BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES GASQUI
HUBERT GOLDSCHMIDT

Critère d'exactitude pour les formes de degré 1 sur les quadriques complexes

Bulletin de la S. M. F., tome 117, nº 1 (1989), p. 103-119
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_1_103_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 103–119.

CRITÈRE D'EXACTITUDE POUR LES FORMES DE DEGRÉ 1 SUR LES QUADRIQUES COMPLEXES

PAR

JACQUES GASQUI et HUBERT GOLDSCHMIDT (*)

RÉSUMÉ. — Soit (X, g) une variété riemannienne compacte. Une forme différentielle de degré 1 sur X est à énergie nulle si son intégrale le long de toute géodésique fermée de X est nulle. Dans le cas où (X, g) est une grassmanienne complexe ou réelle, simplement connexe et non isométrique à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, nous montrons que les seules formes de degré 1, à énergie nulle, sont exactes.

ABSTRACT. — We say that a 1-form α on a compact Riemannian manifold (X, g) satisfies the zero-energy condition if the integrals of α over the closed geodesics of X vanish. If (X, g) is a real or complex simply-connected Grassmannian, which is not isometric to $\mathbb{CP}^1$ or $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, we prove that a 1-form on X satisfying the zero-energy condition is exact.

Une forme différentielle de degré 1 sur un espace riemannien est à *énergie nulle* si son intégrale le long de toute géodésique fermée est nulle. D'après les résultats de MICHEL [6], [7] et de [3] (voir aussi [4]), les formes à énergie nulle sur un tore plat ou sur un espace projectif non–isométrique à une sphère, sont toujours exactes.

Nous nous proposons de montrer (THÉORÈME 2) que ce phénomène persiste pour la quadrique complexe Q_n de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$, avec $n \geq 3$, d'équation homogène

$$\zeta_0^2 + \cdots + \zeta_{n+1}^2 = 0,$$

où $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n+1}$ sont les coordonnées canoniques de $\mathbb{C}^{n+2}$. Lorsque $n \geq 4$, une description précise des tores plats et des plans projectifs complexes

(*) Texte reçu le 1er octobre 1987.
J. GASQUI, Université de Grenoble I, Institut Fourier, B.P. 74, 38402 Saint-Martin-D'Hères Cedex, France.
H. GOLDSCHMIDT, Columbia Univ., Dept. of Math., New York, NY 10027, U.S.A.
The second author was supported in part by National Science Foundation Grant DMS 87–04209.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/1989/103/$ 5.00

totalement géodésiques de Q_n, a permis à DIENG [1], via les résultats mentionnés plus haut, d'en déduire immédiatement le THÉORÈME 2. Le but essentiel de ce papier est de traiter le cas $n = 3$.

La quadrique Q_n s'identifie à la grassmannienne des 2-plans orientés de $\mathbb{R}^{n+2}$. Les droites complexes de $\mathbb{C}^{m+1}$, avec $m = [\frac{1}{2}n]$, donnent des espaces projectifs $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ totalement géodésiques de dimension maximale dans Q_n. Lorsque $n = 3$, ceux-ci sont donc des droites projectives, ce qui fait que les seules sous-variétés totalement géodésiques, pour lesquelles les formes de degré 1, à énergie nulle, sont exactes, sont des tores plats. Ce phénomène rend beaucoup plus difficile l'étude de Q_3. En particulier, contrairement au cas $n \geq 4$, nous devons montrer que la cohomologie d'un certain complexe est isomorphe à l'algèbre de Lie des champs de Killing sur Q_3 (THÉORÈME 1). Ce dernier résultat nécessite l'intervention de la théorie des représentations du groupe orthogonal et de l'analyse harmonique sur la quadrique en tant qu'espace homogène. Nous utilisons, notamment, la description explicite des sous-espaces propres du laplacien sur Q_3 de STRICHARTZ [9].

A partir du résultat obtenu pour les quadriques, il est facile de prouver que les formes différentielles de degré 1, à énergie nulle, sont exactes sur les grassmaniennes simplement connexes, réelles ou complexes, et différentes d'une sphère où d'un produit de sphères.

1. Champs de Killing et tores plats

Soit (X, g) une variété riemannienne. Si E est un fibré vectoriel sur X, on désigne par $S^k E$ et $\wedge^\ell E$ la puissance symétrique k-ième de E et la puissance extérieure ℓ-ième de E; on note $C^\infty(E)$ l'espace des sections globales de E sur X. On note $C^\infty(X)$ l'espace des fonctions sur X, à valeurs réelles. On désigne par T et T^* les fibrés tangent et cotangent de X, et on note ∇ la connexion de Levi-Civita de g. Si ξ est un champ de vecteurs sur X, on note $\xi^\flat$ la forme différentielle de degré 1 définie par

$$\xi^\flat(\eta) = g(\xi, \eta),$$

pour $\eta \in T$; il est bien connu que ξ est un champ de Killing de (X, g) si et seulement si $\nabla \xi^\flat$ est une forme antisymétrique. Notons $\mathcal{K}$ l'algèbre de Lie des champs de Killing de (X, g).

Au paragraphe 5, nous aurons besoin du résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *Soient Y une sous-variété totalement géodésique de X, isométrique à un tore plat, et $i : Y \to X$ l'inclusion naturelle. Soit ξ un élément de $\mathcal{K}$.*

(i) *On a*

$$i^* d\xi^\flat = 0.$$

(ii) *Si $\xi^\flat$ est à énergie nulle, alors*

$$i^*\xi^\flat = 0\ .$$

Démonstration. — La projection orthogonale η de $\xi|_Y$ sur le fibré tangent de Y est un champ de Killing de (Y, i^*g) tel que $\eta^\flat = i^*\xi^\flat$. Si ∇^Y désigne la connexion de Levi-Civita de i^*g, on a

$$di^*\xi^\flat = 2\nabla^Y i^*\xi^\flat = 2\nabla^Y \eta^\flat$$

et $d^*\eta^\flat = 0$. Or, tout champ de Killing sur un tore plat est parallèle et ainsi $\nabla^Y\eta^\flat = 0$, d'où (i). Si $\xi^\flat$ est à énergie nulle, il en est de même pour la forme $\eta^\flat$ sur Y ; d'après un résultat de MICHEL [6], $\eta^\flat$ est donc exacte. Comme $\eta^\flat$ est harmonique, la forme $i^*\xi^\flat$ est nulle.

2. La quadrique complexe

Supposons désormais que X soit la quadrique complexe Q_n de l'espace projectif complexe $Y = \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$, avec $n \geq 3$, d'équation homogène

$$\zeta_0^2 + \zeta_1^2 + \cdots + \zeta_{n+1}^2 = 0,$$

où $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n+1}$ sont les coordonnées complexes canoniques de $\mathbb{C}^{n+2}$. On suppose que la métrique g de X est celle induite par la métrique de Fubini-Study $\tilde{g}$ de Y, à courbure holomorphe constante 4. L'espace X est connexe et simplement connexe. On note J la structure complexe de X ou de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$; la forme de Kähler ω de X est donnée par

$$\omega(\xi, \eta) = g(J\xi, \eta),$$

pour $\xi, \eta \in T$. On note $\widetilde{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de $\tilde{g}$.

La seconde forme fondamentale B de l'hypersurface complexe X de Y est une 2-forme symétrique sur X, à valeurs dans le fibré normal de X. Si ν est un champ normal unitaire défini sur un voisinage U d'un point $x \in X$, on considère la section h_ν de S^2T^* sur U, définie par

$$h_\nu(\xi, \eta) = \tilde{g}\big(B(\xi, \eta), \nu\big),$$

pour tous $\xi, \eta \in T|_U$. On identifie, via la métrique g, la forme h_ν à un endomorphisme symétrique K_ν de $T|_U$. Si μ est un autre champ normal unitaire sur U, on a

$$\mu = \cos\theta\, \nu + \sin\theta\, J\nu,$$

où θ est une fonction sur U. On vérifie alors que

$$K_\mu = \cos\theta\, K_\nu + \sin\theta\, JK_\nu. \tag{2.1}$$

En particulier, on a

$$K_{J\nu} = JK_\nu.$$

Avec le caractère kählérien des variétés considérées, on aura aussi

$$JK_\nu = -K_\nu J. \tag{2.2}$$

En utilisant l'équation de Gauss, on voit que la courbure $\widetilde{R}$ de (X, g) est donnée sur U par

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(\xi,\eta)\zeta = {} & g(\eta,\zeta)\xi - g(\xi,\zeta)\eta + g(J\eta,\zeta)J\xi \\ & - g(J\xi,\zeta)J\eta - 2g(J\xi,\eta)J\zeta \\ & + g(K_\nu\eta,\zeta)K_\nu\xi - g(K_\nu\xi,\zeta)K_\nu\eta \\ & + g(JK_\nu\eta,\zeta)JK_\nu\xi - g(JK_\nu\xi,\zeta)JK_\nu\eta, \end{aligned} \tag{2.3}$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta \in T|_U$. La formule (2.3) et le fait que g soit une métrique d'Einstein nous donnent

$$K_\nu^2 = \mathrm{id}$$

(*cf.* [8]). Dans la suite, l'involution K_ν s'appellera *structure réelle* de la quadrique, associée à la normale unitaire ν.

Notons $T^+ = T_\nu^+$ et $T^- = T_\nu^-$ les sous-fibrés de $T|_U$ formés respectivement des vecteurs propres de K_ν correspondant aux valeurs propres $+1$ et -1. Puisque K_ν et J anticommutent, J induit un isomorphisme de T_ν^+ sur T_ν^- ; de plus, la décomposition

$$T|_U = T_\nu^+ \oplus T_\nu^- \tag{2.4}$$

est orthogonale.

Signalons encore un résultat de [8] qui s'obtient en combinant la décomposition (2.4) et l'équation de Codazzi. Considérons la forme différentielle φ_ν de degré 1 sur U définie par

$$\varphi_\nu(\xi) = \tilde{g}(\widetilde{\nabla}_\xi\nu, J\nu), \tag{2.5}$$

pour $\xi \in T|_U$. Alors on a

$$\nabla K_\nu = \varphi_\nu \otimes JK_\nu. \tag{2.6}$$

De plus, on a sur U

$$d\varphi_\nu = -4\omega.$$

Soit β une section sur U du fibré $T_{\mathbf{R}}^{1,1}$ des formes réelles de type $(1,1)$ sur X. On définit une 2-forme alternée $K_\nu(\beta)$ sur U en posant

$$K_\nu(\beta)(\xi,\eta) = \beta(K_\nu\xi, K_\nu\eta),$$

pour tous champs de vecteurs ξ, η sur U. Puisque K_ν anti-commute à la structure complexe, $K_\nu(\beta)$ est encore une forme réelle de type $(1,1)$. Observons aussi, d'après (2.1), que $K_\nu(\beta)$ ne dépend pas du choix de la normale unitaire ν. On obtient ainsi une involution canonique de $T_{\mathbf{R}}^{1,1}$ sur X tout entier, dont on note $(T_{\mathbf{R}}^{1,1})^+$ et $(T_{\mathbf{R}}^{1,1})^-$ les sous-fibrés propres correspondant aux valeurs propres $+1$ et -1. On vérifie facilement que la forme de Kähler ω est une section de $(T_{\mathbf{R}}^{1,1})^-$. Si $(T_{\mathbf{R}}^{1,1})_0^-$ est le sous-fibré des formes à trace nulle de $(T_{\mathbf{R}}^{1,1})^-$ et $\{\omega\}$ le fibré en droites engendré par ω, on a la décomposition orthogonale

$$T_{\mathbf{R}}^{1,1} = (T_{\mathbf{R}}^{1,1})^+ \oplus \{\omega\} \oplus (T_{\mathbf{R}}^{1,1})_0^-. \tag{2.7}$$

On voit aisément que

$$\begin{aligned}(T_{\mathbf{R}}^{1,1})^+ &= \Big\{\beta \in T_{\mathbf{R}}^{1,1} \mid \beta(\xi, J\eta) = 0 \text{ pour tous } \xi,\eta \in T^+\Big\},\\ (T_{\mathbf{R}}^{1,1})^- &= \Big\{\beta \in T_{\mathbf{R}}^{1,1} \mid \beta(\xi, \eta) = 0 \text{ pour tous } \xi,\eta \in T^+\Big\}\end{aligned}$$

sur U, et nous obtenons ainsi des isomorphismes

$$(T_{\mathbf{R}}^{1,1})^+ \longrightarrow \wedge^2(T^+)^*, \quad (T_{\mathbf{R}}^{1,1})^- \longrightarrow S^2(T^+)^*,$$

qui envoient $\beta_1 \in (T_{\mathbf{R}}^{1,1})^+$ et $\beta_2 \in (T_{\mathbf{R}}^{1,1})^-$ sur les éléments u_1 de $\wedge^2(T^+)^*$ et u_2 de $S^2(T^+)^*$ respectivement définis par

$$u_1(\xi,\eta) = \beta_1(\xi,\eta), \quad u_2(\xi,\eta) = \beta_2(\xi, J\eta),$$

pour ξ, $\eta \in T^+$. En particulier, on a

$$\operatorname{rang}(T_{\mathbf{R}}^{1,1})^+ = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \operatorname{rang}(T_{\mathbf{R}}^{1,1})^- = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.8}$$

Si $(\wedge^2 T^*)^-$ est le fibré des formes différentielles anti-hermitiennes, on déduit de (2.7) la décomposition orthogonale

$$\wedge^2 T^* = (T_{\mathbf{R}}^{1,1})^+ \oplus \{\omega\} \oplus (T_{\mathbf{R}}^{1,1})_0^- \oplus (\wedge^2 T^*)^-.$$

Soit

$$\pi : \wedge^2 T^* \longrightarrow (T^{1,1}_{\mathbf{R}})^-_0 \oplus (\wedge^2 T^*)^-$$

la projection orthogonale; on considère l'opérateur différentiel

$$\tilde{d} = \pi d : C^\infty(T^*) \longrightarrow C^\infty\big((T^{1,1}_{\mathbf{R}})^-_0 \oplus (\wedge^2 T^*)^-\big)$$

d'ordre 1 et le complexe

$$C^\infty(X) \xrightarrow{d} C^\infty(T^*) \xrightarrow{\tilde{d}} C^\infty\big((T^{1,1}_{\mathbf{R}})^-_0 \oplus (\wedge^2 T^*)^-\big). \tag{2.9}$$

Au paragraphe 5, nous démontrerons le

THÉORÈME 1. — *Si n est un entier impair ≥ 3, alors*

$$\mathcal{K}^\flat = \{\xi^\flat \mid \xi \in \mathcal{K}\}$$

est un espace de cocycles du complexe (2.9), *isomorphe à sa cohomologie.*

En fait, dans ce théorème, $\mathcal{K}^\flat$ est l'espace harmonique du complexe (2.9). Pour le démontrer, nous utilisons les représentations de $SO(n+2)$, qui se décrivent différemment suivant la parité de n. Il nous est seulement nécessaire d'obtenir ce théorème pour $n = 3$; c'est pourquoi nous ne considérons que le cas où n est impair. Toutefois, il est fort probable que le résultat soit vrai pour tout $n \geq 3$.

3. Formes à énergie nulle

Considérons un champ normal unitaire ν défini sur le voisinage U de x et la décomposition correspondante (2.4). Rappelons maintenant la description de [1] de certaines sous-variétés totalement géodésiques de la quadrique X. Les surfaces fermées totalement géodésiques de X, passant par x et isométriques à un tore plat, sont les sous-variétés $\mathrm{Exp}_x F$, où F est le sous-espace vectoriel de T_x déterminé par un système orthonormé $\{\xi, \eta\}$ de T^+_x et engendré par l'une des familles suivantes :

(a) $\{\xi, J\eta\}$;

(b) $\{\xi - sJ\xi, \eta + \frac{1}{s}J\eta\}$, où s est un nombre réel non-nul;

(c) $\{\xi + J\eta, \eta + J\xi\}$.

Les surfaces fermées totalement géodésiques de X, à courbure constante 4, passant par x, et isométriques à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, sont les sous-variétés $\mathrm{Exp}_x F$, où F est le sous-espace vectoriel de T_x déterminé par un système orthonormé $\{\xi, \eta\}$ de T^+_x et engendré par la famille

$$\{\xi + J\eta, \eta - J\xi\}.$$

Si $n \geq 4$, toute surface de ce type est contenue dans une sous-variété fermée totalement géodésique isométrique à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Soit E_j le sous-fibré de $\wedge^j T^*$ formé des éléments de $\wedge^j T^*$ qui s'annulent en restriction aux surfaces totalement géodésiques de X isométriques à un tore plat. On voit facilement, avec les tores plats correspondant aux familles de type (a), que $E_1 = 0$; d'autre part, de la description de tous les tores plats totalement géodésiques de X, il résulte que $\beta \in \wedge^2 T_x^*$ appartient à E_2 si et seulement si

$$\beta(\xi, J\eta) = 0, \tag{3.1}$$

$$\beta\big(\xi - sJ\xi, \eta + \frac{1}{s}J\eta\big) = 0 \tag{3.2}$$

$$\beta\big(\xi + J\eta, \eta + J\xi\big) = 0, \tag{3.3}$$

pour tout système orthonormal $\{\xi, \eta\}$ de T_x^+ et tout nombre réel $s \neq 0$.

LEMME 1.

(i) *On a* $E_2 = (T_{\mathbb{R}}^{1,1})^+ \oplus \{\omega\}$.

(ii) *Tout élément de E_2, qui s'annule sur les surfaces totalement géodésiques de X, à courbure constante 4 et isométriques à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, est nul.*

Démonstration.

(i) Il est facile de vérifier que ω est une section de E_2 et que l'on a l'inclusion $(T_{\mathbb{R}}^{1,1})^+ \subset E_2$. Réciproquement, soient $\beta \in E_{2,x}$ et $\{\xi, \eta\}$ un système orthonormé de T_x^+ ; avec (3.1) et (3.2), on voit que

$$\beta(\xi, \eta) = \beta(J\xi, J\eta). \tag{3.4}$$

De (3.1) et (3.4), il résulte que $\beta \in T_{\mathbb{R}}^{1,1}$. Puisque $\xi + \eta$ et $\xi - \eta$ sont des vecteurs orthogonaux de T_x^+ de longueur $\sqrt{2}$, avec (3.1) on a

$$\beta(\xi - \eta, J\xi + J\eta) = 0;$$

on déduit de cette égalité et de (3.1) que

$$\beta(\xi, J\xi) = \beta(\eta, J\eta).$$

Si on pose $a = \beta(\xi, J\xi)$, alors, d'après (3.1), $\beta' = \beta - a\omega$ vérifie

$$\beta'(\zeta, J\zeta) = 0,$$

pour tout $\zeta \in T_x^+$, et β' appartient à $(T_{\mathbb{R}}^{1,1})^+$.

(ii) Soient $\beta \in (T^{1,1}_{\mathbf{R}})^+_x$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $\beta' = \beta + c\omega$ s'annule sur les surfaces totalement géodésiques de X, à courbure constante 4 et isométriques à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Soit $\{\xi, \eta\}$ un système orthonormé de T^+_x. Puisque β est hermitien, on voit que

$$\begin{aligned} 0 = \beta'(\xi + J\eta, J\xi - \eta) &= -2\beta(\xi, \eta) + c\big(g(J\xi, J\xi) + g(\eta, \eta)\big) \\ &= -2\beta(\xi, \eta) + 2c\,; \end{aligned}$$

ainsi, $\beta(\xi, \eta) = \beta(\eta, \xi) = 2c$, d'où l'on déduit que $\beta = 0$ et $c = 0$.

Si α est une forme de degré 1 sur X, il est clair, avec la première partie du LEMME 1, que $\tilde{d}\alpha = 0$ si et seulement si la restriction de $d\alpha$, à tout tore plat totalement géodésique de X, est nulle. En particulier, avec la PROPOSITION 1, (i), on voit que, si $\xi \in \mathcal{K}$, alors $\xi^\flat$ est un cocycle du complexe (2.9).

THÉORÈME 2. — *Si $n \geq 3$, les formes différentielles de degré 1, à énergie nulle, sur (Q_n, g) sont exactes.*

Démonstration. — Soit α une forme de degré 1, à énergie nulle, sur Q_n. Comme les formes différentielles de degré 1, à énergie nulle, sur un tore plat sont exactes (*cf.* [6]), on a $\tilde{d}\alpha = 0$. Supposons d'abord que $n \geq 4$. D'après [3] ou [4], toute forme de degré 1, à énergie nulle, sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est exacte, donc la restriction de α à toute surface totalement géodésique, isométrique à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, avec sa métrique à courbure constante 4, est exacte; le LEMME 1, (ii) nous dit que $d\alpha = 0$. La simple connexité de X entraîne l'exactitude de α (*cf.* [1]). Venons-en maintenant au cas $n = 3$. Avec le THÉORÈME 1, on peut écrire

$$\alpha = df + \xi^\flat,$$

où $f \in C^\infty(X)$ et ξ est un champ de Killing. Soient Y un tore plat totalement géodésique de X et $i : Y \to X$ l'inclusion naturelle. Puisque la forme différentielle $\xi^\flat = \alpha - df$ est à énergie nulle, la PROPOSITION 1, (ii) entraîne que $i^*\xi^\flat = 0$ et donc que $\xi^\flat$ est une section du fibré E_1. On obtient ainsi la nullité de $\xi^\flat$ et l'égalité $\alpha = df$.

THÉORÈME 3. — *Les formes différentielles de degré 1, à énergie nulle, sont exactes sur les espaces riemanniens symétriques suivants :*

(i) *les grassmanniennes complexes, différentes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$;*

(ii) *les grassmanniennes réelles de plans orientés*

$$SO(p+q)/SO(p) \times SO(q), \quad \text{avec } p \geq q > 1 \text{ et } (p,q) \neq (2,2).$$

Démontrons le théorème dans le cas (i). Tout d'abord, d'après [3] ou [4], on sait que le résultat est vrai pour les espaces projectifs complexes de dimension > 1. Considérons maintenant un espace hermitien V de dimension $m \geq 4$, et la grassmannienne complexe $G_k(V)$ des k-plans de V, avec $2 \leq k \leq m-2$. L'espace tangent de cette dernière en un k-plan E de V s'identifie à $E^* \otimes E^\perp$. Prenons deux vecteurs de la forme $\varphi \otimes \xi$ et $\psi \otimes \eta$ dans $E^* \otimes E^\perp$. Soit E' un plan complexe de $E^\perp$ contenant ξ et η et choisissons une décomposition orthogonale

$$E = H \oplus E'',$$

où E'' est de dimension 2 et où $\varphi_{|H} = \psi_{|H} = 0$. L'application

$$\iota : G_2(E' \oplus E'') \longrightarrow G_k(V),$$

qui envoie un 2-plan W de $E' \oplus E''$ sur $H \oplus W$, est une immersion totalement géodésique. On a $\iota(E'') = E$ et, par construction, $\varphi \otimes \xi$ et $\psi \otimes \eta$ sont dans l'image de l'application tangente de ι en E''.

Soit α une forme de degré 1, à énergie nulle, sur $G_k(V)$. Pour montrer que α est fermée, il suffit de vérifier que

$$(d\alpha)(\varphi \otimes \xi, \psi \otimes \eta) = 0.$$

Comme la grassmannienne complexe des 2-plans de $\mathbb{C}^4$ est isométrique à la quadrique Q_4, la forme à énergie nulle $\iota^*\alpha$ est donc exacte, d'où l'égalité cherchée.

Le résultat pour les grassmanniennes réelles s'obtient de manière tout à fait similaire, à partir du THÉORÈME 2 pour $n = 3$, la quadrique Q_3 s'identifiant à la grassmannienne des 2-plans orientés de $\mathbb{R}^5$.

4. La quadrique en tant qu'espace homogène

Le groupe $SU(n+2)$ agit sur $\mathbb{C}^{n+2}$ et sur $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ par des isométries; son sous-groupe $G = SO(n+2)$ laisse X invariant et agit transitivement sur X par des isométries holomorphes. L'image canonique x_0 dans $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ du point $(1, i, 0, \ldots, 0)$ de $\mathbb{C}^{n+2}$ appartient à X et son groupe d'isotropie est égal au sous-groupe $H = SO(2) \times SO(n)$ de $SO(n+2)$ formé des matrices

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

avec $A \in SO(2)$ et $B \in SO(n)$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R(\theta)$ l'élément

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

de $SO(2)$. Rappelons que G/H est un espace symétrique hermitien; on identifie G/H et Q_n au moyen de l'isométrie holomorphe qui envoie $a \cdot H$ sur $a \cdot x_0$, pour $a \in G$. On peut identifier T_{x_0} avec $\mathbb{C}^n$ de telle sorte que la structure presque-complexe de T_{x_0} soit celle déterminée par la multiplication par i sur $\mathbb{C}^n$, que la métrique kählérienne g en x_0 soit celle obtenue à partir du produit scalaire hermitien standard de $\mathbb{C}^n$, et que l'action de H sur T_{x_0} soit donnée par

$$\begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot z = e^{i\theta} Az,$$

pour $A \in SO(n)$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}^n$; ici, $SO(n)$ est considéré comme un sous-groupe de $SU(n)$ (*cf.* [5, pp. 278-281]).

Soit $\widehat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence des G-modules (sur $\mathbb{C}$) irréductibles. Si $\gamma \in \widehat{G}$ et E est un fibré vectoriel hermitien, homogène et unitaire sur X, on note $C^\infty_\gamma(E)$ la composante isotypique de $C^\infty(E)$ correspondant à γ et mult $C^\infty_\gamma(E)$ sa longueur. On munit l'espace $C^\infty(E)$ du produit scalaire hermitien obtenu à partir de celui de E et la forme volume G-invariante $\omega^n/n!$ de X. Pour $\gamma, \gamma' \in \widehat{G}$, avec $\gamma \neq \gamma'$, les sous-modules $C^\infty_\gamma(E)$ et $C^\infty_{\gamma'}(E)$ de $C^\infty(E)$ sont orthogonaux. Si $\gamma \in \widehat{G}$, alors tout élément u de $C^\infty(E)$ peut s'écrire sous la forme $u = u' + u''$, avec $u' \in C^\infty_\gamma(E)$ et u'' orthogonal à $C^\infty_\gamma(E)$. Si E est le fibré en droites complexes trivial sur X, on écrit $C^\infty(X, \mathbb{C}) = C^\infty(E)$ et $C^\infty_\gamma(X) = C^\infty_\gamma(E)$. Si E_1, E_2 sont des fibrés vectoriels hermitiens, homogènes et unitaires sur X, et si $P : C^\infty(E_1) \to C^\infty(E_2)$ est un opérateur différentiel homogène, alors on a

$$P(C^\infty_\gamma(E_1)) \subset C^\infty_\gamma(E_2),$$

pour $\gamma \in \widehat{G}$ (*cf.* [11, § 5.3], [2, § 2]).

Nous supposons dans la suite de ce paragraphe que n est un entier impair et nous écrivons $n = 2\ell + 1$. On note $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ et $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ les complexifiés des algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ de G et H, respectivement. Le sous-groupe $\mathbb{T}$ de G formé des matrices

$$\begin{pmatrix} R(\theta_0) & & & & O \\ & R(\theta_1) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & R(\theta_l) & \\ O & & & & 1 \end{pmatrix},$$

avec $\theta_0, \dots, \theta_l \in \mathbb{R}$, est un tore maximal de G et de H. Le complexifié $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ de $\mathbb{T}$ est une sous-algèbre de Cartan des algèbres de

Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(n+2, \mathbb{C})$ et $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Pour $a \in \mathbb{C}$, on écrit

$$L(a) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1}a \\ \sqrt{-1}a & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $0 \leq j \leq \ell$, soit λ_j la forme linéaire sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ qui envoie la matrice

$$\begin{pmatrix} L(a_0) & & & O \\ & L(a_1) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & L(a_\ell) \end{pmatrix},$$

avec $a_0, \ldots, a_\ell \in \mathbb{C}$, sur a_j . On écrit $\alpha_j = \lambda_j - \lambda_{j+1}$, pour $0 \leq j \leq \ell - 1$ et $\alpha_\ell = \lambda_\ell$. Choisissons une chambre de Weyl pour $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ telle que le système Δ^+ de racines positives de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ soit égal à

$$\Big\{\lambda_j - \lambda_k \mid 0 \leq j < k \leq \ell\Big\} \cup \Big\{\lambda_j + \lambda_k \mid 0 \leq j < k \leq \ell\Big\} \cup \Big\{\lambda_j \mid 0 \leq j \leq \ell\Big\};$$

alors $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ est le système de racines simples de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On prend une chambre de Weyl pour $(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ telle que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ soit un système de racines simples de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$.

Le poids dominant d'un G-module ou d'un H-module irréductible est une forme linéaire $\lambda : \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ qui s'écrit sous la forme

$$\lambda = \sum_{j=0}^{\ell} h_j \lambda_j,$$

avec $h_0, \ldots, h_\ell \in \mathbb{Z}$; la classe d'équivalence d'un tel module est déterminée par ce poids. On identifie un élément γ de $\widehat{G}$ avec le poids dominant d'un représentant de γ.

5. Calcul de cohomologie

On note $E_{\mathbb{C}}$ le complexifié d'un fibré vectoriel E sur X et $T^{p,q}$ le fibré des formes différentielles de type (p, q) sur X. On désigne par $(T^{1,1})_0^-$ le sous-fibré de $T^{1,1}$ qui est égal au complexifié de $(T_{\mathbb{R}}^{1,1})_0^-$. Le complexifié de $(\wedge^2 T^*)^-$ est le fibré $T^{2,0} \oplus T^{0,2}$. Les fibrés $T_{\mathbb{C}}^*$, $T^{p,q}$ et $(T^{1,1})_0^-$ sont tous homogènes et unitaires et la décomposition

$$T_{\mathbb{C}}^* = T^{1,0} \oplus T^{0,1},$$

est G-invariante. Les opérateurs différentiels d, ∂, $\overline{\partial}$ sont homogènes, ainsi que l'opérateur

$$\tilde{d} : C^\infty(T_{\mathbb{C}}^*) \longrightarrow C^\infty\big((T^{1,1})_0^- \oplus T^{2,0} \oplus T^{0,2}\big).$$

L'espace $\mathcal{A}$ des fonctions à valeurs complexes sur $\mathbb{C}^{n+2}$, dont les restrictions à la sphère unité S^{2n+3} sont invariantes par $U(1)$, est un $SO(n+2)$-module. Considérons la sous-variété

$$V = \left\{ \zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+2} \mid \zeta_0^2 + \cdots + \zeta_{n+1}^2 = 0 \text{ et } |\zeta| = 1 \right\}$$

de S^{2n+3} . Le groupe $U(1)$ laisse V invariant et $X = Q_n$ est alors le quotient de V par l'action de $U(1)$. Si $f \in \mathcal{A}$, on note $\tilde{f}$ la fonction sur X obtenue à partir de f par restriction à V, puis passage au quotient.

Nous considérons les éléments

$$f_{r,s} = \left\{ (\zeta_0 + i\zeta_1)(\overline{\zeta}_2 + i\overline{\zeta}_3) - (\zeta_2 + i\zeta_3)(\overline{\zeta}_0 + i\overline{\zeta}_1) \right\}^s (\zeta_0 + i\zeta_1)^r (\overline{\zeta}_0 + i\overline{\zeta}_1)^r,$$

où r, s sont des entiers ≥ 0, du $SO(n+2)$-module $\mathcal{A}$. Au paragraphe suivant, nous démontrerons le

LEMME 2. — *Sur $X = Q_n$, on a*

$$\pi\partial\overline{\partial}\tilde{f}_{r,s} \neq 0$$

lorsque $r + s \geq 1$ et $(r, s) \neq (0, 1)$.

Supposons que n soit impair. Alors $f_{r,s}$ est un élément de $\mathcal{A}$ de poids $(2r+s)\lambda_0 + s\lambda_1$. D'après [9], la fonction $f_{r,s}$ engendre un sous-G-module irréductible $\mathcal{H}_{r,s}$ de $\mathcal{A}$, de poids dominant $(2r+s)\lambda_0 + s\lambda_1$; l'espace $\widetilde{\mathcal{H}}_{r,s}$ des fonctions sur X déduit de $\mathcal{H}_{r,s}$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{r,s}$ en tant que $SO(n+2)$-module, et on a les deux égalités

$$C^{\infty}_{(2r+s)\lambda_0+s\lambda_1}(X) = \widetilde{\mathcal{H}}_{r+s}, \tag{5.1}$$

$$C^{\infty}_{\gamma}(X) = 0 \tag{5.2}$$

lorsque $\gamma \in \widehat{G}$ n'est pas de la forme $(2r+s)\lambda_0 + s\lambda_1$, avec $r, s \geq 0$. Puisque $\widetilde{\mathcal{H}}_{0,0}$ est égal à l'espace des fonctions constantes, on a

$$\partial\tilde{f}_{r,s} \neq 0 \ , \quad \overline{\partial}\tilde{f}_{r,s} \neq 0,$$

lorsque $r + s \geq 1$.

Les H-modules $T^{1,0}_{x_0}$ et $T^{0,1}_{x_0}$ sont irréductibles et leurs poids dominants sont égaux à $\lambda_0 + \lambda_1$ et $-\lambda_0 + \lambda_1$ respectivement. D'après le théorème 1.2 de [10], on a

$$\operatorname{mult} C^{\infty}_{\lambda_0+\lambda_1}(T^{1,0}) = \operatorname{mult} C^{\infty}_{\lambda_0+\lambda_1}(T^{0,1}) = 1.$$

On voit donc que

$$C^\infty_{\lambda_0+\lambda_1}(T^*_{\mathbb{C}}) = \partial\widetilde{\mathcal{H}}_{0,1} \oplus \overline{\partial}\widetilde{\mathcal{H}}_{0,1}. \tag{5.3}$$

L'algèbre de Lie $\mathcal{K}$ des champs de Killing de (X,g) est isomorphe à $\mathfrak{g}$ et ainsi le complexifié $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ de $\mathcal{K}$ est un $SO(n+2)$-module irréductible de poids dominant $\lambda_0+\lambda_1$. Puisque $d^*\xi^\flat = 0$, pour $\xi \in \mathcal{K}$, avec (5.3), on a donc

$$C^\infty_{\lambda_0+\lambda_1}(T^*_{\mathbb{C}}) = d\widetilde{\mathcal{H}}_{0,1} \oplus \mathcal{K}^\flat_{\mathbb{C}}\ . \tag{5.4}$$

LEMME 3. — *Pour $\gamma \in \widehat{G}$, avec $\gamma \neq 0$ et $\lambda_0+\lambda_1$, on a*

$$C^\infty_\gamma(T^*_{\mathbb{C}}) \cap \operatorname{Ker}\tilde{d} = dC^\infty_\gamma(X).$$

Démonstration. — Soit $\gamma \in \widehat{G}$, avec $\gamma \neq 0$ et $\lambda_0+\lambda_1$. Nous écrivons

$$W_\gamma = C^\infty_\gamma(T^*_{\mathbb{C}}) \cap \operatorname{Ker}\tilde{d},$$

et démontrons d'abord que $dW_\gamma = 0$. On choisit un élément θ de poids dominant de W_γ. Comme $d\theta$ est de type $(1,1)$, il existe une unique fonction $f \in C^\infty(X,\mathbb{C})$ telle que $d\theta = \partial\overline{\partial}f$ et

$$\int_X f\omega^n = 0\ ;$$

cette fonction est un élément de $C^\infty_\gamma(X)$ de même poids que θ. Donc, d'après (5.2), lorsque γ n'est pas de la forme $(2r+s)\lambda_0+s\lambda_1$, avec $r,s \geq 0$, la fonction f est nulle et $d\theta = 0$; il en découle que $dW_\gamma = 0$. Lorsque $\gamma = (2r+s)\lambda_0+s\lambda_1$, avec $r+s \geq 1$ et $(r,s) \neq (0,1)$, l'égalité (5.1) montre que la fonction f doit être un multiple de $\tilde{f}_{r,s}$ et on a donc

$$d\theta = c\partial\overline{\partial}\tilde{f}_{r,s}$$

avec $c \in \mathbb{C}$. Puisque $\tilde{d}\theta = 0$, il en résulte que

$$c\pi\partial\overline{\partial}\tilde{f}_{r,s} = 0.$$

Le LEMME 2 implique que $c = 0$, et ainsi $d\theta = 0$, de sorte que $dW_\gamma = 0$. Pour terminer la démonstration du lemme, comme X est simplement connexe, il suffit de vérifier que toute forme exacte de $C^\infty_\gamma(T^*_{\mathbb{C}})$ appartient à $dC^\infty_\gamma(X)$. Soit $f \in C^\infty(X,\mathbb{C})$ telle que $df \in C^\infty_\gamma(T^*_{\mathbb{C}})$. On peut écrire

$f = f' + f''$, où $f' \in C^\infty_\gamma(X)$ et f'' est orthogonale à $C^\infty_\gamma(X)$; comme d est un opérateur homogène, on a $df = df'$ et $df'' = 0$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le THÉORÈME 1. Soit α une forme de degré 1 sur $X = Q_n$ telle que $\tilde{d}\alpha = 0$. On peut écrire

$$\alpha = \alpha' + \alpha'',$$

où $\alpha' \in C^\infty_{\lambda_0+\lambda_1}(T^*_{\mathbb{C}})$ et α'' est orthogonal à $C^\infty_{\lambda_0+\lambda_1}(T^*_{\mathbb{C}})$. D'après (5.4), il existe $\xi \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ et $\varphi \in C^\infty(X, \mathbb{C})$ tels que

$$\alpha' = d\varphi + \xi^\flat.$$

Avec la PROPOSITION 1, (i), on sait que $\tilde{d}\alpha' = 0$ et donc $\tilde{d}\alpha'' = 0$. Puisque $\tilde{d}$ est un opérateur différentiel homogène, on déduit des résultats du paragraphe 5.7 de [11] que α'' appartient à l'adhérence de

$$\bigoplus_{\substack{\gamma \in \widehat{G} \\ \gamma \neq \lambda_0+\lambda_1}} \big(C^\infty_\gamma(T^*_{\mathbb{C}}) \cap \operatorname{Ker} \tilde{d}\big)$$

et, d'après le LEMME 3, à celle de

$$\bigoplus_{\substack{\gamma \in \widehat{G} \\ \gamma \neq \lambda_0+\lambda_1}} dC^\infty_\gamma(X).$$

Comme d est elliptique, ce dernier espace est contenu dans $dC^\infty(X, \mathbb{C})$. Ainsi $\alpha'' \in dC^\infty(X, \mathbb{C})$ et on peut donc écrire

$$\alpha = df + \xi^\flat,$$

où $f \in C^\infty(X)$ et $\xi \in \mathcal{K}$. La relation $d^*\eta^\flat = 0$, pour $\eta \in \mathcal{K}$, nous donne maintenant le résultat cherché.

6. Preuve du lemme 2

Si $f \in \mathcal{A}$, on note $\tilde{f}$ la fonction sur $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ obtenue à partir de f par restriction à la sphère unité S^{2n+3}, puis passage au quotient. La restriction de $\tilde{f}$ à X est égale à la fonction notée $\tilde{f}$ et définie au paragraphe 5. Soit $p : \mathbb{C}^{n+2} - \{0\} \to \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ la projection naturelle; considérons l'ouvert

$$U = p\Big(\Big\{(\zeta_0, \ldots, \zeta_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+2} \mid \zeta_0 \neq 0\Big\}\Big)$$

de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$. On note $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$ la coordonnée holomorphe sur U déterminée par les coordonnées homogènes $(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n+1})$; on a donc

$$z_j = \widetilde{\zeta_j/\zeta_0} = x_j + iy_j,$$

pour $1 \leq j \leq n+1$, où x_j et y_j sont des fonctions à valeurs réelles. Alors

$$Q_n \cap U = \Big\{ z \in U \mid 1 + \sum_{j=1}^{n+1} z_j^2 = 0 \Big\}.$$

Pour $1 \leq j \leq n+1$, on note a_j le point de $Q_n \cap U$ déterminé par

$$z_k(a_j) = i\delta_{jk} \quad , \quad 1 \leq k \leq n+1.$$

On écrit $a = a_{n+1}$ et on pose

$$\begin{aligned} \xi_j &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_a, & \eta_j &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_a, \\ \xi_{n+1} &= \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \right)_a, & \eta_{n+1} &= \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y_{n+1}} \right)_a, \end{aligned}$$

pour $1 \leq j \leq n$. Alors $\{\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n\}$ est une base orthonormée de T_a et on peut choisir un champ normal unitaire ν de l'hypersurface Q_n de $\mathbb{CP}^{n+1}$ sur un voisinage de a tel que

$$\nu(a) = -\xi_{n+1} \ , \quad J\nu(a) = -\eta_{n+1}.$$

Comme les champs de vecteurs complexes $\partial/\partial z_j - z_j/z_{n+1} \partial/\partial z_{n+1}$ sont tangents à Q_n au voisinage de a, on vérifie facilement que la seconde forme fondamentale B de Q_n est donnée en a par

$$\begin{aligned} B(\xi_j, \xi_k) &= -\delta_{jk} J\nu(a) = -B(\eta_j, \eta_k), \\ B(\xi_j, \eta_k) &= \delta_{jk} \nu(a), \end{aligned}$$

pour $1 \leq j, k \leq n$. On obtient donc

$$K_\nu(\xi_j) = \eta_j \ , \quad K_\nu(\eta_j) = \xi_j,$$

pour $1 \leq j \leq k$, et ainsi $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_j + \eta_j)\}_{1 \leq j \leq n}$ est une base orthonormée de $T^+_{\nu,a}$, tandis que $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_j - \eta_j)\}_{1 \leq j \leq n}$ est une base orthonormée de $T^-_{\nu,a}$. Pour $1 \leq j, k \leq n+1$, on pose

$$v_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Prenons $1 \leq j < k \leq n$, et posons $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_j + \eta_j)$, $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_k + \eta_k)$; d'après le paragraphe 3, en considérant le système orthonormé $\{\xi, \eta\}$ de T_a^+, on voit que les deux vecteurs de T_a de la famille

$$\{\xi + J\eta, \eta + J\xi\} = \left\{\frac{1}{2}v_{jk}(a), \frac{1}{2}v_{kj}(a)\right\},$$

qui est de type (c), sont tangents à une même surface totalement géodésique de X, isométrique à un tore plat. Donc, pour $1 \leq j, k, \ell \leq n+1$, avec j, k, ℓ tous distincts, les deux vecteurs de T_{a_ℓ} de la famille

$$\{v_{jk}(a_\ell), v_{kj}(a_\ell)\}$$

sont tangents à un même tore plat totalement géodésique de X.

Pour $r, s \geq 0$, on a, sur l'ouvert U,

$$\tilde{f}_{r,s} = \frac{\{(1 + iz_1)(\overline{z}_2 + i\overline{z}_3) - (z_2 + iz_3)(1 + i\overline{z}_1)\}^s (1 + iz_1)^r (1 + i\overline{z}_1)^r}{(1 + |z|^2)^{r+s}},$$

et on vérifie facilement que

$$(\partial\overline{\partial}\tilde{f}_{r,s})(v_{12}, v_{21})(a_3) = \frac{ir(r+s)}{2^{r-2}},$$
$$(\partial\overline{\partial}\tilde{f}_{r,s+1})(v_{34}, v_{43})(a_2) = \frac{s(s+1)(-i)^s}{2^r}.$$

Le LEMME 2 est une conséquence directe de ces deux égalités.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIENG (Y.). — Quelques résultats de rigidité infinitésimale pour les quadriques complexes, *C. R. Acad. Sci. Sér. I Math.*, t. **304**, 1987, p. 393-396.

[2] GASQUI (J.) et GOLDSCHMIDT (H.). — Déformations infinitésimales des espaces riemanniens localement symétriques, II. La conjecture infinitésimale de Blaschke pour les espaces projectifs complexes, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, t. **34**, 1984, p. (2), 191-226.

[3] GASQUI (J.) et GOLDSCHMIDT (H.). — Une caractérisation des formes exactes de degré 1 sur les espaces projectifs, *Comment. Math. Helv.*, t. **60**, 1985, p. 46-53.

[4] GASQUI (J.) and GOLDSCHMIDT (H.). — Some rigidity results in deformation theory of symmetric spaces, [in Deformation theory of algebras and applications], edited by M. GERSTENHABER and M. HAZEWINKEL, *Kluwer Academic Publishers*, 1988, pp. 839–851.

[5] KOBAYASHI (S.) and NOMIZU (K.). — *Foundations of Differential Geometry*, Vol.II. — New York, Interscience Publishers, 1969.

[6] MICHEL (R.). — (a) Un problème d'exactitude concernant les tenseurs symétriques et les géodésiques, *C. R. Acad. Sci. Sér. I Math.*, t. **284**, 1977, p. 183-186. *(b) Tenseurs symétriques et géodésiques,* C. R. Acad. Sci. Sér. I Math. **284** (1977), 1065-1068.

[7] MICHEL (R.). — Sur quelques problèmes de géométrie globale des géodésiques, *Bol. Soc. Bras. Mat.*, t. **9**, 1978, p. 19-38.

[8] SMYTH (B.). — Differential geometry of complex hypersurfaces, *Ann. of Math.*, t. **85**, 1967, p. 246-266.

[9] STRICHARTZ (R.).–The explicit Fourier decomposition of $L^2(SO(n)/SO(n-m))$, *Can. J. Math.*, t. **27**, 1975, p. 294-310.

[10] TSUKAMOTO (C.). — Spectra of Laplace-Beltrami operators on $SO(n+2)/SO(2)\times SO(n)$ and $Sp(n+1)/Sp(1)\times Sp(n)$, *Osaka J. Math.*, t. **18**, 1981, p. 407-426.

[11] WALLACH (N.). — *Harmonic analysis on homogeneous spaces.* — New York, Marcel Dekker, 1973.