BULLETIN DE LA S. M. F.

RIDHA BELGRADE

Une théorie de l'intersection dans un espace singulier

Bulletin de la S. M. F., tome 114 (1986), p. 67-95
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__67_0>

Bull. Soc. math. France,
114, 1986, p. 67-95

UNE THÉORIE DE L'INTERSECTION DANS UN ESPACE SINGULIER

PAR

RIDHA BELGRADE (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous exhibons, dans un espace analytique complexe, une classe de cycles, sous-jacents à des « racines » d'idéaux d'intersections complètes, pour lesquels les produits d'intersection que définissent ces idéaux n'en dépendent pas.

Pour cela, nous construisons pour ces « bons » cycles un invariant global dans la cohomologie locale analytique à valeurs formes, qui donne des multiplicités intrinsèques.

Ceci permet alors de faire une théorie géométrique de l'intersection.

ABSTRACT. — We define a type of cycles (in a complex analytic space), associated with "roots" of complete intersection ideals, for which intersection products defined by these ideals don't depend on them.

The tool used here is local analytic cohomology with values in holomorphic forms sheaves, in which a "fundamental class" is constructed for these "good" cycles.

Then we show the expected properties of this geometric intersection theory.

0. Introduction

Soit X un sous-espace analytique, réduit et de dimension pure, d'un ouvert de Stein V de $\mathbb{C}^N$. $S(X)$ et $R(X)$ désignent respectivement ses lieux singulier et régulier.

Soient C_1, C_2 deux cycles analytiques de codimensions pures q_1 et q_2, tels que chaque composante irréductible de $|C_1| \cap |C_2|$ soit de codimension $q_1 + q_2$.

(*) Texte reçu le 2 février 1985.

R. BELGRADE, Université Nancy-I, U.E.R. Sciences Mathématiques, B.P. n° 239, 54506 Vandœuvre-les-Nancy, Cedex.

1. Si aucune de ces composantes n'est dans $S(X)$, on peut définir $C_1 \dot{_X} C_2$ en affectant à chacune d'elles, la multiplicité de sa partie générique contenue dans $R(X)$, calculée par l'intersection dans $R(X)$.

2. Si $a_1 . C_1 = D_1 \dot{_V} X$ est intersection complète (i. e. $a_1 \in \mathbb{N}^*$ et D_1 intersection complète dans V), et $a_2 . C_2 = D_2 \dot{_V} X$ aussi, alors le cycle à coefficients rationnels :

$$\frac{1}{a_1 . a_2} D_1 \dot{_V} X \dot{_V} D_2,$$

ne dépend que de C_1 et C_2. En effet, si par exemple $a'_1 . C_1 = D'_1 \dot{_V} X$, alors l'associativité de $\dot{_V}$ donne :

$$a'_1 D_1 \dot{_V} X \dot{_V} D_2 = a_1 (a'_1 C_1) \dot{_V} D_2 = a_1 . D'_1 \dot{_V} X \dot{_V} D_2.$$

D'où

$$\frac{1}{a_1 . a_2} D_1 \dot{_V} X \dot{_V} D_2 = \frac{1}{a'_1 . a_2} D'_1 \dot{_V} X \dot{_V} D_2.$$

L'intérêt d'une formule d'associativité dans X imposerait ce cycle comme candidat naturel pour $C_1 \dot{_X} C_2$.

3. Si maintenant $a_1 . C_1 = D_1 \dot{_V} X$ est intersection complète mais C_2 est un cycle quelconque, on ne sait pas si $1/a_1 (D_1 \dot{_V} C_2)$ ne dépend pas de (a_1, D_1).

Ceci est vrai si X est lisse. Et dans ce cas on peut définir les multiplicités d'intersection en regardant les classes fondamentales de C_1 et C_2 dans X qui sont leurs courants d'intégration. Les cohomologies courants, formes étant les mêmes, on peut faire le produit de ces courants et en prendre des traces.

Mais dans le cas X singulier, on est obligé de chercher un substitut « formes » pour le courant d'intégration sur C_1, seul l'accouplement formes- courants étant possible. Ceci explique moralement pourquoi il faut mettre des conditions sur C_1. Les critères exposés ici permettent de « passer » d'un système d'équations à un autre et montrent l'invariance du cycle $1/a_1 (D_1 \dot{_V} C_2)$. Le caractère intrinsèque de ces critères permet de recoller pour faire une théorie globale sur X quelconque.

Le plan se présente comme suit : Au chapitre 1, on construit un invariant, type classe fondamentale, « à valeurs formes », d'un « bon » cycle. Au chapitre 2, on donne un résultat-définition des produits d'intersection, et leurs propriétés. On finit par des exemples.

Un appendice est réservé à l'exposition des propriétés des clôtures intégrales d'idéaux que le chapitre 1 utilise.

1

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique réduit et de dimension pure, $(\Omega^{\cdot}_X, d)$ le complexe des faisceaux de formes holomorphes sur X.

Soit Y un sous ensemble analytique fermé de codimension pure q, $I_Y \subset \mathcal{O}_X$ son idéal réduit.

Notons par $\underline{\tilde{H}}^{\cdot}_Y(\Omega^{\cdot}_X)$ le faisceau associé au préfaisceau :

$$V \to \tilde{H}^{\cdot}_Y(V, \Omega^{\cdot}_X) \qquad \text{où} \quad \tilde{H}^{\cdot}_Y(V, \Omega^{\cdot}_X)$$

représente le séparé associé à $H^{\cdot}_Y(V, \Omega^{\cdot}_X)$ pour sa structure canonique Q.F.S.

THÉORÈME 1. — *Supposons que localement sur X : $\exists\, f_1, \ldots, f_q$ des sections de $\mathcal{O}_X$, $\exists\, l \in \mathbb{N}^*$ tels que l'idéal $I = (f_1, \ldots, f_q)$ vérifie :*

$$V(I) = Y,$$
$$I \subset I^l_Y \subset \bar{I}$$

génériquement sur Y.

Alors le cocycle

$$\frac{1}{l^q} \cdot \frac{df_1 \wedge \ldots \wedge df_q}{f_1 \ldots f_q}$$

est intrinsèque dans

$$\frac{\underline{\tilde{H}}^q_Y(\Omega^q_X)}{d\underline{\tilde{H}}^q_Y(\Omega^{q-1}_X}$$

et définit une section globale

$$\tilde{C}^X_Y \in H^\circ\left(X, \frac{\underline{\tilde{H}}^q_Y(\Omega^q_X)}{d\underline{\tilde{H}}^q_Y(\Omega^{q-1}_X)}\right).$$

On aura besoin de quelques lemmes pour la démonstration de ce théorème.

LEMME 1. — *Soit* $\pi: X \to U$ *un revêtement ramifié de degré* k, *contenu dans* $U \times \mathbb{C}^p$, *sans multiplicités, avec* U *polydisque* $\subset \mathbb{C}^n$ *centré à l'origine.* $t'=(t_1, \ldots, t_q)$, $t''=(t_{q+1}, \ldots, t_n)$ *et* $t=(t_1, \ldots, t_n)$ *sont les coordonnées respectives de* $\mathbb{C}^q$, $\mathbb{C}^{n-q}$ *et* $\mathbb{C}^n$.

Soit $I=(t_1, \ldots, t_q)\mathcal{O}_X$ *et* $Y=\operatorname{supp}(\mathcal{O}_X/I)$.

$$f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \qquad \text{et} \qquad P(t, z)=z^k+\sum_{h=1}^{k}(-1)^h S_h(t).z^{k-h}$$

son polynôme caractéristique (cf. *Appendice* : 3).

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(*a*) $f_y \in \bar{I}_y$ *pour* y *générique dans* Y.

(*b*) *Si* $a_h=\operatorname{trace}_{X\mid U}(f^h)$, *on a :*

$$\forall h=1, \ldots, k, \qquad \frac{\partial^{|\alpha|} a_h}{\partial t'^{\alpha}}(0, t'')=0,$$
$$\forall \alpha:|\alpha|<h, \qquad \forall t'' \in U \cap \mathbb{C}^{n-q}.$$

(*c*) $\exists S_{h, \alpha} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$, *pour* $|\alpha|=h$ *tels que :*

$$(-1)^{h-1} S_h(t)=\sum_{|\alpha|=h} S_{h, \alpha}(t).t'^{\alpha}.$$

(*d*) $f_y \in \bar{I}_y, \qquad \forall y \in Y$.

Preuve. — $b \Rightarrow c$: développement en série de a_h, + Appendice : 3.

$c \Rightarrow d$: Cayley-Hamilton.

$d \Rightarrow a$: évident.

$a \Rightarrow b$: il suffit de prouver b. pour un petit ouvert dans $U \cap C^{n-q}$.

Mais du fait que $\pi \mid Y: Y \to U \cap C^{n-q}$ est un revêtement ramifié, il existe $t_0=(0, t_0'')$ tel que :

$$f_y \in \bar{I}_y, \qquad \forall y \in \pi^{-1}(t_0).$$

Appendice. — 2. (iii) donne : $\exists C>0$, $\exists U_0$ vois. de t_0 dans U tels que :

$$|f(t, x)| \leqslant C \sup_{l \leqslant i \leqslant q}|t_i|, \qquad \forall t \in U_0.$$

D'où

$$|\operatorname{trace}_{X\mid U}(f^h)| \leqslant C'(\sup_{l \leqslant i \leqslant q}|t_i|)^h, \qquad \forall t \in U_0, \quad \forall h.$$

La formule de Cauchy implique alors que :

$$\forall h, \quad \forall |\alpha|<h, \qquad \forall t'' \in U_0 \cap C^{n-q} \frac{\partial^{|\alpha|} a_h}{\partial t'^{\alpha}}(0, t'')=0.$$

Remarque. — (*c*) donne en particulier :

$$(-1)^{h-1} S_h(t) = S_{h,\,0}(t).\,t_1^h + \textstyle\sum_{i=2}^q S_{h,\,i}(t).\,t_i,$$

et si

$$A_{i,\,0} = \textstyle\sum_{h=1}^k S_{h,\,i}.\,f^{k-h},$$

on a :

$$f^k = \textstyle\sum_{h=1}^k S_{h,\,0}.\,t_1^h.\,f^{k-h} + \sum_{i=2}^q A_{i,\,0}.\,t_i.$$

LEMME 2. — *Dans la situation du lemme* 1, *soit :*
a, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $K \subset U$ *un compact.*

Si il existe :

$$S_{h,\,0} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U), \qquad h=1, \ldots, k,$$
$$A_{i,\,0} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X), \qquad i=2, \ldots, q$$

tels que :

(i) $f^k = \sum_{h=1}^k S_{h,\,0}.\,t_1^h.\,f^{k-h} + \sum_{i=2}^q A_{i,\,0}.\,t_i$,

(ii) $\| S_{h,\,0} \|_K \leqslant a.\,b^h, \qquad h=1, \ldots, k.$

Alors il existe :

$$S_{h,\,m} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U), \qquad h=1, \ldots, k, \quad m \in \mathbb{N}^*,$$
$$A_{i,\,m} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X), \qquad i=2, \ldots, q, \quad m \in \mathbb{N}^*,$$

tels que :

$(\mathrm{i})_m$ $f^{k+m} = \sum_{h=1}^k S_{h,\,m}.\,t_1^{m+h}.\,f^{k-h} + \sum_{i=2}^q A_{i,\,m}.\,t_i$

$(\mathrm{ii})_m$ $\| S_{h,\,m} \|_K \leqslant a(1+a)^m b^{m+h}, \qquad h=1, \ldots, k.$

Preuve. — Par récurrence sur *m*.

Pour $m=0$, c'est l'hypothèse. Supposons que pour *m* donné, $S_{h,\,m}$ et $A_{i,\,m}$ sont construites et vérifient $(\mathrm{i})_m$ et $(\mathrm{ii})_m$. Alors $(\mathrm{i})_m \times f$ donne :

$$f^{k+m+1} = S_{1,\,m}.\,t_1^{m+1}.\,f^k + \textstyle\sum_{h=1}^{k-1} S_{h+1,\,m}.\,t_1^{m+1+h}.\,f^{k-h} + \sum_{i=2}^q (A_{i,\,m}.\,f)\,t_i.$$

Maintenant (i) donne :

$$\begin{aligned} f^{k+m+1} = \textstyle\sum_{h=1}^k S_{1,\,m}.\,S_{h,\,0}\,t_1^{m+1+h}.\,f^{k-h} & \\ + \textstyle\sum_{h=1}^{k-1} S_{h+1,\,m}.\,t_1^{m+1+h}.\,f^{k-h} & \\ + \textstyle\sum_{i=2}^q (A_{i,\,m}.\,f + S_{1,\,m}.\,t_1^{m+1}.\,A_{i,\,0})\,t_i. & \end{aligned}$$

$(\mathrm{i})_{m+1}$ sera vérifiée si :

$$S_{h,\,m+1}=S_{h+1,\,m}+S_{1,\,m}.S_{h,\,0}\,(S_{k+1,\,m}:=0),$$

et

$$A_{i,\,m+1}=A_{i,\,m}.f+S_{1,\,m}.t_1^{m+1}.A_{i,\,0}.$$

$(\mathrm{ii})_{m+1}$ aussi puisque :

$$\begin{aligned}\|S_{h,\,m+1}\|_K &\leqslant \|S_{h+1,\,m}\|_K+\|S_{1,\,m}\|_K.\|S_{h,\,0}\|_K\\ &\leqslant a(1+a)^m.b^{m+h+1}+a(1+a)^m.b^{m+1}.ab^h\\ &\leqslant a(1+a)^{m+1}.b^{m+1+h}.\end{aligned}$$

LEMME 3. — *Dans la situation du lemme 2 : si* $K=\bar{U}'$, $U'\subset\subset U$, $X'=X\cap(U'\times\mathbb{C}^p)$.

$0<b<1$, $a>0$ *tels que* $(1+a)b<1$, $a\sum_{h=1}^k b^h<1$. $g\in\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ *tel que* $g_y\in\bar{I}_y$, *y générique dans Y.*

Alors $\exists\,\varepsilon>0$, $\forall\,\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta|<\varepsilon$, *on a :*

$$\frac{dt_1\wedge\ldots\wedge dt_q}{t_1\ldots t_q}=\frac{d(t_1-\zeta g)\wedge dt_2\wedge\ldots\wedge dt_q}{(t_1-\zeta g).t_2\ldots t_q}$$

dans

$$\frac{\tilde{H}^q_Y(X',\Omega^q_X)}{d\,\tilde{H}^q_Y(X',\Omega^{q-1}_X)}.$$

Preuve. — La remarque du lemme 1 assure que :

$$g^k=\textstyle\sum_{h=1}^k S'_{h,\,0}.t_1^h.g^{k-h}+\sum_{i=2}^q A'_{i,\,0}.t_i.$$

Et donc pour

$$f=\zeta.g,\; S_{h,\,0}=\zeta^h.S'_{h,\,0},\qquad A_{i,\,0}=\zeta^k.A'_{i,\,0}$$

on a :

$$f^k=\textstyle\sum_{h=1}^k S_{h,\,0}\,t_1^h.f^{k-h}+\sum_{i=2}^q A_{i,\,0}.t_i$$

et

$$\exists\,\varepsilon>0,\quad\forall\,\zeta:|\zeta|<\varepsilon\;\Rightarrow\;\|S_{h,\,0}\|_K\leqslant a.b^h,\qquad h=1,\ldots,k.$$

Maintenant soit un tel ζ fixé et soit $S_{h,\,m}$ et $A_{i,\,m}$ donnés par le lemme 2. (i), (ii) et $a.\sum_{h=1}^k b^h<1$ donnent :

$$t_1-f=t_2=\ldots=t_q=0\;\Rightarrow\;f=0\text{ i. e. }t_1=0,$$

soit :

$$\mathscr{V}=(V_i)_{1\leq i\leq q} \quad \text{avec} \quad V_1=(t_1(t_1-f)\neq 0),$$
$$V_i=(t_i\neq 0), \qquad i=2,\ldots,q,$$

est un recouvrement de Leray de $X'\setminus Y$.

Ce qui implique que :

$$H^q_Y(X', \Omega^{\bullet}_X)=H^{q-1}(X'\setminus Y, \Omega^{\bullet}_X)$$
$$=H^{q-1}(\mathscr{V}, \Omega^{\bullet}_X)=\frac{\Gamma(\bigcap_{i=1}^q V_i, \Omega^{\bullet}_X)}{B^{q-1}_a(\mathscr{V}, \Omega^{\bullet}_X)}, \qquad \text{si} \quad q\geqslant 2,$$
$$(H^q_Y(X', \Omega^{\bullet}_X)=\Gamma(X'\setminus Y, \Omega^{\bullet}_X)/\Gamma(X', \Omega^{\bullet}_X) \qquad \text{si} \quad q=1).$$

Soit

$$u_N=\sum_{h=1}^{k-1}\frac{f^h}{ht_1^h}+\sum_{h=1}^{k}\left(\sum_{m=0}^{N}\frac{S_{h,m}}{k+m}\right).\frac{f^{k-h}}{t_1^{k-h}}.$$

$(\mathrm{i})_m$ donne :

$$\frac{f^{k+m}}{(k+m)t_1^{k+m}}=\sum_{h=1}^{k}\frac{S_{h,m}}{(k+m)}\cdot\frac{f^{k-h}}{t_1^{k-h}}+\sum_{i=2}^{q}\frac{A_{i,m}}{(k+m)}\cdot\frac{t_i}{t_1^{k+m}}.$$

Et alors :

$$v_N:=u_N\frac{dt_2\wedge\ldots\wedge dt_q}{t_2\ldots t_q}=\sum_{m=1}^{k+N}\frac{f^m\,dt_2\wedge\ldots\wedge dt_q}{mt_1^m.t_2\ldots t_q} \quad \text{dans } H^q_Y(X', \Omega^{q-1}_X).$$

Posant

$$w=\frac{d(t_1-f)\wedge dt_2\wedge\ldots\wedge dt_q}{(t_1-f).t_2\ldots t_q}-\frac{dt_1\wedge\ldots\wedge dt_q}{t_1\ldots t_q},$$

on a :

$$(*) \qquad dv_N=\sum_{m=0}^{k+N-1}\frac{f^m}{t_1^m}d\left(\frac{f}{t_1}\right)\frac{dt_2\wedge\ldots\wedge dt_q}{t_2\ldots t_q}=w-\left(\frac{f}{t_1}\right)^{k+N}.w.$$

Mais $(\mathrm{i})_N$ montre que :

$$w_N:=\left(\frac{f}{t_1}\right)^{k+N}.w=\sum_{h=1}^{k}S_{h,N}\cdot\left(\frac{f^{k-h}.w}{t_1^{k-h}}\right).$$

Mais $(\mathrm{ii})_m$ lemme 2 et le choix de a, b montrent que : $\forall h=1,\ldots,k: S_{h,N}$ converge uniformément vers 0 sur U', et $\sum_{m\geq 0}S_{h,m}/k+m$ converge normalement sur U'. $\Rightarrow U_N := t_1^{k-1} . u_N$ converge uniformément vers $U \in \Gamma(X', \mathcal{O}_X)$.

Si

$$v = \frac{U\, dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_q}{t_1^{k-1} . t_2 \ldots t_q},$$

on aura donc :

$$v_N \text{ converge vers } v \text{ dans } \tilde{H}_Y^q(X', \Omega_X^{q-1}),$$

$$w_N \text{ converge vers } 0 \text{ dans } \tilde{H}_Y^q(X', \Omega_X^q).$$

Par continuité de d, $(*)$ donne :

$$w = d(v) \text{ i. e. } w = 0 \quad \text{dans } \frac{\tilde{H}_Y^q(X', \Omega_X^q)}{d\tilde{H}_Y^q(X', \Omega_X^{q-1})}$$

C.Q.F.D.

LEMME 4. — *Soient $W \subset \mathbb{C}^{n-q}$ et V_1, $V_2 \subset \mathbb{C}^q$ des polydisques centrés aux origines et de coordonnées respectives*

$$t'' = (t_{q+1}, \ldots, t_n), \qquad t' = (t_1, \ldots, t_q), \qquad s' = (s_1, \ldots, s_q).$$

Supposons X plongé dans $V_1 \times V_2 \times W \times \mathbb{C}^p$ de sorte que les projections naturelles :

$$\pi_1 : \quad X \to V_1 \times W, \qquad \pi_2 : \quad X \to V_2 \times W,$$

en fassent des revêtements ramifiés.

Soit : $I = (t_1, \ldots, t_q)\mathcal{O}_X$, $J = (s_1, \ldots, s_q)\mathcal{O}_X$.

Supposons :

$$(t_1 = \ldots = t_q = 0) = Y = (s_1 = \ldots = s_q = 0),$$

$I + J \subset I_Y^l \subset \bar{I} \cap \bar{J}$ *génériquement sur Y.*

Soit $W' \subset\subset W$, $V'_1 \subset\subset V_1$, $V'_2 \subset\subset V_2$ et

$$X' = \pi_1^{-1}(V'_1 \times W') \cap \pi_2^{-1}(V'_2 \times W').$$

Soit P le polydisque centre 0, de rayon 1 *dans* $\mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q$. *Pour* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q$ *notons :*

$$h^{(\lambda, \mu)} = (\lambda_1 t_1 + \mu_1 s_1, \ldots, \lambda_q t_q + \mu_q s_q)\mathcal{O}_X.$$

Alors :

$$\tilde{P}=\{(\lambda,\ \mu)\in P;\ h^{(\lambda,\ \mu)}\subset I_Y^l\subset\overline{h^{(\lambda,\ \mu)}}$$

génériquement sur $X(\lambda,\ \mu)\cap Y$ *où* $X(\lambda,\ \mu)$

est un voisinage de $\overline{X'\cap Y}\}$

est un ouvert connexe de P.

Preuve. — Si $[(z_1,\ldots,z_q);\ (w_1,\ldots,w_q)]$ sont les coordonnées de $(\mathbb{C}^q)^2$, soit H l'idéal de $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^q)^2\times X}$:

$$H=(z_1t_1+w_1s_1,\ \ldots,\ z_qt_q+w_qs_q).$$

Notons toujours par I_Y l'idéal réduit de $(\mathbb{C}^q)^2\times Y$ dans $(\mathbb{C}^q)^2\times X$. La cohérence de $\bar{H}$ (Appendice : 2. (ii)) fait que :

$$Z:=\operatorname{supp}\left(\frac{H+I_Y^l}{I_Y^l}\oplus\frac{\bar{H}+I_Y^l}{\bar{H}}\right)$$

est analytique fermé dans $(\mathbb{C}^q)^2\times X$.

Soient W'', V_1'', V_2'' des polydisques tels que :

$$W'\subset\subset W''\subset\subset W,\qquad V_1'\subset\subset V_1''\subset\subset V_1,\qquad V_2'\subset\subset V_2''\subset\subset V_2,$$
$$X''=\pi_1^{-1}(V_1''\times W'')\cap\pi_2^{-1}(V_2''\times W''):\ X'\subset\subset X''\subset\subset X.$$

Il existe $h_1,\ldots,h_r\in\Gamma(P\times X'',\ \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^q)^2\times X})$ tels que :

$$Z'':=Z\cap(P\times X'')=\{h_1=\ldots=h_r=0\}.$$

Posons

$$Y''=X''\cap Y,\qquad Y_j'=X'\cap Y_j''$$

pour toute composante irréductible Y_j'' de Y''.

$\pi: Y''\to W''$ est un revêtement ramifié contenu dans $W''\times B''$ où $B''\subset\subset\mathbb{C}^p$.

Soit H_i un relèvement analytique à $P\times W''\times B''$ de $h_i|P\times Y''.n$ Si $B'\subset\subset B''$ est tel que : $Y''\cap\bar{W}'\times\partial B'=\varnothing$, on a une application analytique (*cf.* [3]).

$$P\mapsto[H(\overline{W'\times B'},\ \mathbb{C})]^r,$$
$$(\lambda,\ \mu)\mapsto(H_i|(\lambda,\ \mu)\times\overline{W'\times B'})_{1\leq i\leq r}.$$

La restriction étant linéaire continue,

$$\beta_j: \quad P \mapsto [H(\overline{Y'_j}, \mathbb{C})]^r$$
$$(\lambda, \mu) \mapsto (H_i \,|\, (\lambda, \mu) \times \overline{Y'_j})_{1 \leq i \leq r}$$

est aussi analytique, et $T_j = \operatorname{Ker} \beta_j$ est analytique fermé dans P, de même que $T = \bigcup_j T_j$. Mais $T \supset T''$: $T'' = \bigcup_j T''_j$ où $T''_j = \operatorname{Ker} \alpha_j$ avec :

$$\alpha_j: \quad P \to [\Gamma(\overline{Y'_j}, \mathcal{O}_{Y''_j})]^r$$
$$(\lambda, \mu) \mapsto (H_i \,|\, (\lambda, \mu) \times Y''_j)_{1 \leq i \leq r}.$$

Par ailleurs si K est un idéal de $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^q)^2 \times X}$, notons $K \,|\, \rho^{-1}(\lambda, \mu)$ l'idéal correspondant de $\mathcal{O}_X$ ($\rho: (\mathbb{C}^q)^2 \times X \to (\mathbb{C}^q)^2$ la projection,

$$X \xrightarrow{\sim} (\lambda, \mu) \times X = \rho^{-1}(\lambda, \mu) \subsetneq (\mathbb{C}^q)^2 \times X).$$

On a alors : $P' \subset \tilde{P}$ où $P' = \{(\lambda, \mu) \in P;\ \exists\, X(\lambda, \mu)$ vois. de $\overline{X' \cap Y}$ tel que génériquement sur $X(\lambda, \mu) \cap Y : H \,|\, \rho^{-1}(\lambda, \mu) \subset I^l_Y \subset \bar{H} \,|\, \rho^{-1}(\lambda, \mu)\}$ car :

$$H \,|\, \rho^{-1}(\lambda, \mu) = h^{(\lambda, \mu)} \qquad \text{et} \qquad \bar{H} \,|\, \rho^{-1}(\lambda, \mu) \subset \overline{h^{(\lambda, \mu)}}.$$

D'où :

$$\tilde{T} = P \setminus \tilde{P} \subset P \setminus P' = T'.$$

Or $T' = \{(\lambda, \mu) \in P;\ \forall\, \tilde{X}$ vois. de $\overline{X' \cap Y},\ \exists\, \tilde{Y}$ composante irréductible de $Y \cap \tilde{X}$ telle que $(\lambda, \mu) \times \tilde{Y} \subset Z \cap \rho^{-1}(\lambda, \mu)\}$.

Et alors $T' \subset T''$. Donc $\tilde{T} \subset T$, et $\tilde{T}$ est alors mince.

Pour conclure (*cf.* [10]), il suffit de montrer l'ouverture de $\tilde{P}$.

Bien que les arguments d'une démonstration générale de ce fait existent en germe dans la preuve du sous-lemme suivant, nous n'y ferons varier qu'un seul paramètre.

SOUS-LEMME. — *Dans la situation du lemme* 1, *avec* $I = (t_1, \ldots, t_q)\mathcal{O}_X$ *vérifiant :* $I \subset I^l_Y \subset \bar{I}$ *génériquement sur* Y.

Soit $g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ *tel que :*

$g_y \in I^l_{Y,\,y}$ *génériquement sur* Y.

Alors : $\forall\, X' \subset\subset X,\quad \exists\, \varepsilon > 0,\quad \forall\, \zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < \varepsilon,$ *l'idéal de* $\mathcal{O}_X$: $I_\zeta = (t_1 - \zeta g, t_2, \ldots, t_q)$ *vérifie* $I_\zeta \subset I^l_Y \subset \bar{I}_\zeta$ *génériquement sur* $Y \cap X'$.

Preuve. — $I_\zeta \subset I^l_Y$ est évidente puisque $g_y \in I^l_{Y,\,y}$.

$I_Y^l \subset \bar{I}_\zeta$ si $I \subset \bar{I}_\zeta$ (Appendice : 1. (ii)).

Or $I \subset \bar{I}_\zeta$ si $\zeta g \in \bar{I}_\zeta$ $(t_1 = (t_1 - \zeta g) + \zeta g)$.

Mais $g_y \in I_{Y,\,y}^l \subset \bar{I}_y$ pour y générique dans Y, implique (lemme 1) :

$$g^k = \sum_{h=1}^{k} S'_h . g^{k-h}$$

avec

$$S'_h = S'_{h,\,0} . t_1^h + \sum_{|\alpha|=h,\ \alpha_1 \neq h} S'_{h,\,\alpha} . (t')^\alpha.$$

Posons

$$f = \zeta . g, \qquad S_{h,\,0} = \zeta^h . S'_{h,\,0}, \qquad S_{h,\,\alpha} = \zeta^h . S'_{h,\,\alpha}.$$

On aura alors :

$$f^k = \sum_{h=1}^{k} S_h . f^{k-h}$$

avec

$$S_h = S_{h,\,0} . t_1^h + \sum_{|\alpha|=h,\ \alpha_1 \neq h} S_{h,\,\alpha} . t'^{\alpha}.$$

Mais alors $(t_1 = (t_1 - f) + f)$:

$$\begin{aligned} S_h = & \sum_{l=0}^{h} C_h^l . S_{h,\,0} (t_1 - f)^l . f^{h-l} \\ & + \sum_{|\alpha|=h,\ \alpha_1 \neq h} \sum_{\beta=0}^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^\beta S_{h,\,\alpha} (t_1 - f)^\beta t_2^{\alpha_2} \ldots t_q^{\alpha_q} . f^{\alpha_1 - \beta}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f^k = & \Big(\sum_{h=1}^{k} S_{h,\,0}\Big) f^k + \sum_{h=1}^{k} \sum_{l=1}^{h} C_h^l S_{h,\,0} (t_1 - f)^l . f^{k-l} \\ & + \sum_{h=1}^{k} \sum_{|\alpha|=h,\ \alpha_1 \neq h} \sum_{\beta=0}^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^\beta S_{h,\,\alpha} (t_1 - f)^\beta \\ & \times t_2^{\alpha_2} \ldots t_q^{\alpha_q} f^{k-(\beta+\alpha_2+\ldots+\alpha_q)}. \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que :

$$\Big(1 - \sum_{h=1}^{k} S_{h,\,0}\Big) = \Big(1 - \sum_{h=1}^{k} \zeta^h . S'_{h,\,0}\Big)$$

est inversible sur X' pour ζ assez petit.

LEMME 5. — *Dans la situation du lemme* 4,

$$\frac{dt_1 \ldots dt_q}{t_1 \ldots t_q} = \frac{ds_1 \ldots ds_q}{s_1 \ldots s_q} \quad \textit{dans } H^0\left(X, \frac{\underline{\tilde{H}}_Y^q(\Omega_X^q)}{d\underline{\tilde{H}}_Y^q(\Omega_X^{q-1})}\right)$$

Preuve. — Il suffit de montrer que ces deux sections sont égales sur tout $X' \subset\subset X$. Par ailleurs les points (1/2, 0) et (0, 1/2) (correspondant à I et J) de $\tilde{P}$ peuvent être joints par un chemin continu dans $\tilde{P}$. On conclut, par approximations successives grâce au lemme 3.

Démonstration du théorème 1 :

$$X = \bigcup_i U_i, \qquad f_1^i, \ldots, f_q^i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X), \qquad l_i \in \mathbb{N}^*$$

tels que :

$$I_i = (f_1^i, \ldots, f_q^i)$$

vérifie :

$$V(I_i) = Y \cap U_i,$$

$$I_i \subset I_Y^{l_i} \subset \bar{I}_i$$

génériquement sur $Y \cap U_i$.

$$C_i = \frac{1}{l_i^q} \cdot \frac{df_1^i \wedge \ldots \wedge df_q^i}{f_1^i \ldots f_q^i} \in H^0\left(U_i, \frac{\underline{\tilde{H}}_Y^q(\Omega_X^q)}{d\underline{\tilde{H}}_Y^q(\Omega_X^{q-1})}\right),$$

et il s'agit de montrer que :

$$C_i|_{U_i \cap U_j} = C_j|_{U_i \cap U_j}.$$

En localisant sur $U_i \cap U_j$, on se ramène à la situation du lemme 5, en remarquant que :

$$C_i = \frac{1}{(l_i l_j)^q} \cdot \frac{d(f_1^i)^{l_j} \wedge \ldots \wedge d(f_q^i)^{l_j}}{(f_1^i)^{l_j} \ldots (f_q^i)^{l_j}},$$

$$C_j = \frac{1}{(l_i l_j)^q} \cdot \frac{d(f_1^j)^{l_i} \wedge \ldots \wedge d(f_q^i)^{l_i}}{(f_1^j)^{l_i} \ldots (f_q^j)^{l_i}}.$$

En effet si $I = (f_1, \ldots, f_q)$ vérifie $I \subset I_Y^l \subset \bar{I}$ génériquement sur Y alors : $I' = (f_1^k, \ldots, f_q^k)$ vérifie, pour $m = k.l$: $I' \subset I_Y^m \subset \bar{I}'$, génériquement sur Y. car :

– $I' \subset I^k \subset I_Y^m$ génériquement sur Y.

– $I_Y^m \subset (\bar{I})^k \subset \bar{I}^k$ (Appendice : 1. (iii))

$\Rightarrow I_Y^m \subset \bar{I}'$ génériquement sur Y, puisque $I^k \subset \bar{I}'$ (Appendice : 1 (i)) :

$$[(f_1)^{a_1} \ldots (f_q)^{a_q}]^k = (f_1^k)^{a_1} \ldots (f_q^k)^{a_q}, \qquad a_1 + \ldots a_q = k.$$

C.Q.F.D.

2

DÉFINITION. — Soit X un espace analytique réduit, de dimension pure n.

$\mathscr{C}_{\bullet}(X)$ désignera l'espace des cycles analytiques à coefficients rationnels, gradué par la codimension, i. e. :

$\mathscr{C}_c(X) = \{\sum_{\alpha \in A,\ \text{localement finie}} q_\alpha S_\alpha;\ q_\alpha \in \mathbb{Q};$

S_α sous ensemble analytique fermé irréductible de codimension $c\}$.

$\mathscr{C}^b_{\bullet}(X)$ désignera le sous-ensemble de $\mathscr{C}_{\bullet}(X)$ formé des « bons » cycles, où $C \in \mathscr{C}_c(X)$ est dit bon si :

$$C = q.\sum_\alpha n_\alpha . S_\alpha \qquad \text{avec} \quad q \in \mathbb{Q}$$

et :

1. $n_\alpha = \text{mult}_X(S_\alpha) =$ multiplicité de X le long de S_α.

2. $S = \bigcup_\alpha S_\alpha$ et son idéal réduit I_S vérifient : localement sur X, il existe $f = (f_1, \ldots, f_c)$, et $l \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$V(I) = S \qquad \text{et} \qquad I \subset I_S^l \subset \bar{I}$$

génériquement sur S.

Soit $A_{\bullet,\bullet}(X)$ le sous-ensemble des couples de cycles dans

$$\mathscr{C}^b_{\bullet}(X) \times \mathscr{C}_{\bullet}(X) \cup \mathscr{C}_{\bullet}(X) \times \mathscr{C}^b_{\bullet}(X),$$

ayant des supports se coupant proprement.

THÉORÈME 2. — *Il existe une application produit d'intersection de cycles :*

$$\dot{_X}:\quad A_{\bullet,\bullet}(X) \to \mathscr{C}_{\bullet+\bullet}(X),$$

ayant les propriétés suivantes :

1. *Si* $X \subsetneq V$ *est un plongement local dans un lisse et* $C \in \mathscr{C}^b_{\bullet}(X)$, $C' \in \mathscr{C}_{\bullet}(X)$, *alors il existe* $D \in \mathscr{C}_{\bullet}(V)$ *tel que :*

$$D \mathbin{\dot{_V}} X = C \qquad \textit{et} \qquad C \mathbin{\dot{_X}} C' = D \mathbin{\dot{_V}} C'.$$

2. $\dot{_X}$ *Coïncide avec le produit d'intersection de cycles usuel dans le cas où X est lisse.*

3. *Commutativité :*

$$C_1 \mathbin{\dot{_X}} C_2 = C_2 \mathbin{\dot{_X}} C_1 \qquad si \quad C_1, C_2 \in \mathscr{C}^b_{\bullet}(X).$$

4. *Associativité :*

$$C_1 \underset{X}{\cdot} (C_2 \underset{X}{\cdot} C_3) = (C_1 \underset{X}{\cdot} C_2) \underset{X}{\cdot} C_3 \qquad si \quad C_1, C_3 \in \mathscr{C}^b_{\bullet}(X).$$

5. *Si C_1, $C_2 \in \mathscr{C}^b_{\bullet}(X)$ alors :*

$$C_1 \times C_2 \in \mathscr{C}^b_{\bullet}(X \times X) \qquad et \qquad C_1 \underset{X}{\cdot} C_2 = (C_1 \times C_2)_{X \underset{\cdot}{\times} X} \Delta$$

(où Δ est la diagonale de $X \times X$).

6. *Si $C_1 \in \mathscr{C}^b_{\bullet}(X)$, $C'_1 \in \mathscr{C}^b_{\bullet}(X')$ alors :*

$$C_1 \times C'_1 \in \mathscr{C}^b_{\bullet}(X \times X')$$

et

$$(C_1 \underset{X}{\cdot} C_2) \times (C'_1 \underset{X'}{\cdot} C'_2) = (C_1 \times C'_1)_{X \underset{\cdot}{\times} X'} (C_2 \times C'_2).$$

7. *Si $f: X \to X'$ est un morphisme propre et fini, si*

$$C \in \mathscr{C}^b_{\bullet}(X), \qquad C' \in \mathscr{C}^b_{\bullet}(X')$$

alors

$$f_*(C \underset{X}{\cdot} f^*(C')) = f_* C \underset{X'}{\cdot} C'.$$

Démonstration. — Il suffit de définir $C \underset{X}{\cdot} Z$, où C est un bon cycle élémentaire de codimension q, Z réduit et irréductible de codimension r coupant $|C|$ proprement, i. e. $T = |C| \cap Z$ de codimension pure $r+q$.

Au voisinage d'un point générique d'une composante irréductible T_j de T, nous définirons, par des plongements de X dans un lisse, une fonction constante rationnelle positive, qui sera indépendante du dit plongement. Ceci permet de recoller et de définir une fonction constante rationnelle positive sur T_j, notée $i(C \underset{X}{\cdot} Z;\ T_j)$ et appelée multiplicité d'intersection de C et Z le long de T_j.

Nous poserons alors :

$$C \underset{X}{\cdot} Z = \textstyle\sum_j i(C \underset{X}{\cdot} Z;\ T_j).\ T_j \in \mathscr{C}_{q+r}(X).$$

DÉFINITION de $i(C \underset{X}{\cdot} Z;\ T_j)$. — En se plaçant au voisinage d'un point générique de T_j, on peut supposer que $T = |C| \cap Z$ est lisse, connexe de codimension $q+r$.

$$C = \textstyle\sum_j \mathrm{mult}_X(Y_j).\ Y_j, \qquad Y = |C| = \cup_j Y_j.$$

$$I = (f_1, \ldots, f_q) \quad \text{tel que } V(I) = Y \quad \text{et} \quad I \subset I^l_Y \subset \bar{I},$$

génériquement sur Y.

Quitte à rétrécir le voisinage considéré, on peut plonger $X \subsetneq V$ de façon que :

(1)
$V = T \times S$, T polydisque $\subset \mathbb{C}^{n-t}$ ($n = \dim X$), S polydisque $\subset \mathbb{C}^{t+p}$.
$f_1, \ldots, f_q$ se relèvent en $F_1, \ldots, F_q$ tels que :
$D = \{F_1 = \ldots = F_q = 0\}$ soit lisse dans V, de codimension q et d'équations normales $F_1, \ldots, F_q$.

On en déduit alors :

$$D \cap Z = T, \qquad l^q . C = D \cdot_V X,$$

$\tilde{C}_Y^X$ est l'image de

$$\frac{1}{l^q} \wedge_{i=1}^{q} \frac{dF_i}{F_i} = \frac{1}{l^q} C_D^V$$

par les flèches naturelles :

$$H_D^q(V, \Omega_V^q) \to H_Y^q(X, \Omega_X^q) \to H^0\left(X, \frac{\underline{\tilde{H}}_Y^q(\Omega_X^q)}{d\underline{\tilde{H}}_Y^q(\Omega_X^{q-1})}\right).$$

Mais le morphisme (*cf.* [4] et [5])

$$\Omega_V^{\cdot} \xrightarrow{c_Z^V} \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{O}_V}^{r+p}(\mathcal{O}_Z, \Omega_V^{r+p+\cdot}),$$

passe au quotient par $I_X . \Omega_V^{\cdot}$ et $dI_X \wedge \Omega_V^{\cdot - 1}$ $(Z \subset X)$ et définit un morphisme de complexes :

$$\Omega_X^{\cdot} \xrightarrow{c_Z^V} \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{O}_V}^{r+p}(\mathcal{O}_Z, \Omega_V^{r+p+\cdot}).$$

Soit $U \subset V$ un ouvert de Stein, on a alors un morphisme de complexes :

$$H_Y^q(U \cap X; \Omega_X^{\cdot}) \xrightarrow{c_Z^V} H_D^q(U, \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{O}_V}^{r+p}(\mathcal{O}_Z, \Omega_V^{r+p+\cdot}).$$

Or le terme de droite représente le terme $E_2^{q, r+p}$ d'une suite spectrale aboutissant à $R^{\cdot}(\Gamma_D(U, .) \circ \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_Z, \Omega_V^{\cdot})$. Mais du fait que U est Stein, $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{O}_V}^{\cdot}(\mathcal{O}_Z, \Omega_V^{\cdot})$ est cohérent et D est intersection complète, on a :

$$E_2^{\alpha, \beta} = 0, \qquad \forall \alpha > q, \quad \forall \beta \geqslant 0.$$

Il s'ensuit (*cf.* [6]) un morphisme naturel :

$$E_2^{q,\, r+p} \to R^{t+p}(\Gamma_D(U, .)\circ \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_Z, .)).$$

Et comme $\Gamma_D(U, .)\circ \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_Z, .)$ s'envoit dans $\Gamma_T(U, .)$, on a un morphisme de complexes :

$$\forall U \subset V, \quad \text{Stein} : H_Y^q(U \cap X, \Omega_X^{\bullet}) \xrightarrow{c_Z^V} H_T^{t+p}(U, \Omega_V^{r+p+\bullet}).$$

En passant aux séparés associés pour les topologies canoniques (à droite c'est séparé, *cf.* [2]), puis en faisceautisant on obtient un morphisme de complexes :

$$\underline{\tilde{H}}_Y^q(\Omega_X^{\bullet}) \xrightarrow{c_Z^V} \underline{H}_T^{t+p}(\Omega_V^{r+p+\bullet}).$$

Et en quotientant par d et passant aux sections globales, on obtient un diagramme :

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc}
H_D^q(V, \Omega_V^q) & \xrightarrow{c_Z^V \cup} & H_T^{t+p}(V, \Omega_V^{t+p}) \\
\downarrow & & \| \\
H_Y^q(X, \Omega_X^q) & \xrightarrow{c_Z^V} & H_T^{t+p}(V, \Omega_V^{t+p}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^0\left(X, \dfrac{\underline{\tilde{H}}_Y^q(\Omega_X^q)}{d\underline{\tilde{H}}_Y^q(\Omega_X^{q-1})}\right) & \xrightarrow{c_Z^V} & H^0\left(V, \dfrac{\underline{H}_T^{t+p}(\Omega_V^{t+p})}{d\underline{H}_T^{t+p}(\Omega_V^{t+p-1})}\right).
\end{array}$$

D'où

$$\underline{C}_Z^V(\tilde{C}_Y^X) = \frac{1}{l^q}\cdot C_Z^V \cup C_D^V.$$

Par ailleurs si $\Omega^{\bullet}/T$ représente le faisceau des formes T-relatives, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\Omega_V^{t+p-1} & \to & \Omega^{t+p-1}/T \\
\downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d/T} \\
\Omega_V^{t+p} & \to & \Omega^{t+p}/T
\end{array}$$

qui donne naissance, pour $\tau \subset T$ et $\Sigma \subset S$ des polydisques, à un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
H_T^{l+p}(\tau\times\Sigma,\ \Omega_V^{l+p-1}) & \to & H_T^{l+p}(\tau\times\Sigma,\ \Omega^{l+p-1}/T) & = & H^0(\tau,\ \mathcal{O}_T)\hat{\otimes}_{\mathbb{C}} H_{\{0\}}^{l+p}(\Sigma,\ \Omega_S^{l+p-1}) \\
\downarrow d & & \downarrow d/T & & \downarrow 1\otimes d_S \\
H_T^{l+p}(\tau\times\Sigma,\ \Omega_V^{l+p}) & \to & H_T^{l+p}(\tau\times\Sigma,\ \Omega^{l+p}/T) & = & H^0(\tau,\ \mathcal{O}_T)\hat{\otimes}_{\mathbb{C}} H_{\{0\}}^{l+p}(\Sigma,\ \Omega_S^{l+p})
\end{array}$$

Et comme l'application résidu ou « trace absolue » :

$$H_{\{0\}}^{l+p}(S,\ \Omega_S^{l+p}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{C} \quad \text{est nulle sur } d(H_{\{0\}}^{l+p}(S,\ \Omega_S^{l+p-1})),$$

on a un morphisme « Trace relative » :

$$H^0\left(V,\ \frac{\underline{H}_T^{l+p}(\Omega_V^{l+p})}{d\underline{H}_T^{l+p}(\Omega_V^{l+p-1}}\right) \xrightarrow{\mathrm{Tr}/T} H^0(T,\ \mathcal{O}_T),$$

qui combiné avec (2) donne :

$$H^0\left(X,\ \frac{\underline{\tilde{H}}_Y^q(\Omega_X^q)}{d\underline{\tilde{H}}_Y^q(\Omega_X^{q-1})}\right) \xrightarrow{\mathrm{Tr}/T\,\circ\, C_Z^V} H^0(T,\ \mathcal{O}_T).$$

Calcul de $m = \mathrm{Tr}/T \circ \underline{C}_Z^V(\tilde{C}_Y^X)$:

Il est clair que :

$$m(t) = \frac{1}{l^q}\mathrm{Tr}/T(C_Z^V \cup C_D^V)(t) = \frac{1}{l^q}\mathrm{Tr}((C_Z^V \cup C_D^V) \cup C_{S_t}^V),$$

où $S_t = \{t\} \times S$. Mais alors (quitte à rétrécir S, au besoin) D et S_t se coupent transversalement le long de $D_t = D \cap S_t$ et ainsi $C_D^V \cup C_{S_t}^V = C_{D_t}^V$. D'où

$$m(t) = \frac{1}{l^q}\mathrm{Tr}/T(C_Z^V \cup C_{D_t}^V) = \frac{1}{l^q} i(Z \cdot_V D_t;\ (t,\ 0)) \qquad (cf.\ [5])$$

et m est donc la fonction constante ($\in \mathbb{Q}_*^+$) égale à $i(Z \cdot_V D;\ T)/l^q$ i. e. :

$$l^q.m.\ T = Z \cdot_V D.$$

Conséquence. — m ne dépend pas du plongement $X \hookrightarrow V$ considéré.

En effet, si $X \hookrightarrow V_i$, $i=1, 2$ sont deux plongements du type cité (1), il est clair qu'en localisant au besoin autour de T, on aura un diagramme de plongements :

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & V_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_2 & \hookrightarrow & V_3 \end{array}$$

avec V_3 lisse et $X \hookrightarrow V_3$ du type cité (1).

On est alors ramené à la situation :

$$X \hookrightarrow V \hookrightarrow V',$$

$V = T \times S$, $V' = T \times S'$, $D \subset V$ et $D' \subset V'$ lisses tels que :

$$D \cap Z = D' \cap Z = T \qquad \text{et} \qquad D' \cdot_{V} V = D,$$

$$m(t) = \mathrm{Tr}^V/T(\underline{C}_Z^V(\tilde{C}_Y^X)) = \frac{1}{l^q} \mathrm{Tr}^V/T(C_Z^V \cup C_D^V),$$

$$m'(t) = \mathrm{Tr}^{V'}/T(\underline{C}_Z^{V'}(\tilde{C}_Y^X)) = \frac{1}{l^q} \mathrm{Tr}^{V'}/T(C_Z^{V'} \cup C_{D'}^{V'}).$$

Mais

$$Z \cdot_{V} D = Z \cdot_{V} (D' \cdot_{V'} V) = Z \cdot_{V'} D' \qquad (cf.\ [12]).$$

D'où

$$l^q . m . T = l^q m' . T \text{ i. e. } m = m'.$$

Ainsi on définit $i(C \cdot_X Z;\, T) = m$ et

$$(*) \qquad C \cdot_X Z := m . T = \frac{1}{l^q} D \cdot_V Z.$$

De (*) découlent donc, sans difficultés, les propriétés 1, 2, 3, 4.

Pour 5 et 6 il suffit d'en vérifier la première partie, c'est-à-dire que :

$$C \in \mathscr{C}_c^b(X), \qquad C' \in \mathscr{C}_d^b(X') \quad \Rightarrow \quad C \times C' \in \mathscr{C}_{c+d}^b(X \times X').$$

Le problème est local :

$$C = q . \textstyle\sum_j \mathrm{mult}_X(Y_j) . Y_j, \qquad C' = r . \sum_k \mathrm{mult}_{X'}(Z_k) . Z_k,$$

avec q et $r \in \mathbb{Q}$ et : $Y=|C|=\bigcup Y_j$ de codimension pure c, $Z=|C'|=\bigcup_k Z_k$ de codimension pure d; par ailleurs, il existe :

$$I=(f_1, \dots, f_c) \subset \mathcal{O}_X, \qquad J=(g_1, \dots, g_d) \subset \mathcal{O}_{X'},$$

un entier $l \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$I \subset I_Y^l \subset \bar{I} \text{ génériquement sur } Y$$

$$J \subset I_Z^l \subset \bar{J} \text{ génériquement sur } Z.$$

(On peut en effet se ramener au cas où l'entier l est le même pour Y et Z, *cf.* la démonstration du théorème 1.)

Si $\pi_1 : X \times X' \to X$ et $\pi_2 : X \times X' \to X'$ sont les projections naturelles et si $K=\pi_1^* I+\pi_2^* J$, on sait que $I_{Y+Z}=\pi_1^* I_Y+\pi_2^* I_Z$ et on vérifie aisément, grâce à Appendice 2. (iii), que :

$$K \subset I_{Y \times Z}^l \subset \bar{K} \text{ génériquement sur } Y \times Z.$$

Et ainsi :

$$C \times C' = q \,.\, r \,.\, \textstyle\sum_{j,\,k} \operatorname{mult}_{X \times X'}(Y_j \times Z_k) \,.\, Y_j \times Z_k$$

est un bon cycle dans $X \times X'$.

Le caractère fonctoriel de f_* et f^* scinde l'étude de la propriété 7 en deux cas distincts : f surjectif et f plongement.

Dans les deux cas le problème est local sur X et il suffit de montrer l'existence d'un diagramme commutatif :

$$(**) \qquad \begin{array}{ccc} X & \overset{i}{\hookrightarrow} & V \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ X' & \overset{j}{\hookrightarrow} & V' \end{array}$$

avec i, j des plongements, V et V' lisses et F fini.

Supposons $(**)$ vraie :

si

$$C = X \cdot_V D = i^*(D) \qquad \text{où} \quad D \in \mathscr{C}_\bullet(V);$$

et

$$C' = X' \cdot_V D' = j^*(D') \qquad \text{où} \quad D' \in \mathscr{C}_\bullet(V'),$$

la validité de 7. pour $F: V \to V'$ (*cf.* [12]) donne :

$$\begin{aligned} j_*(f_*(C \dot{_X} f^*(C'))) &= F_*(i_*(C \dot{_X} f^*(C'))) \\ &= F_*(D \dot{_V} i_*(i^*(F^*(D')))) = F_*(D \dot{_V} X \dot{_V} F^*(D')) \\ &= F_*(i_*(C) \dot{_V} F^*(D')) = F_*(i_*(C)) \dot{_{V'}} D' \\ &= j_*(f_*(C))\dot{_{V'}} D' = j_*(f_*(C)\dot{_{X'}} C'), \end{aligned}$$

d'où :

$$f_*(C \dot{_X} f^*(C')) = f_*(C)\dot{_{X'}} C',$$

par injectivité de j_*.

Prouvons $(**)$: si f est un plongement, c'est clair :

Pour (j, V') fixés, prendre $V=V'$, $i=j\circ f$ et $F=\mathrm{id}_{V'}$.

Si f est surjectif, fixons d'abord (i, V), (j_1, V'_1) des plongements $i: X \hookrightarrow V$, $j_1: X' \hookrightarrow V'_1$.

$j_1 \circ f$ se relève en $F_1: V \to V'_1$ i.e. :

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{i}{\hookrightarrow} & V \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_1} \\ X' & \underset{}{\overset{j_1}{\hookrightarrow}} & V'_1 \end{array}$$

est un diagramme commutatif.

Si F_1 est fini (F_1, V'_1) répond à la question.

Sinon soit $Y_1 = F_1^{-1}(0)$ et $Y_1^{(1)}, \ldots, Y_1^{(N)}$ ses composantes irréductibles. Du fait que $X \cap Y_1 = \{0\}$ on a :

$$Y_1^{(p)} \not\subset X, \qquad \forall p=1, \ldots, N,$$

d'où :

$$\forall p=1, \ldots, N, \quad \exists G_p: \quad V \to \mathbb{C}, \qquad G_p/X \equiv 0 \qquad \text{et} \quad G_p/Y_1^{(p)} \not\equiv 0.$$

Soit alors $V'_2 = V'_1 \times \mathbb{C}^N$, $j_2 = (j_1, 0)$ et $F_2 = (F_1, G_1, \ldots, G_N)$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{i}{\hookrightarrow} & V \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_2} \\ X' & \overset{j_2}{\hookrightarrow} & V'_2 \end{array}$$

est commutatif, avec pour $Y_2 = F_2^{-1}(0)$: $\dim(Y_2) < \dim(Y_1)$.

Et ainsi, après un nombre fini d'opérations de ce type, (**) est réalisée.

C.Q.F.D.

3. Exemples

(1) Tout diviseur irréductible localement principal et qui sort du lieu singulier est un bon cycle. C'est en particulier le cas d'un diviseur irréductible et localement principal d'un espace normal.

Soit

$$X=\{(x, y, z)\in\mathbb{C}^3;\ x^2y=z^3\}\Rightarrow S(X)=\{x=z=0\}.$$

Soit C_1 la courbe de X paramétrée :

$$\mathbb{C}\to X,\qquad t\mapsto(t^2, t^5, t^3)$$

et

$$C_2=S(X).$$

Alors C_1 et C_2 sont deux bons cycles. En effet on vérifie bien que $f=x^5-3x^2z^2+3xyz-y^2$ est une équation de C_1, $C_1\cap S(X)=\{0\}$, f définissant C_1 avec multiplicité 3 car $f=(x^3-z^2)^3/x^4$ génériquement sur C_1.

Pour C_2, x^2 en est une équation et $x^2\in I^3_{C_2}$ au point générique de C_2 car $I_{C_2}=(x, z)$; et $I^3_{C_2}\subset\bar{x}^2$ car $(xz^2)^2=y.z(x^2)^2$.

Soit, par ailleurs, C_3 la courbe paramétrée :

$$\mathbb{C}\to X,\qquad t\mapsto(t^4, t, t^3).$$

$C_1 \dot{x}\, C_3$ et $C_2 \dot{x}\, C_3$ sont donc bien définis :

$$C_1 \dot{x}\, C_3=\frac{1}{3}(f=0)_{\mathbb{C}^3}C_3=\frac{1}{3}(\deg f: C_3\to\mathbb{C}).\{0\}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\deg:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto t^{20}-3t^{14}+3t^8-t^2\end{pmatrix}.\{0\}=\frac{20}{3}\{0\}.$$

$$C_2 \dot{x}\, C_3=\frac{1}{2.3}(x^2=0)_{\mathbb{C}^3}C_3=\frac{1}{6}(\deg x^2: C_3\to\mathbb{C}).\{0\}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\deg:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ t\to t^8\end{pmatrix}.\{0\}=\frac{4}{3}.\{0\}.$$

Ces multiplicités d'intersection prennent un sens moins trivial si l'on montre que C_3 n'est pas principal autour de l'origine.

Le normalisé $\tilde{X}=\{(x, y, z, s)\in \mathbb{C}^4;\ xy=zs,\ s^2=yz,\ xs=z^2\}$ de X, s'identifie au quotient de $\mathbb{C}^2$ par l'action du groupe fini engendré par $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$. via le morphisme :

$$\rho:\mathbb{C}^2 \to \tilde{X}$$
$$(a, b)\mapsto (a^3, b^3, a^2 b, ab^2).$$

Le morphisme propre fini et surjectif

$$\sigma: \quad \mathbb{C}^2 \to X$$
$$(a, b) \to (a^3, b^3, a^2 b),$$

se factorise alors comme :

$$\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\rho} \tilde{X} \xrightarrow{\pi} X,$$

π étant la projection naturelle.

On vérifie que $\sigma^{-1}(C_3)$ a pour équation $a-b^4$.

Il s'ensuit que $\pi^{-1}(C_3)$ est irréductible et a pour équation :

$$(a-b^4)^3=x-3\ yz+3\ sy^2-y^4=g.$$

Supposons maintenant que C_3 soit principal et soit f une équation de C_3 dans X. $f\circ\pi$ est alors une deuxième équation de $\pi^{-1}(C_3)$ dans $\tilde{X}$.

Si m et n sont les multiplicités respectives de $f\circ\pi$ et g le long de $\pi^{-1}(C_3)$, alors :

$$\frac{(f\circ\pi)^n}{g^m} \quad \text{et} \quad \frac{g^m}{(f\circ\pi)^n}$$

sont holomorphes dans $\tilde{X}-\{0\}$, et se prolongent à travers $\{0\}$ par normalité de $\tilde{X}$. Il existe ainsi $h\in\mathcal{O}_{\tilde{X}}$, h inversible tel que : $(f\circ\pi)^n=g^m.\,h$.

Or $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ est engendré sur $\mathcal{O}_X$ par 1 et s; il existe alors h_1 et h_2 dans $\mathcal{O}_X$, h_1 inversible et tels que :

$$(*) \qquad g^m(h_1+sh_2)\in\mathcal{O}_X.$$

Or $g^m = (-1)^{m-1}.3\, msy^{4m-2} + (-1)^m\, y^{4m} + k$, où $k \in (x, z)\, \mathcal{O}_X$ car xs, sz, s^2 sont dans $(x, z)\, \mathcal{O}_X$.

Et $(*)$ implique que :

$$sy^{4m-2}((-1)^{m-1}.3\, m.h_1 + (-1)^m y^2 h_2) \in \mathcal{O}_X.$$

i. e.

$$sy^{4m-2} \in \mathcal{O}_X \quad \text{(car } h_1 \text{ est inversible).}$$

Or ceci impliquerait que $ab^2.(b^3)^{4m-2}$ est une fonction analytique en a^3, b^3, $a^2 b$. Ce qui est clairement faux.

(2) Toute intersection complète génériquement réduite est un bon cycle.

Soit $X = \{ (u, v, x, y) \in \mathbb{C}^4;\ uv = xy \}$.

Soit C_1 la courbe $C_1 = (x = y = u = 0)$, et C_2 la courbe paramétrée :

$$\mathbb{C} \to X, \qquad t \to (t, t^4, t^2, t^3).$$

Alors $x = u^2$, $y = u^3$ sont des équations génériquement réduites de $C_1 \cup C_2$ et $C = C_1 + C_2$ est donc un bon cycle.

Mais le diviseur $D = \{ v = y = 0 \}$ n'est pas principal autour de l'origine (sinon le diviseur $D' = \{ x = u = 0 \}$ le serait aussi par permutation des coordonnées, et alors du fait que $D \cap D' = \{ 0 \}$, X aurait un système de deux paramètres au voisinage de l'origine, ce qui est absurde car $\dim X = 3$).

$$C \dot{_X} D = (x - u^2 = y - u^3 = 0) \dot{_{\mathbb{C}^4}} (v = y = 0) = 3.\{ 0 \}$$

(2') En codimension supérieure à 2, la condition de bon cycle n'est pas aussi « automatique » qu'en codimension 1.

C_1 est un bon cycle. En effet :

Soit $I = \{ (x-y)^2, u \}$ alors $C_1 = V(I)$.

$I \subset I_{C_1}^2$ génériquement sur C_1 car $I_{C_1} = (x, y, u)$.

$I_{C_1}^2 \subset \bar{I}$ car

$$I_{C_1} = (x, y, u) = (x - y, x + y, u).$$

D'où :

$$I_{C_1}^2 = ((x-y)^2, (x+y)^2, x^2 - y^2, (x-y)u, (x+y)u, u^2)$$

et

$$(x^2 - y^2)^2 = (x-y)^2 (4\, uv + (x-y)^2) \in I^2.$$

$$C_1 \dot{_X} D = \frac{1}{2^2}((x-y)^2 = u = 0) \dot{_{\mathbb{C}^4}} (v = y = 0) = \frac{1}{2} \cdot \{ 0 \}.$$

(2″) Par un procédé analogue à celui de l'exemple (1), on construit une fonction :

$$f=x^3-5\,x^2u^2+10\,xu^4-10\,u^6+5\,u^3y-y^2,$$

dont on vérifie que l'idéal $J=\{(v-u^4), f\}$ est un idéal d'équations pour C_2.

Or $x^2 f=(x-u^2)^5+u^2(5\,xu^2-u^4-v)(v-u^4)$.

On en déduit que sur $C_2-\{0\}$, on a :

$$J=\{(v-u^4),\ (x-u^2)^5\},$$
$$I_{C_2}=\{(v-u^4),\ (x-u^2)\}$$

(x est inversible sur $C_2-\{0\}$).

J définit donc C_2 avec multiplicité 5.

L'idéal $I=\{(v-u^4)^5, f\}$ définit alors C_2 avec multiplicité 5^2.

On pourrait espérer que I réalise C_2 comme bon cycle. Il n'en est rien. En effet, si c'était le cas, on aurait nécessairement :

$$I\subset I_{C_2}^5\subset \overline{I},\ \text{génériquement sur } C_2.$$

Mais du fait que sur $C_2-\{0\}$, x^2 et $u^2(5\,xu^2-u^4-v)$ sont inversibles, on aurait que :

(1) $$(v-u^4)\in I_{C_2}^5,$$

(2) $$(v-u^4)\in \overline{I}.$$

L'affirmation (1) est absurde du fait que $(x-u^2)$ et $(v-u^4)$ constituent des coordonnées normales génériques de C_2 dans X.

L'affirmation (2) est fausse car, en changeant de coordonnées, (2) revient à dire que dans $\mathbb{C}^3$ (de coordonnées (A, B, C)) :

$$B\in\overline{(A^5+g\,B,\ B^5)},\quad \text{où } g \text{ est holomorphe sur } \mathbb{C}^3.$$

Or, en plongeant $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^5$ comme graphe de $(A^5+g\,B,\ B^5)$:

$$\begin{array}{ccccc} (A,B,C) & & \mathbb{C}^3 & \hookrightarrow \mathbb{C}^5 & (t_1,t_2,t_3,x_1,x_2)\\ & \searrow & & \searrow\ \downarrow & \downarrow \pi\\ & (A^5+g\,B,\ B^5,\ C) & & \mathbb{C}^3 & (t_1,t_2,t_3), \end{array}$$

on se trouve dans la situation du lemme 1, mais pour laquelle la condition b n'est pas réalisée car :

$$\operatorname{trace}_{\pi \mid \mathbb{C}^3}(B^5)=5\ t_2.$$

(3) Si on néglige la condition de bon cycle, on est tenté de « définir » $C_2 \dot{_X} D$ comme :

$$C_2 \dot{_X} D=\frac{1}{5^2}((v-u^4)^5=f=0)_{\dot{\mathbb{C}}^4}(v=y=0)=\frac{12}{5}\{0\}.$$

Mais on aurait alors un défaut de distributivité de $\dot{_X}$ par rapport à $+$:

$$(C_1+C_2)\dot{_X} D=3\{0\} \neq \frac{29}{10}\{0\}=\frac{1}{2}\{0\}+\frac{12}{5}\{0\}=C_1 \dot{_X} D+C_2 \dot{_X} D.$$

(4) Les conditions de bon cycle permettent parfois de couper 2 cycles complètement inscrits dans le lieu singulier.

Soit

$$X=\{(u,\ v,\ x,\ y,\ z)\in\mathbb{C}^5;\ u^3 v=x^2 y,\ z^4=(x+y)^5\},$$
$$S(X)=Y\cup Z \qquad \text{où} \quad Z=\{u=x=z^4-y^5=0\}$$
$$Y=\{z=(x+y)=u^3 v-y^3=0\}.$$

Par un argument du même type que dans l'exemple (2), on peut montrer que Z n'est pas localement principal. Y est pourtant un bon cycle. En effet :

$$Y=V(z^4) \quad \text{et} \quad (I_Y=(z,\ x+y)), \qquad z^4\in I_Y^5\subset\overline{z^4},$$

car :

$$(z(x+y)^4)^5=z^5.(z^4)^4=z.(z^4)^5$$
$$(z^2(x+y)^3)^5=z^{10}.(z^4)^3=z^2.(z^4)^5$$
$$(z^3(x+y)^2)^5=z^{15}.(z^4)^2=z^3.(z^4)^5$$
$$\Rightarrow \quad 4\,Y \dot{_X} Z=\frac{1}{5}(z^4=0)_{\dot{\mathbb{C}}^5} Z=4(u=x=y=z=0)$$

i. e.

$$Y \dot{_X} Z=(u=x=y=z=0).$$

A remarquer que Z et Y sont singuliers et que $S(Z)=S(Y)=Y\cap Z$.

APPENDICE

1. Soit A un anneau commutatif et unitaire, I un idéal de A.

$f \in A$ est dit entier sur I s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

- $g = f.X \in B = A[X]$ est entier sur le sous-anneau $C = \sum_{n \geq 0} I^n . X^n$, de B.
- Il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $a_h \in I^h$ $h = 1, \ldots, k$ tels que :

$$f^k = \sum_{h=1}^{k} a_h . f^{k-h}.$$

On note $\bar{I} = \{f \in A;\ f \text{ entier sur } I\}$; c'est un idéal de I qu'on appelle la clôture intégrale de I. Et I est dit intégralement clos si $\bar{I} = I$.

On a alors les propriétés suivantes :

(i) $\bar{I}$ est le plus petit idéal intégralement clos contenant I (i. e. $\overline{(\bar{I})} = \bar{I}$).

(ii) $I_1 \subset \bar{I}_2$ et $I_2 \subset \bar{I}_3 \Rightarrow I_1 \subset \bar{I}_3$.

(iii) $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $(\bar{I})^m \subset \overline{(I^m)}$.

(iv) Si A est normal et si $I = (g)$ est principal, alors I est intégralement clos.

Preuve. — (i) Soit $f \in \overline{(\bar{I})}$ i. e. $g = f.X$ entier sur $C' = \sum_{n \geq 0} \bar{I}^n . X^n$ mais C' est un entier sur $C = \sum_{n \geq 0} I^n . X^n$.

Alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $b_k \in C'$, $h = 1, \ldots, k$ tels que

$$g^k + b_1 g^{k-1} + \ldots + b_k = 0,$$

ceci implique, en particulier, que g est entier sur $D = C[b_1, \ldots, b_k]$, i. e. $D[g]$ est de type fini sur D , mais D est de type fini sur C du fait que $b_1, \ldots, b_k \in C'$ sont entiers sur C. Alors $D[g]$ est de type fini sur C, mais $C[g] \subset D[g] \subset B = A[X]$ donne que g est entier sur C (*cf.* [1]), i. e. $f \in \bar{I}$.

(ii) $I_1 \subset \bar{I}_2 \subset \overline{(\bar{I}_3)} = \bar{I}_3$ d'après (i).

(iii) $f_1, \ldots, f_m \in \bar{I}$: $f = (\prod_{j=1}^{m} f_j)$, $C = \sum_{n \geq 0} I^n . X^n$.

$f_j . X$ entier sur C,

$$j = 1, \ldots, m \quad \Rightarrow \quad f.X^m = \prod_{j=1}^{m} (f_j X)$$

entier sur C : i. e. $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $b_h \in C$, $h = 1, \ldots, k$ tels que :

$$(f.X^m)^k = \sum_{h=1}^{k} b_h . (f X^m)^{k-h}.$$

Alors si a_h = coefficient de $X^{m \cdot h}$ dans b_h, on aura :

$$a_h \in (I^m)^h \qquad \text{et} \qquad f^k = \sum_{h=1}^{k} a_h . f^{k-h} \qquad \text{i.e. } f \in \overline{(I^m)}.$$

(iv) $f \in \bar{I} \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_h \in A$, $h = 1, \ldots, h$ tels que :

$$f^k = \sum_{h=1}^{k} \alpha_h . g^h . f^{k-h}$$

ou encore que $a = f/g$ vérifie :

$$a^k = \sum_{h=1}^{k} \alpha_h . a^{k-h}$$

dans le corps des fractions de A. La normalité de $A \Rightarrow$

$$a \in A \qquad \text{et} \qquad f = a.g \in I.$$

C.Q.F.D.

2. $(X, \mathcal{O}_X)$ étant un espace annelé, I un idéal de $\mathcal{O}_X$, on note :

$$\bar{I}: \quad U \to \bar{I}(U) = \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X);\ f_x \in \bar{I}_x,\ \forall x \in U\}.$$

On a alors les propriétés suivantes (*cf.* [11]) :

(i) $\bar{I}$ est un idéal de $\mathcal{O}_X$.

(ii) si $(X, \mathcal{O}_X)$ est analytique, I cohérent on montre que $\bar{I}$ est cohérent.

(iii) $(X, \mathcal{O}_X)$ analytique et $I \subset \mathcal{O}_X$ cohérent. Soit U ouvert de X, $f_1, \ldots, f_q \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ tels que $(f_{1,y}, \ldots, f_{q,y}) = I_y$, $\forall y \in U$.

Soit $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. On a alors que :

$f_x \in \bar{I}_x \Rightarrow \exists\, C > 0$, V voisinage de x dans U tels que

$$|f(y)| \leqslant C . \sup_{1 \leqslant i \leqslant q} |f_i(y)|, \qquad \forall y \in V.$$

Preuve. — La propriété (iii) n'intéressant que U, on peut supposer que $X = U$.

Soit alors $\hat{X}$ l'éclaté de X le long de I, Z le normalisé de $\hat{X}$ $\pi: Z \to X$ la projection

$$f_x \in \bar{I}_x \quad \Rightarrow \quad (f \circ \pi)_z \in (\bar{I}\mathcal{O}_Z)_z, \qquad \forall z \in \pi^{-1}(x).$$

Or $I\mathcal{O}_Z \subset \bar{I}\mathcal{O}_Z \subset \overline{I\mathcal{O}_Z}$, mais $I\mathcal{O}_Z$ est principal car $I\mathcal{O}_{\hat{X}}$ l'est. La normalité de Z et 1. (iv) donnent $\overline{I\mathcal{O}_Z} = I\mathcal{O}_Z$, ainsi $\bar{I}\mathcal{O}_Z = I\mathcal{O}_Z$.

Il s'ensuit que $(f \circ \pi)_z \in (I\mathcal{O}_Z)_z$, $\forall z \in \pi^{-1}(x)$.

Alors $\exists \tilde{Z}$ voisinage de $\pi^{-1}(x)$ dans Z tel que :

$$(f\circ\pi)|_{\tilde{Z}} \in \Gamma(\tilde{Z}, I\mathcal{O}_Z).$$

Le fait que $I\mathcal{O}_Z$ soit engendré par les $f_i\circ\pi$ implique (quitte à rétrécir $\tilde{Z}$) que :

$$\exists C>0 \text{ telle que } |(f\circ\pi)(z)| \leqslant C\sup_{1\leqslant i\leqslant q}|(f_i\circ\pi)(z)|, \qquad \forall z\in\tilde{Z}.$$

La propreté de π implique alors que :

$\exists V$ voisinage de x dans X tel que :

$$|f(y)| \leqslant C\sup_{1\leqslant i\leqslant q}|f_i(y)|, \qquad \forall y\in V.$$

3. Soit $X\to U$ un revêtement ramifié de degré k, au-dessus d'un polydisque $U\subset\mathbb{C}^n$. Si $f\in\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, on sait lui associer un polynôme de degré k :

$$P(t, Z) = Z^k + \textstyle\sum_{h=1}^{k}(-1)^h S_h(t).Z^{k-h} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)[Z],$$

qui est le polynôme caractéristique du $\mathcal{O}_U$ endomorphisme de $\mathcal{O}_X$ défini par la multiplication par f.

Par Cayley-Hamilton on a :

$$f^k = \textstyle\sum_{h=1}^{k}(-1)^h S_h(t).f^{k-h}.$$

Par ailleurs si $a_h = \text{trace}_{X\mid U}(f^h)$, on a :

$$\forall h, \quad a_h + S_1.a_{h-1} + S_2.a_{h-2} + \ldots + s_{h-1}.a_1 + hS_h = 0.$$

Ainsi si J est un idéal de $\mathcal{O}_U$, $I = J\mathcal{O}_X$:

$$a_h\in J^h, \quad \forall h \quad \Leftrightarrow \quad S_h\in J^h, \quad \forall h.$$

Et alors :

$$a_h\in J^h, \qquad h=1, \ldots, k \quad \Rightarrow \quad f \text{ entier sur } I.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH (M. F.) and MAC DONALD (I. G.). – *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[2] BANICA (C.) et STANASILA (O.). – *Méthodes algébriques dans la théorie globale des espaces complexes*, Gauthier-Villars, Paris 1977.

[3] BARLET (D.). – Espace analytique réduit..., Springer-Verlag, *Lecture Notes*, n° 482, 1975.

[4] BARLET (D.). – Faisceau $\dot{\omega}_X$ sur X de dimension pure, Springer-Verlag, *Lecture Notes*, n° 670, 1978.

[5] BARLET (D.). – Familles analytiques de cycles..., Springer-Verlag. *Lecture Notes*, n° 807, 1980.

[6] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). – *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[7] DRAPPER (R. N.). – Intersection Theory in Analytic Geometry, *Math. Annalen.*, 180, 1969, p. 175-204.

[8] FISCHER (G.). – Complex Analytic Geometry, Springer-Verlag, *Lecture Notes*, n° 538, 1976.

[9] GODEMENT (R.). – *Topologie algébrique et Théorie des Faisceaux*, *Hermann*, Paris, 1958.

[10] GUNNING (R. C.) and ROSSI (H.). – *Analytic functions of several variables*, Prentice Hall Inc., 1965.

[11] LIPMAN (J.) and TEISSIER (B.). – Pseudo-rational local rings... Michigan Math. J., vol. 28, 1981.

[12] SERRE (J.-P.). – Algèbre locale et multiplicités, Springer-Verlag, *Lecture Notes*, n° 11, 1965.

[13] GROTHENDIECK (A.). – Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.*, série 2, vol. 9, 1957.