BULLETIN DE LA S. M. F.

ARNAUD BEAUVILLE

Fibrés de rang 2 sur une courbe, fibré déterminant et fonctions thêta

Bulletin de la S. M. F., tome 116, nº 4 (1988), p. 431-448

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1988__116_4_431_0>

Bull. Soc. math. France,
116, 1988, p. 431–448.

FIBRÉS DE RANG 2 SUR UNE COURBE, FIBRÉ DÉTERMINANT ET FONCTIONS THÊTA

PAR

ARNAUD BEAUVILLE (*)

RÉSUMÉ. — Soit $\mathcal{N}$ l'espace des modules des fibrés semi-stables de rang 2 et de déterminant trivial sur une courbe C. Nous prouvons que le groupe de Picard de $\mathcal{N}$ est engendré par le fibré déterminant $\mathcal{L}$. Nous montrons que l'espace des sections globales de $\mathcal{L}$ s'identifie à l'espace des fonctions thêta d'ordre 2 sur la jacobienne J de C, de sorte que $\mathcal{L}$ définit un morphisme de $\mathcal{N}$ dans le système linéaire $|2\Theta|$ sur J. Nous interprétons géométriquement ce morphisme, et montrons qu'il est de degré 2 si C est hyperelliptique et de degré 1 sinon.

ABSTRACT. — Let $\mathcal{N}$ be the moduli space of semi-stable rank 2 vector bundles with trivial determinant on a curve C. We prove that the Picard group of $\mathcal{N}$ is generated by the determinant bundle $\mathcal{L}$. We identify the space of global sections of $\mathcal{L}$ with the space of 2^{nd} order theta functions on the Jacobian J of C, so that $\mathcal{L}$ defines a morphism of $\mathcal{N}$ into the linear system $|2\Theta|$ on J. We give a geometric interpretation of this morphism, and prove that it is of degree 2 if C is hyperelliptic and of degree 1 otherwise.

Introduction

Soient C une courbe de genre $g \geq 2$ et J sa jacobienne. Le système linéaire $|2\Theta|$ sur J joue un rôle important dans la géométrie de J, notamment en relation avec le problème de Schottky [B]. Il apparaît d'autre part en liaison avec l'étude des fibrés vectoriels de rang 2 sur C ([N–R1, N–R2]) de la façon suivante. Soit $\mathcal{N}$ l'espace des modules[1] des fibrés semi-stables de rang 2 sur C, de déterminant K_C ; on définit un

(*) Texte reçu le 31 mars 1987, révisé le 4 janvier 1988.

A. BEAUVILLE, Université de Paris-Sud, Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

[1] $\mathcal{N}$ est isomorphe à l'espace des modules des fibrés semi-stables de rang 2 et de déterminant $\mathcal{O}_C$. L'avantage de considérer $\mathcal{N}$ est que le diviseur déterminant Δ y est naturellement défini.

morphisme $\delta : \mathcal{N} \to |2\Theta|$ de sorte qu'on ait ensemblistement

$$\delta(E) = \{\alpha \in J \mid h^0(E \otimes \alpha) \geq 1\}.$$

Narasimhan et Ramanan prouvent que δ est un isomorphisme pour $g = 2$ [N–R1], et un plongement pour $g = 3$ et C non hyperelliptique [N–R2].

Le but de cet article est d'étudier le morphisme δ en le reliant au *diviseur déterminant* Δ de $\mathcal{N}$, que l'on peut définir comme la sous-variété réduite de $\mathcal{N}$ formée des classes de fibrés E tels que $h^0(E) \geq 1$; le fibré $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathcal{N}}(\Delta)$ est le *fibré déterminant*, introduit par Grothendieck, et qui apparaît dans les travaux récents de Quillen et Bismut–Freed. Avec ces notations, nos résultats principaux s'énoncent comme suit.

THÉORÈME 1.

a) *Le groupe de Picard de $\mathcal{N}$ est cyclique infini, engendré par $\mathcal{L}$; le faisceau dualisant de $\mathcal{N}$ est $\mathcal{L}^{-4}$.*

b) *Le système linéaire $|\Delta|$ est sans point base, et définit donc un morphisme $\varphi_\Delta : \mathcal{N} \to |\Delta|^*$. Il existe un isomorphisme canonique de $|\Delta|^*$ sur $|2\Theta|$ par lequel φ_Δ s'identifie à δ.*

THÉORÈME 2.

a) *Supposons C hyperelliptique. L'involution hyperelliptique de C définit alors une involution ι de $\mathcal{N}$, et δ induit par passage au quotient un plongement de $\mathcal{N}/\iota$ dans $|2\Theta|$.*

b) *Si C n'est pas hyperelliptique, le morphisme $\delta : \mathcal{N} \to |2\Theta|$ est de degré un (sur son image).*

On ignore si δ est un plongement lorsque C est non hyperelliptique de genre ≥ 4. Quoi qu'il en soit, $\delta(\mathcal{N})$ est une sous-variété de $|2\Theta|$, qui contient la variété de Kummer de J, et qui apparaît liée à plusieurs approches du problème de Schottky. Ainsi les identités de Schottky–Jung se traduisent géométriquement [M2] en exprimant que les variétés de Kummer associées à la jacobienne de C et à l'une de ses variétés de Prym s'intersectent dans $|2\Theta|$; or toutes ces variétés sont contenues dans $\delta(\mathcal{N})$ [vG]. D'autre part, Ramanan a observé que $\delta(\mathcal{N})$ contient toutes les trisécantes à la variété de Kummer de J, trisécantes qui jouent un rôle important dans des travaux récents sur le problème de Schottky et notamment dans la démonstration géométrique de la conjecture de Novikov (*cf.* [B]). On peut espérer que l'étude de $\delta(\mathcal{N})$ permette de mieux comprendre le lien entre ces différentes approches.

La difficulté essentielle dans la démonstration du THÉORÈME 1 réside dans le contrôle de la dimension de $H^0(\mathcal{N}, \mathcal{L})$; on y parvient, de manière quelque peu artificielle, en dominant $\mathcal{N}$ par la variété de Prym d'un revêtement double suffisamment ramifié de C. Nous exposons cette méthode au paragraphe 1, et l'utilisons au paragraphe 2 pour démontrer la partie b) du THÉORÈME 1. La partie a) est déduite au paragraphe 3 du résultat analogue pour les fibrés de degré impair, qui est déjà connu. Enfin le paragraphe 4 est consacré à la démonstration du THÉORÈME 2.

Je n'ai pas traité dans cet article le cas des fibrés de rang > 2, essentiellement parce que les systèmes linéaires $|r\Theta|$, pour $r \geq 3$, n'ont pas joué un grand rôle jusqu'à présent dans l'étude des variétés abéliennes principalement polarisées. On peut démontrer un analogue du THÉORÈME 1 pour ces fibrés, à l'aide de résultats récents de Hitchin; j'y reviendrai dans un article ultérieur.

0. Conventions et notations

0.1. — Dans cet article on désigne par C une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$, et par J sa jacobienne. Pour $d \in \mathbb{Z}$, on note J^d la variété (isomorphe à J) qui paramètre les fibrés en droites de degré d sur C. On pose en particulier $J^* = J^{g-1}$; cette variété possède un diviseur Θ canonique, défini par la condition $h^0(L) \geq 1$. Tout fibré L de J^* définit alors par translation un isomorphisme $t_L : J \to J^*$, et on pose $\Theta_L = t_L^*\Theta$; c'est un diviseur thêta de J.

Rappelons d'autre part qu'il existe un unique système linéaire (complet) sur J contenant le double de chaque diviseur thêta symétrique; on le notera un peu abusivement $|2\Theta|$.

0.2. — Soit X une variété compacte. Pour tout fibré E sur X, on note $h^0(X,E)$, ou simplement $h^0(E)$, la dimension de $H^0(X,E)$.

0.3. — Soient X une variété compacte intègre, et D un diviseur de Cartier effectif sur X. Le système linéaire $|D|$ est l'espace projectif des diviseurs de Cartier effectifs sur X, linéairement équivalents à D; il s'identifie donc à $\mathbb{P}(H^0(X,\mathcal{O}_X(D)))$. On notera φ_D l'application rationnelle de X dans l'espace dual $|D|^*$ définie par ce système linéaire.

1. Fibrés de rang 2 et revêtements doubles

1.1. — On considère dans ce paragraphe un revêtement double (ramifié) $\pi : \widetilde{C} \to C$. On note $\mathfrak{d}$ le fibré en droites sur C tel que $\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}} \cong \mathcal{O}_C \oplus \mathfrak{d}^{-1}$: le genre $\tilde{g}$ de $\widetilde{C}$ est égal à $2g - 1 + \deg \mathfrak{d}$. On désigne par $\widetilde{J}$ la jacobienne de $\widetilde{C}$, et par $\widetilde{J}^*$ la variété qui paramètre les fibrés en droites de degré $\tilde{g} - 1$ sur $\widetilde{C}$.

Soit L un fibré en droites sur $\widetilde{C}$; alors π_*L est un fibré de rang 2 sur

C, de déterminant $\mathrm{Nm}(L) \otimes \mathfrak{d}^{-1}$. En particulier pour $L \in \widetilde{J}^*$, le fibré $\pi_* L$ est de degré $2g-2$.

1.2. LEMME. — *Soit $L \in \widetilde{J}^*$. Pour que le fibré $\pi_* L$ ne soit pas semi-stable* (resp. *stable*), *il faut et il suffit qu'il existe un fibré en droites M sur C de degré $\geq g$* (resp. $\geq g-1$) *et un diviseur effectif D sur $\widetilde{C}$ tel que L soit isomorphe à $\pi^* M(D)$. L'ensemble des fibrés L possédant cette propriété est une sous-variété de $\widetilde{J}^*$, de codimension $\geq g+1$* (resp. $\geq g-1$).

Dire que $\pi_* L$ n'est pas semi-stable (resp. stable) signifie qu'il contient un sous-fibré en droites M de degré $\geq g$ (resp. $\geq g-1$), ou encore qu'il existe un fibré en droites M de degré $\geq g$ (resp. $\geq g-1$) et un homomorphisme non nul $\pi^* M \to L$, d'où la première assertion.

Soit $u_p : J^p \times \widetilde{C}^{(\tilde{g}-2p-1)} \to \widetilde{J}^*$ le morphisme défini par $u_p(M, D) = \pi^* M(D)$; son image V_p est une sous-variété de $\widetilde{J}^*$, de codimension $\geq 2p+1-g$. L'ensemble des L tels que $\pi_* L$ ne soit pas semi-stable (resp. stable) est la réunion des sous-variétés V_p pour $p \geq g$ (resp. $p \geq g-1$), d'où le lemme. □

1.3. — Nous désignerons par $\mathcal{M}_s$ l'espace des modules des fibrés stables de rang 2 et de degré $2g-2$ sur C; c'est une variété lisse, de dimension $4g-3$ [S1]. Soit d'autre part $\widetilde{J}_s^*$ l'ouvert de $\widetilde{J}^*$ formé des classes de fibrés L telles que $\pi_* L$ soit stable. L'application $L \mapsto \pi_* L$ définit un morphisme $\pi_* : \widetilde{J}_s^* \to \mathcal{M}_s$.

1.3. PROPOSITION. — *Si* $\deg \mathfrak{d} \geq 2g-2$, *le morphisme* $\pi_* : \widetilde{J}_s^* \to \mathcal{M}_s$ *est dominant.*

Soit $L \in \widetilde{J}_s^*$. Le faisceau $\pi_* L$ est muni d'une structure de $\pi_* \mathcal{O}_{\widetilde{C}}$-module, d'où l'on déduit un homomorphisme $\lambda : \pi_* \mathcal{O}_{\widetilde{C}} \to \mathcal{E}nd(\pi_* L)$. D'autre part l'espace tangent $T_{\pi_* L}(\mathcal{M}_s)$ s'identifie canoniquement à $H^1(C, \mathcal{E}nd(\pi_* L))$, et l'espace $T_L(\widetilde{J}^*)$ à $H^1(\widetilde{C}, \mathcal{O}_{\widetilde{C}})$, donc aussi à $H^1(C, \pi_* \mathcal{O}_{\widetilde{C}})$.

1.3.1. LEMME. — *La différentielle $T_L(\pi_*)$ s'identifie à $H^1(\lambda)$.*

Cela résulte bien sûr des propriétés de fonctorialité de la classe d'extension, mais faute de références adéquates il est plus rapide de donner une démonstration directe. Un vecteur $v \in T_L(\widetilde{J}^*)$ correspond à un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur $\widetilde{C} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^2))$ dont la réduction (mod. ϵ) est L, de sorte qu'on a une extension

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} \mathcal{L} \xrightarrow{p} L \longrightarrow 0.$$

Par action de π_* on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_* L \xrightarrow{\pi_* i} \pi_* \mathcal{L} \xrightarrow{\pi_* p} \pi_* L \longrightarrow 0,$$

d'où une classe d'extension dans $H^1(C, \mathcal{E}nd(\pi_*L))$, qui est l'image de v par $T_L(\pi_*)$.

Soit $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ un recouvrement ouvert de C, tel que p admette une section $s_\alpha : L \to \mathcal{L}$ au-dessus de $\pi^{-1}(U_\alpha)$. L'élément v de $H^1(\widetilde{C}, \mathcal{O}_{\widetilde{C}})$ est la classe du 1-cocycle $(\alpha,\beta) \mapsto a_{\alpha\beta} \in H^0(\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta), \mathcal{O}_{\widetilde{C}})$ défini par

$$s_\alpha(\ell) - s_\beta(\ell) = a_{\alpha\beta} i(\ell)$$

pour tout $\ell \in H^0(\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta), L)$. Alors $\pi_*s_\alpha : \pi_*L \to \pi_*\mathcal{L}$ définit une section de π_*p au-dessus de U_α, et on a $\pi_*s_\alpha - \pi_*s_\beta = \pi_*i \circ \lambda(a_{\alpha\beta})$ au-dessus de $U_\alpha \cap U_\beta$, pour α,β dans I. L'élément de $H^1(C, \mathcal{E}nd(\pi_*L))$ correspondant à $\pi_*\mathcal{L}$ est donc la classe du cocycle $(\alpha,\beta) \mapsto \lambda(a_{\alpha\beta})$, d'où le lemme.

1.3.2. — Revenant à la démonstration de 1.3, il suffit de prouver que $H^1(\lambda)$ est surjectif pour L assez général dans $\widetilde{J}^*$. Notons N le noyau de l'homomorphisme canonique (surjectif) $\pi^*\pi_*L \to L$; on a une suite exacte sur $\widetilde{C}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(L,L) \longrightarrow \mathcal{H}om\big(\pi^*\pi_*L, L\big) \longrightarrow \mathcal{H}om(N,L) \longrightarrow 0,$$

d'où, en appliquant π_* :

$$0 \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}} \xrightarrow{\ \lambda\ } \mathcal{E}nd(\pi_*L) \longrightarrow \pi_*(N^{-1} \otimes L) \longrightarrow 0.$$

Ainsi le conoyau de $H^1(\lambda)$ s'identifie à $H^1(\widetilde{C}, N^{-1} \otimes L)$. Notons σ l'involution de $\widetilde{C}$ qui échange les deux feuillets du revêtement π. On a $\det(\pi_*L) \cong \mathrm{Nm}(L) \otimes \mathfrak{d}^{-1}$, d'où $N = L^{-1} \otimes \pi^*\det(\pi_*L) = \sigma^*L \otimes \pi^*\mathfrak{d}^{-1}$ et $N^{-1} \otimes L \doteq L \otimes \sigma^*L^{-1} \otimes \pi^*\mathfrak{d}$. Comme le fibré canonique $K_{\widetilde{C}}$ de $\widetilde{C}$ est isomorphe à $\pi^*(K_C \otimes \mathfrak{d})$, on voit par dualité que $T_L(\pi_*)$ est surjectif si et seulement si l'espace $H^0(\widetilde{C}, \sigma^*L \otimes L^{-1} \otimes \pi^*K_C)$ est nul.

1.3.3. — Notons P le noyau de l'homomorphisme $\mathrm{Nm} : \widetilde{J} \to J$, q le morphisme de $\widetilde{J}^*_s$ dans P défini par $q(L) = \sigma^*L \otimes L^{-1}$, et V la sous-variété de P formée des éléments α tels que $h^0(\alpha \otimes \pi^*K_C) \geq 1$.

Nous venons de voir que le lieu de ramification de π_* (dans $\widetilde{J}^*_s$) est $q^{-1}(V)$. Or tout élément α de V s'écrit $\alpha = \pi^*K_C^{-1}(D)$, où D est un diviseur effectif sur $\widetilde{C}$ tel que $\pi_*D \in |K_C^{\otimes 2}|$; donc V est de dimension $\leq \dim |K_C^{\otimes 2}| = 3g-4$. Comme la dimension de P est $\tilde{g} - g = g - 1 + \deg \mathfrak{d}$, la proposition en résulte. $\square$

1.4. — La jacobienne J opère sur $\mathcal{M}_s$ (par produit tensoriel) et sur $\widetilde{J}^*_s$ (par image réciproque et produit tensoriel); le morphisme π_* est équivariant pour ces actions. Considérons en outre le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{J}^*_s \arrow[dr, "N'"] \arrow[dd, "\pi_*"'] & \\ & J^{2g-2} \\ \mathcal{M}_s \arrow[ur, "\det"'] & \end{tikzcd}$$

où N' est défini par $N'(L) = \mathrm{Nm}(L) \otimes \mathfrak{d}^{-1}$; si l'on fait opérer J sur J^{2g-2} par $(\alpha, L) \mapsto L \otimes \alpha^2$, toutes les flèches de ce triangle sont équivariantes. Posons alors

$$P^* = N'^{-1}(K_C) = \{L \in \widetilde{J}^* \mid \mathrm{Nm}(L) = K_C \otimes \mathfrak{d}\},$$

et $P^*_s = P^* \cap \widetilde{J}^*_s$; soit $\mathcal{N}_s$ la sous-variété de $\mathcal{M}_s$ paramétrant les fibrés de déterminant K_C. On déduit de 1.2, 1.3 et de ce qui précède le corollaire suivant :

1.5. COROLLAIRE.
a) *Le complémentaire de P^*_s dans P^* est de codimension $\geq g-1$.*
b) *Si* $\deg \mathfrak{d} \geq 2g-2$, *le morphisme $\pi_* : P^*_s \to \mathcal{N}_s$ est dominant.* □

1.6. — Rappelons ici un résultat de MUMFORD [M2, § 4] qui nous sera utile.

Soit $\widetilde{\Theta}$ le diviseur thêta canonique de $\widetilde{J}^*$. On définit une application rationnelle $\delta_P : P^* \to |2\Theta|$ en posant $\delta_P(L) = (\pi^*)^{-1}(\widetilde{\Theta}_L)$. Ensemblistement, on a donc

$$\delta_P(L) = \{\alpha \in J \mid h^0(L \otimes \pi^*\alpha) \geq 1\}.$$

Il existe alors un isomorphisme canonique $\gamma : |\widetilde{\Theta}_{|P^*}|^* \to |2\Theta|$ par lequel δ_P s'identifie à l'application rationnelle définie par le système linéaire $|\widetilde{\Theta}_{|P^*}|$.

1.7. — Considérons la sous-variété réduite Λ_s de $\mathcal{M}_s$ (resp. Δ_s de $\mathcal{N}_s$) définie par la condition $h^0(E) \geq 1$. Il est facile de voir que Λ_s et Δ_s sont des diviseurs dans les variétés lisses $\mathcal{M}_s$ et $\mathcal{N}_s$ respectivement, et qu'on a $\Delta_s = \Lambda_{s|\mathcal{N}_s}$.

1.7. LEMME. — *Supposons* $\deg \mathfrak{d} \geq 2g-2$.

a) *On a* $(\pi_*)^*\Lambda_s = \widetilde{\Theta}_{|\widetilde{J}^*_s}$ *et* $(\pi_*)^*\Delta_s = \widetilde{\Theta}_{|P^*_s}$.

b) *Si* $g \geq 3$, *on a*

$$\dim H^0(\mathcal{M}_s, \mathcal{O}(\Lambda_s)) = 1 \quad \text{et} \quad \dim H^0(\mathcal{N}_s, \mathcal{O}(\Delta_s)) \leq 2^g.$$

L'assertion a) est claire d'un point de vue ensembliste, puisque pour tout fibré en droites L sur $\widetilde{C}$ les espaces $H^0(\widetilde{C}, L)$ et $H^0(C, \pi_* L)$ sont isomorphes. Or il résulte de (1.3.3) que $\widetilde{\Theta}$ n'est pas contenu dans le lieu de ramification de π_* ; ainsi $(\pi_*)^*\Lambda_s$ est génériquement réduit, donc égal à $\widetilde{\Theta}_{|\widetilde{J}^*_s}$, d'où a).

Puisque π_* est dominant, les homomorphismes d'image réciproque $H^0(\mathcal{M}_s, \mathcal{O}(\Lambda_s)) \to H^0(\widetilde{J}^*_s, \mathcal{O}(\widetilde{\Theta}))$ et $H^0(\mathcal{N}_s, \mathcal{O}(\Delta_s)) \to H^0(P^*_s, \mathcal{O}(\widetilde{\Theta}_{|P^*_s}))$ sont injectifs ; puisque $\widetilde{J}^* - \widetilde{J}^*_s$ et $P^* - P^*_s$ sont de codimension ≥ 2 dans $\widetilde{J}^*$ et P^* respectivement (1.3 et 1.5), on a

$$\dim H^0\big(\widetilde{J}^*_s, \mathcal{O}(\widetilde{\Theta})\big) = \dim H^0\big(\widetilde{J}^*, \mathcal{O}(\widetilde{\Theta})\big) = 1,$$

et, compte-tenu de 1.6,

$$\begin{aligned}\dim H^0\big(P^*_s, \mathcal{O}(\widetilde{\Theta}_{|P^*_s})\big) &= \dim H^0\big(P^*, \mathcal{O}(\widetilde{\Theta}_{|P^*})\big)\\ &= \dim H^0\big(J, \mathcal{O}(2\Theta)\big) = 2^g,\end{aligned}$$

d'où b). □

1.8 LEMME. — *Les diviseurs* Λ_s *et* Δ_s *sont irréductibles.*

Soit E un fibré correspondant à un point de Λ_s ; choisissons une section non nulle s de E. Désignons par D le diviseur des zéros de s et par d le degré de D ; on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(D) \xrightarrow{s} E \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

où M est un fibré en droites sur C, de degré $2g-2-d$. On a $0 \leq d \leq g-2$ puisque E est stable.

Pour $0 \leq d \leq g-2$, notons X_d le fibré projectif au-dessus de $C^{(d)} \times J^{2g-2-d}$ dont la fibre au-dessus d'un point (D, M) est

$$\mathbb{P}\Big(\mathrm{Ext}^1\big(M, \mathcal{O}_C(D)\big)\Big).$$

Il résulte de ce qui précède que le diviseur Λ_s peut être paramétré par un ouvert de la réunion des X_d. Or la variété X_d est irréductible de dimension

$4g-4-d$, et Λ_s est de dimension $4g-4$; cela prouve l'irréductibilité de Λ_s. Celle de Δ_s se démontre de la même manière. $\square$

1.9. — Précisons dans quel sens Λ_s et Δ_s sont des *diviseurs déterminants.* Soient S une variété intègre et $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur $C \times S$; on note $\mathcal{E}_s$ la restriction de $\mathcal{E}$ à $C \times \{s\}$, pour $s \in S$, et g la projection de $C \times S$ sur S. Supposons de plus $h^0(\mathcal{E}_s) = h^1(\mathcal{E}_s) = 0$ pour s générique. On a alors $g_*\mathcal{E} = 0$; si

$$0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{u} L_0 \longrightarrow R^1 g_*\mathcal{E} \longrightarrow 0$$

est une résolution localement libre de $R^1 g_*\mathcal{E}$, le diviseur de $\det u$ est indépendant de la résolution choisie; c'est le *diviseur déterminant* associé à $\mathcal{E}$ (*cf.* [K–M], où ce diviseur est noté $\operatorname{div}(Rg_*\mathcal{E})$). Son support est l'ensemble des points s de S tels que $h^0(\mathcal{E}_s) \geq 1$.

Supposons maintenant que pour tout $s \in S$ le fibré $\mathcal{E}_s$ soit stable, de rang 2 et de degré $2g-2$ (resp. de déterminant K_C). On dispose alors d'une application classifiante $c : S \to \mathcal{M}_s$ (resp. $c' : S \to \mathcal{N}_s$), qui associe à s la classe d'isomorphisme de $\mathcal{E}_s$. D'après [R2, lemme 2.5], le diviseur déterminant associé à $\mathcal{E}$ ne dépend que du morphisme c.

1.10. PROPOSITION. — *Le diviseur déterminant associé à $\mathcal{E}$ est $c^*\Lambda_s$* (resp. $c'^*\Delta_s$).

Il suffit de démontrer la première égalité.

a) Traitons d'abord le cas particulier suivant. Choisissons un revêtement ramifié $\pi : \widetilde{C} \to C$ avec $\deg \mathfrak{d} \geq 2g-2$; posons $S = \widetilde{J}_s^*$, et prenons pour $\mathcal{E}$ l'image directe par le morphisme $(\pi, 1_s) : \widetilde{C} \times S \to C \times S$ d'un fibré de Poincaré $\mathcal{P}$ sur $\widetilde{C} \times S$. Le diviseur déterminant associé à $(\pi, 1_s)_*\mathcal{P}$ s'identifie alors à celui associé à $\mathcal{P}$, c'est-à-dire à $\widetilde{\Theta}$. D'autre part le morphisme c n'est autre que π_*. La proposition dans ce cas résulte alors de 1.7.

b) Traitons maintenant le cas où l'application $c : S \to \mathcal{M}_s$ est étale. L'égalité à démontrer est claire ensemblistement; il suffit de vérifier que les multiplicités sont les mêmes. Choisissons un revêtement double $\pi : \widetilde{C} \to C$ comme ci-dessus, et considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \widetilde{J}_s^* \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ S & \xrightarrow{\ c\ } & \mathcal{M}_s\,, \end{array}$$

où $T = S \times_{\mathcal{M}_s} \widetilde{J}_s^*$. Comme le point générique de Λ_s appartient à l'image de π_* (LEMMES 1.7 et 1.8), le point générique de chaque composante de

$c^*\Lambda_s$ appartient à l'image de ρ. Il suffit donc de vérifier que le diviseur $\rho^* c^* \Lambda_s$ coïncide avec le diviseur déterminant associé à $\rho^*\mathcal{E}$, ce qui résulte de a) par image réciproque.

c) Traitons le cas général. Par construction de $\mathcal{M}_s$, il existe une variété M et une application étale surjective $M \to \mathcal{M}_s$ qui provient d'un fibré de rang 2 sur $C \times M$. D'après b), cette application satisfait à l'énoncé de la proposition; par changement de base on en déduit comme ci-dessus que les diviseurs considérés sur S coïncident localement pour la topologie étale, ce qui entraîne qu'ils sont égaux. $\square$

2. Le morphisme δ et le diviseur Δ

2.1. — Les espaces de modules $\mathcal{M}_s$ et $\mathcal{N}_s$ admettent des compactifications naturelles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$, qui sont des variétés projectives normales (de dimensions respectives $4g-3$ et $3g-3$), définies comme suit [S1]. Soit E un fibré semi-stable de rang 2 sur C. S'il existe une suite exacte $0 \to L \to E \to L' \to 0$, avec $\deg L = \deg L'$, on pose $gr(E) = L \oplus L'$; dans le cas contraire on pose $gr(E) = E$. L'espace $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$) paramètre les fibrés semi-stables de rang 2 sur C, de degré $2g-2$ (resp. de déterminant K_C), modulo la relation d'équivalence $gr(E) \cong gr(E')$.

Les variétés $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont de Cohen–Macaulay : en effet, elles sont définies comme quotient catégorique (au sens de [M–F]) de variétés lisses par un groupe réductif, et un tel quotient est toujours de Cohen–Macaulay (*loc. cit.*, Appendice E au chapitre 1).

2.2. — Soit E un fibré semi-stable de rang 2 et de degré $2g-2$ sur C. On associe à E un diviseur effectif $\delta(E)$ sur J de la manière suivante ([Ra], [N–R2]) : si $\mathcal{P}$ est un fibré de Poincaré sur $C \times J$, $\delta(E)$ est le diviseur déterminant associé à $\mathcal{P} \otimes \mathrm{pr}_1^* E$ (1.9). Le support de $\delta(E)$ est donc l'ensemble des éléments α de J tels que $h^0(E \otimes \alpha) \geq 1$.

A toute famille de fibrés semi-stables sur C, de rang 2 et de degré $2g-2$, on associe ainsi une famille de diviseurs sur J. Soient L et L' des fibrés en droite de degré $g-1$ sur C; pour toute extension

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow L' \longrightarrow 0,$$

on a $\delta(E) = \delta(\mathrm{gr}(E)) = \Theta_L + \Theta_{L'}$ (*cf.* (0.1)). On en déduit que δ définit un morphisme de $\mathcal{M}$ dans l'espace des diviseurs effectifs sur J algébriquement équivalents à 2Θ. Pour $E = L \oplus (K \otimes L^{-1})$, on a $\delta(E) = \Theta_L + (-1)^*\Theta_L \in |2\Theta|$; comme $\mathcal{N}$ est unirationnel, on voit que δ induit un morphisme de $\mathcal{N}$ dans $|2\Theta|$.

Notons Δ la sous-variété réduite de $\mathcal{N}$ formée des classes de fibrés E tels que $h^0(E) \geq 1$.

2.3. LEMME. — *Δ est un diviseur de Cartier irréductible dans $\mathcal{N}$, et on a $\delta^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}_{\mathcal{N}}(\Delta)$.*

Soit H l'hyperplan dans $|2\Theta|$ formé des diviseurs passant par l'origine. Ensemblistement, le diviseur de Cartier δ^*H est égal à Δ. Par conséquent Δ est un diviseur de Weil; il est égal à l'adhérence de Δ_s dans $\mathcal{N}$, et par suite est irréductible (LEMME 1.8). Il suffit donc de prouver que Δ et δ^*H ont même multiplicité au point générique de Δ. Choisissons un revêtement double $\pi : \widetilde{C} \to C$ de façon que le morphisme $\pi_* : P_s^* \to \mathcal{N}$ soit dominant (1.5). La flèche $\delta \circ \pi_*$ n'est autre que le morphisme δ_P considéré en (1.6). Avec les notations de *loc. cit.*, on a donc $(\pi_*)^*\delta^*H = \widetilde{\Theta}|_{P_s^*} = (\pi_*)^*\Delta$, d'où $\Delta = \delta^*H$. $\square$

2.4. — Pour alléger les énoncés, nous fixons dans ce qui suit une thêta-caractéristique κ sur C (c'est-à-dire un fibré en droites tel que $\kappa^2 \cong K_C$). Soit $j : J \to \mathcal{N}$ le morphisme défini par $j(\alpha) = (\kappa \otimes \alpha) \oplus (\kappa \otimes \alpha^{-1})$. Par passage au quotient, j induit un isomorphisme de $J/\{\pm 1\}$ sur $\mathcal{N} - \mathcal{N}_s$.

Le choix de κ permet aussi de définir un diviseur thêta symétrique Θ_κ — que nous noterons simplement Θ — sur J. Soit $\delta_J : J \to |2\Theta|$ le morphisme défini par $\delta_J(\alpha) = T_\alpha^*\Theta + T_{-\alpha}^*\Theta$ (on note T_α la translation $x \mapsto x + \alpha$ de J); il existe un isomorphisme canonique $\beta : |2\Theta| \to |2\Theta|^*$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & {|2\Theta|} \arrow[d, "\beta"] \\ J \arrow[ur, "\delta_J"] \arrow[r, "\varphi_{2\Theta}"'] & {|2\Theta|^*} \end{tikzcd}$$

(*cf.* [M2, p.335]). L'image de δ_J (ou de $\varphi_{2\Theta}$) est la variété de Kummer de J.

Nous noterons $\mathcal{L}$ le faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathcal{N}}(\Delta)$.

2.5. PROPOSITION. — *On a $j^*\mathcal{L} = \mathcal{O}_J(2\Theta)$, et l'homomorphisme $j^* : H^0(\mathcal{N}, \mathcal{L}) \to H^0(J, \mathcal{O}_J(2\Theta))$ est bijectif. Si l'on identifie $|\Delta|$ à $|2\Theta|$ par cet isomorphisme, le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd}
 & & {|2\Theta|} \arrow[dd, "\beta"] \\
J \arrow[r, "j"] \arrow[urr, bend left, "\delta_J"] \arrow[drr, bend right, "\varphi_{2\Theta}"'] & \mathcal{N} \arrow[ur, "\delta"'] \arrow[dr, "\varphi_\Delta"] & \\
 & & {|2\Theta|^*}
\end{tikzcd}$$

Le cas $g = 2$ est traité dans [N–R1] : le morphisme $\delta : \mathcal{N} \to |2\Theta|$ est un isomorphisme, donc identifie $\mathcal{N}$ à $\mathbb{P}^3$; on a alors $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$, et la proposition devient évidente.

Supposons désormais $g \geq 3$. Compte tenu de (2.3), on a

$$j^*\mathcal{L} = j^*\delta^*\mathcal{O}(1) = \delta_J^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}_J(2\Theta).$$

Le morphisme $\beta \circ \delta : \mathcal{N} \to |2\Theta|^*$ est défini par le fibré en droites $\mathcal{L}$ et un homomorphisme $\varphi : H^0(J, \mathcal{O}_J(2\Theta)) \to H^0(\mathcal{N}, \mathcal{L})$; le composé $H^0(J, \mathcal{O}_J(2\Theta)) \xrightarrow{\varphi} H^0(\mathcal{N}, \mathcal{L}) \xrightarrow{j^*} H^0(J, \mathcal{O}_J(2\Theta))$ définit le morphisme

$$\beta \circ \delta \circ j = \beta \circ \delta_J = \varphi_{2\Theta},$$

donc est une homothétie. Par suite, en vertu du LEMME 1.7b, φ et j^* sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre (à homothétie près), ce qui équivaut à la commutativité du diagramme 2.5. $\square$

2.6. *Remarques.*

1) Le groupe J_2 des points d'ordre 2 de J opère sur $\mathcal{N}$, et le fibré $\mathcal{L}$ est stable pour cette action. On peut alors considérer le groupe de Mumford $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ formé des automorphismes de $\mathcal{L}$ qui relèvent l'action d'un élément de J_2. L'application équivariante j définit un isomorphisme j^* de $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ sur $\mathcal{G}(2\Theta)$. D'autre part $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ opère sur $H^0(\mathcal{N}, \mathcal{L})$; l'énoncé précédent signifie essentiellement que la *représentation de $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ dans $H^0(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ est irréductible* (*cf.* [M1]).

2) Supposons choisie une base symplectique de $H^1(C, \mathbb{Z})$, ce qui permet de définir la matrice des périodes $\tau \in H_g$. L'espace $H^0(J, \mathcal{O}_J(2\Theta))$ s'identifie alors à l'espace des fonctions thêta du second ordre sur $\mathbb{C}^g$, relatives à τ; une base de cet espace est fournie par les fonctions $\theta \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} (2z, 2\tau)$, pour $r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$. A l'aide de l'isomorphisme j^*, on en déduit une *base canonique* (à homothétie près) de $H^0(\mathcal{N}, \mathcal{L})$, dont la restriction à J est la base de $H^0(J, \mathcal{O}_J(2\Theta))$ définie par les fonctions thêta ci-dessus. On peut

donc dire que les *fonctions thêta du second ordre se prolongent à* $\mathcal{N}$, en tant que sections du fibré $\mathcal{L}$.

Bien entendu il suffit pour obtenir une telle base d'une donnée beaucoup plus faible que celle d'une base symplectique, à savoir celle d'une θ-structure sur $\mathcal{O}_J(2\Theta)$ (*cf.* [M1]).

3) Soit $\pi : \widetilde{C} \to C$ un revêtement double ramifié tel que le morphisme $\pi_* : P_s^* \to \mathcal{N}$ soit dominant (1.5). Posons $\Xi = \tilde{\Theta}_{|P^*}$. Il résulte de (1.7) et (2.5) que l'homomorphisme $(\pi_*)^* : H^0(\mathcal{N}, \mathcal{L}) \to H^0(P_s^*, \mathcal{O}(\Xi))$ est bijectif. Identifions les systèmes linéaires $|\Delta|$ et $|\Xi|$ à $|2\Theta|$ à l'aide de $(\pi_*)^*$ et j^* ; compte tenu de (1.6) et de la PROPOSITION 2.5, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & & {|2\Theta|} \arrow[dd, "\beta"] \\ P_s^* \arrow[urr, "\delta_P"] \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[drr, "\varphi_\Xi"'] & \mathcal{N} \arrow[ur, "\delta"] \arrow[dr, "\varphi_\Delta"] & \\ & & {|2\Theta|^*} \end{tikzcd}$$

est commutatif. On en déduit en particulier que $\delta(\mathcal{N})$ s'identifie à l'image de l'application rationnelle de P dans l'espace projectif définie par le fibré ample $\mathcal{O}_P(\tilde{\Theta}_{|P})$ sur la variété de Prym P. Malheureusement je ne sais pas utiliser cette remarque pour obtenir des informations sur $\delta(\mathcal{N})$.

4) Je laisse au lecteur le soin de formuler la proposition et les remarques précédentes sans choisir une thêta-caractéristique, en remplaçant le morphisme $j : J \to \mathcal{N}$ par le morphisme canonique $j^* : J^* \to \mathcal{N}$ défini par $j^*(L) = L \oplus (K \otimes L^{-1})$.

3. Le groupe de Picard de $\mathcal{N}$

Le groupe de Picard de l'espace des modules des fibrés stables de rang r et de degré d est connu lorsque r et d sont premiers entre eux [R], mais je ne connais pas de référence dans le cas qui nous intéresse. Nous allons voir que le calcul se ramène facilement au cas connu.

3.1. PROPOSITION.

a) *Le groupe* $\operatorname{Pic}(\mathcal{N})$ *est cyclique infini, engendré par la classe de* $\mathcal{L}$.

b) *Pour* $g \geq 3$, *l'homomorphisme de restriction* $\operatorname{Pic}(\mathcal{N}) \to \operatorname{Pic}(\mathcal{N}_s)$ *est bijectif.*

Pour $g = 2$, δ fournit un isomorphisme de $\mathcal{N}$ sur $\mathbb{P}^3$, par lequel $\mathcal{N} - \mathcal{N}_s$ correspond à la surface de Kummer. On a donc $\operatorname{Pic}(\mathcal{N}) = \mathbb{Z} \cdot [\mathcal{L}]$ et $\operatorname{Pic}(\mathcal{N}_s) = \mathbb{Z} \cdot [\mathcal{L}]/\mathbb{Z} \cdot [\mathcal{L}^4]$.

Supposons désormais $g \geq 3$. Fixons un point p de C ; soit $\mathcal{N}_p$ l'espace des modules des fibrés stables sur C, de rang 2 et de déterminant $K_C(p)$. Cet espace est lisse compact, et il existe un fibré de Poincaré $\mathcal{E}$ sur $C \times \mathcal{N}_p$ (*cf.* par exemple [S2]). Notons $\mathcal{P}$ le fibré en droites projectives sur $\mathcal{N}_p$ associé au fibré $\mathcal{E}^*|_{\{p\}\times\mathcal{N}_p}$; un point de $\mathcal{P}$ correspond à la donnée d'un fibré E de $\mathcal{N}_p$ et d'un homomorphisme non nul $u : E \to \mathbb{C}(p)$, considéré à homothétie près.[2] En associant à (E,u) le fibré $\operatorname{Ker} u$, on obtient un morphisme $g : \mathcal{P} \to \mathcal{N}$. La fibre de g en un point $[F]$ de $\mathcal{N}_s$ est la droite projective $\mathbb{P}(\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathbb{C}(p), F))$.

Posons $\mathcal{P}_s = g^{-1}(\mathcal{N}_s)$, et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Pic}(\mathcal{N}) & \hookrightarrow & \operatorname{Pic}(\mathcal{N}_s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Pic}(\mathcal{P}) & \twoheadrightarrow & \operatorname{Pic}(\mathcal{P}_s), \end{array}$$

où la seconde flèche horizontale est surjective, et la première injective parce que $\mathcal{N}$ est normale et $\operatorname{codim}(\mathcal{N} - \mathcal{N}_s) \geq 2$. Comme $\operatorname{Pic}(\mathcal{N}_p)$ est cyclique [R], on a $\operatorname{Pic}(\mathcal{P}) = \mathbb{Z}^2$; comme $\operatorname{Pic}(\mathcal{P}_s)$ est isomorphe à $\operatorname{Pic}(\mathcal{N}_s) \oplus \mathbb{Z}$ et que $\operatorname{Pic}(\mathcal{N}_s)$ contient $\mathbb{Z}$, on a nécessairement $\operatorname{Pic}(\mathcal{P}_s) = \mathbb{Z}^2$ et $\operatorname{Pic}(\mathcal{N}_s) = \mathbb{Z}$. Il résulte du LEMME 1.7 que la classe de $\mathcal{L}$ dans $\operatorname{Pic}(\mathcal{N}_s)$ n'est pas divisible, donc engendre $\operatorname{Pic}(\mathcal{N}_s)$ et aussi $\operatorname{Pic}(\mathcal{N})$, d'où la proposition. $\square$

3.2. COROLLAIRE. — *Le morphisme $\delta : \mathcal{N} \to |2\Theta|$ est fini.*

En effet le morphisme δ s'identifie à $\varphi_{\mathcal{L}}$ (PROPOSITION 2.5), et $\mathcal{L}$ est ample d'après 3.1. $\square$

3.3. PROPOSITION. — *Le faisceau dualisant $K_{\mathcal{N}}$ de $\mathcal{N}$ est isomorphe à $\mathcal{L}^{-4}$.*

Rappelons que la variété $\mathcal{N}$ est de Cohen–Macaulay, ce qui permet de parler de son faisceau dualisant ; la proposition montre d'ailleurs que celui-ci est inversible, donc que $\mathcal{N}$ est une variété de Gorenstein.

Soient S une variété lisse et $\mathcal{E}$ un fibré de rang 2 sur $C \times S$; on notera f et g les projections de $C \times S$ sur C et S respectivement. On suppose que pour tout $s \in S$ la restriction de $\mathcal{E}$ à $C \times \{s\}$ est stable, de déterminant K_C, de sorte qu'on associe à $\mathcal{E}$ un morphisme $c : S \to \mathcal{N}_s$. D'après (1.9) le déterminant du complexe $Rg_*\mathcal{E}$ est $c^*\mathcal{L}_s$. D'autre part, notons $\mathfrak{sl}(\mathcal{E})$ le sous-fibré de $\mathcal{E}nd(\mathcal{E})$ formé des endomorphismes de trace nulle ; on a $g_*(\mathfrak{sl}(\mathcal{E})) = 0$, et il résulte du calcul du fibré tangent à $\mathcal{N}_s$ que le faisceau $R^1g_*(\mathfrak{sl}(\mathcal{E}))$ est isomorphe à $c^*T_{\mathcal{N}_s}$.

[2] On note $\mathbb{C}(p)$ le faisceau sur C de fibre $\mathbb{C}$ en p et 0 ailleurs.

Si $\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel sur $C \times S$, le théorème de Grothendieck–Riemann–Roch [SGA 6] donne dans $CH(S) \otimes \mathbb{Q}$

$$\mathrm{ch}(Rg_*\mathcal{F}) = g_*\bigl(f^* \operatorname{Todd}(C) \cdot \mathrm{ch}\,\mathcal{F}\bigr)$$

soit, dans $\operatorname{Pic}(S) \otimes \mathbb{Q}$,

$$c_1(Rg_*\mathcal{F}) = \tfrac{1}{2} g_*\bigl(c_1^2(\mathcal{F}) - 2c_2(\mathcal{F}) - c_1(\mathcal{F}) f^* c_1(K_C)\bigr).$$

Appliquons ce résultat à $\mathcal{E}$, puis $\mathfrak{sl}(\mathcal{E})$. Comme le fibré $\det \mathcal{E} \otimes f^* K_C^{-1}$ provient de S, on a $g_*(c_1(\mathcal{E}) - f^*c_1(K_C))^2 = 0$, d'où $g_* c_1^2(\mathcal{E}) = 2g_*(c_1(\mathcal{E}) f^* c_1(K_C))$. On trouve alors

$$c_1(Rg_*\mathcal{E}) = \tfrac{1}{4} g_*\bigl(c_1^2(\mathcal{E}) - 4c_2(\mathcal{E})\bigr).$$

D'autre part on a $c_1(\mathfrak{sl}(\mathcal{E})) = 0$ et $c_2(\mathfrak{sl}(\mathcal{E})) = c_2(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^*) = 4c_2(\mathcal{E}) - c_1^2(\mathcal{E})$, d'où

$$c_1\bigl(Rg_*\mathfrak{sl}(\mathcal{E})\bigr) = g_*\bigl(c_1^2(\mathcal{E}) - 4c_2(\mathcal{E})\bigr).$$

On en déduit l'égalité $c^* K_{\mathcal{N}_s} = c^* \mathcal{L}_s^{-4}$ dans $\operatorname{Pic}(S) \otimes \mathbb{Q}$. On conclut facilement qu'on a $K_{\mathcal{N}_s} = \mathcal{L}_s^{-4}$ (par exemple en prenant S et $\mathcal{E}$ comme dans la démonstration de 1.9). $\square$

3.5. *Exemples.*

1) Pour $g = 2$, $\mathcal{N}$ s'identifie à $\mathbb{P}^3$ par l'isomorphisme δ; on a alors $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ et $K_{\mathcal{N}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)$.

2) Lorsque C est non hyperelliptique de genre 3, δ définit un isomorphisme de $\mathcal{N}$ sur une hypersurface quartique H de $\mathbb{P}^7$ [N–R2]. On a bien $K_{\mathcal{N}} = \mathcal{O}_H(-4) = \mathcal{L}^{-4}$. Rappelons (*loc. cit.*) que la variété de Kummer $K \subset \mathbb{P}^7$ est alors le lieu singulier de H, de sorte que si h désigne une équation de H, la variété K est définie ensemblistement par les équations cubiques $h'_{X_i} = 0$ $(0 \leq i \leq 7)$.

3) Lorsque C est hyperelliptique de genre 3, δ définit un morphisme de degré 2 sur une quadrique lisse Q de $\mathbb{P}^7$ ([vG] et (4.1) ci-dessous). La formule $K_{\mathcal{N}} = \mathcal{L}^{-4} = \delta^*(K_Q(2))$ montre que le lieu de ramification de δ dans Q est la trace sur Q d'une hypersurface H de degré 4. La variété de Kummer $K \subset \mathbb{P}^7$ est alors le lieu singulier de $Q \cap H$; en notant q et h des équations de Q et H respectivement, on en déduit que K est définie ensemblistement par l'annulation de q, h et des mineurs de degré quatre $q'_{X_i} h'_{X_j} - q'_{X_j} h'_{X_i}$, pour $0 \leq i < j \leq 7$.

4. Structure de δ

Nous allons maintenant démontrer le THÉORÈME 2.

4.1. — Le cas hyperelliptique est une conséquence directe des résultats de [D–R] et [vG]. Soit ι l'involution de $\mathcal{N}$ déduite de l'involution hyperelliptique. Desale et Ramanan décrivent $\mathcal{N}/\iota$ comme une sous-variété de la grassmannienne G des sous-espaces isotropes maximaux dans $\mathbb{C}^{2g+2}$ (muni de la forme quadratique standard) ; Van Geemen construit, à l'aide de la représentation spinorielle de $Spin(2g+2,\mathbb{C})$, un plongement de G dans $|2\Theta|$, qui induit sur $\mathcal{N} - \mathcal{N}_s$ le plongement de Kummer (observons que $\mathcal{N} - \mathcal{N}_s$ est contenu dans le lieu fixe de ι). Avec les notations de (2.4), on a donc un morphisme $g : \mathcal{N} \to |2\Theta|$, tel que $g \circ j = \delta_J$, et qui définit un plongement de $\mathcal{N}/\iota$ dans $|2\Theta|$. On a alors nécessairement $g^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{L}$; comme $j^* : H^0(\mathcal{N},\mathcal{L}) \to H^0(J,\mathcal{O}_J(2\Theta))$ est bijectif, on déduit de $g \circ j = \delta \circ j$ qu'on a $g = \delta$, d'où le théorème dans ce cas.

Pour traiter le cas non hyperelliptique, nous utiliserons le lemme suivant.

4.2. LEMME. — *Soient E un fibré de $\mathcal{N}$ et p un point de C, tels que $h^0(E(p)) = 2$; soit (s,t) une base de $H^0(C,E(p))$. Notons d'autre part i_p le plongement de C dans J défini par $i_p(x) = \mathcal{O}_C(x-p)$. Pour que $i_p(C)$ ne soit pas contenu dans le support de $\delta(E)$, il faut et il suffit qu'on ait $s \wedge t \neq 0$; on a alors $i_p^*\delta(E) = \operatorname{div}(s \wedge t)$.*

Une fois encore l'énoncé est facile ensemblistement : pour qu'un point x de C appartienne au support de $i_p^*\delta(E)$, il faut et il suffit qu'on ait $h^0(E(x-p)) \geq 1$, ou encore, par Riemann–Roch, $h^0(E(p-x)) \geq 1$; cela signifie qu'il existe des scalaires α, β tels que $\alpha s(x) + \beta t(x) = 0$, autrement dit que $s \wedge t$ s'annule en x.

Pour tenir compte des multiplicités, il nous faut calculer le diviseur $i_p^*\delta(E)$ lorsque $i_p(C) \not\subset \operatorname{Supp}\delta(E)$. Soit $\mathcal{P}$ un fibré de Poincaré sur $C \times J$, et soit $\mathcal{P}_p$ son image réciproque sur $C \times C$ par le morphisme $(1_C, i_p)$. Notons f et g les deux projections de $C \times C$ sur C; pour toute résolution localement libre

$$0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{u} L_0 \longrightarrow R^1 g_*(f^*E \otimes \mathcal{P}_p^{-1}) \longrightarrow 0,$$

on a $i_p^*\delta(E) = \operatorname{div}(\det u)$.

Par définition le fibré $\mathcal{P}_p$ vérifie $\mathcal{P}_p|_{C\times\{x\}} = \mathcal{O}_C(x-p)$ pour tout $x \in C$. Comme $\det u$ ne change pas si l'on remplace $\mathcal{P}_p$ par $\mathcal{P}_p \otimes g^*M$, avec $M \in \operatorname{Pic}(C)$, on peut prendre $\mathcal{P}_p = \mathcal{O}(D - f^*[p])$, où D désigne la diagonale de $C \times C$. Notons d l'injection canonique de D dans $C \times C$, et considérons la suite exacte sur $C \times C$

$$0 \longrightarrow f^*E(p) \otimes \mathcal{O}(-D) \longrightarrow f^*E(p) \longrightarrow d_*E(p) \longrightarrow 0;$$

par application de Rg_*, on en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(C, E(p)) \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_C \xrightarrow{v} E(p) \longrightarrow R^1g_*(f^*E \otimes \mathcal{P}_p^{-1}) \longrightarrow 0,$$

où v est l'homomorphisme canonique. On a par suite

$$i_p^*\delta(E) = \operatorname{div}(\det v) = \operatorname{div}(s \wedge t). \quad \square$$

Comme la variété intègre Δ est l'image inverse d'un hyperplan par δ, il suffit pour démontrer le THÉORÈME 2b de prouver que la restriction de δ à Δ est génériquement injective. Nous allons démontrer un énoncé un peu plus précis. Notons Δ_0 l'ouvert de Δ formé des fibrés E tels que $h^0(E) = 1$ et $h^0(E(-x)) = 0$ pour tout $x \in C$.

4.3. PROPOSITION. — *La restriction de δ à Δ_0 est injective.*

Soient E un fibré de Δ_0, et s une section non nulle de E. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \xrightarrow{s} E \xrightarrow{\wedge s} K_C \longrightarrow 0$$

fournit une classe d'extension $e \in H^1(C, K_C^{-1})$. Soit p un point de C. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{\wedge s} & K_C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(p) & \xrightarrow{s} & E(p) & \xrightarrow{s} & K_C(p) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donne lieu en cohomologie à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^0(C, K_C) & \xrightarrow{\varphi(e)} & H^1(C, \mathcal{O}_C) \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\
H^0(C, E(p)) & \longrightarrow & H^0(C, K_C(p)) & \xrightarrow{\varphi_p(e)} & H^1(C, \mathcal{O}_C(p)),
\end{array}$$

où $\varphi(e)$ et $\varphi_p(e)$ sont les homomorphismes de cup-produit avec e. Dans ce diagramme α est bijectif, $\varphi(e)$ est bijectif puisque $h^0(E) = 1$, et $\varphi(e) \circ \alpha^{-1}$ applique le noyau de $\varphi_p(e)$ sur celui de β. Or l'hypothèse $h^0(E(-p)) = 0$ entraîne, par Riemann-Roch, $h^0(E(p)) = 2$; si donc t est un élément de $H^0(C, E(p))$ non proportionnel à s, le noyau de $\varphi_p(e)$ est engendré par $s \wedge t$. Traduisons cela en termes de l'application linéaire projective $\bar{\varphi}(e) : |K_C| \to \mathbb{P}(H^1(C, \mathcal{O}_C))$ déduite de $\varphi(e)$. Identifions $\mathbb{P}(H^1(C, \mathcal{O}_C))$ à $|K_C|^*$ par dualité; le noyau de β correspond alors à l'image de p par l'application canonique $k : C \to |K_C|^*$. D'autre part, d'après le LEMME 4.2, le diviseur de la forme $\alpha^{-1}(s \wedge t)$ est $i_p^*\delta(E) - 2p$. On obtient finalement

$$\bar{\varphi}(e)^{-1}\big(k(p)\big) = i_p^*\delta(E) - 2p.$$

Soit alors F un fibré de Δ_0 tel que $\delta(F) = \delta(E)$, et soit $f \in H^1(C, K_C^{-1})$ la classe d'extension correspondante. Il résulte de la formule précédente que $\bar{\varphi}(e)^{-1}$ et $\bar{\varphi}(f)^{-1}$ coïncident sur $k(C)$, donc sur $|K_C|^*$. Il existe par suite $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel qu'on ait $\varphi(f) = \lambda\varphi(e)$. Or φ est injective : cela résulte par dualité du théorème de Noether, qui affirme que la flèche naturelle $S^2H^0(C, K_C) \to H^0(C, K_C^2)$ est surjective (lorsque C n'est pas hyperelliptique!). On a donc $f = \lambda e$, et F est isomorphe à E. $\square$

4.4. *Remarques.*

1) On a établi en passant que Δ_0 est isomorphe à l'ouvert de $\mathbb{P}(H^1(C, K_C^{-1}))$ formé des classes e telles que $\varphi(e)$ soit inversible (ce qui montre au passage que Δ_0 n'est pas vide). En particulier la variété Δ est rationnelle (on ignore si $\mathcal{N}$ est rationnelle).

2) Il est facile, avec les mêmes méthodes, de trouver un ouvert Δ_1 de Δ, plus grand que Δ_0, sur lequel δ est encore injective. Par contre je ne sais pas construire directement un ouvert de $\mathcal{N}$ sur lequel δ soit injective (resp. une immersion).

BIBLIOGRAPHIE

[B] BEAUVILLE (A.). — Le problème de Schottky et la conjecture de Novikov, [Exposé **675** au Séminaire Bourbaki], *Astérisque*, t. **152–153**, 1987, p. 101–112.

[D–R] DESALE (U.V.) and RAMANAN (S.). — Classification of vector bundles of rank 2 on hyperelliptic curves, *Invent. Math.*, t. **38**, 1976, p. 161–185.

[vG] VAN GEEMEN (B.). — Schottky-Jung relations and vector bundles on hyperelliptic curves, *Math. Ann.*, t. **281**, 1988, p. 431–449.

[H] HARTSHORNE (R.). — *Algebraic geometry*. — New York-Heidelberg-Berlin, Springer-Verlag, 1977.

[K–M] KNUDSEN (F.) and MUMFORD (D.). — The projectivity of the moduli space of stable curves I, *Math. Scand.*, t. **39**, 1976, p. 19–55.
[M1] MUMFORD (D.). — On the equations defining abelian varieties, *Invent. Math.*, t. **1**, 1966, p. 287–354.
[M2] MUMFORD (D.). — Prym varieties I, *Contributions to Analysis*, p. 325–350. London-New-York, Academic Press, 1974.
[M–F] MUMFORD (D.) and FOGARTY (J.). — *Geometric invariant theory (2^{nd} edition).* Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1982.
[N–R1] NARASIMHAN (M.S.) and RAMANAN (S.). — Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface, *Ann. of Math.*, t. **89**, 1969, p. 19–51.
[N–R2] NARASIMHAN (M.S.) and RAMANAN (S.). — 2θ-linear systems on Abelian varieties, *Vector bundles on algebraic varieties*, p. 415–427. — Oxford University Press, 1987.
[R] RAMANAN (S.). — The moduli spaces of vector bundles over an algebraic curve, *Math. Ann.*, t. **200**, 1973, p. 69–84.
[Ra] RAYNAUD (M.). — Sections des fibrés vectoriels sur une courbe, *Bull. Soc. Math. France*, t. **110**, 1982, p. 103–125.
[S1] SESHADRI (C.S.). — Space of unitary vector bundles on a compact Riemann surface, *Ann. of Math.*, t. **85**, 1967, p. 303–336.
[S2] SESHADRI (C.S.). — *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques.* — Astérisque **96**, 1982.
[SGA 6] BERTHELOT (P.), GROTHENDIECK (A.) et ILLUSIE (L.). — Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch (SGA 6). *Lecture Notes in Math.* **225**, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1971.