BULLETIN DE LA S. M. F.

GUY DIAZ

Généralisation d'un résultat de W. D. Brownawell-M. Waldschmidt

Bulletin de la S. M. F., tome 117, nº 3 (1989), p. 267-283

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_3_267_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 267–283.

GÉNÉRALISATION D'UN RÉSULTAT DE W. D. BROWNAWELL–M. WALDSCHMIDT

par

GUY DIAZ (*)

RÉSUMÉ. — On améliore la minoration du degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ de la famille $\{u_i, v_j, \exp(u_i v_j); i, j\}$ obtenue par P. PHILIPPON [8] ou Y. NESTERENKO [7] lorsque l'on suppose que certains des $\exp(u_i v_j)$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$. On généralise ainsi aux "grands degrés" de transcendance un résultat obtenu en 1973 par W. D. BROWNAWELL–M. WALDSCHMIDT, qui leur permettait de résoudre le 8e problème de Schneider.

ABSTRACT. — We improve lower bounds obtained by P. PHILIPPON [8] and Y. NESTERENKO [7] for the transcendence degree over $\mathbb{Q}$ of the family $\{u_i, v_j, \exp(u_i v_j); i, j\}$, when some of the $\exp(u_i v_j)$ are algebraic numbers. This gives a generalization of a result of W. D. BROWNAWELL–M. WALDSCHMIDT.

1. Introduction

En 1973, W. D. BROWNAWELL dans [1] et M. WALDSCHMIDT dans [12] démontrent séparément le résultat suivant :

Soient (x_1, x_2), (y_1, y_2) *deux couples de nombres complexes linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$ *; si les deux nombres* $\exp(x_1 y_2)$, $\exp(x_2 y_2)$ *sont algébriques alors au moins deux des nombres* x_1, x_2, y_1, y_2, $\exp(x_1 y_1)$, $\exp(x_2 y_1)$ *sont algébriquement indépendants.*

Ils en déduisent la solution du 8e problème de Schneider.

Nous allons obtenir ici une généralisation de ce théorème dans la lignée de résultats antérieurs et par la même méthode (voir [4] par exemple). Le but est d'obtenir un corps de "grand" degré de transcendance et, comme toujours, il faut introduire une hypothèse technique qui n'apparaissait pas chez W. D. BROWNAWELL–M. WALDSCHMIDT.

(*) Texte reçu le 25 février 1988, révisé le 6 juillet 1988.

G. DIAZ, Université de Saint-Étienne, Département de Mathématiques, 23 rue du Docteur-Paul-Michelon, 42023 Saint-Étienne Cedex 2, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/1989/267/$ 5.00

Le résultat est le suivant :

THÉORÈME. — *Soient* $(u_1, \ldots, u_n)$, $(v_1, \ldots, v_m)$ *deux familles de nombres complexes linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$ *; on suppose que les nombres* $\exp(u_1 v_m), \ldots, \exp(u_n v_m)$ *sont algébriques et que* $(v_1, \ldots, v_m)$ *vérifie l'hypothèse technique suivante :* (HT) *il existe* $X(v) > 0$ *tel que pour tout* $(\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{Z}^m$ *non nul et tout* $X > X(v)$ *on ait :*

$$\Big|\sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i\Big| \geq \exp(-X) \quad \textit{dès que} \quad \max_i |\mu_i| \leq X.$$

Alors :

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\big(u_i, v_j, \exp(u_i v_j)\,;\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\big) \geq \Big[\frac{mn}{m+n}\Big] + 1.$$

Rappelons que sans l'hypothèse d'algébricité sur certains des $\exp(u_i v_j)$, et, avec une hypothèse technique portant sur les u_i et les v_j, on sait que (voir [7], [8] par exemple) :

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\big(u_i, v_j, \exp(u_i v_j)\,;\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\big) \geq \frac{mn}{m+n}\cdot$$

Le théorème obtenu ici ne constitue donc qu'une amélioration mineure de ce résultat là; cependant la raison pour laquelle il y a amélioration semble intéressante sur le plan technique. On va utiliser une fonction auxiliaire $F(z) = P(z, \exp(u_1 z), \ldots, \exp(u_n z))$, $P \in \mathbb{C}[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ ayant des degrés partiels en $X_1, \ldots, X_n$ uniformément majorés, et calculer ses dérivées en les points $\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_m$, $(\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{Z}^m$; on constate alors que, compte tenu des hypothèses, le paramètre μ_m ne joue pas le même rôle que $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$ et c'est cette différence que l'on va exploiter (cette idée se trouve déjà dans [1], [12]). Il est aussi possible d'utiliser une fonction auxiliaire $F(z) = Q(z, \exp(v_1 z), \ldots, \exp(v_m z))$ $Q \in \mathbb{C}[X_0, X_1, \ldots, X_m]$ ayant un degré partiel en X_m distinct des degrés partiels en $X_1, \ldots, X_{m-1}$, et de considérer les dérivées de cette fonction en les points $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ (voir [11, p. 203] par exemple).

La démonstration est de même nature que celles de [4], il a simplement fallu raffiner la formule d'extrapolation et le lemme de zéros; celui ci est de même nature que le LEMME 3.1 de [13] et sa démonstration est rédigée dans [5]. Nous utiliserons le même découpage de l'action que dans [4] par exemple, et nous ne détaillerons pas les calculs (le lecteur intéressé trouvera tous les détails dans [3]).

2. Premier pas de la démonstration : la construction

2.1. Préliminaires. — Les données sont celles du théorème ; on suppose de plus $m \geq 2$, le cas $m = 1$ étant connu.

Notations. — On note :

$$\begin{aligned}
u &= (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n, \quad v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{C}^m, \\
w &= \big(e^{u_1 v_1}, \dots, e^{u_1 v_{m-1}}, \dots, e^{u_n v_1}, \dots, e^{u_n v_{m-1}})\big) \in \mathbb{C}^{n(m-1)}, \\
\theta &= (u, v, w) \in \mathbb{C}^{n+m+n(m-1)}.
\end{aligned}$$

On représente par :

$$\begin{aligned}
&U \text{ la variable } (U_1, \dots, U_n), \quad V \text{ la variable } (V_1, \dots, V_m), \\
&W \text{ la variable } (W_{1,1}, \dots, W_{1,m-1}, \dots, W_{n,1}, \dots, W_{n,m-1}), \\
&Y \text{ la variable } (Y_1, \dots, Y_n).
\end{aligned}$$

Pour $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ élément de $\mathbb{Z}^n$ on note $|\lambda| = \max_i |\lambda_i|$ et

$$\lambda! = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i! \,; \quad \lambda u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \,; \quad \lambda U = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i \,; \quad Y^\lambda = \prod_{i=1}^{n} Y_i^{\lambda_i}.$$

Pour $\ell \in \mathbb{N}$ et $S \in \mathbb{R}$ on pose :

$$\mathbb{N}^\ell(S) = \{\lambda \in \mathbb{N}^\ell \,;\ |\lambda| < S\}.$$

Pour deux entiers t, d on note $t \wedge d$ le plus petit des deux. Le corps de nombres $\mathbb{Q}(\exp(u_i v_m)\,;\ 1 \leq i \leq n)$ est noté K. Dans la suite $c_1, c_2, \dots$ sont des réels positifs ne dépendant que des données u, v.

Le point de départ. Soient D, L deux entiers ≥ 1. Soit $F(z) = P(z, \exp(u_1 z), \dots, \exp(u_n z))$ où P est un polynôme de la forme

$$P(Y_0, Y) = \sum_{d<D} \sum_{|\lambda|<L} p_{d\lambda} Y_0^d Y^\lambda,$$

avec $p_{d\lambda} = P_{d\lambda}(\theta)$ et $P_{d\lambda} \in \mathbb{Z}[U, V, W]$.

Les nombres $F^{(t)}(\mu v)$ ($\mu \in \mathbb{N}^m$) sont des expressions polynômiales en θ que l'on explicite. On introduit pour cela les deux familles de polynômes de $K[U,V,W]$:

$$R_{d\lambda t\mu}(U,V,W) = \left[\sum_{\tau=0}^{t\wedge d} \binom{t}{\tau} \frac{d!}{(d-\tau)!} (\lambda U)^{t-\tau} (\mu V)^{d-\tau}\right] \times \left[\prod_{h=1}^{n} \prod_{k=1}^{m-1} W_{hk}^{\lambda_h \mu_k}\right] e^{(\lambda u)\mu_m v_m}$$

$$Q_{t\mu}(U,V,W) = \sum_{d<D} \sum_{|\lambda|<L} P_{d\lambda}(U,V,W) R_{d\lambda t\mu}(U,V,W).$$

Avec ces notations, on vérifie que pour tout $t \in \mathbb{N}$, tout $\mu \in \mathbb{N}^m$: $F^{(t)}(\mu v) = Q_{t\mu}(\theta)$. C'est de cette constatation que tout découle.

2.2. Premier pas : la construction. — Soient D, L, M_1, M_2, T des entiers ≥ 1. Dans la définition des polynômes $R_{d\lambda t\mu}$ on voit que les $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$ et μ_m ne jouent pas le même rôle, les premiers apparaissant comme exposants des variables W_{hk}, μ_m lui n'apparaissant que dans les coefficients. C'est pour tenir compte de cette différence que l'on introduit deux paramètres M_1 et M_2 : M_1 majorera les entiers $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$, M_2 majorera l'entier μ_m. On notera $M = \max(M_1, M_2)$.

Pour simplifier, on notera $|\mu| < (M_1, M_2)$ la condition suivante, où $\mu \in \mathbb{N}^m$:

$$\mu_h < M_1 \text{ pour } 1 \leq h \leq m-1, \quad \mu_m < M_2.$$

Remarquons que pour $0 \leq t < T$ et $|\mu| < (M_1, M_2)$ les degrés partiels des polynômes $R_{d\lambda t\mu}$ en les U_h (resp. les V_k, resp. les W_{hk}) sont majorés par T (resp. D, resp. LM_1). Il n'y a donc pas d'inconvénient à imposer aux polynômes $P_{d\lambda}$ ces mêmes contraintes sur les degrés partiels.

Le lemme de SIEGEL [6, LEMME 4] montre l'existence d'une famille de polynômes de $\mathbb{Z}[U,V,W]$, non tous nuls, $\{P_{d\lambda}\ ;\ 0 \leq d < D, \lambda \in \mathbb{N}^n(L)\}$ de degrés partiels en les U_h (resp. les V_k, resp. les W_{hk}) strictement plus petits que T (resp. D, resp. LM_1) et telle que l'on ait : $Q_{t\mu}(U,V,W) = 0$ pour tout t avec $0 \leq t < T$, tout $\mu \in \mathbb{N}^m$ avec $|\mu| < (M_1, M_2)$. Il suffit pour cela que les paramètres vérifient la contrainte

(C1) $$DL^n \geq 2^{1+n+m+n(m-1)} [K:\mathbb{Q}]\, T M_1^{m-1} M_2.$$

On peut de plus majorer la hauteur naïve des polynômes $P_{d\lambda}$ ainsi construits par :

(1) $$\log \max_{d,\lambda} H(P_{d\lambda}) \leq c_1 \Big[T \log L + D \log M + (D \wedge T) \log D + LM_2\Big].$$

3. Deuxième pas : Modification des polynômes $P_{d\lambda}$, $Q_{t\mu}$

3.1. Définition des $P_{d\lambda j}$, $Q_{t\mu j}$. — La définition de ces nouveaux polynômes est exactement la même que dans [4] ; on la rappelle pour plus de commodité. Notons :

$$\mathcal{D} = \{(d,\lambda)\,;\; 0 \le d < D,\ |\lambda| < L,\ P_{d\lambda} \neq 0\}\,;$$

cet ensemble est non vide par construction. On va utiliser des indices de dérivation $j \in \mathbb{N}^{n+m+n(m-1)}$ que l'on notera :

$$j = (j'_1, \dots, j'_n, j''_1, \dots, j''_m, j_{1,1}, \dots, j_{1,m-1}, \dots, j_{n,1}, \dots, j_{n,m-1})\,;$$

$j!$ sera le produit des factorielles des composantes de j et $D^j P_{d\lambda}$ sera le polynôme dérivé naturellement associé à j.

Fixons un point $\tilde\theta \in \mathbb{C}^{n+m+n(m-1)}$. Pour tout $(d,\lambda) \in \mathcal{D}$ le polynôme $P_{d\lambda}$ est non nul et donc il existe un indice $j \in \mathbb{N}^{n+m+n(m-1)}$ tel que $D^j P_{d\lambda}(\tilde\theta)$ soit non nul; on peut même ajouter que $|j|$ est majoré par le plus grand des degrés partiels de $P_{d\lambda}$ et donc *a fortiori* par $T + D + LM$. Donc l'ensemble $J(\tilde\theta)$ suivant est fini, non vide :

$$J(\tilde\theta) = \bigcup_{(d,\lambda)\in\mathcal{D}} \Big\{ j \in \mathbb{N}^{n+m+n(m-1)}\,;\; D^j P_{d\lambda}(\tilde\theta) \neq 0 \Big\}.$$

La fonction longueur

$$L(j) = \sum_{h=1}^{n} j'_h + \sum_{k=1}^{m} j''_k + \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{m-1} j_{h,k}$$

atteint alors son minimum sur $J(\tilde\theta)$ en un indice (non nécessairement unique) noté $j(\tilde\theta)$. Par définition donc :

- un des $P_{d\lambda}$ a sa dérivée d'indice $j(\tilde\theta)$ non nulle en $\tilde\theta$
- pour tout indice $i \in \mathbb{N}^{n+m+n(m-1)}$, avec $L(i) < L(j(\tilde\theta))$, et tout $P_{d\lambda}$ on a : $D^i P_{d\lambda}(\tilde\theta) = 0$.

On introduit alors un nouveau paramètre $\rho > 0$; et on note $\mathcal{B}_\rho$ la boule de $\mathbb{C}^{n+m+n(m-1)}$ (pour la norme du max) de centre θ et de rayon $\exp(-\rho)$. On pose :

- $J_\rho = \{j(\tilde\theta)\,;\; \tilde\theta \in \mathcal{B}_\rho\}$;
- pour tout (d,λ,j), $(d < D,\ |\lambda| < L,\ j \in J_\rho)$:

$$P_{d\lambda j}(U,V,W) = \frac{1}{j!} D^j P_{d\lambda}(U,V,W)\,;$$

- pour tout (t,μ,j), $(t \in \mathbb{N},\ \mu \in \mathbb{N}^m,\ j \in J_\rho)$:

$$Q_{t\mu j}(U,V,W) = \sum_{d<D} \sum_{|\lambda|<L} P_{d\lambda j}(U,V,W) R_{d\lambda t\mu}(U,V,W).$$

On introduit deux nouveaux paramètres entiers M_1', M_2' pour effectuer l'extrapolation (passage de M_1 à M_1', M_2 à M_2') ; on leur impose donc :

$$\text{(C2)} \qquad M_1' \geq M_1\ ; \quad M_2' \geq M_2.$$

On notera M' le plus grand des entiers M_1', M_2'. Et pour $\mu \in \mathbb{N}^m$, on notera $|\mu| < (M_1', M_2')$ pour signifier que :

$$\mu_j < M_1' \quad \text{pour } j = 1, \ldots, m-1, \quad \mu_m < M_2'.$$

On s'intéresse dorénavant à la famille

$$\{Q_{t\mu j}\ ;\ t < T,\ |\mu| < (M_1', M_2'),\ j \in J_\rho\}.$$

On va montrer, sous des contraintes *ad hoc*, que cette famille vérifie les hypothèses nécessaires à l'application du critère d'indépendance algébrique de P. PHILIPPON (voir [8]).

3.2. Majoration de $|Q_{t\mu j}(\theta)|$. — Dans tous ce paragraphe (3.2) l'indice $j \in J_\rho$ est fixé. On fixe aussi un point $\tilde{\theta} \in \mathcal{B}_\rho$ tel que l'on ait : $j = j(\tilde{\theta})$. Sachant que $Q_{t\mu j} = \sum_d \sum_\lambda P_{d\lambda j} R_{d\lambda t\mu}$ on peut majorer de la façon suivante :

$$|Q_{t\mu j}(\theta)| \leq A_{t\mu j} + B_{t\mu j}$$

avec

$$A_{t\mu j} = \Big| \sum_{d<D} \sum_{|\lambda|<L} \big(P_{d\lambda j}(\theta) - P_{d\lambda j}(\tilde{\theta})\big) R_{d\lambda t\mu}(\theta) \Big|,$$

$$B_{t\mu j} = \Big| \sum_{d<D} \sum_{|\lambda|<L} P_{d\lambda j}(\tilde{\theta}) R_{d\lambda t\mu}(\theta) \Big|.$$

On utilisera le lemme suivant, dont la vérification est laissée au lecteur.

LEMME. — *Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_q]$, de degré total* $\deg(P)$, *tout couple $x = (x_1, \ldots, x_q)$, $x' = (x_1', \ldots, x_q')$ d'éléments de $\mathbb{C}^q$ vérifiant $|x_i - x_i'| \leq 1$ pour tout i, on a :*

$$\big|P(x) - P(x')\big| \leq \max_i |x_i - x_i'| H(P) c(x)^{\deg(P)}$$

où $c(x) \geq 1$ ne dépend que de x.

3.2. a) Majoration de $A_{t\mu j}(t < T\,;\ |\mu| < (M_1', M_2')\,;\ j \in J_\rho)$. Des hypothèses faites sur les polynômes $P_{d\lambda}$ et de (1) il résulte :

(2) $\deg(P_{d\lambda j}) \leq \deg(P_{d\lambda}) < nT + mD + nmLM_1$

(3) $\log \max\limits_{d,\lambda,j} H(P_{d\lambda j}) \leq c_2\bigl(T \log L + D \log M + (D \wedge T) \log D + LM\bigr)$.

En utilisant le lemme pour majorer $|P_{d\lambda j}(\theta) - P_{d\lambda j}(\tilde{\theta})|$, et en majorant grossièrement $|R_{d\lambda t\mu}(\theta)|$ on obtient, pour $0 \leq t < T$, $|\mu| < (M_1', M_2')$ et $j \in J_\rho$:

(4) $A_{t\mu j} \leq \exp\bigl[-\rho + c_3\bigl((D \wedge T) \log D + T \log L + D \log M' + LM'\bigr)\bigr]$.

3.2. b) Majoration de $B_{t\mu j}$ pour $|\mu| < (M_1, M_2), t < T$. Soit donc $\mu \in \mathbb{N}^m$, $|\mu| < (M_1, M_2)$ et $t < T$; par construction $Q_{t\mu}$ est nul; on en déduit donc en utilisant la définition de $j = j(\tilde{\theta})$:

$$\sum_{d<D} \sum_{|\lambda|<L} P_{d\lambda j}(\tilde{\theta}) R_{d\lambda t\mu}(\tilde{\theta}) = 0\,;$$

cela permet d'écrire :

$$B_{t\mu j} = \Bigl|\sum_{d<D} \sum_{|\lambda|<L} P_{d\lambda j}(\tilde{\theta})\bigl(R_{d\lambda t\mu}(\theta) - R_{d\lambda t\mu}(\tilde{\theta})\bigr)\Bigr|.$$

En revenant à la définition des polynômes $R_{d\lambda t\mu}$ on vérifie que pour tout t, avec $0 \leq t < T$ et tout μ tel que $|\mu| < (M_1, M_2)$ on a :

$$\deg(R_{d\lambda t\mu}) \leq nT + mD + nmLM_1$$
$$H(R_{d\lambda t\mu}) \leq \exp c_4\Bigl(T \log L + D \log M + (D \wedge T) \log D + LM_2\Bigr).$$

On utilise alors le lemme pour majorer $|R_{d\lambda t\mu}(\theta) - R_{d\lambda t\mu}(\tilde{\theta})|$, puis on majore grossièrement $|P_{d\lambda j}(\tilde{\theta})|$. Au total cela donne pour $B_{t\mu j}$, lorsque $t < T$ et $|\mu| < (M_1, M_2)$:

(5) $B_{t\mu j} \leq \exp\bigl[-\rho + c_5\bigl(T \log L + D \log M + (T \wedge D) \log D + LM\bigr)\bigr]$.

3.2. c) Majoration de $B_{t\mu j}$, pour $t < T$, $|\mu| < (M_1', M_2')$.

Il s'agit d'extrapoler (5) de (M_1, M_2) à (M_1', M_2') ce que l'on va faire par un pas analytique. Au couple $(j, \tilde{\theta})$ fixé au début du paragraphe on associe la fonction suivante :

$$\widetilde{F}(z) = \sum_{d<D} \sum_{|\lambda|<L} P_{d\lambda j}(\tilde{\theta}) z^d e^{(\lambda u)z}.$$

On vérifie d'abord que pour tout t, et tout $\mu \in \mathbb{N}^m$ on a l'égalité : $|\widetilde{F}^{(t)}(\mu v)| = B_{t\mu j}$.

On peut alors interpréter (5) comme disant que la fonction F prend de petites valeurs en les points μv, $|\mu| < (M_1, M_2)$, jusqu'à l'ordre T. Grâce à une formule d'extrapolation analytique nous allons montrer que cela reste vrai pour tous les points μv avec $|\mu| < (M_1', M_2')$; ce qui donne la majoration des $B_{t\mu j}$ cherchée. On note :

$$\mathcal{E}(M_1, M_2) = \Big\{\mu v \mid \mu \in \mathbb{N}^m,\ \ |\mu| < (M_1, M_2)\Big\},$$
$$\mathcal{E}(M_1', M_2') = \Big\{\mu v \mid \mu \in \mathbb{N}^m,\ \ |\mu| < (M_1', M_2')\Big\} ;$$

$\delta(M_1, M_2)$ sera un minorant plus petit que 1 de la distance de deux points de $\mathcal{E}(M_1, M_2)$. Enfin on pose : $r = c_{12}M'$ avec $c_{12} = 2 + |v_1| + \cdots + |v_m|$; la boule $|z| \leq r$ contient les parties $\mathcal{E}(M_1, M_2)$, $\mathcal{E}(M_1', M_2')$ et, pour tout point $\omega \in \mathcal{E}(M_1', M_2')$, le disque de centre ω et de rayon 1. On introduit un dernier paramètre réel R auquel on impose (C3) : $4r < R$. On notera $\mathcal{M}$ le nombre d'éléments de $\mathcal{E}(M_1, M_2)$: $\mathcal{M} = M_1^{m-1}M_2$. En utilisant les estimations de [2, Lemme 6] dans la preuve de [10, Lemme 4.5] on obtient la formule d'extrapolation suivante :

$$|\widetilde{F}|_r \leq 2|\widetilde{F}|_R\Big(\frac{4r}{R}\Big)^{T\mathcal{M}} + \mathcal{M}\Big(\frac{18r}{M_2|v_m|}\Big)^{\mathcal{M}T}\Big(\frac{|v_m|}{2\delta(M_1, M_2)}\Big)^{TM_1^{m-1}} \max_{\substack{\omega\in\mathcal{E}(M_1, M_2)\\ 0\leq t<T}} \Big|\frac{\widetilde{F}^{(t)}(\omega)}{t!}\Big|$$

Une majoration grossière de $|\widetilde{F}|_R$ donne :

$$|\widetilde{F}|_R \leq \exp c_6(T\log L + D\log R + (D \wedge T)\log D + LR).$$

• La formule d'extrapolation s'écrit alors, en utilisant (5) pour majorer les $|\widetilde{F}^{(t)}(\mu v)| = B_{t\mu j}$:

$$(6) \qquad |\widetilde{F}|_r \leq \exp\Big[-T\mathcal{M}\log\Big(\frac{R}{4r}\Big)$$

$$+ c_7\big(T\log L + (D\wedge T)\log D + LR + D\log R\big)\Big]$$
$$+\exp\Big[-\rho + c_8\Big(T\log L + D\log M + (D\wedge T)\log D + LM\Big)$$
$$+\mathcal{M}T\log\Big(c_9\frac{M'}{M_2}\Big) + TM_1^{m-1}\log\Big(\frac{c_{10}}{\delta(M_1,M_2)}\Big)\Big].$$

• Pour tout $\omega \in \mathcal{E}(M_1',M_2')$ et tout ordre de dérivation t, la formule de Cauchy donne :

$$\big|\widetilde{F}^{(t)}(\omega)\big| \le t!\,\big|\widetilde{F}\big|_r.$$

Et comme $|\widetilde{F}^{(t)}(\mu v)|$ est égal à $B_{t\mu j}$ on obtient finalement pour $t < T$, $|\mu| < (M_1', M_2')$:

$$B_{t\mu j} \le t!\,\big|\widetilde{F}\big|_r \le T^T\big|\widetilde{F}\big|_r. \tag{7}$$

Compte tenu de (6) on a donc la majoration de $B_{t\mu j}$ attendue.

3.2 d) Retour à $|Q_{t\mu j}(\theta)|$. — Compte tenu de l'hypothèse technique (HT) on peut prendre $\delta(M_1,M_2) = \exp(-M)$. Puisque l'on a l'inégalité $|Q_{t\mu j}(\theta)| \le A_{t\mu j} + B_{t\mu j}$, (4) et (7) permettent alors de majorer $|Q_{t\mu j}(\theta)|$ pour $t < T$, $|\mu| < (M_1', M_2')$:

$$\begin{aligned}(8)\qquad &|Q_{t\mu j}(\theta)| \le \\ &\exp\Big[-\rho + c_3\big((D\wedge T)\log D + T\log L + D\log M' + LM'\big)\Big] \\ &\quad+\exp\Big[-T\mathcal{M}\log\Big(\frac{R}{4r}\Big) + T\log T \\ &\qquad+ c_7\big((D\wedge T)\log D + T\log L + LR + D\log R\big)\Big] \\ &\qquad\quad+\exp\Big[-\rho + T\log T + TM_1^{m-1}M \\ &+ c_{11}\Big\{(D\wedge T)\log D + T\log L + D\log M + LM + \mathcal{M}T\log\Big(\frac{M'}{M_2}\Big)\Big\}\Big].\end{aligned}$$

Cela fournit trois contraintes suffisantes pour que la majoration (8) donne un "petit" majorant ; il suffit d'imposer :

$$2c_3\Big(T\log L + D\log M' + (D\wedge T)\log D + LM'\Big) \le \rho, \tag{C4}$$

$$\begin{aligned}(C5)\qquad &2T\log T + 2c_7\Big(T\log L + D\log R + (D\wedge T)\log D + LR\Big) \\ &\qquad\le T\mathcal{M}\log\Big(\frac{R}{4r}\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(C6)\qquad &2T\log T + 2c_{11}\Big(T\log L + D\log M + (D\wedge T)\log D + LM \\ &\qquad+\mathcal{M}T\log\Big(\frac{M'}{M_2}\Big)\Big) + 2TM_1^{m-1}M \le \rho.\end{aligned}$$

Sous ces contraintes (8) devient :

$$(8\text{bis}) \qquad \left|Q_{t\mu j}(\theta)\right| \leq 2\exp\Big(-\frac{1}{2}\rho\Big) + \exp\Big(-\frac{1}{2}\mathcal{M}T\log\frac{R}{4r}\Big).$$

Rappelons que $\mathcal{M} = M_1^{m-1}M_2$. Il est à noter que le majorant ci-dessus dépend des paramètres (M_1', M_2') par l'intermédiaire de r et R.

3.3. Majoration du degré et de la hauteur des $Q_{t\mu j}$.
On se donne t, μ, j vérifiant : $0 \leq t < T$, $|\mu| < (M_1', M_2')$, $j \in J_\rho$. Les degrés partiels des polynômes $Q_{t\mu j}$ sont majorés par $2T$ en U_h, $2D$ en V_k, $2LM_1'$ en W_{hk} ; donc :

$$(9) \qquad \deg(Q_{t\mu j}) \leq c_{12}\big(T + D + LM_1'\big).$$

Rappelons que les polynômes $Q_{t\mu j}$ sont à coefficients dans le corps K et qu'il nous faut majorer la hauteur logarithmique absolue h de ces polynômes (pour la définition et les propriétés de cette hauteur voir [8] où elle est notée $\bar{\mathbf{h}}$). Un calcul sans difficulté permet d'obtenir :

$$(10) \qquad h(Q_{t\mu j}) \leq c_{13}\Big[T\log L + D\log M' + (D\wedge T)\log D + LM'\Big].$$

3.4. Les polynômes $Q_{t\mu j}(t < T, |\mu| < (M_1', M_2'), j \in J_\rho)$ n'ont pas de zéro commun dans $\mathcal{B}_\rho$. — On établit ceci à l'aide d'un lemme de zéros géométrique que l'on va d'abord énoncer.

3.4. a) Le lemme de zéros. — On trouvera la démonstration de ce lemme dans [4] ; elle est de même nature que les démonstrations de [13], dont on garde les notations pour faciliter les comparaisons ; l'ingrédient essentiel est le lemme de zéros général de P. PHILIPPON, [9, THÉORÈME 2.1].

Les données. — Ce sont :

- α) Des entiers $d \geq 1$, $\ell \geq 2$, $T_1 \geq 0$ et des réels positifs S, S', V, D_0, D_1, R. On note :

$$S_1 = \frac{S}{d+1}, \quad S_1' = \frac{S'}{d+1}, \quad T = (d+1)T_1 + 1.$$

- β) Un polynôme $P \in \mathbb{C}[X_0, X_1, \ldots, X_d]$.
- γ) Cinq familles de nombres complexes $(x_1, \ldots, x_d)$, $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_d)$, $(y_1, \ldots, y_\ell)$, $(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_\ell)$, $\{z_{ij} \mid 1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq \ell\}$.

Notations.

• a) Sur $\mathbb{C}[X_0, X_1, \ldots, X_d]$ on note Δ la dérivation définie par :

$$\Delta X_0 = 1, \quad \Delta X_i = \tilde{x}_i X_i \qquad \text{pour} \quad 1 \le i \le d.$$

• b) On note G le groupe algébrique $\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m^d$. On définit $\widetilde{\gamma}_1, \ldots, \widetilde{\gamma}_\ell$ éléments de G en posant :

$$\widetilde{\gamma}_j = \big(\tilde{y}_j, \exp(z_{1j}), \ldots, \exp(z_{dj})\big).$$

On note $\widetilde{\Gamma}$ le sous-groupe de G engendré par $\widetilde{\gamma}_1, \ldots, \widetilde{\gamma}_\ell$, et $\widetilde{\Gamma}(S_1, S_1')$ la partie de $\widetilde{\Gamma}$ suivante :

$$\widetilde{\Gamma}(S_1, S_1') = \Big\{ h_1\tilde{\gamma}_1 + \cdots + h_\ell\tilde{\gamma}_\ell \mid h_1, \ldots, h_\ell \in \mathbb{N},\\ h_j \le S_1 \text{ si } 1 \le j \le \ell - 1,\ h_\ell \le S_1' \Big\}.$$

On montre alors que :

LEMME DE ZÉROS. — *Sous les hypothèses* (H1), (H2), (H3), (H4) *suivantes :*

(H1) $\quad (d+1)!\, D_0 D_1^d \le T_1 S_1^{\ell-1} S_1' \quad \text{et} \quad (d+1) D_1 \le T_1 S_1^{\ell-3} S_1'$;

$$\text{(H2)} \quad \begin{cases} D_0 \ge 1,\ D_1 \ge 1,\ S_1' \ge 1,\ S_1 > 1, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{d} |\tilde{x}_i - x_i| < \exp(-V),\ \sum_{j=1}^{\ell} |\tilde{y}_j - y_j| < \exp(-V), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{\ell} |x_i y_j - z_{ij}| < \exp(-V), \\ \displaystyle\max\Big\{1 ;\ |y_1| ;\ |x_1| ;\ \Big|\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{\ell} z_{ij}\Big|\Big\} \le R ; \end{cases}$$

(H3) $\begin{cases} \textit{P est non nul, de degré en } X_0 \le D_0\textit{, de degré en} \\ X_i\ (1 \le i \le d) \textit{ plus petit que } D_1 \textit{ et pour tout entier} \\ t \in [0, T[\textit{ le polynôme } \Delta^t P \textit{ s'annule en tous les points} \\ \textit{de } \widetilde{\Gamma}(S, S') ; \end{cases}$

(H4) $\quad S_1' \le S_1^2$;

il existe $a \in \mathbb{Z}^d$ non nul, $b \in \mathbb{Z}^\ell$ non nul, tels que l'on ait :

$$|a| \le d^3 R D_1^2 \max(S_1, S_1')$$
$$|b| \le d^3 R D_1 \max(S_1, S_1')^2$$
$$|ax| \times |by| \le d^3 R D_1^2 \max(S_1, S_1')^2 e^{-V}.$$

3.4. b) Application du lemme de zéros. — On fixe un point $\tilde{\theta}$ de la boule $\mathcal{B}_\rho$ et on note $j = j(\tilde{\theta})$; on veut montrer que l'un des polynômes $Q_{t\mu j}(t < T, |\mu| < (M_1', M_2'))$ est non nul en $\tilde{\theta}$. On note :

$$\tilde{\theta} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}), \quad \tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n), \quad \tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m),$$
$$\tilde{w} = (\tilde{w}_{1,1}, \dots, \tilde{w}_{1,m-1}, \dots, \tilde{w}_{n,1}, \dots, \tilde{w}_{n,m-1}).$$

Par hypothèse on a $\|\theta - \tilde{\theta}\| \leq \exp(-\rho)$ et donc $|\tilde{w}_{hk} - e^{u_h v_k}| \leq \exp(-\rho)$; en supposant ρ assez grand on peut mettre chaque $\tilde{w}_{hk}$ sous la forme $\exp(z_{hk})$ avec z_{hk} proche de $u_h v_k$, par exemple :

$$|z_{hk} - u_h v_k| \leq \exp\Big(-\frac{2}{3}\rho\Big), \quad 1 \leq h \leq n, \quad 1 \leq k \leq m-1.$$

Pour simplifier les notations on pose de plus :

$$z_{hm} = u_h v_m, \quad 1 \leq h \leq n.$$

Pour ρ assez grand on a alors :

$$\sum_{h,k} |z_{hk} - u_h v_k| \leq \exp\Big(-\frac{1}{2}\rho\Big).$$

Pour utiliser le lemme de zéros on commence par écrire $Q_{t\mu j}(\tilde{\theta})$ comme valeur d'une dérivée $t^{\text{ième}}$ d'un polynôme $\widetilde{P}$ en un point d'un sous-groupe de type fini $\widetilde{\Gamma}$ du groupe algébrique $G = \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m^n$ ($\widetilde{P}, \widetilde{\Gamma}$ vont dépendre du couple $(j, \tilde{\theta})$). L'opérateur de dérivation que l'on va utiliser est l'opérateur Δ défini sur l'anneau $\mathbb{C}[X_0, X_1, \dots, X_n]$ par :

$$\Delta X_0 = 1, \quad \Delta X_i = \tilde{u}_i X_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

On vérifie que :

$$\Delta^t(X_0^d X_1^{\lambda_1} \dots X_n^{\lambda_n}) = \sum_{\tau=0}^{t \wedge d} \binom{t}{\tau} \frac{d!}{(d-\tau)!} (\lambda \tilde{u})^{t-\tau} X_0^{d-\tau} X_1^{\lambda_1} \dots X_n^{\lambda_n}.$$

Introduisons alors le polynôme $\widetilde{P} \in \mathbb{C}[X_0, X_1, \dots, X_n]$:

$$\widetilde{P}(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sum_{d<D} \sum_{|\lambda|<L} P_{d\lambda j}(\tilde{\theta}) X_0^d X_1^{\lambda_1} \dots X_n^{\lambda_n} ;$$

par construction l'un des $P_{d\lambda j}(\tilde{\theta})$ au moins n'est pas nul; donc ce polynôme $\widetilde{P}$ n'est pas nul et on vérifie que :

$$(\Delta^t\widetilde{P}) = \Big(\mu\tilde{v}, \prod_{k=1}^{m} e^{z_{1k}\mu_k}, \dots, \prod_{k=1}^{m} e^{z_{nk}\mu_k}\Big) = Q_{t\mu j}(\tilde{\theta}). \tag{11}$$

On définit les éléments $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_m$ du groupe algébrique G ainsi : $\tilde{\gamma}_i = (\tilde{v}_i, e^{z_{1i}}, \dots, e^{z_{ni}})$, $1 \le i \le m$; en particulier :

$$\tilde{\gamma}_m = (\tilde{v}_m, e^{u_1 v_m}, \dots, e^{u_n v_m})\,;$$

on pose $\widetilde{\Gamma} = \mathbb{Z}\tilde{\gamma}_1 + \dots + \mathbb{Z}\tilde{\gamma}_m$. On a pour tout $\mu \in \mathbb{Z}^m$:

$$\Big(\mu\tilde{v}, \prod_{k=1}^{m} e^{z_{1k}\mu_k}, \dots, \prod_{k=1}^{m} e^{z_{nk}\mu_k}\Big) = \mu_1\tilde{\gamma}_1 + \dots + \mu_m\tilde{\gamma}_m.$$

Et donc on peut écrire (11) ainsi :

$$Q_{t\mu j}(\tilde{\theta}) = (\Delta^t\widetilde{P})\big(\mu_1\tilde{\gamma}_1 + \dots + \mu_m\tilde{\gamma}_m\big). \tag{12}$$

Donc dire que $Q_{t\mu j}(\tilde{\theta})$ est nul pour tout (t,μ), $(t < T, |\mu| < (M_1', M_2'))$ est équivalent à dire que $\Delta^t\widetilde{P}$ est nul, pour $t < T$, en tout point de :

$$\widetilde{\Gamma}(M_1', M_2') = \Big\{\mu_1\tilde{\gamma}_1 + \dots + \mu_m\tilde{\gamma}_m \mid \mu_i \in \mathbb{N},\ \mu_1, \dots, \mu_{m-1} < M_1',\ \mu_m < M_2'\Big\}.$$

On va montrer que, sous certaines contraintes, ceci n'est pas possible. Donc les $Q_{t\mu j}$ ne seront pas tous nuls en $\tilde{\theta}$, et c'est ce que l'on veut.

En supposant D, L, M_1', M_2', T assez grands on peut appliquer le lemme de zéros qui s'écrit ici :

LEMME DE ZÉROS.

- *Quitte à supposer ρ assez grand on sait que :*

$$\sum_{h=1}^{n} |\tilde{u}_h - u_h| \le \exp\Big(-\frac{\rho}{2}\Big), \qquad \sum_{k=1}^{m} |\tilde{v}_k - v_k| \le \exp\Big(-\frac{\rho}{2}\Big),$$
$$\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} |z_{hk} - u_h v_k| \le \exp\Big(-\frac{\rho}{2}\Big).$$

• *On pose :*

$$c_{14} = \max\Big[1\,;\ |u_1|\,;\ |v_1|\,;\ \sum_{h,k}(1+|u_h v_k|)\Big] n^3.$$

• *On suppose que les paramètres D, L, M_1', M_2', T vérifient les inégalités suivantes :*

$$\text{(a)}\quad (n+1)!\,(D-1)(L-1)^n \leq \Big(\frac{T-1}{n+1}\Big)\Big(\frac{M_1'-1}{n+1}\Big)^{m-1}\Big(\frac{M_2'-1}{n+1}\Big),$$

$$\text{(b)}\quad (n+1)(L-1) \leq \Big(\frac{T-1}{n+1}\Big)\Big(\frac{M_1'-1}{n+1}\Big)^{m-3}\Big(\frac{M_2'-1}{n+1}\Big),$$

$$\text{(c)}\quad \frac{M_2'-1}{n+1} \leq \Big(\frac{M_1'-1}{n+1}\Big)^2.$$

• *Alors, si $\Delta^t\widetilde{P}$ s'annule en tout point de $\widetilde{\Gamma}(M_1', M_2')$, pour tout $t < T$, il existe $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ non nul, $\mu \in \mathbb{Z}^m$ non nul vérifiant :*

$$|\lambda| \leq c_{14}\, L^2 \max(M_1', M_2'), \qquad |\mu| \leq c_{14}\, L \max(M_1', M_2')^2,$$
$$|\lambda u| \times |\mu v| \leq c_{14}\, L^2 \max(M_1', M_2')^2 \exp\Big(-\frac{1}{2}\rho\Big)$$

Afin que les hypothèses (a), (b), (c) soient vérifiées il suffit d'imposer les contraintes suivantes :
• pour avoir (a) on impose :

$$\text{(C7)}\qquad DL^n \leq \frac{1}{[2(n+1)]^{m+1}(n+1)!} T M_1'^{\,m-1} M_2'\,;$$

• pour avoir (b) on impose :

$$\text{(C8)}\qquad L \leq \frac{1}{[2(n+1)]^m} T M_1'^{\,m-3} M_2'\,;$$

• pour avoir (c) on impose :

$$\text{(C9)}\qquad 4(n+1)M_2' \leq M_1'^{\,2}.$$

Par hypothèse $u_1 v_m, \ldots, u_n v_m$ sont des logarithmes de nombres algébriques, et sont de plus des nombres linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Par le théorème de Baker on sait qu'il existe une constante $c_{15} > 0$ dépendant uniquement de $n, u_1, \dots, u_n, v_m$ telle que, pour tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$, λ non nul, on ait :

$$\Big|\sum_{h=1}^{n} \lambda_h u_h v_m\Big| > \exp\big(-c_{15} \log|\lambda|\big).$$

Ceci implique

$$|\lambda u| > \exp\big(-c_{16} \log|\lambda|\big).$$

De même, en utilisant l'hypothèse (HT), on sait minorer $|\mu v|$ pour tout $\mu \in \mathbb{Z}^m$ non nul et vérifiant $|\mu| \leq X$ avec X assez grand : $|\mu v| \geq \exp(-X)$. On sait ainsi minorer $|\lambda u| \times |\mu v|$. Il est alors aisé de vérifier que la nouvelle contrainte :

$$\text{(C10)} \qquad 2c_{14} L M'^2 + c_{16} \log(LM') < \rho$$

permet d'affirmer qu'il n'existe pas de couple (λ, μ) vérifiant la conclusion du lemme de zéros.

Conclusion. — Sous les quatre contraintes (C7), (C8), (C9), (C10), la conclusion du lemme de zéros ne peut pas être satisfaite; ce qui prouve que les $\Delta^t \widetilde{P}$ ne sont pas tous nuls sur $\widetilde{\Gamma}(M_1', M_2')$ lorsque t varie de 0 à $T-1$. Grâce à (12) ceci signifie encore que l'un des $Q_{t\mu j}(\tilde{\theta})$ $(0 \leq t < T,\ |\mu| < (M_1', M_2'))$ est non nul; c'est ce que l'on voulait.

4. Choix des paramètres et conclusion

Nous avons établi nos conclusions sous les dix contraintes (C1) à (C10) que nous ne rappelons pas. A tout réel X (supposé assez grand) on associe les valeurs suivantes des paramètres :

$$\begin{aligned}
T = D &= \Big[X^{m+n} (\log X)^{(-n-m+2)/(2n)}\Big]\,; \\
M_1 &= \Big[X^n (\log X)^{-1/2}\Big]\,; \qquad & M_2 &= \Big[X^n (\log X)^{1/2}\Big]\,; \\
a_1 &= \big((n+1)!\big)^{1/(m-1)}\,; \qquad & M_1' &= a_1 \Big[X^n (\log X)^{-1/2}\Big]\,; \\
a_2 &= a_0^n \big(4(n+1)\big)^{m+1}\,; \qquad & M_2' &= a_2 \Big[X^n (\log X)^{1/2}\Big]\,; \\
a_0 &= 2\Big(\Big[[K:\mathbb{Q}]^{1/n}\, 2^{(1+n+m+n(m-1))/n}\Big] + 1\Big)\,; \\
L &= a_0 \Big[X^m (\log X)^{(-m+2)/(2n)}\Big]\,; \\
R &= X^{mn+n-1} (\log X)^{1/2}\,; \\
\rho &= X^{mn+m+n} (\log X)^{(3n+2-m(n+1))/(2n)}.
\end{aligned}$$

Avec ce choix des paramètres, les dix contraintes sont satisfaites et les estimations (8 bis), (9), (10) s'écrivent :

$$(13)\quad \left|Q_{t\mu j}(\theta)\right| \leq \exp\Big(-c_{17}\,X^{mn+m+n}(\log X)^{(3n+2-m(n+1))/(2n)}\Big)\ ;$$

$$(14)\quad \deg\big(Q_{t\mu j}\big) \leq c_{18}\,X^{m+n}(\log X)^{(2-n-m)/(2n)}\ ;$$

$$(15)\quad h(Q_{t\mu j}) \leq c_{19}\,X^{m+n}(\log X)^{(2+n-m)/(2n)}.$$

Notons $(Q_{X,1}\ ;\ \cdots\ ;\ Q_{X,\varphi(X)})$ la famille de polynômes de $K[U,V,W]$,

$$\Big\{Q_{t\mu j} \mid t < T,\ \ |\mu| < (M_1', M_2'),\ \ j \in J_\rho\Big\}.$$

En se restreignant à des $X \in \mathbb{N}$ assez grands, on a construit une suite de familles de polynômes $(Q_{X,1}\ ;\ \cdots\ ;\ Q_{X,\varphi(X)})$, sans zéro commun dans $\mathcal{B}_\rho$, tous petits en θ (voir (13)), et dont on contrôle degrés et hauteurs (voir (14), (15)). On peut alors appliquer le critère de P. PHILIPPON [8, THÉORÈME 2-11], qui fournit le résultat annoncé :

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\theta) \geq \left[\frac{mn}{m+n}\right] + 1.$$