$  est ample. Cela montre la formule.

(3.8) *Remarque.* — Le THÉORÈME (2.1) et presque tout le paragraphe 1 ne sont plus valables si la variété abélienne  $A$  n'a pas bonne réduction. La définition même d'un réseau de  $G$  pose un problème dans ce cas là.

## BIBLIOGRAPHIE

- [B-G-R] BOSCH (S.), GÜNTZER (U.) and REMMERT (R.). — *Non archimedean analysis.* — Springer Verlag, 1984.
- [B-L] BOSCH (S.) and LÜTKEBOHMERT (W.). — Stable reductions and uniformization of abelian varieties II, *Invent. Math.*, t. **78**, 1984, p 257-297.
- [C] CHAI (C.L.). — Compactification of Siegel Moduli Schemes, *London Math. Soc., L.N.* **107**, Cambridge University Press, 1985 .
- [F] FALTINGS (G.). — Arithmetische Kompaktifizierung des Modulraums der abelschen Varietäten, *Lecture Notes in Math.* **1111**, Springer Verlag, 1984 .
- [F-vdP1] FRESNEL (J.) et VAN DER PUT (M.). — Géométrie analytique rigide et applications, *Progr. Math.*, vol. **18**, Birkhäuser, 1981.
- [F-vdP2] FRESNEL (J.) et VAN DER PUT (M.). — Localisation formelle et groupe de Picard, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, t. **33**, 1983, p 19-82.
- [G1] GERRITZEN (L.). — On non-archimedean representations of abelian varieties, *Math. Ann.*, t. **169**, 1972, p 323-346.
- [G2] GERRITZEN (L.). — Zerlegungen der Picard-Gruppe nichtarchimedischer holomorpher Räume, *Compositio Math.*, t. **35**, 1977, p 23-38.

- [G–G] GERRITZEN (L.) und GRAUERT (H.). — Die Azyklicität der affinoide Überdeckungen. Global Analysis Papers in honour of Kodaira. *Univ. of Tokyo Press*, 1969, edited by D. C. SPENCER and S. YANAGA.
- [G–vdP] GERRITZEN (L.) and VAN DER PUT (M.). — Schottky groups and Mumford curves, *Lecture Notes in Math.*, **817**, Springer Verlag, 1980.
- [Gr] GRUSON (L.). — Fibrés vectoriels sur un polydisque ultramétrique, *Ann. Sci. École Norm. Sup* (4), t. **1**, 1968, p 45–89.
- [H] HARTSHORNE (R.). — *Algebraic geometry*. — Springer Verlag, 1977.
- [H–vdP] HEINRICH (E.) und VAN DER PUT (M.). — Über die Picardgruppen affinoider Algebren, *Math. Z.*, t. **186**, 1984, p 9–28.
- [K] KIEHL (R.). — Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, *Invent. Math.*, t. **2**, 1967, p 191–214.
- [Kö] KÖPF (U.). — Über eigentliche Familien algebraischer. Varietäten über affinoiden Räumen, *Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster Ser. 2*, t. **7**, 1974.
- [M1] MUMFORD (D.). — *Abelian varieties*. — Oxford University Press, 1974.
- [M2] MUMFORD (D.). — An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings, *Compositio Math.*, t. **24**, 1972, p 239–272.
- [O–vdP] OORT (F.) and VAN DER PUT (M.). — A construction of simple abelian varieties, *Compositio Math.*, t. **67**, n° **1**, 1988, p 103–120.
- [vdP1] VAN DER PUT (M.). — Cohomology on affinoid spaces, *Compositio Math.*, t. **45**, 1982, p 165–198.
- [vdP2] VAN DER PUT (M.). — A note on  $p$ -adic uniformization, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, t. **49** n° **3**, 1987, p 313–318.
- [R] RAYNAUD (M.). — Variétés abéliennes et géométrie rigide, *Actes, Congrès Inter. Math.*, t. **1**, 1970, p 473–477.
- [W] WEIL (A.). — On the projective embedding of abelian varieties, [Algebraic geometry and Topology], an honor of S. Lefschetz, p. 177–181, *Princeton Univ. Press*, 1967 et [Œuvres Scientifiques], vol. **II**, p. 175, Springer Verlag, second printing, 1980.