BULLETIN DE LA S. M. F.

M. BRION
D. LUNA

Sur la structure locale des variétés sphériques

Bulletin de la S. M. F., tome 115 (1987), p. 211-226
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115__211_0>

Bull. Soc. math. France,
115, 1987, p. 211-226.

SUR LA STRUCTURE LOCALE DES VARIÉTÉS SPHÉRIQUES

PAR

M. BRION et D. LUNA (*)

RÉSUMÉ. — Soit X une variété algébrique normale sur laquelle opère un groupe algébrique réductif G; une telle variété est appelée « sphérique » si un sous-groupe de Borel de G a une orbite ouverte dans X. Soit T un tore maximal de G et soit $x \in X$ un point fixé par T (il n'y a qu'un nombre fini de tels x). Nous décrivons l'opération de certains sous-groupes paraboliques de G contenant T, dans un voisinage ouvert affine de x dans X. Nous appliquons ensuite ce résultat à l'étude des décompositions cellulaires de X associées à l'opération de T.

ABSTRACT. — Let X be a normal algebraic variety on which operates a reductive algebraic group G; such a variety is called "spherical" if a Borel subgroup of G has an open orbit in X. Let T be a maximal torus in G, and let $x \in X$ be fixed by T (there are only finitely many such x). We describe the action of certain parabolic subgroups of G containing T, on an open affine neighborhood of x in X. We apply this to study the cellular decompositions of X associated with the action of T.

Soit G un groupe algébrique réductif connexe, et soit X une G-variété algébrique normale (le corps de base étant algébriquement clos et de caractéristique nulle). Nous dirons que X est *sphérique* si un — et par conséquent tout — sous-groupe de Borel de G a une orbite dense dans X.

Soit T un tore maximal de G et soit X une G-variété sphérique. Le résultat principal de ce travail concerne la structure locale de l'opération de G au voisinage d'un point fixe x de T dans X. Nous montrons (*voir* 1.5) qu'il existe des sous-groupes paraboliques P de G possédant les propriétés suivantes :

(1) P contient T;

(2) P_x (le sous-groupe d'isotropie de P en x) est réductif;

(*) Texte reçu le 7 avril 1986

M. BRION et D. LUNA, Institut Fourier, B.P. n° 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex (France).

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1987/02 211 16/$ 3.60

(3) quelles que soient les sous-P_x-variétés affines A de G et S de X vérifiant certaines conditions de transversalité (pour les détails *voir* 1.1 et 1.2), le morphisme naturel $P *_{P_x} (A \times S) \to X$ est une immersion ouverte (ici $P *_{P_x} (A \times S)$ désigne la P-variété affine, espace total du fibré associé au fibré principal $P \to P/P_x$, de fibre type $A \times S$).

Lorsque G_x est un sous-groupe parabolique de G, il n'y a qu'un seul sous-groupe parabolique P de G qui vérifie (1) et (2) (celui qui est opposé à G_x) et on retombe sur un résultat de [4], § 1.

Notre principale motivation pour trouver l'énoncé ci-dessus a été l'article [7] de C. De Concini-T. A. Springer, article dans lequel sont étudiées les décompositions cellulaires (à la Bialynicki-Birula, *voir* [2]) de certaines compactifications des espaces symétriques adjoints (*voir* aussi [6]). Dans la deuxième partie de notre travail, nous expliquons comment on peut adapter, grâce à ce qui précède, quelques-uns de leurs énoncés au cadre plus général des variétés sphériques.

Nous remercions C. De Concini, C. Procesi et T. A. Springer de nous avoir communiqué leurs résultats.

1

Soit G un groupe algébrique réductif connexe, et soit X une G-variété algébrique normale et irréductible, le corps de base k étant algébriquement clos et de caractéristique nulle.

1.1. Soit $x \in X$. On dira qu'une sous-variété (localement fermée) S de X est transverse à $G.x$ en x si :

(1) S est affine, normale et irréductible;

(2) $S \cap G.x = \{x\}$;

(3) le morphisme $G \times S \to X$ (donné par l'opération de G dans X) est lisse en $(1, x)$.

Lemme. — *Soit H un sous-groupe réductif de G_x. Il existe des sous-variétés de X transverses à $G.x$ en x et stables par H.*

Preuve. — D'après un résultat de Sumihiro [18], quitte à remplacer X par un voisinage ouvert G-stable de x dans X, et G par un revêtement fini, on peut supposer X plongé dans un espace projectif $\mathbf{P}(V)$, où V est un G-module rationnel de dimension finie. Puisque l'opération de H

dans V est complètement réductible, on peut trouver un sous-espace vectoriel W de V, stable par H et vérifiant :

$$(*) \qquad T_x G.x \oplus T_x \mathbf{P}(W) = T_x \mathbf{P}(V).$$

Posons $S' = \mathbf{P}(W) \cap X$: c'est un fermé de X qui contient x et qui est stable par H. De $(*)$ résulte que $G \times \mathbf{P}(W) \to \mathbf{P}(V)$ est lisse en $(1, x)$. Puisque le carré

$$\begin{array}{ccc} G \times S' & \to & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times \mathbf{P}(W) & \to & \mathbf{P}(V) \end{array}$$

est cartésien, il s'ensuit que $G \times S' \to X$ est lisse en $(1, x)$, d'où il résulte en particulier que x est un point normal de S'. De $(*)$ suit aussi que x est un point isolé de $\mathbf{P}(W) \cap G.x$ (et donc aussi de $S' \cap G.x$). L'opération de H dans S' étant géométriquement réductive ([15], p. 145), on peut trouver un voisinage S de x dans S', stable par H et vérifiant (1), (2) et (3) (quitte à choisir S assez petit, on peut même obtenir que $G \times S \to X$ soit lisse partout).

1.2. Soit T un tore maximal de G. Notons ${}^T X$ l'ensemble des points fixes de T dans X. Soit $x \in {}^T X$.

Soit P un sous-groupe parabolique de G vérifiant les hypothèses suivantes :

(1) $T \subset P$;

(2) P_x est réductif;

(3) P a une orbite ouverte dans X.

Désignons par Q le sous-groupe parabolique de G qui est opposé à P et qui contient T. Les hypothèses (1) et (2) impliquent que la composante neutre de G_x est contenue dans Q.

Pour tout groupe algébrique affine H, notons H^u son radical unipotent. Puisque P_x (qui contient T) normalise Q^u et $(G_x)^u$, il est bien connu ([17], 10.1.2) qu'on peut trouver une sous-P_x-variété A de Q^u telle que la multiplication $A \times (G_x)^u \to Q^u$ soit un isomorphisme.

Soit S une sous-P_x-variété de X transverse à $G.x$ en x. Notons $P *_{P_x} (A \times S)$ le quotient de $P \times A \times S$ sous l'opération de P_x définie par

$$p(q, a, s) = (qp^{-1}, pap^{-1}, ps)$$

($p \in P_x$, $(q, a, s) \in P \times A \times S$) : c'est la P-variété algébrique affine dont l'algèbre des fonctions régulières est composée des fonctions régulières sur $P \times A \times S$ invariantes sous P_x. L'application naturelle

$$P \times A \times S \to X$$

passe au quotient en un P-morphisme de variétés algébriques

$$\varphi : \quad P *_{P_x} (A \times S) \to X.$$

LEMME. — *Soit P un sous-groupe parabolique de G vérifiant les hypothèses* (1), (2), (3) *ci-dessus. Alors quelles que soient les P_x-variétés A et S comme ci-dessus, le P-morphisme φ est étale.*

Preuve. — Notons z l'image de $(1, 1, x) \in P \times A \times S$ dans $P *_{P_x} (A \times S)$. Montrons d'abord que φ est étale en z.

D'après la définition de S et puisque $P \times Q^u \to G$ est une immersion ouverte, le morphisme naturel $P \times Q^u \times S \to X$ est lisse en $(1, 1, x)$. Il n'est pas difficile de voir que le morphisme composé

$$P \times A \times S \to P \times Q^u \times S \to X$$

reste lisse en $(1, 1, x)$ (par exemple en utilisant la caractérisation des morphismes lisses au moyen des anneaux locaux complétés, *voir* [8], § 17.5). Comme $P \times A \times S \to P *_{P_x} (A \times S)$ est lisse, il s'ensuit que φ est lisse et donc étale en z, les variétés source et but de φ ayant même dimension.

Par hypothèse P a une orbite ouverte dans X. Puisque φ est étale en z, P a aussi une orbite ouverte dans $P *_{P_x} (A \times S)$ d'où il suit que P_x a une orbite ouverte dans $A \times S$. Comme $A \times S$ est affine et P_x réductif, le point fixe $(1, x)$ est l'unique orbite fermée de P_x dans $A \times S$, d'où il résulte que le seul ouvert P-stable de $P *_{P_x} (A \times S)$ qui contient z est $P *_{P_x} (A \times S)$ tout entier. Il s'ensuit que φ est étale partout.

Remarque. — Avec les hypothèses et les notations du lemme précédent, il n'est pas vrai en général que φ soit une immersion ouverte. Voici un exemple simple : $G = SL(2)$, $T =$ le tore standard de $SL(2)$, $X = \mathbb{P}(S^3 k^2)$, $x = ku^2 v$ (où u, v est la base canonique de k^2); toutes les hypothèses du lemme sont vérifiées pour $P = G$, mais aucun des φ construit avec la recette du lemme n'est une immersion ouverte.

1.3. Soit $G \to GL(V)$ une représentation rationnelle de dimension finie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $S^n V$ la puissance symétrique n-ième de V (et pour tout $v \in V$, on écrira v^n pour la puissance n-ième de v, $v^n \in S^n V$). Si w est un vecteur non nul de $S^n V$, on notera $\bar{w}$ le point de $\mathbb{P}(S^n V)$ en-dessous de w.

Soit T un tore maximal de G. Notons $W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl et $X(T)$ le groupe des caractères de T. Pour tout $\alpha \in X(T)$ désignons par M_α un G-module rationnel simple qui contient un vecteur $v_\alpha \neq 0$ vérifiant : v_α est vecteur propre de T de poids α et $G_{\bar{v}_\alpha}$ est un sous-groupe parabolique de G. Il est bien connu que $M_\alpha \simeq M_\beta$ si et seulement si $\alpha \in W.\beta$, et que $M'_\alpha \simeq M_{-\alpha}$. Notons C_α la sous-variété de $\mathbb{P}(M_\alpha)$ associée au cône des vecteurs primitifs C^*_α de M_α. Il est bien connu que l'algèbre des fonctions régulières sur C^*_α est G-isomorphe à $\oplus_{n \in \mathbb{N}} M_{-n\alpha}$.

LEMME. — *Soit $v \in V - \{0\}$ un vecteur propre de T. Il existe $n \in \mathbb{N}$ et une décomposition $S^n V = M \oplus N$ en deux sous-G-modules, telle que, si w est la projection de v^n sur M le long de N, alors $w \neq 0$ et $G_{\bar{w}}$ est un sous-groupe parabolique de G.*

Preuve. — Supposons que v soit un vecteur propre de poids $\alpha \in X(T)$. Posons

$$C = \mathbb{P}(V) \times C_{-\alpha} \subset \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(M_{-\alpha}) \subset \mathbb{P}(V \otimes M_{-\alpha})$$

(plongement de Segre), et notons C^* le cône de $V \otimes M_{-\alpha}$ correspondant. Le point $v \otimes v_{-\alpha}$ appartient à C^* et est fixé par T; il s'ensuit que son orbite par G dans C^* est fermée (*voir* [12], p. 354). Par conséquent, il existe une fonction régulière G-invariante sur C^*, non nulle en $v \otimes v_{-\alpha}$, Puisque l'algèbre des fonctions régulières sur C^* est isomorphe à

$$\oplus_{n \in \mathbb{N}} S^n V' \otimes M_{n\alpha},$$

il existe $n \in \mathbb{N}$ et une décomposition $S^n V = M \oplus N$ en deux G-modules, avec $M \simeq M_{n\alpha}$, tels que la projection w de v^n sur M le long de N soit non nulle. Comme w est un vecteur propre de T dans $M \simeq M_{n\alpha}$ de poids $n\alpha$, $G_{\bar{w}}$ est nécessairement un sous-groupe parabolique de G (qui est égal à G lorsque $\dim M_\alpha = 1$).

Remarque. — On peut déduire le lemme précédent aussi de la théorie de l'instabilité (*voir* [9] ou [11], § 12); l'hypothèse « v vecteur propre de T » est en fait superflue.

1.4. Soient H un groupe algébrique réductif, Z et Z' deux H-variétés algébriques, $\varphi : Z \to Z'$ un H-morphisme algébrique et $z \in Z$. Le lemme suivant est un cas particulier du lemme fondamental de [13] (p. 94, *voir* aussi [1]).

LEMME. — *Supposons que Z et Z' soient affines, qu'il n'existe que les constantes comme fonctions régulières H-invariantes sur Z et Z'* (*condition remplie, par exemple lorsque H a une orbite dense dans Z et Z'*), *que φ soit étale en z, que les orbites $H.z$ et $H.\varphi(z)$ soient fermées dans Z et Z', et que φ envoie $H.z$ bijectivement sur $H.\varphi(z)$. Alors φ est un isomorphisme.*

1.5. Supposons maintenant que X est une G-variété sphérique (c'est-à-dire que un — et par conséquent tout — sous-groupe de Borel de G a une orbite ouverte dans X); dans ce cas tout sous-groupe parabolique de G vérifie l'hypothèse (3) de 1.2. Soit T un tore maximal de G et soit $x \in {}^T X$.

THÉORÈME. — *Il existe des sous-groupes paraboliques P de G possédant les propriétés suivantes :*

(1) *P contient T;*

(2) *P_x est réductif;*

(3) *quels que soient A et S comme dans* 1.2, *le morphisme naturel $P *_{P_x} (A \times S) \to X$ est une immersion ouverte.*

Preuve. — Quitte à rétrécir X, on peut supposer que $G.x$ soit la seule orbite fermée de G dans X (car G n'a qu'un nombre fini d'orbites dans X, *voir* [14], p. 218). Grâce au résultat de Sumihiro déjà utilisé [18], on peut alors considérer X comme plongé dans un espace projectif $\mathbb{P}(V)$ dans lequel G opère. Quitte à passer à un revêtement fini de G, on peut supposer que l'opération de G se relève en une opération linéaire dans V.

Notons x^* un point de $V - \{0\}$ au-dessus de x. D'après 1.3, quitte à remplacer V par $S^n V$ et $X \to \mathbb{P}(V)$ par $X \to \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(S^n V)$ (plongement de Véronèse), on peut supposer qu'il existe une décomposition $V = M \oplus N$ en sous-G-modules qui vérifie : M est simple, la projection v de x^* sur M le long de N est non nulle et $G_{\bar{v}}$ est un sous-groupe parabolique de G.

Notons M' le G-module dual de M. Désignons par C la sous-variété de $\mathbb{P}(M')$ correspondant au cône des vecteurs primitifs de M'. Soit y le point de C dont le groupe d'isotropie G_y contient T et est un sous-groupe parabolique de G opposé à $G_{\bar{v}}$. Posons $P = G_y$; par construction, on a $T \subset P$.

Désignons par $\bar{X}$ l'adhérence de X dans $\mathbb{P}(V)$. On a $\bar{X}\times C \subset \mathbb{P}(V)\times\mathbb{P}(M') \subset \mathbb{P}(V\otimes M')$ (plongement de Segre). Notons l la forme linéaire naturelle

$$V\otimes M' = (M\oplus N)\otimes M' \to M\otimes M' \to k,$$

et posons

$$(\bar{X}\times C)_0 = (\bar{X}\times C) - \mathbb{P}(l^{-1}(0)) :$$

c'est un ouvert affine G-stable de $\bar{X}\times C$. Puisque T fixe (x, y), l'orbite $G.(x, y)$ est fermée dans $(\bar{X}\times C)_0$, donc affine. Les espaces homogènes affines des groupes réductifs ayant des groupes d'isotropie réductifs, il s'ensuit que $G_{(x, y)} = P_x$ est réductif.

Soient A et S comme dans 1.2. Considérons l'application naturelle

$$G\times A\times S \to X\times C :$$
$$(g, a, s) \mapsto (gas, gy)$$

elle passe au quotient en un G-morphisme

$$\psi : \quad G *_{P_x}(A\times S) \to X\times C.$$

L'image de ψ est contenue dans $(X\times C)_0 = (X\times C) - \mathbb{P}(l^{-1}(0))$: il suffit de voir que $X\times\{y\} \subset (X\times C)_0$, et cette inclusion résulte de ce que toute orbite de P dans X contient x dans son adhérence (*voir* 1.2) et de ce que $(x, y)\in(X\times C)_0$.

Montrons que ψ est étale : cela résulte de ce que $\varphi : P *_{P_x}(A\times S) \to X$ l'est (*voir* 1.2) et de ce que la restriction de ψ à

$$(Q^u P) *_{P_x}(A\times S) \simeq Q^u\times[P *_{P_x}(A\times S)]$$

est égale à $1\times\varphi$, suivie de l'isomorphisme $Q^u\times X \to Q^u\times X$ $((q, z)\mapsto(q, qz))$, suivie de l'immersion ouverte $Q^u\times X \to X\times C$ $((q, z)\mapsto(z, qy))$.

Puisque P a une orbite ouverte dans X, G a une orbite ouverte dans $(\bar{X}\times C)_0$. Comme ψ est étale, G a aussi une orbite ouverte dans $G *_{P_x}(A\times S)$. On voit facilement que

$$\psi : \quad G *_{P_x}(A\times S) \to (\bar{X}\times C)_0$$

vérifie aussi les autres hypothèses de 1.4; il s'agit donc d'un isomorphisme. D'où en particulier que $(X \times C)_0 = (\bar{X} \times C)_0$. La dernière assertion du théorème découle alors du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1}(X \times \{y\}) & \xrightarrow{\psi} & X \times \{y\} \\ \wr\| & & \wr\| \\ P *_{P_x} (A \times S) & \xrightarrow{\varphi} & X. \end{array}$$

1.6. Conservons les notations du théorème. Si G_x est un sous-groupe parabolique de G (c'est-à-dire si l'orbite $G.x$ est une variété projective), le seul sous-groupe parabolique P de G qui vérifie les conditions (1) et (2) du théorème, est celui qui est opposé à G_x et qui contient T. Dans ce cas $A = \{1\}$ et on se trouve proche du résultat 1.4 de [4].

Rappelons ce résultat.

PROPOSITION. — *Soit X une G-variété algébrique normale quelconque (non nécessairement sphérique) et soit $x \in X$. On suppose que G_x est un sous-groupe parabolique de G. Pour tout sous-groupe parabolique P de G opposé à G_x, il existe alors une sous-P_x-variété (localement fermée) affine W de X contenant x et telle que l'application naturelle $P^u \times W \to X$ soit une immersion ouverte.*

Indiquons comment on peut adapter la preuve du théorème pour retrouver cette proposition.

Grâce au résultat de Sumihiro utilisé déjà plusieurs fois [18], il suffit de considérer le cas $X = \mathbb{P}(V)$, où V est un G-module rationnel de dimension finie. Soit $V = M \oplus N$ une décomposition en sous-G-modules vérifiant : M est simple et $x \in \mathbb{P}(M)$. Soit $V' = M' \oplus N'$ la décomposition correspondante du G-module dual. Notons C l'unique orbite fermée de G dans $\mathbb{P}(M')$, et soit $y \in C$ tel que $G_y = P$.

Notons $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie de G. On a

$$V = \mathfrak{G}.x^* \oplus (\mathfrak{G}.y^*)^\perp$$

où $(\mathfrak{G}.y^*)^\perp$ est l'orthogonal dans V de $\mathfrak{G}.y^* \subset V'$ (*voir* [4], 1.1). Posons

$$W = \mathbb{P}(kx^* \oplus (\mathfrak{G}.y^*)^\perp) - \mathbb{P}((ky^*)^\perp);$$

c'est une sous-P_x-variété affine de $\mathbb{P}(V)$. Notons

$$\varphi: \quad P^u \times W \to \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}((ky^*)^\perp)$$

le morphisme naturel. Nous allons montrer que φ est un isomorphisme. Il suffit clairement de le prouver lorsque $N = \{0\}$.

Supposons donc $V = M$, et considérons l'application

$$G \times W \to \mathbb{P}(M) \times C$$
$$(g, w) \mapsto (gw, gy);$$

elle passe au quotient en un G-morphisme

$$\psi: \quad G *_{P_x} W \to \mathbb{P}(M) \times C.$$

Considérons $\mathbb{P}(M) \times C$ comme plongé dans $\mathbb{P}(M \otimes M')$ et posons $(\mathbb{P}(M) \times C)_0 = (\mathbb{P}(M) \times C) - \mathbb{P}(l^{-1}(0))$, où $l: M \otimes M' \to k$ est la forme linéaire canonique. On montre alors comme dans la preuve du théorème que l'image de ψ est contenue dans $(\mathbb{P}(M) \times C)_0$ et que

$$\psi: \quad G *_{P_x} W \to (\mathbb{P}(M) \times C)_0$$

vérifie toutes les conditions de 1.4 [ici P n'a pas une orbite dense dans $\mathbb{P}(M)$, mais l'ensemble des $z \in \mathbb{P}(M)$ tels que $\overline{P.z} \ni x$ est dense dans $\mathbb{P}(M)$!]; il s'agit donc d'un isomorphisme. Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\psi^{-1}((\mathbb{P}(M) \times \{y\})_0) & \xrightarrow{\psi} & (\mathbb{P}(M) \times \{y\})_0 \\
\wr & & \wr \\
P^u \times W \simeq P *_{P_x} W & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}(M) - \mathbb{P}((ky^*)^\perp)
\end{array}$$

résulte alors que φ est également un isomorphisme.

2

Dans tout ce paragraphe, on désignera par G un groupe algébrique réductif connexe, et par X une G-variété algébrique sphérique.

2.1. Soit B un sous-groupe de Borel de G. Notons X_G^0 (resp. X_B^0) l'orbite ouverte de G (resp. de B) dans X. Nous dirons que (la G-variété sphérique) X est *toroïdale* si l'adhérence de $X_G^0 - X_B^0$ dans X ne contient aucune orbite de G dans X : ce sont elles qui ressemblent le plus, parmi les G-variétés sphériques, aux plongements toriques. Nous aurons aussi besoin de la condition suivante.

(∗) Pour toute orbite Y de G dans X, il existe des orbites Y_i de codimension i de G dans X vérifiant $Y_r = Y$ et $Y_i \subset \bar{Y}_{i-1}$ ($i = 1, \ldots, r$).

LEMME 1. — *On suppose que X est (sphérique) affine et que G a un point fixe dans X. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*

(1) *X est toroïdale;*

(2) *X vérifie la condition (∗);*

(2′) *il existe des fermés irréductibles G-stables F_i de codimension i dans X ($i = 1, \ldots, \dim X$) tels que $F_i \subset F_{i-1}$;*

(3) *le groupe dérivé de G opère trivialement dans X.*

Preuve. — (1) ⇒ (3). Puisque G a une orbite ouverte dans X qui est affine, le point fixe est l'unique orbite fermée de G dans X. Par suite, toute orbite de B dans X contient ce point fixe dans son adhérence. De (1) suit alors que $X_G^0 = X_B^0$. Cette dernière orbite est affine, comme espace homogène sous un groupe résoluble. Par conséquent, pour tout $x \in X_G^0$, G_x est réductif (comme groupe d'isotropie d'un espace homogène affine sous un groupe réductif), et $BG_x = G$. On sait que ces conditions impliquent que le groupe dérivé de G est contenu dans G_x (*voir* [4], 3.4, lemme), d'où (3).

Il est clair que (2) ⇒ (2′).

(2′) ⇒ (3). On déduit de (2′) qu'il existe des orbites Y_i de codimension i de G dans X ($i = 0, \ldots, \dim X$) vérifiant $Y_i \subset \overline{Y_{i-1}}$. Soit $x \in Y_i$. Supposons que le groupe dérivé de G est contenu dans G_x. Le groupe G_x étant alors réductif, on peut choisir une sous-G_x-variété S de X transverse à Y_i en x (1.1). Le morphisme $G *_{G_x} S \to X$ est étale (1.2). On en déduit que $S \cap Y_{i-1}$ est une G_x-variété de dimension 1 de S et que $((G_x)_y)^0 = (G_y)^0$, quel que soit $y \in S \cap Y_{i-1}$. Puisque $G_x/(G_x)_y$ est quasi-affine de dimension 1 et que G_x est réductif, le groupe dérivé de $(G_x)^0$ est contenu dans $(G_x)_y$. Il s'ensuit que le groupe dérivé de G est contenu dans G_y. On montre ainsi, par récurrence descendante, que le groupe dérivé de G est contenu dans l'isotropie de Y_0, d'où (3).

Que (3) ⇒ (1) est évident. Que (3) ⇒ (2) résulte des propriétés bien connues des plongements toriques (*voir* [10], [5]).

LEMME 2. — *Soit $x \in X$ tel que l'orbite $G.x$ soit une variété projective, et soient P et W comme dans 1.6. Si X est toroïdale, alors la P_x-variété W'*

vérifie les conditions du lemme 1, *et toute orbite de* G *dans* X *qui rencontre* W, *coupe* W *suivant une orbite de* P_x.

Preuve. — Du fait que $P^u \times W \to X$ est une immersion ouverte et de l'hypothèse que X est une G-variété sphérique toroïdale, on déduit aussitôt que W est une P_x-variété sphérique toroïdale. D'après le lemme 1, le groupe dérivé de P_x opère alors trivialement dans W. Soient $W_1, \ldots, W_r$ les différents fermés irréductibles P_x-stables de codimension 1 dans W. Posons $X_i = \overline{P^u W_i}$; On a $X_i \cap W = W_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Les sous-variétés X_i sont irréductibles, stables par P, de codimension 1 dans X et contiennent $G.x$. Puisqu'on suppose X toroïdal, il s'ensuit que $X_i \cap X_G^0 = \varnothing$. On en déduit que les X_i sont stables par G. Soit F un fermé irréductible P_x-stable de W. D'après la théorie des plongements toriques ([10], [5]), il existe $i_1, \ldots, i_s \in \{1, r\}$ tels que $F = W_{i_1} \cap \ldots \cap W_{i_s}$. On a :

$$(G.F) \cap W \subset X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_s} \cap W = W_{i_1} \cap \ldots \cap W_{i_s} = F,$$

d'où $(G.F) \cap W = F$. Pour toute orbite Y de P_x dans W, on a alors $(G.\bar{Y}) \cap W = \bar{Y}$ et $(G.(\bar{Y} - Y)) \cap W = \bar{Y} - Y$, d'où $(G.Y) \cap W = Y$, ce qui termine la preuve du lemme 2.

LEMME 3. — *Toute* G-*variété toroïdale complète* X *vérifie la condition* (*).

Preuve. — Soit Y une orbite de G dans X. Choisissons $x \in \bar{Y}$ tel que l'orbite $G.x$ soit fermée, donc une variété projective. Soient P *et* W comme dans 1.6. D'après les lemmes 1 et 2, il existe des orbites W_i de codimension $i (i = 1, \ldots, r)$ de P_x dans W vérifiant $W_r = Y \cap W$ et $W_i \subset \overline{W_{i-1}}$. D'après le lemme 2, les $Y_i = GW_i$ sont alors des orbites de codimension i de G dans X vérifiant $Y_r = Y$ et $Y_i \subset \overline{Y_{i-1}}$.

LEMME 4. — *Si* X *est toroïdale et complète, alors tout fermé irréductible* G-*stable* Y *de* X *est une sous-variété normale.*

Preuve. — Choisissons $x \in Y$ tel que l'orbite $G.x$ soit fermée, donc une variété projective. Soient P et W comme dans 1.6. On a $Y \cap (P^u W) \simeq P^u \times Z$, où Z est un fermé irréductible P_x-stable de W. Le lemme 4 résulte alors aussitôt du lemme 2 et des propriétés bien connues des plongements toriques ([10], [5]).

Remarque. — On peut montrer plus généralement que tout fermé irréductible G-stable d'une G-variété sphérique (resp. toroïdale) est une G-variété sphérique (resp. toroïdale).

PROPOSITION. — *Soit T un tore maximal de G, soit $x \in {}^T X$, et soient P, A, S comme dans 1.5. Si X est toroïdale et complète, alors toute orbite de G dans X qui rencontre S, coupe S suivant une orbite de T.*

Preuve. — Du fait que $P *_{P_x} (A \times S) \to X$ est une immersion ouverte, on déduit que $A \times S$ et S sont des $(P_x)^0$-variétés sphériques (attention, P_x n'est pas nécessairement connexe!). Pour toute orbite Y de G dans X, $\bar{Y}$ est une variété normale (*voir* lemme 4). Comme $P *_{P_x} (A \times S) \to X$ est une immersion ouverte, $S \cap \bar{Y}$ est encore une variété normale. Puisque S est une $(P_x)^0$-variété sphérique affine, x est contenu dans toute composante irréductible de $S \cap \bar{Y}$, d'où il suit que $S \cap \bar{Y}$ est irréductible. Puisqu'on suppose X toroïdal complet, d'après le lemme 3, il vérifie la condition $(*)$: soient Y_i des orbites de codimension $i\,(i=1, \ldots, r)$ de G dans X vérifiant $G.x = Y_r$ et $Y_i \subset \overline{Y_{i-1}}$. D'après ce qui précède, les $S \cap \bar{Y}_i$ sont des fermés irréductibles P_x-stables de codimension i dans S, $i=1, \ldots, r = \dim S$, vérifiant $S \cap \bar{Y}_i \subset S \cap \overline{Y_{i-1}}$. D'après le lemme 1, le groupe dérivé de $(P_x)^0$ opère donc trivialement dans S. Il s'ensuit que T a une orbite ouverte S_T^0 dans S. Soient $S_1, \ldots, S_m$ les différentes composantes irréductibles de $S - S_T^0$. Posons $X_i = \overline{PAS_i}$: c'est un fermé P-stable, *a priori* non nécessairement irréductible, mais pur de codimension 1 dans X. Puisque toute composante irréductible de X_i contient $G.x$ et qu'on suppose X toroïdal, on en déduit que les X_i sont stables par G. Soit Y une orbite de G dans X dont l'adhérence $\bar{Y}$ est une composante irréductible de X_i contenant S_i. On a $X_i = \overline{PAS_i} \subset \bar{Y}$, d'où il suit que $X_i = \bar{Y}$ est irréductible. Il en résulte que $X_i \cap S = P_x S_i$ est irréductible (*voir* plus haut), d'où $X_i \cap S = S_i$. On termine alors la preuve de la proposition comme celle du lemme 2.

Remarque. — Il y a d'autres propriétés des plongements toriques qu'on peut étendre, grâce à 1.5, aux G-variétés toroïdales : par exemple, dans une G-variété toroïdale lisse, l'adhérence de toute orbite de G est lisse, les fermés irréductibles G-stables de codimension 1 (qui sont donc lisses) se coupent transversalement, ... (*voir* aussi [6], [7]).

2.2. Soit Z une G-variété algébrique normale. Pour tout $z \in {}^G Z$, on notera $Z(G, z)$ l'ensemble des $z' \in Z$ tels que $\overline{G.z'} \ni z$: c'est une sous-G-variété affine de Z. Soit Z' une autre G-variété algébrique normale et soit $\varphi : Z \to Z'$ un G-morphisme algébrique; il est clair que φ envoie $Z(G, z)$ dans $Z'(G, \varphi(z))$, quel que soit $z \in {}^G Z$.

LEMME. — *Si φ est lisse en $z \in {}^G Z$, alors il existe des G-morphismes algébriques $\sigma : Z'(G, \varphi(z)) \to Z(G, z)$ tels que $\varphi \circ \sigma$ soit l'identité de $Z'(G, \varphi(z))$.*

Preuve. — Quitte à remplacer Z et Z' par des voisinages G-stables de z et $\varphi(z)$ convenables, on peut supposer que Z et Z' sont affines [18]. On peut alors trouver, grâce à la réductivité linéaire de G, des fonctions régulières $f_1, \ldots, f_r$ sur Z vérifiant :

(1) $f_1, \ldots, f_r$ sont nulles en z;

(2) l'espace vectoriel engendré par $f_1, \ldots, f_r$ est stable par G;

(3) le morphisme φ induit un isomorphisme

$$\hat{\mathcal{O}}_{Z,z} \xleftarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}_{Z',\varphi(z)}[[f_1, \ldots, f_r]].$$

Notons Z'' la sous-G-variété de Z définie par les équations $f_1 = \ldots = f_r = 0$. Le morphisme $\varphi : Z'' \to Z'$ est étale en z. Du lemme fondamental de [13], p. 94, résulte alors que $\varphi : Z''(G, z) \to Z'(G, z)$ est un isomorphisme. Puisque $Z''(G, z)$ est une sous-G-variété fermée de $Z(G, z)$, le lemme est démontré.

Supposons maintenant que $G = T$ soit un tore. Notons $X_*(T)$ l'ensemble des sous-groupes à 1 paramètre multiplicatif de T. Pour $z \in {}^T Z$ et $\lambda \in X_*(T)$ posons

$$Z(\lambda, z) = \{ z' \in Z, \lim_{t \to 0} \lambda(t) z' = z \};$$

c'est une sous-T-variété fermée de $Z(T, z)$. Si $\varphi : Z \to Z'$ est lisse en $z \in {}^T Z$, il résulte aussitôt du lemme précédent que

$$\varphi(Z(\lambda, z)) = Z'(\lambda, \varphi(z)).$$

Soit X une G-variété sphérique complète. Fixons un tore maximal T de G. L'ensemble ${}^T X$ est fini (car G n'a qu'un nombre fini d'orbites dans X, et T n'a qu'un nombre fini de points fixes dans tout espace homogène sous G).

Une variété complète dans laquelle un tore opère en fixant seulement un nombre fini de points, possède des « décompositions cellulaires » [2]. Rappelons comment on les définit : on choisit $\lambda \in X_*(T)$ en « position suffisamment générale » pour que k^* opérant dans X à travers λ ait les mêmes points fixes que T; alors X est la réunion disjointe des $X(\lambda, x)$,

$x \in {}^T X$. On appelle les $X(\lambda, x)$, $x \in {}^T X$, les cellules de la décomposition cellulaire; si X est lisse, les cellules sont des espaces affines (pour tout cela, *voir* [2]).

Désignons par $G(\lambda)$ l'ensemble des $g \in G$ tels que $\lim_{t \to 0} \lambda(t) g \lambda(t)^{-1}$ existe dans G. Il est bien connu que $G(\lambda)$ est un sous-groupe parabolique de G (*voir* [15], p. 57). Lorsque λ est en « position générale », alors $G(\lambda)$ est même un sous-groupe de Borel de G, et on a $\lim_{t \to 0} \lambda(t) g \lambda(t)^{-1} \in T$ quel que soit $g \in G(\lambda)$; dans ce cas, les cellules $X(\lambda, x)$, $x \in {}^T X$, sont manifestement stables par $G(\lambda)$.

2.3. Soit X une G-variété sphérique complète et soit T un tore maximal de G. On fixe $\lambda \in X_*(T)$ en « position suffisamment générale » pour que la décomposition cellulaire $X(\lambda, x)$, $x \in {}^T X$ de X soit bien définie et pour que $G(\lambda) = B$ soit un sous-groupe de Borel de G (*voir* 2.2). La proposition suivante généralise [7], § 4.

PROPOSITION. — *Si X est toroïdale, alors l'intersection de chaque cellule avec chaque orbite de G ou bien est vide, ou bien est une orbite de B.*

Preuve. — Soit $x \in {}^T X$ et soient P, A, S comme dans 1.5. On pose $P(\lambda) = P \cap G(\lambda) = P \cap B$ et $A(\lambda) = A \cap G(\lambda) = A \cap B$. Du fait que $P \times A \times S \to X$ est lisse, on déduit que $X(\lambda, x) = P(\lambda) A(\lambda) S(\lambda, x)$ (*voir* 2.2). Soit $G.z$ une orbite dans X qui rencontre $X(\lambda, x)$; on peut supposer que $z \in X(\lambda, x) \cap S = S(\lambda, x)$. De la proposition 2.1 résulte alors $X(\lambda, x) \cap G.z = P(\lambda) A(\lambda)(T.z) \subset B.z$.

C.Q.F.D.

Remarque. — Il existe des G-variétés sphériques, projectives, lisses (non toroïdales) pour lesquelles la conclusion de la proposition précédente est fausse : par exemple, si N est un G-module rationnel de dimension finie vérifiant :

(1) N est une G-variété sphérique;

(2) G a une orbite non affine dans N;

(3) il existe $\lambda \in X_*(G)$ tel que $N(\lambda, 0) = N$;

alors $X = \mathbf{P}(N \oplus k)$ est une telle G-variété. Voici un exemple simple :

$$G = GL(2, k), \qquad N = k^2.$$

2.4. Soit H un sous-groupe sphérique de G (c'est-à-dire un sous-groupe algébrique tel que G/H soit une G-variété sphérique). Soit B un sous-groupe de Borel de G. Dans [3] a été démontré que B n'a qu'un nombre fini d'orbites dans G/H (ou, ce qui revient au même, que H n'a qu'un nombre fini d'orbites dans G/B, ou que les doubles classes de G sous $B \times H$ sont en nombre fini). Ce résultat découle aussi de 2.3, puisque d'après [14] G/H peut se plonger dans des G-variétés sphériques complètes et toroïdales. Cette approche (inaugurée par C. De Concini et T. A. Springer dans le cas symétrique, *voir* [7]) permet de dépasser le simple résultat de finitude et aller vers une description des orbites. Précisons un peu.

On se ramène facilement au cas où $N_G(H)/H$ est fini. Dans ce cas, il existe une « compactification » meilleure que les autres de G/H : à savoir, il existe une unique G-variété X possédant les propriétés suivantes (pour le cas particulier symétrique *voir* [6], pour le cas sphérique général cela résulte de [14] et [16]) :

(1) X est (normale sphérique) toroïdale et complète;

(2) X contient G/H comme orbite ouverte;

(3) X ne contient qu'une seule orbite fermée.

D'après 2.3, les orbites de B dans G/H seront décrites si l'on sait expliciter, pour cette G-variété X particulière [et pour un tore maximal T de B et un $\lambda \in X_*(T)$ convenables] les $x \in {}^T X$ dont la cellule $X(\lambda, x)$ rencontre l'orbite ouverte G/H.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bardsley (P.) and Richardson (R. W.). – Etale slices for algebraic transformation groups in characteristic *p*, *Proc. London Math. Soc.*, (3), 51, 1985, p. 295-317.

[2] Bialynicki-Birula (A.). – Some theorems on actions of algebraic groups, *Ann. of Math.*, vol. 98, 1980, p. 480–497.

[3] Brion (M.). – Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques, *Manuscripta Math.*, 55, 1986, p. 191-198.

[4] Brion (M.), Luna (D.) and Vust (Th.). – Espaces homogènes sphériques, *Inventiones Math.*, 84, 1986, p. 617-632.

[5] Danilov (V. I.). – The geometry of toric varieties, *Russian Math. Surveys*, vol. 33 : 2, 1978, p. 97-154.

[6] De Concini (C.) and Procesi (C.). – Complete symmetric varieties. Proc. Montecatini Conf. on Invariant Theory, 1-44, *Lect. Notes in Math.*, n 996, Springer-Verlag, 1983.

[7] De Concini (C.) and Springer (T. A.). – *Betti numbers of complete symmetric varieties*, Preprint.

[8] Grothendieck (A.) et Dieudonné (J.). – Éléments de Géométrie Algébrique IV, *Publ. Math. de l'I.H.E.S.*, n 32, 1967.

[9] KEMPF (G.). – Instability in invariant theory, *Ann. of Math.*, vol. 108, 1978, p. 299-316.

[10] KEMPF (G.), KNUDSEN (F.), MUMFORD (D.) and SAINT-DONAT (B.). – Toroidal Embeddings, *Lecture Notes in Math.*, n° 339, Springer-Verlag, 1974.

[11] KIRWAN (F.). – Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry, *Math. Notes*, 31, Princeton Univ. Press, 1984.

[12] KOSTANT (B.). – Lie group representations on polynomial rings, *Amer. J. Math.*, vol. 85, 1963, p. 327-404.

[13] LUNA (D.). – Slices étales, *Bull. Soc. math. France*, Mémoire 33, 1973, p. 81-105.

[14] LUNA (D.) and VUST (Th.). – Plongements d'espaces homogènes, *Commentarii Math. Helverici*, vol. 58, 1983, p. 186-245.

[15] MUMFORD (D.) and FOGARTY (J.). – *Geometric invariant theory*, Second enlarged edition, Springer, 1982.

[16] PAUER (F.). – Caractérisation valuative d'une classe de sous-groupes d'un groupe algébrique, 109ᵉ *Congrès national des Soc. savantes*, Dijon 1084, sciences, fasc. III, p. 159-166.

[17] SPRINGER (T. A.). – Linear algebraic groups, *Progress in Math.*, n° 9, Birkhäuser, 1981.

[18] SUMIHIRO (H.). – Equivariant completion, *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 14, 1974, p. 1-28.