BULLETIN DE LA S. M. F.

P. GAUDUCHON

Pseudo-immersions superminimales d'une surface de Riemann dans une variété riemannienne de dimension 4

Bulletin de la S. M. F., tome 114 (1986), p. 447-508
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__447_0>

Bull. Soc. math. France,
114, 1986, p. 447-508.

PSEUDO-IMMERSIONS SUPERMINIMALES D'UNE SURFACE DE RIEMANN DANS UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE DE DIMENSION 4

PAR

P. GAUDUCHON (*)

RÉSUMÉ. — Une pseudo-immersion f d'une surface de Riemann Σ dans une varieété riemannienne (orientée) M possède par définition, comme une immersion vraie, un relèvement canonique dans le fibré $\tilde{G}_2(M)$ des 2-plans orientés sur M, au moyen duquel est développée une théorie naturelle des pseudo-immersions minimales, puis superminimales dans le cas où M est de dimension 4. Les pseudo-immersions minimales sont exactement les applications harmoniques conformes de Σ dans M, donc, aussi, les immersions ramifiées minimales de GULLIVER-OSSERMAN-ROYDEN bien que la notion de pseudo-immersion soit plus large *a priori* — et de définition plus simple — que celle d'immersion ramifiée. Les éléments usuels de la géométrie des immersions possèdent une extension naturelle au cas des pseudo-immersions. Lorsque f est superminimale, les équations de Gauss se simplifient notablement, d'où une quantification explicite du volume total et de la norme L^2 de la (deuxième) forme fondamentale dans le cas où M est à courbure constante ou kählérienne à courbure sectionnelle holomorphe constante. L'écart entre pseudo-immersions et immersions vraies est mesuré, quand Σ est compacte, par l'indice de ramification (total) m de f. Ce nombre ne peut excéder une certaine borne, explicitement donnée en fonction du genre de Σ, si f est une application harmonique non conforme ou une pseudo-immersion minimale non superminimale (dans le cas où M est la sphère S^4 ou le plan projectif complexe CP^2). Le cas où M est kählérienne est examiné à part : la forme de Ricci de M intervient de façon essentielle ainsi que la distinction entre pseudo-immersions à gauche et à droite (parmi lesquelles figurent les applications $\pm$-holomorphes et les pseudo-immersions minimales totalement réelles). Dans une dernière partie, la riche géométrie de l'espace des twisteurs de CP^2 est mise à profit pour montrer, par des méthodes de géométrie algébrique élémentaire, que les applications harmoniques non-$\pm$-holomorphes de S^2 dans CP^2 — plus généralement, de Σ dans CP^2 si m est grand — ne sont pas injectives.

(*) Texte reçu le 12 novembre 1985.
Paul GAUDUCHON, 53, rue de Lyon, 75012 Paris, C.N.R.S., U.A. 766.

ABSTRACT. — By the very definition, a pseudo-immersion f from a Riemann surface Σ into an (oriented) Riemannian manifold M, like a true immersion, admits a canonical lift into the fiber bundle $\tilde{G}_2(M)$ of oriented 2-planes on M, through which it is possible to construct a natural theory of minimal pseudo-immersions, then superminimal one's when M is 4-dimensional. Minimal pseudo-immersions are exactly conformal harmonic maps, hence exactly GULLIVER-OSSERMAN-ROYDEN's branched minimal immersions, although the concept of superminimal immersion is more comprehensive *a priori* than branched immersions' one (and easier to define). The usual elements of the geometry of immersions naturally extend to the case of pseudo-immersions. When f is superminimal, Gauss equations become considerably more simple, from which we infer a quantification of the (total) volume and the L^2-norm of the (second) fundamental form, when M is of constant curvature of Kähler of constant holomorphic sectional curvature. The gap between pseudo-immersions and true immersions is measured, when Σ is compact, by the (total) branch order m of f. This number cannot be greater than some explicite bound, related to the genus of Σ, if f is a non-conformal harmonic map or a non-superminimal minimal pseudo-immersion (when M is the sphere S^4 or the complex projective plane CP^2). The case when M is Kähler is discussed in a separate way: the Ricci form of M plays a prominent part and, also, the distinction between left and right-handed superminimal pseudo-immersions (among right-handed'ones we find $\pm$holomorphic and minimal totally real pseudo-immersions). In the last section, the nice geometry of the twistor space of CP^2 is used to prove, by elementary algebraic geometry techniques, that non-$\pm$-holomorphic harmonic maps from S^2 into CP^2—more generally, from Σ into CP^2 when m is large—cannot be injective.

0. Introduction

Une application f d'une surface (orientée) Σ dans une variété M est appelée une *pseudo-immersion* si elle est une immersion sauf, peut-être, en un ensemble discret S de Σ où la différentielle f_* s'annule, déterminant toutefois en tout point p, points de S compris, un sous-espace orienté de dimension 2 de l'espace tangent $T_{f(p)}M$.

En d'autres termes, une pseudo-immersion f de Σ dans M possède un *relèvement canonique* global τ dans le fibré $\tilde{G}_2(M)$ des 2-plans orientés sur M et détermine un *fibré tangent image* T, sous-fibré orienté de rang 2 de $f^{-1}(TM)$.

Si Σ est compacte, le défaut d'isomorphisme de l'homomorphisme f_* du fibré tangent $T\Sigma$ à Σ dans T est mesuré par un entier positif ou nul m, égal à la différence $\chi(T)-\chi(T\Sigma)$ des classes d'Euler de T et $T\Sigma$.

Lorsque M est muni d'une structure riemannienne γ, la *première* forme fondamentale, c'est-à-dire la métrique induite, d'une pseudo-immersion dégénère sur S, mais il reste possible de construire une *deuxième* forme fondamentale B (nulle sur S) et d'établir l'équivalent formel des équations de Gauss et de Codazzi-Mainardi des immersions riemanniennes.

Si, en outre, Σ est munie d'une structure *conforme*, ou, de façon équivalente, d'une structure *complexe* J, une application de (Σ, J) dans (M, γ) est dite *conforme* si la forme bilinéaire $f^* \gamma$ est J-invariante, et une pseudo-immersion est dite *minimale* si elle est conforme et sa (deuxième) forme fondamentale B est J-anti-invariante.

Comme il est bien connu, la définition des applications harmoniques de Σ dans (M, γ) ne fait intervenir aucune métrique sur Σ mais seulement sa structure complexe J. Une application f de (Σ, J) dans (M, γ) est *harmonique* si la composée $f_* \circ J$, vue comme 1-forme à valeurs dans $f^{-1}(TM)$, est, comme f_* elle-même, fermée relativement à la connexion de Levi-Civita.

La première partie de notre article vise, d'une part, à donner une démonstration complète de l'équivalence entre les deux notions de *pseudo-immersion minimale* et d'*application harmonique conforme* (non constante), résultat dû en substance à GULLIVER-OSSERMAN-ROYDEN [G-O-R], § 2 (les pseudo-immersions minimales sont, au moins dans le cas analytique, des *immersions ramifiées* au sens de [G-O-R], mais nous avons évité d'introduire cette notion dans notre exposé en y substituant celle, *a priori* plus générale, de pseudo-immersion. La démonstration que nous proposons repose essentiellement sur l'existence d'une structure holomorphe naturelle induite par la connexion de Levi-Civita sur le complexifié $f^{-1}(T^c M)$), *cf.* 1.2, 1.6, 1.11, d'autre part, à établir les équations de Gauss de ces applications et examiner leurs conséquences, principalement quand (M, γ) est à courbure sectionnelle négative ou nulle, *cf.* 1.13, 1.14.

Les pseudo-immersions minimales (= les applications harmoniques conformes non constantes) peuvent être caractérisées au moyen de leur relèvement canonique τ dans $\tilde{G}_2(M)$. Ce sont exactement les pseudo-immersions conformes de (Σ, J) dans (M, γ) telles que τ soit *verticalement* holomorphe relativement à une structure complexe naturelle $\mathcal{J}$ définie sur le fibré tangent vertical $T^V \tilde{G}_2(M)$ de $\tilde{G}_2(M)$, *cf.* 1.10.

Lorsque M est orientée et de dimension 4, $\tilde{G}_2(M)$ est difféomorphe au produit fibré $Z^+(M) \times_M Z^-(M)$ des espaces de twisteurs (positif et négatif) de M, et le relèvement canonique τ est complètement déterminé par ses deux projections τ^+ et τ^- sur $Z^+(M)$ et $Z^-(M)$.

Une pseudo-immersion conforme est dite *superminimale* (à droite ou à gauche) si le relèvement τ^+ ou τ^- est horizontal.

La deuxième partie de l'article propose plusieurs approches de cette notion, *cf.* 2.6, définitions 1, 2, 3. (La théorie des pseudo-immersions superminimales trouve son origine dans les travaux de E. CALABI consacrés aux applications harmoniques de S^2 dans S^n, *cf.* [Ca]. Le terme *superminimal* a été introduit, semble-t-il, par R. BRYANT dans l'étude des applications harmoniques de S^2 dans S^4 [Br]. On lui substitut parfois le terme *isotrope* ou *isotrope réel*, dans [E-S]$_2$ par exemple, *cf.* aussi [La].)

Les équations de Gauss d'une pseudo-immersion superminimale se simplifient notablement et nous en déduisons, quand la variété but (M, γ) est à courbure sectionnelle constante, une *quantification* du volume total $V(f)$ et la norme au carré $\|B\|^2$ de la forme fondamentale B (l'un et l'autre définis indépendamment de toute métrique sur Σ) en fonction du genre g de Σ, de la classe d'Euler $\chi(N)$ du fibré normal N et du nombre m déjà introduit.

Il est possible d'introduire plus généralement un *indice de ramification total m* pour toute application harmonique non constante (essentiellement, le nombre de points où la différentielle f_* s'annule, comptés avec leur *multiplicité*, *cf.* 1.5). Ce nombre coïncide avec l'entier m déjà considéré lorsque f est une pseudo-immersion harmonique, en particulier quand f est harmonique et conforme (non constant). Si Σ est compacte, de genre g, toute application harmonique de (Σ, J) dans une variété (orientée, de dimension 4) à courbure sectionnelle constante dont l'indice de ramification total m excède $4(g-1)$ est une pseudo-immersion superminimale, *cf.* 2.8, Cor. 2. En particulier, toute application harmonique (non constante) de la sphère de Riemann dans S^4 est superminimale, résultat dû à E. CALABI [Ca].

Dans la troisième partie, nous considérons le cas particulier où (M, γ), toujours orientée et de dimension 4, est munie, en outre, d'une structure complexe $\jmath$ telle que la structure entière $(M, \jmath)$ soit *kählérienne*.

Dans ce cas, la distinction entre pseudo-immersions superminimales *à gauche* et *à droite* revêt une importance particulière du fait que l'orientation de M est induite par la structure complexe $\jmath$. La détermination de ces dernières fait jouer à la *forme de Ricci* ρ de (M, γ, j) un rôle de premier plan. De façon précise, les pseudo-immersions superminimales à droites de (Σ, J) dans (M, γ) – parmi lesquelles nous trouvons l'ensemble des applications $\pm$-holomorphes (non constantes) et, aussi, les pseudo-immersions minimales *lagrangiennes* (= totalement réelles) – sont ou bien $\pm$-holomorphes, ou bien telles que $f^* \rho$ soit nulle, ce, pour toute structure kählérienne $\mathfrak{j}$ compatible avec la métrique γ et l'orientation de M. (Si $(M, \gamma, \mathfrak{j})$ est de Kähler-Einstein de courbure scalaire non nulle, nous en déduisons immédiatement que les pseudo-immersions superminimales à droite sont *exactement* les applications $\pm$-holomorphes (non constantes) et les pseudo-immersions minimales totalement réelles, résultat figurant également dans $[\text{E-S}]_2$.) Incidemment, nous déduisons du résultat précédent que les structures kählériennes $\mathfrak{j}$ sont *isolées*, la métrique γ et l'orientation de M étant fixées, dès lors que le tenseur de Ricci r de (M, γ) est non nul sur un ouvert dense de M, *cf.* 3.4.

Lorsque (M, γ, j) est à courbure sectionnelle holomorphe constante (non nulle) et Σ est compacte (de genre g), nous déduisons à nouveau des équations de Gauss une *quantification* de $V(f)$ et $\|B\|^2$ si f est superminimale à droite, et de $V(f)$ si f est superminimale à gauche, *cf.* 3.8, 3.9, 3.10.

Toujours dans ce cas, toute application harmonique (non constante) de (Σ, J) dans (M, γ) dont l'indice de ramification m excède $3(g-1)$ est $\pm$-holomorphe ou superminimale à gauche. (Pour $g=0$, ce résultat est dû en substance, à EELLS-WOOD [E-W].)

Incidemment, nous en déduisons qu'une pseudo-immersion minimale totalement réelle de (Σ, J) compacte, de genre g, dans une variété kählérienne à courbure sectionnelle holomorphe constante, dont l'indice de ramification total m excède $3(g-1)$, est à la fois superminimale à droite et à gauche donc *totalement géodésique*, *cf.* 3.6, 3.7.

Dans le cas où la variété but est la sphère canonique S^4 ou l'espace projectif complexe canonique $\mathbf{C}P^2$, les quantifications du volume total $V(f)$ obtenues, dans les parties 2 et 3, au moyen des équations de Gauss, peuvent être interprétées – et affinées – grâce à l'interprétation « twistorielle » des pseudo-immersions superminimales, *cf.* 2.11 et 3.11, remarque 1.

Dans [G-L], la riche géométrie complexe de l'espace des twisteurs de S^4, à savoir l'espace projectif complexe $\mathbf{C}P^3$, a été mise à profit pour démontrer un théorème de non.injectivité des applications harmoniques de S^2 dans S^4 (en dehors du plongement équatorial) [G-L], Theorem B.

Un argument similaire est développé ici, dans la quatrième partie (qui peut être considéré, à ce titre, comme un prolongement de [G-L]), utilisant cette fois la variété $\mathbf{D}_3$ des *drapeaux complexes* de $\mathbf{C}P^2$, interprétée comme l'espace des twisteurs $Z^-(\mathbf{C}P^2)$ de $\mathbf{C}P^2$, pour démontrer la non-injectivité des applications harmoniques non $\pm$-holomorphes de S^2 dans $\mathbf{C}P^2$, *cf.* th. 4.1 et son extension (th. 4.8) au cas où (Σ, J) est de genre g et l'indice de ramification total excède $3(g-1)$. (Ce résultat étend un résultat similaire de S. Webster obtenu, par une méthode différente, pour les immersions de S^2 dans $\mathbf{C}P^2$ [We].)

Comme dans [G-L], nous utilisons la variété G des droites complexes de l'espace des twisteurs (ici la variété des droites définie en 4.3) qui est une variété complexe de dimension 4 dont la variété des éléments réels $G^{\mathbf{R}}$ s'identifie à la base de l'espace des twisteurs, et la *variété des sécantes* (*cf.* 4.6) du relèvement canonique (holomorphe et horizontal) de f dans l'espace des twisteurs $\mathbf{D}_3$.

Ce travail trouve son origine dans un exposé fait, au printemps 84, au Séminaire de l'École polytechnique (dirigé par J. P. Bourguignon et H. B. Lawson), à l'occasion duquel j'ai été amené, à partir de [Br], à comprendre la notion d'application superminimale et à lui donner un maximum de généralité (*cf.* [Ga], dont le paragraphe 2 du présent article constitue une généralisation des immersions aux pseudo-immersions superminimales).

Bien qu'élaboré de façon autonome, un travail de ce genre ne pouvait manquer de présenter, et présente en effet, de nombreuses intersections non vides avec des contributions d'autres auteurs, en particulier [Fr] et, surtout, $[E\text{-}S]_2$ dont l'approche est toutefois notablement différente de la nôtre.

Je remercie chaleureusement H. B. Lawson qui m'a accordé une part généreuse de son temps durant son séjour en France en 83-84 et à qui sont dues bon nombre d'idées contenues dans cet article, B. Teissier qui m'a utilement conseillé pour la démonstration du lemme 4.6, et J. Eells qui a eu la gentillesse de lire une première version de ce travail et de rectifier un certain nombre d'erreurs et mauvaises références.

SOMMAIRE

1. Applications harmoniques et pseudo-immersions minimales

1.1. Dans toute la suite, nous désignons par :

(M, γ) une variété riemannienne de dimension n (égale à 4 à partir de la deuxième partie);

(Σ, J) une surface de Riemann;

f une application de Σ dans M;

$T\Sigma$, TM les fibrés tangents de Σ et M respectivement;

$f^{-1}(TM)$ l'image inverse de TM par f au-dessus de Σ.

Tous les objets considérés seront supposés (tacitement) de classe C^∞.

La surface de Riemann (Σ, J) sera considérée comme une variété réelle de dimension 2 dont le fibré tangent est muni d'une *structure complexe*, c'est-à-dire d'un automorphisme J de carré égal à $-I$, si I est l'identité.

Cette structure équivaut à la donnée conjointe d'une *orientation* et d'une *structure conforme* sur Σ.

Nous utiliserons aussi des *cartes complexes* $\{w=u+v\}$, c'est-à-dire des systèmes de coordonnées (réelles) $\{u, v\}$ sur Σ tels que $\partial/\partial v = J\,\partial/\partial u$ sur le domaine de définition.

La métrique γ est une forme bilinéaire symétrique *définie positive* sur M. Elle détermine un produit scalaire noté $(.,.)$ sur TM (et les fibrés de tenseurs associés) ainsi que sur $f^{-1}(TM)$.

La connexion de Levi-Civita de (M, γ) détermine une connexion linéaire D sur $f^{-1}(TM)$, compatible avec la métrique, que nous appellerons encore connexion de Levi-Civita de $f^{-1}(TM)$.

Elle se prolonge en un opérateur de différentiation extérieure d^D agissant sur les formes à valeurs dans $f^{-1}(TM)$. Si α est une 1-forme à valeurs dans $f^{-1}(TM)$, $d^D\alpha$ est la 2-forme définie par

$$d^D\alpha(U, V) = D_U(\alpha(U)) - D_V(\alpha(U)) - \alpha([U, V])$$

$\forall U, V \in T_p\Sigma, \forall p \in \Sigma$, où, comme il est d'usage, U et V désignent à droite des extensions arbitraires de leurs valeurs en p.

L'absence de torsion de la connexion de Levi-Civita se traduit par le fait que la différentielle f_* de f, considérée comme une 1-forme sur Σ à valeurs dans $f^{-1}(TM)$, est d^D fermée :

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} D_U(f_* V) - D_V(f_* U) - f_*([U, V]) = 0, \\ \qquad \forall U, V \in T_p\Sigma, \quad \forall p \in \Sigma. \end{cases}$$

1.2. Nous considérerons aussi les fibrés vectoriels *complexifiés* de T, TM, $f^{-1}(TM)$, etc., notés respectivement T^c, $T^c M$, $f^{-1}(T^c M)$, etc. Les symboles D, f_*, J, $(.,.)$, etc. désigneront alors les extensions **C**-linéaires (ou **C**-bilinéaire) de ces opérateurs aux fibrés complexifiés correspondants.

Comme (Σ, J) est une surface de Riemann, toute connexion métrique **C**-linéaire sur un fibré vectoriel hermitien détermine (et est déterminé par) une structure *holomorphe* sur ce fibré (*cf.* [A-B], § 5).

En particulier, la connexion de Levi-Civita détermine sur $f^{-1}(T^c M)$ une structure de fibré vectoriel holomorphe : une section X de $f^{-1}(T^c M)$ est *holomorphe* pour cette structure si DX, vue comme une 1-forme à valeurs dans $f^{-1}(T^c M)$, est de type (1, 0), c'est-à-dire si

$$D_{JU} X = i D_U X$$

pour tout vecteur U de Σ sur le domaine de définition de X. De façon équivalente, X est holomorphe si

$$D_{\partial/\partial \bar{w}} X = 0$$

pour une carte complexe quelconque $\{w\}$ dans le domaine de définition de X.

1.3. La structure complexe J de Σ induit de façon naturelle une involution sur le fibré des formes bilinéaires sur Σ.

Toute forme bilinéaire β sur Σ s'écrit donc, de façon unique, sous la forme

$$\beta = \beta^+ + \beta^-$$

où β^+ et β^- sont respectivement J-invariante (de type (1, 1)) et J-anti-invariante (de type (2, 0) ou (0, 2)).

La correspondance qui, à toute forme bilinéaire β sur Σ, associe la forme bilinéaire β^J définie par

$$\beta^J(U, V)=\beta(JU, V), \qquad \forall U, V\in T_p\Sigma, \quad \forall p\in\Sigma,$$

détermine :

(i) une *structure complexe* sur le fibré des formes réelles J-anti-invariantes qui est ainsi identifié au carré tensoriel (complexe) K^2 du *fibré canonique* K des formes de type (1, 0) sur Σ;

(ii) un *isomorphisme* (réel) du fibré des formes symétriques J-invariantes sur celui des 2-formes alternées (qui sont nécessairement elles-mêmes J-invariantes).

Nous appelons *forme-énergie* de f, notée $e(f)$, la 2-forme associée de cette manière à la composante J-invariante de $f^*\gamma$:

$$e(f)(U, V)=\frac{1}{2}((f_*(JU), f_*(V))-(f_*(U), f_*(JV))),$$
$$\forall U, V\in T_p\Sigma, \quad \forall p\in\Sigma.$$

Cette 2-forme est *définie positive* en dehors des points où la différentielle f_* s'annule.

L'*énergie totale* $E(f)$ de f est définie par

$$E(f)=\int_\Sigma e(f).$$

On observe que la forme-énergie et l'énergie totale de f ne dépendent que de la partie J-invariante de $f^*\gamma$.

Nous dirons que f est *conforme* si $f^*\gamma$ est elle-même J-invariante.

L'espace des sections à support compact du fibré vectoriel $f^{-1}(TM)$ s'interprète comme l'espace des variations de f. A une telle section X nous associons la courbe

$$f_t(p)=\exp_{f(p)}(tX(p)), \qquad p\in\Sigma,$$

où t est un nombre réel (petit) et exp note l'application exponentielle dans (M, γ).

La variation correspondante de la différentielle f_* est alors égale à

$$\frac{d}{dt}((f_t)_*(U))_{|t=0}=(D_U X)(p)$$

pour tout vecteur (fixé) U de $T_p\Sigma$.

Nous en déduisons aisément la variation première de l'énergie totale

$$\frac{d}{dt}(E(f_t))_{|t=0}=\int_\Sigma (d^D(f_*\circ J), X).$$

L'application f est *harmonique* si elle est critique pour l'énergie, c'est-à-dire si f annule la variation première de E dans toutes les directions X.

Ainsi, *f est harmonique si et seulement si la* 1-*forme à valeur dans $f^{-1}(TM)$ $f_*\circ J$ est d^D fermée* :

$$\text{(2)}\qquad \begin{cases} D_U(f_*(JV))-D_V(f_*(JU))-f_*(J[U, V])=0, \\ \qquad\qquad \forall U, V\in T_p\Sigma, \quad \forall p\in\Sigma. \end{cases}$$

1.4. En combinant (1) et (2), nous obtenons immédiatement le :

LEMME. — *Une application f de* (Σ, J) dans (M, γ) *est harmonique si et seulement si*

$$D_{\partial/\partial\bar{w}}(f_*(\partial/\partial w))=0,$$

c'est-à-dire si et seulement si $f_*(\partial/\partial w)$ est une section (*locale*) *holomorphe* (supra 1.2) *de $f^{-1}(T^c M)$ pour une carte complexe quelconque* $\{w\}$ *de* (Σ, J).

1.5. Nous notons S l'ensemble des *points singuliers* de f, où la différentielle f_* est de rang inférieur à 2 (les points du complémentaire $\Sigma-S$ sont dits *réguliers*), et S' l'ensemble des points de Σ où f s'annule.

Il résulte du lemme 1.4 que, *si f est une application harmonique non constante de* (Σ, J) *dans* (M, γ), *l'ensemble S' est vide ou discret* (*fini si Σ est compacte*).

En outre, si S' n'est pas vide, il existe, pour chaque point p_i de S' un entier positif m_i tel que, pour toute carte complexe $\{w\}$ centrée en p_i, le quotient $(1/w^{m_i})(f(\partial/\partial w))$ soit une section locale holomorphe *sans zéro* de $f^{-1}(T^c M)$.

Ce nombre m_i est l'*ordre de multiplicité* de p_i.

Si Σ est compacte, la somme $m = \sum m_i$ est un nombre fini que nous appellerons l'*indice de ramification total* de f (nous conviendrons qu'il est nul si S' est vide).

Il est aisé de vérifier que, *si f est conforme, les deux ensembles S et S' coïncident.*

Ainsi, l'*ensemble des points singuliers d'une application harmonique conforme* (*non constante*) *f de* (Σ, J) *dans* (M, γ) *est vide ou discret* (*fini si Σ est compacte*) et *l'indice de ramification total de f est nul si et seulement si f est une immersion.*

1.6. Nous supposerons désormais que M est de dimension au moins égale à 2 et nous désignerons par $\tilde{G}_2(M)$ le *fibré des 2-plans orientés* de M, c'est-à-dire l'espace fibré au-dessus de M dont la fibre en x est la variété des sous-espaces vectoriels orientés de dimension 2 de l'espace tangent $T_x M$.

Il sera commode d'identifier $\tilde{G}_2(M)$ au sous-fibré des éléments de norme 1 et de carré nul (dans $\Lambda^4 M$) du fibré $\Lambda^2 M$ des 2-formes réelles sur M.

Une section du fibré image inverse $f^{-1}(\tilde{G}_2(M))$ détermine un *fibré vectoriel orienté de rang* 2 au-dessus de Σ, sous-fibré de $f^{-1}(TM)$.

La section correspondante de $f^{-1}(\Lambda^2 M)$ sera appelée la *forme caractéristique* de ce fibré vectoriel.

DÉFINITION. — Une application f d'une surface orientée Σ dans une variété M (de dimension au moins égale à 2) est une *pseudo-immersion* si elle est une immersion sauf, peut-être, sur un ensemble discret S où la différentielle f_* s'annule, de telle manière que la section naturelle du fibré $f^{-1}(\tilde{G}_2(M))$ induite sur $\Sigma - S$ par f_* se prolonge en une section globale sur Σ.

Par définition, une pseudo-immersion f détermine un sous-fibré vectoriel orienté de rang 2 de $f^{-1}(TM)$ que nous appellerons le *fibré tangent image de f*, noté $T(f)$.

En un point singulier de f (s'il en existe), l'*ordre de multiplicité* de ce point sera défini comme l'indice en ce point de l'homomorphisme f_* de $T\Sigma$ dans $T(f)$.

Comme f préserve l'orientation, ce nombre est un entier positif.

Si Σ est compacte (de genre g), *l'indice de ramification total* m d'une pseudo-immersion f est nul si f est une immersion et égal à la somme des ordres de multiplicité de chaque point singulier dans le cas contraire.

Si $\chi(\Sigma)$ et $\chi(T(f))$ désignent respectivement la classe d'Euler de Σ (égale à $2-2g$) et de $T(f)$, on a

$$\chi(T(f))=\chi(\Sigma)+m=2-2g+m. \tag{3}$$

De 1.5 nous tirons aisément la :

PROPOSITION ([G-O-R], § 2). — *Une application harmonique conforme non constante d'une surface de Riemann dans une variété riemannienne est une pseudo-immersion.*

Démonstration. — D'après 1.5, une application harmonique conforme non constante f de (Σ, J) dans $(M, \ )$ détermine une section de $f^{-1}(\tilde{G}_2(M))$ de la façon suivante : sur $\Sigma-S$ nous associons au point p l'image de $T_p\Sigma$ par f_* dans $T_{f(p)}M$, avec l'orientation induite. Au voisinage de chaque point singulier p_i dans S (si S n'est pas vide), d'ordre m_i, la section locale de $f^{-1}(\Lambda^2 M)$

$$-\frac{i}{|w|^{2m_i}}(f(\partial/\partial w)\wedge f(\partial/\partial\bar{w})=\frac{1}{2|w|^{2m_i}}(f(\partial/\partial u)\wedge f(\partial/\partial v))$$

détermine une section locale, indépendante de la carte complexe $\{w=u+v\}$ choisie, de $f^{-1}(\tilde{G}_2(M))$ qui coïncide avec la précédente en dehors du point singulier.

Remarque 1. — La proposition précédente vaut plus généralement pour toute application harmonique (non constante) dont les points singuliers sont exactement les points où la différentielle f_* s'annule (c'est-à-dire telle que S' coïncide avec S, *supra* 1.5). Une telle application sera appelée *pseudo-immersion harmonique.*

Remarque 2. — L'ordre de multiplicité d'un point singulier d'une pseudo-immersion harmonique tel qu'il a été défini en 1.5 coïncide clairement avec celui qui a été défini dans ce paragraphe. Il en va de même pour l'ordre de ramification total dans le cas où Σ est compacte. Nous verrons plus loin (*infra* 1.12) que, dans ce cas, l'indice de ramification total d'une pseudo-immersion harmonique *non conforme* ne peut excéder une certaine borne dépendant du genre de Σ.

1.7. Dans ce paragraphe, et jusqu'au paragraphe 1.8, f désigne une pseudo-immersion de (Σ, J) dans une variété riemannienne (M, γ).

De la structure complexe de Σ nous ne retiendrons momentanément que l'orientation induite.

Nous noterons simplement T le fibré tangent image de f et N le *fibré normal* de f, c'est-à-dire l'orthogonal de T dans $f^{-1}(TM)$.

L'orientation et la métrique de T déterminent ensemble une *structure complexe* sur T que nous noterons encore J.

La forme caractéristique φ de T (*supra* 1.6) est alors égale, en tout point p de Σ, au dual riemannien de $\xi \wedge J\xi$ dans $\Lambda^2_{f(p)}M$, où ξ est un élément unitaire quelconque de T_p.

Son image inverse $f^*\varphi$ est la *forme-volume* de la pseudo-immersion f, notée $\mu(f)$ ou, simplement, μ. C'est une 2-forme réelle sur Σ définie par

$$\mu(f)(U, V) = (Jf_*(U), f_*(V)),$$

$$\forall U, V \in T_p\Sigma, \quad \forall p \in \Sigma.$$

On observera que, pour tout vecteur U non nul de $T_p\Sigma$, $\mu(f)(U, JU)$ est égal au *déterminant* de f_* relatif au repère $\{U, JU\}$ de $T_p\Sigma$ et à un repère orthonormé quelconque $\{\xi, J\xi\}$ de T_p.

Comme f préserve l'orientation, $\mu(f)$ est *définie positive* en dehors des points singuliers de f.

Il est aisé de vérifier qu'une pseudo-immersion est conforme si et seulement si sa différentielle est un homomorphisme C-linéaire de $(T\Sigma, J)$ dans (T, J) (cf. *infra* 1.9).

Si f_*^- note la composante C-antilinéaire de f_*, la différence entre la forme volume et la forme énergie (*supra* 1.3) est égale à

$$(\mu(f) - e(f))(U, V) = 2(Jf_*^-(U), f_*^-(V))$$

qui est clairement *définie négative* en dehors des points où f est conforme et nulle en ces points.

Nous définissons le *volume total* $V(f)$ d'une pseudo-immersion f par

$$V(f) = \int_\Sigma \mu(f).$$

C'est un nombre positif (éventuellement infini). Si Σ est compacte, *le volume total est inférieur ou égal à l'énergie* $E(f)$ *de* f, *égal si et seulement si* f *est conforme.*

1.8. La connexion de Levi-Civita D sur $f^{-1}(TM)$ induit, par projection orthogonale, une connexion linéaire sur T et sur N, l'une et l'autre notée ∇ :

$$\nabla_U \xi = [D_U \xi]^T, \quad \nabla_U \nu = [D_U \nu]^N, \qquad \forall U \in T_p \Sigma, \quad \forall p \in \Sigma,$$

où ξ et ν sont des sections locales de T et N respectivement et $[\ \ ]^T$ et $[\ \ ]^N$ notent la projection orthogonale sur T et N respectivement.

La 1-*forme fondamentale* b de T et la 1-*forme fondamentale* $\hat{b}$ de N dans $f^{-1}(TM)$ sont les 1-formes sur Σ à valeurs respectivement dans le fibré $\mathrm{Hom}(T, N)$ des homomorphismes de T dans N et dans le fibré $\mathrm{Hom}(N, T)$ des homomorphismes de N dans T, définies par

$$b(U)\xi = [D_U \xi]^N, \quad \hat{b}(U)\nu = [D_U \nu]^T,$$
$$\forall \xi \in T_p, \quad \forall \nu \in N_p, \quad \forall U \in T_p \Sigma, \quad \forall p \in \Sigma.$$

Les deux formes b et $\hat{b}$ sont liées par

$$(b(U)\xi, \nu) = -(\hat{b}(U)\nu, \xi).$$

La *forme fondamentale* B de la pseudo-immersion f est la forme *bilinéaire* sur Σ à valeurs dans le fibré normal N, définie par

$$B_{U,V} = b(U)(f_*(V)), \qquad \forall U, V \in T_p \Sigma, \quad \forall p \in \Sigma.$$

Il résulte immédiatement de (1) que la forme fondamentale B est *symétrique*.

Elle est nulle sur l'ensemble singulier S et coïncide avec la (deuxième) forme fondamentale au sens usuel des immersions sur Σ-S.

Nous dirons que f est *totalement géodésique* si sa forme fondamentale B (ou, de façon équivalente, la 1-forme b) est nulle.

Il sera utile d'interpréter la 1-forme fondamentale b de la façon suivante.

La pseudo-immersion f induit (par définition) une section de $f^{-1}(\tilde{G}_2(M))$ (*supra* 1.6), c'est-à-dire un relèvement τ de f dans $\tilde{G}_2(M)$

suivant le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \tilde{G}_2(M) \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ \Sigma \arrow[ur, "\tau"] \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

où $\tilde{\pi}$ est la projection naturelle de $\tilde{G}_2(M)$ sur M, avec

$$\tau(p) = T_p \subset T_{f(p)} M, \qquad \forall p \in \Sigma.$$

L'application τ est appelée le *relèvement canonique* de f dans $\tilde{G}_2(M)$.

Le fibré $\tilde{G}_2(M)$ peut être vu comme un quotient du $O(n)$-fibré principal $Q(M)$ des repères orthonormés de M par l'action (à droite) du sous-groupe $SO(2) \times O(n-2)$.

La connexion de Levi-Civita de (M, γ) est déterminée par une distribution horizontale sur $Q(M)$ qui induit, à son tour, par projection, une *distribution horizontale* $\tilde{H}$ sur $\tilde{G}_2(M)$ et une décomposition natuelle, en tout point P de $\tilde{G}_2(M)$, de l'espace tangent $T_P \tilde{G}_2(M)$:

$$T_P \tilde{G}_2(M) = \tilde{H}_P \oplus T_P^V \tilde{G}_2(M),$$

où $\tilde{H}_P$ est identifié à $T_x M$ par $\tilde{\pi}$ $(x = \tilde{\pi}(P))$ et $T_P^V \tilde{G}_2(M)$ est l'espace tangent à la fibre (ou espace tangent *vertical*) en P, identifié canoniquement à l'espace $\mathrm{Hom}(P, P^\perp)$ des homomorphismes du 2-plan P dans son orthogonal $P^\perp$.

Avec ces identifications, la différentielle τ_* de τ s'écrit, comme on le vérifie aisément,

$$(4) \qquad \tau_*(U) = f_*(U) \oplus b(U), \qquad \forall U \in T_p \Sigma, \quad \forall p \in \Sigma.$$

Les pseudo-immersions totalement géodésiques sont donc *exactement celles dont le relèvement canonique dans* $\tilde{G}_2(M)$ *est horizontal.*

Remarque. — L'identification, dans (4), de $b(U)$ avec la composante verticale de $\tau(U)$ est liée à l'identification *usuelle* de l'espace vertical $T_P^V \tilde{G}_2(M)$ avec $\mathrm{Hom}(P, P^\perp)$, où P est identifié à la projection (*symétrique*) de $T_x M$ sur P.

Au contraire, si nous identifions, comme nous l'avons fait en 1.6, le fibré $\tilde{G}_2(M)$ à un sous-fibré de $\Lambda^2 M$, le 2-plan P est identifié à une 2-forme (sa forme caractéristique), c'est-à-dire encore à l'endomorphisme *antisymétrique* obtenu en compoant la projection sur P avec J. L'espace vertical $T_P^V \tilde{G}_2(M)$ est alors naturellement identifié à l'espace des endomorphismes antisymétriques de $T_x M$ qui envoient P sur son orthogonal $P^\perp$-lequel espace est encore identifié naturellement à $\mathrm{Hom}(P, P^\perp)$ au moyen de la restriction à P de ces endomorphismes — et la composante verticale τ_*^V de τ_* s'écrit alors

$$(4') \qquad \begin{cases} \tau_*^V(U)\xi = b(U)J\xi, & \tau_*^V(U)\nu = -J\hat{b}(U)\nu, \\ & \forall \xi \in P, \quad \forall \nu \in P^\perp. \end{cases}$$

1.9. La connexion ∇, qui préserve la métrique du fibré tangent image T et donc aussi la structure complexe J, induit de ce fait une structure de fibré vectoriel holomorphe de rang 1 (*supra* 1.2) sur (T, J). Une section locale ξ de T est *holomorphe* si

$$\nabla_{JU}\xi = J\nabla_U \xi, \qquad \forall U \in T_p\Sigma,$$

en tout point où ξ est définie.

Nous obtenons ainsi *deux* fibrés vectoriels holomorphes de rang 1 au-dessus de Σ, $T\Sigma$ et T, liés par un homomorphisme de fibrés vectoriels réels f_* qui est C-linéaire dans le cas où f est conforme. On a alors la :

PROPOSITION. — *Si f est une $\tilde{G}_2(M)$ conforme de (Σ, J) dans (M, γ), f_* est un homomorphisme holomorphe de $T\Sigma$ dans le fibré tangent image T.*

Démonstration. — Soit W une section locale holomorphe quelconque de $T\Sigma$. On a

$$\begin{aligned} \nabla_{JU}(f_* W) &= \nabla_W(f_*(JU)) + f_*([JU, W]) \quad \text{par (1)}, \\ &= \nabla_W(f_*(JU)) + f_*(J[U, W]) \quad \text{car } W \text{ est holomorphe}, \\ &= \nabla_W(Jf_*(U)) + Jf_*([U, W]) \quad \text{car } f \text{ est conforme}, \\ &= J(\nabla_W(f_*(U)) + f_*([U, W])) \quad \text{car } \nabla \text{ préserve } J \text{ dans } T, \\ &= J(\nabla_U(f_*(W)) \quad \text{par (1)}, \ \forall U \in T_p\Sigma, \ \forall p \in \Sigma, \end{aligned}$$

qui montre que $f_*(W)$ est elle-même une section locale holomorphe de T.

On observera que la proposition précédente exprime le fait que, lorsque f est une pseudo-immersion conforme, la différentielle f_* est une *section holomorphe* du fibré vectoriel holomorphe de rang 1 $K \otimes_{\mathbf{C}} T$, où K est le fibré canonique de (Σ, J) (*supra* 1.2) et que l'ordre de multiplicité de f en un point singulier p_i (s'il y en a) est aussi la multiplicité de p_i considéré comme zéro de la section holomorphe f_*.

1.10. Une pseudo-immersion f de (Σ, J) dans (M, γ) est dite *minimale* si elle est conforme et si sa forme fondamentale $\mathbf{B}$ est J-anti-invariante.

De façon équivalente, f est minimale si elle est conforme et si sa 1-forme fondamentale b satisfait la relation

$$(5)\qquad b(JU)=b(U)\circ J, \qquad \forall\, U\in T_p\Sigma, \quad \forall\, p\in\Sigma.$$

Nous pouvons interpréter la relation (5) de la façon suivante.

Le fibré tangent vertical $T^V\tilde{G}_2(M)$ (*supra* 1.8) possède une structure complexe natuelle $\mathscr{J}$ définie par

$$\mathscr{J} A=A\circ J_P, \qquad \forall\, A\in T^V_P\tilde{G}_2(M), \quad \forall\, P\in\tilde{G}_2(M),$$

où A est vu comme un homomorphisme de P dans l'orthogonal $P^\perp$ et J_P est la structure complexe naturelle de P induite par son orientation et la métrique.

Nous pouvons alors, compte tenu de (4)-(4′), ré-écrire la définition d'une pseudo-immersion minimale sous la forme de la :

PROPOSITION. — *Une pseudo-immersion f de (Σ, J) dans (M, γ) est minimale si et seulement si elle est conforme et la composante verticale τ^V_* de la différentielle du relèvement canonique τ de f dans $\tilde{G}_2(M)$ est un homomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire de $(T\Sigma, J)$ dans $(T^V\tilde{G}_2(M), \mathscr{J})$.*

Ceci constitue l'amorce d'une théorie « twistorielle » des pseudo-immersions minimales qui sera développée dans les parties 2 et 3 quand la variété but M est de dimension 4.

Nous en déduisons que la *composée d'une pseudo-immersion minimale de (Σ, J) dans (M, γ) avec une application $\pm$-holomorphe (non constante) d'une surface de Riemann (Σ', J') dans (Σ, J) est aussi une pseudo-immersion minimale de (Σ', J') dans (M, γ).*

1.11. La relation (2) qui caractérise les applications harmoniques de (Σ, J) dans (M, γ) équivaut, quand f est une pseudo-immersion, au système

$$\text{(i)}\qquad \nabla_U(f_*(JV))-\nabla_V(f_*(JU))-f_*(J[U, V])=0,$$

$$\text{(ii)}\qquad B_{U,JV}-B_{V,JU}=0, \qquad \forall\, U, V\in T_p\Sigma, \quad \forall\, p\in\Sigma.$$

En particulier, *la forme fondamentale d'une pseudo-immersion harmonique est J-anti-invariante.*

Par ailleurs, (i) est satisfaite dès que f est conforme puisque ∇ préserve J.

Compte tenu de la proposition 1.6, nous en déduisons immédiatement que *les applications harmoniques conformes (non constantes) et les pseudo-immersions minimales de* (Σ, J) *dans* (M, γ) *sont une et même chose.*

1.12. L'intérêt de cette équivalence est accentué par les résultats bien connus suivants (*cf.* par ex. [E-L], § 10).

LEMME. — *Si f est une application harmonique de* (Σ, J) *dans* (M, γ), *la partie J-anti-invariance de* $f^* \gamma$ *est une section holomorphe de* K^2 (supra 1.3).

Démonstration. — Il suffit de montrer que, pour toute carte complexe $\{ w \}$, la dérivée $\partial/\partial \bar{w}((f_* (\partial/\partial w), f_* (\partial/\partial w)))$ est nulle, ce qui découle immédiatement de 1.4.

COROLLAIRE 1. — *Toute application harmonique de la sphère de Riemann* S^2 *dans une variété riemannienne est conforme.*

COROLLAIRE 2. — *Une application harmonique (non constante) non conforme d'une surface de Riemann compacte de genre g dans une variété riemannienne admet, au plus,* $4(g-1)$ *points où f est conforme* (c'est-à-dire où $f^* \gamma$ est J-invariante).

Les corollaires 1 et 2 sont une conséquence immédiate du lemme et du fait que la classe de Chern de K^2, qui compte les zéros (avec leurs multiplicités) de toute section holomorphe non triviale de K^2, est égale à $4(g-1)$.

Du lemme nous tirons également la :

PROPOSITION. — *Toute application harmonique (non constante) d'une surface de Riemann compacte de genre g dans une variété riemannienne, dont l'ordre de ramification total* (supra 1.5) *excède* $2(g-1)$, *est conforme.*

Démonstration. — Les zéros de la partie J-anti-invariante de $f^* \gamma$ sont de deux sortes : les points réguliers où f est conforme (au sens strict) et l'ensemble des points singuliers, s'il en existe, où chaque p_i est compté avec la multiplicité $2 m_i$ (*supra* 1.5).

Remarque. — Cette proposition peut être considérée comme une extension au cas où la variété but M est de dimension quelconque de [W], Théorème 3.3(i).

1.13. Nous notons R la courbure de M, R^f la courbure de la connexion D sur $f^{-1}(TM)$, R^T et R^N la courbure de (T, ∇) et (N, ∇) respectivement.

La courbure R^f est déterminée, à partir de R, par

$$R^f_{U,V} X = R_{f_*(U), f_*(V)} X, \qquad \forall X \in T_{f(p)} M, \quad \forall U, V \in T_p \Sigma, \quad \forall p \in \Sigma.$$

Les courbures R^f, R^T et R^N sont liées par

$$R^T_{U,V} = R^f_{U,V} + (\hat{b} \wedge b)_{U,V} + (d^\nabla b)_{U,V}, \qquad \forall \xi\, T_p,$$
$$R^N_{U,V} = R^f_{U,V} + (b \wedge \hat{b})_{U,V} + (d^\nabla \hat{b})_{U,V}, \qquad \forall \nu\, N_p,$$

où $\hat{b} \wedge b$ (resp. $b \wedge \hat{b}$) est la 2-forme sur Σ à valeurs dans le fibré $\operatorname{End}(T)$ (resp. $\operatorname{End}(N)$) des endomorphismes de T (resp. de N) définie par

$$(\hat{b} \wedge b)_{U,V} = \hat{b}(U) \circ b(V) - \hat{b}(V) \circ b(U)$$
$$(\text{resp. } (b \wedge \hat{b})_{U,V} = b(U) \circ \hat{b}(V) - b(V) \circ \hat{b}(U)),$$
$$\forall U, V \in T_p \Sigma, \quad \forall p \in \Sigma,$$

et d^∇ est l'opérateur de différentiation extérieure (*supra* 1.1) appliqué aux 1-formes à valeurs dans le fibré vectoriel $\operatorname{End}(T)$ (resp. $\operatorname{End}(N)$), relatif à la connexion induite par ∇.

En distinguant les composantes tangentielles et normales, nous en déduisons l'*équation de Codazzi-Mainardi*

$$(6) \quad (d^\nabla b)_{U,V} = -[R_{f_*(U), f_*(V)} \xi]^N, \qquad \forall U, V \in T_p \Sigma, \quad \forall p \in \Sigma, \quad \forall \xi \in T_p$$

et les deux *équations de Gauss*

$$(7) \qquad R^T = [R^f]^T + \hat{b} \wedge b$$

$$(8) \qquad R^N = [R^f]^N + b \wedge \hat{b}$$

où $[R^f]^T$ et $[R^f]^N$ sont les 2-formes à valeurs dans $\operatorname{End}(T)$ et $\operatorname{End}(N)$ respectivement définies par

$$[R^f]^T_{U,V} \xi = [R_{f_*(U), f_*(V)} \xi]^T, \qquad [R^f]^N_{U,V} \nu = [R_{f_*(U), f_*(V)} \nu]^N,$$
$$\forall U, V \in T_p \Sigma, \quad \forall \xi \in T_p, \quad \forall \nu \in N_p, \quad \forall p \in \Sigma.$$

Les 2-formes qui figurent en (7) et (8) prennent en fait leurs valeurs dans les fibrés $\mathrm{End}_a(T)$ et $\mathrm{End}_a(N)$ des endomorphismes *antisymétriques* de T et N respectivement.

Le fibré $\mathrm{End}_a(T)$ est trivial. Si on le trivialise au moyen de la structure complexe J (vue comme section de $\mathrm{End}_a(T)$), la première équation de Gauss (7) devient une relation entre 2-formes *scalaires* (réelles) $(1/2\pi) R^T$ représente la classe de Chern (réelle) du fibré vectoriel complexe (T, J).

1.14. Lorsque f est une pseudo-immersion minimale, la première équation de Gauss (7) se simplifie notablement grâce au :

LEMME. — *Si f est une pseudo-immersion minimale, la 2-forme scalaire* (supra 1.13) $\hat{b} \wedge b$ *est définie négative en dehors des points où f est totalement géodésique* (c'est-à-dire où b — ou, de façon équivalente, la forme fondamentale B — s'annule).

Pour tout vecteur U sur Σ, on a

$$(\hat{b} \wedge b)_{U, JU} = -|b(U)|^2$$

où $|\ \ |$ *note la norme dans le fibré vectoriel* $\mathrm{Hom}(T, N)$.

Démonstration. — Pour un repère orthonormé quelconque $\{\xi, J\xi\}$ de T, on a

$$\begin{aligned}(\hat{b} \wedge b)_{U, JU} &= (\hat{b}(U) \circ b(JU)\xi, J\xi) - (\hat{b}(JU) \circ b(U)\xi, J\xi) \\ &= -(b(JU)\xi, b(U)J\xi) + (b(U)\xi, b(JU)J\xi).\end{aligned}$$

Comme f est conforme, dire que B est J-invariant (c'est-à-dire que f est minimale) équivaut à dire que

$$b(JU)J\xi = -b(U)\xi \qquad (cf. (5)).$$

Il en résulte que

$$(\hat{b} \wedge b)_{U; JU} = -|b(U)\xi|^2 - |b(U)J\xi|^2 = -|b(U)|^2. \quad \square$$

Ainsi, lorsque f est une pseudo-immersion minimale, la 2-forme scalaire $-\hat{b} \wedge b$ peut être considérée comme la norme au carré (ponctuelle) de b ou, si l'on préfère, de la forme fondamentale B. Si Σ est compacte, nous poserons

$$\|B\|^2 = -\int_\Sigma \hat{b} \wedge b. \tag{9}$$

Si f est une pseudo-immersion minimale, c'est un nombre positif ou nul, nul si et seulement si B est identiquement nulle (f totalement géodésique), que nous appellerons la *norme au carré* (*globale*) de B.

On notera qu'elle est définie indépendamment de toute métrique sur Σ (mais ne définit une norme que si f est minimale).

En intégrant la première équation de Gauss (7), nous obtenons la :

PROPOSITION. — *Si f est une pseudo-immersion minimale d'une surface de Riemann compacte* (Σ, J) *de genre g dans une variété riemannienne* (M, γ), *on a*

$$\frac{1}{2\pi}\|B\|^2 = 2g-2-m+\int_{\Sigma}|R^f|^T, \tag{10}$$

où m est l'indice de ramification total de f.

Nous en déduisons immédiatement, compte tenu de 1.12, les :

COROLLAIRE 1. — *Il n'existe aucune application harmonique non constante de la sphère de Riemann S^2 dans une variété riemannienne à courbure sectionnelle négative ou nulle.*

COROLLAIRE 2. — *Une pseudo-immersion minimale d'une surface de Riemann compacte* (Σ, J) *de genre g dans une variété riemannienne* (M, γ) *à courbure sectionnelle négative ou nulle a son indice total de ramification m inférieur ou égal à* $2(g-1)$.

L'égalité ne peut avoir lieu que si f est totalement géodésique (une immersion totalement géodésique si $g=1$) et si la courbure sectionnelle de (M, γ), *évaluée sur* $f_*(T_p\Sigma)$, $\forall p \in \Sigma$, *est nulle.*

En particulier, si (M, γ) *est à courbure sectionnelle négative, il n'existe aucune application harmonique conforme (non constante) d'une surface de Riemann (compacte) de genre 1 dans* (M, γ) *et, pour toute application harmonique conforme (non constante) d'une surface de Riemann compacte de genre g* $(g>1)$ *on a l'inégalité stricte*

$$m < 2(g-1).$$

Remarque. — Dans le cas où (M, γ) est à courbure sectionnelle constante c, la relation (10) devient

$$\frac{1}{2\pi}\|B\|^2 = 2g-2-m+\frac{c}{2\pi}V(f) \tag{10'}$$

où $V(f)$ est le volume total de f (*supra* 1.7).

Nous obtenons ainsi une *quantification relative* de la norme au carré globale de la forme fondamentale B et du volume total de f (et une quantification de $\|B\|^2$ dans le cas où (M, γ) est plate) (cf. *infra*, 2.10).

2. Pseudo-immersions superminimales d'une surface de Rieman dans une variété riemannienne orientée, de dimension 4

Dorénavant, (M, γ) sera, sauf mention contraire explicite, une variété riemannienne *orientée*, de dimension 4.

2.1. Soit $(E, (.,.))$ un espace euclidien orienté, de dimension 4 et considérons la décomposition

$$\Lambda^2 E = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2 E$$

de l'espace $\Lambda^2 E$ des 2-formes sur E (E est identifié à son dual E^* au moyen de la métrique) en somme directe de l'espace $\Lambda^2_+ E$ des *2-formes autoduales* (=préservées par l'opérateur de Hodge-De Rham $*$) et de l'espace $\Lambda^2 E$ des *2-formes anti-autoduales* (=transformées en leur opposée par $*$).

Une *structure hermitienne* sur $(E, (.,.))$ est une structure complexe J qui préserve la métrique en ce sens que

$$(JX, JY) = (X, Y), \qquad X, Y \in E.$$

Elle est déterminée de façon équivalente par sa *forme de Kähler* F définie par

$$F(X, Y) = (JX, Y), \qquad X, Y \in E.$$

La structure hermitienne est dite *positive* si l'orientation induite par un repère (quelconque) de la forme (X, JX, Y, JY) coïncide avec l'orientation de E, et *négative* dans le cas contraire.

Il est clair que J est positive (resp. négative) si et seulement si sa forme de Kähler F est autoduale (resp. anti-autoduale). Inversement, toute 2-forme autoduale (resp. anti-autoduale) de norme $\sqrt{2}$ est la forme de Kähler d'une structure hermitienne positive (resp. négative).

Nous identifions ainsi la variété $Z^+(E)$ des structures hermitiennes positives de $(E, (.,.))$ à la sphère $S_{\sqrt{2}}(\Lambda^2_+ E)$ de rayon $\sqrt{2}$ dans l'espace $\Lambda^2_+ E$, et, de même, la variété $Z^-(E)$ des structures hermitiennes négatives à la sphère $S_{\sqrt{2}}(\Lambda^2 E)$ dans $\Lambda^2 E$.

Il en résulte un difféomorphisme Φ de la grassmannienne $\tilde{G}_2(E)$ des sous-espaces orientés de dimension 2 de E (identifiée à la variété des éléments de norme 1 et de carré extérieur nul de $\Lambda^2 E$, *supra* 1.6) sur le produit $Z^+(E) \times Z^-(E)$, défini par

$$\Phi(P) = (F^+ = \varphi + {*}\varphi,\ F^- = \varphi - {*}\varphi), \qquad P \in \tilde{G}_2(E), \tag{11}$$

où φ est la 2-forme associée à P (ou forme caractéristique de P, *supra* 1.11).

L'inverse $\overset{-1}{\Phi}$ est défini par

$$\overset{-1}{\Phi}((J^+, J^-)) = \frac{1}{2}(F^+ + F^-), \qquad J^+ \in Z^+(E), \quad J^- \in Z^-(E), \tag{11'}$$

où F^+ et F^- sont les formes de Kähler de J^+ et J^-, et $(1/2)\,(\mathrm{F}^+ + \mathrm{F}^-)$, qui est clairement de carré nul et de norme 1, est la forme caractéristique du 2-plan orienté associé.

Nous pouvons interpréter le difféomorphisme Φ de la façon suivante.

Chaque élément P de $\tilde{G}_2(E)$ possède, en propre, une structure complexe J_P (*supra* 1.10).

Nous notons $J_{P^\perp}$ la structure complexe du 2-plan orthogonal $P^\perp$ à P, muni de son *orientation naturelle* (telle que l'orientation de $P \oplus P^\perp$ coïncide avec celle de E).

Les structures hermitiennes J^+ et J^- de E associées à P sont alors égales à

$$J^+ = J_P \oplus J_{P^\perp}, \qquad J^- = J_P \oplus (-J_{P^\perp}).$$

En d'autres termes, J^+ (resp. J^-) est l'unique structure hermitienne positive (resp. négative) de E dont (P, J_P) soit une droite complexe.

Inversement, pour tout couple (J^+, J^-) de structures hermitiennes, respectivement positive et négative, $\overset{-1}{\Phi}((J^+, J^-))$ est l'(unique) droite complexe commune à J^+ et J^-.

(Au contraire, deux structures hermitiennes de même signe, mais non identiques, n'admettent *aucune* droite complexe en commun.)

2.2. L'espace tangent $T_P \tilde{G}_2(E)$ à $\tilde{G}_2(E)$ en P s'identifie naturellement (*supra* remarque 1.8) à l'espace $\mathrm{Hom}(P, P^{\perp})$ des homomorphismes de P dans $P^{\perp}$.

L'espace tangent $T_{J^+} Z^+(E)$ en J^+ et l'espace tangent $T_{J^-} Z^-(E)$ en J^- s'identifie naturellement à l'espace des endomorphismes antisymétriques de E qui *anticommutent* à J^+ et J^- respectivement.

Si $P(=\overset{-1}{\Phi}((J^+, J^-)))$ est la droite complexe commune de J^+ et J^-, de tels endomorphismes envoient clairement P sur son orthogonal, de sorte que nous avons également les identifications

$$T_{J^+} Z^+(E) = \mathrm{Hom}_{\bar{\mathbf{C}}}(P, P^{\perp}), \qquad T_{J^-} Z^-(E) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(P, P^{\perp})$$

où $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(P, P^{\perp})$ et $\mathrm{Hom}_{\bar{\mathbf{C}}}(P, P^{\perp})$ notent respectivement l'espace des homomorphismes $\mathbf{C}$-linéaires et $\mathbf{C}$-antilinéaires de (P, J_P) dans $(P^{\perp}, J_{P^{\perp}})$.

La différentielle Φ_* de Φ n'est autre que l'isomorphisme

$$(12) \quad \Phi_* : \quad A \in \mathrm{Hom}(P, P^{\perp}) \simeq T_P \tilde{G}_2(E)$$
$$\to (A^-, A^+) \in \mathrm{Hom}_{\bar{\mathbf{C}}}(P, P^{\perp}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(P, P^{\perp})$$
$$\simeq T_{J^+} Z^+(E) \oplus T_{J^-} Z^-(E),$$

qui décompose tout homomorphisme A de P dans $P^{\perp}$ en ses parties $\mathbf{C}$-linéaire et $\mathbf{C}$-antilinéaire (dans l'ordre indiqué ci-dessus).

2.2. Chacun des espaces $T_p \tilde{G}_2(E)$, $T_{J^+} Z^+(E)$ et $T_{J^-} Z^-(E)$ possède une structure complexe naturelle, notée $\mathscr{J}$ dans les trois cas (*supra* 1.10), définies par

$$\mathscr{J} A = A \circ J_P, \qquad A \in T_P \tilde{G}_2(E) \simeq \mathrm{Hom}(P, P),$$
$$\mathscr{J} A_1 = A_1 \circ J^+, \qquad A_1 \in T_{J^+} Z^+(E),$$
$$\mathscr{J} A_2 = A_2 \circ J^-, \qquad A_2 \in T_{J^-} Z^-(E).$$

Comme la restriction commune de J^+ et J^- à P est J_P, la différentielle Φ_* de Φ est clairement $\mathscr{J}$-linéaire.

2.3. Nous pouvons « globaliser » les constructions du paragraphe 2.1 en les appliquant au fibré tangent de la variété (M, γ).

Nous obtenons ainsi, à côté du fibré $\tilde{G}_2(M)$ déjà considéré (*supra* 1.6), les fibrés $Z^+(M)$ et $Z^-(M)$ des structures hermitiennes positives et des structures hermitiennes négatives de M (appelées usuellement *espaces des twisteurs* (projectifs) – positifs et négatifs – de M, *cf.* [A-H-S]), et un *difféomorphisme* Φ de $\tilde{G}_2(M)$ sur le *produit fibré* $Z^+(M)\times_M Z^-(M)$ de $Z^+(M)$ et $Z^-(M)$ au-dessus de M, donné, en chaque point x de M, par (11).

Chaque espace fibré $Z^+(M)$ et $Z^-(M)$ peut être considéré comme un quotient du $SO(4)$-fibré principal $Q^+(M)$ des repères orthonormés positivement orientés de M par l'action (à droite) respective du groupe unitaire $U(2)$ et du groupe unitaire tordu $\tilde{U}(2)$, l'un et l'autre plongé canoniquement dans le groupe orthogonal spécial $SO(4)$ (si $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est la base naturelle de $\mathbb{R}^4$, $U(2)$ est le sous-groupe de $SO(4)$ qui préserve la structure complexe J^+ définie par $J^+e_1=e_2$, $J^+e_3=e_4$, tandis que $\tilde{U}(2)$ est le sous-groupe de $SO(4)$ qui préserve la structure complexe J^- définie par $J^-e_1=e_2$, $J^-e_4=e_3$).

L'intersection $U(2)\cap\tilde{U}(2)$ est égale au produit $SO(2)\times SO(2)$ et le difféomorphisme Φ est l'application de $Q^+(M)/SO(2)\times SO(2)$ sur le produit fibré $(Q^+(M)/U(2))\times_M(Q^+(M)/\tilde{U}(2))$ induite par l'application diagonale de $Q^+(M)$ sur $Q^+(M)\times_M Q^+(M)$.

La distribution horizontale sur $Q^+(M)$ déterminée par la connexion de Levi-Civita induit par projection, comme dans le cas de $\tilde{G}_2(M)$ (*supra* 1.8), une *distribution horizontale* sur $Z^+(M)$ et $Z^-(M)$, notée H dans les deux cas, et aussi une distribution horizontale, également notée H, sur le produit fibré $Z^+(M)\times_M Z^-(M)$: $H_{(J^+,J^-)}$ est l'espace obtenu à partir du produit $H_{J^+}\times H_{J^-}$ en identifiant les éléments ayant même image dans T_xM par π_*, $x=\pi(J^+)=\pi(J^-)$, où π note la projection naturelle de $Z^+(M)$ ou $Z^-(M)$ sur M.

D'après l'interprétation qui vient d'être donnée de Φ, il est clair que Φ_* *préserve les distributions horizontales*, et il en va de même pour les projections Φ^+ et Φ^- de $\tilde{G}_2(E)$ sur $Z^+(M)$ et $Z^-(M)$ respectivement.

2.4. L'espace fibré $Z^+(M)$ possède une structure presque complexe naturelle, notée $\mathcal{J}^+$, obtenue en faisant la somme directe de la structure complexe définie en 2.2 sur *l'espace tangent vertical* $T^V_{J^+}(Z^+(M))$, identifié à $T_{J^+}(Z^+(T_xM))$, et la structure complexe J^+ de l'espace tangent horizontal H_{J^+}, identifié à T_xM au moyen de π_*.

De même, l'espace fibré $Z^-(M)$ possède une structure presque complexe naturelle $\mathscr{J}^-$ construite de la même façon.

Comme il est observé en [E-S]$_1$, *les structures presque complexes* $\mathscr{J}^+$ *et* $\mathscr{J}^-$ *ne sont jamais intégrables.*

Au contraire, les structures presque complexes $\mathscr{J}_1^+$ et $\mathscr{J}_1^-$ obtenues à partir de $\mathscr{J}^+$ et $\mathscr{J}^-$ en remplaçant $\mathscr{J}$ par sa conjuguée $-\mathscr{J}$ sur les espaces verticaux peuvent être intégrables, si la courbure R de M satisfait certaines conditions.

De façon précise, $\mathscr{J}_1^+$ (resp. $\mathscr{J}_1^-$) est intégrable si et seulement si l'endomorphisme du fibré $\Lambda_+^2 M$ (resp. $\Lambda_-^2 M$) des 2-formes autoduales (resp. anti-autoduales) de M induit, par projection orthogonale, par la courbure (elle-même vue comme un endomorphisme du fibré $\Lambda^2 M$), est scalaire (*cf.* [A-H-S]).

C'est le cas, par exemple, pour $\mathscr{J}_1^+$ et $\mathscr{J}_1^-$ lorsque (M, γ) est à courbure sectionnelle constante (plus généralement, conforme à une telle variété), et, pour $\mathscr{J}_1^-$, lorsque (M, γ) est une variété kählérienne à courbure sectionnelle holomorphe constante.

2.5. Nous considérons à nouveau une pseudo-immersion f de la surface de Riemann (Σ, J) dans (M, γ), τ son relèvement canonique dans $\tilde{G}_2(M)$.

Nous notons τ^+ et τ^- respectivement, les applications composées $\Phi^+ \circ \tau$ et $\Phi^- \circ \tau$ de Σ dans $Z^+(M)$ ou $Z^-(M)$, baptisées *relèvement canonique de f dans $Z^+(M)$ ou $Z^-(M)$* respectivement.

De façon équivalente, τ^+ (resp. τ^-) *est* une structure complexe, que nous notons J^+ (resp. J^-), du fibré vectoriel $\overset{-1}{f}(TM)$, compatible avec la métrique et l'orientation (resp. l'orientation opposée).

Pour les deux structures complexes J^+ et J^-, le fibré tangent image T muni de sa structure complexe naturelle J, est un sous-fibré complexe.

De (4') et (12), nous déduisons aisément que les différentielles τ_*^+ et τ_*^- de τ^+ et τ^- sont données par

$$(13) \quad \tau_*^+(U) = f_*(U) \oplus (b^-(U) \circ J), \qquad \tau_*^-(U) = f_*(U) \oplus (b^+(U) \circ J)$$

où $b^+(U)$ et $b^-(U)$ notent respectivement les composantes C-linéaires et C-antilinéaires de la 1-forme fondamentale $b(U)$ dans Hom (T, N) pour les structures complexes (T, J) et (N, J^+).

Si f est conforme, la différentielle f_* est un homomorphisme **C**-linéaire de $(T\Sigma, J)$ dans $(\overset{-1}{f}(TM), J^+)$ et $(\overset{-1}{f}(TM), J^-)$.

Il suit alors immédiatement de la proposition 1.10, que si f est harmonique (non constante) et conforme, les relèvements canoniques τ^+ et τ^- sont, *l'un et l'autre*, des applications holomorphes de (Σ, J) dans $(Z^+(M), \mathscr{J}^+)$ et $(Z^-(M), \mathscr{J}^-)$ respectivement.

Inversement, considérons une application *holomorphe non verticale* $\tilde{f}$ de (Σ, J) dans l'un des deux espaces de twisteurs, $(Z^+(M), \mathscr{J}^+)$ par exemple.

Soit $\tilde{S}$ l'ensemble des points p de Σ, où $\tilde{f}_*(T_p\Sigma)$ est vertical. Cet ensemble est fermé et son complémentaire $\Sigma-\tilde{S}$ est dense.

Comme $\tilde{f}$ est conforme et que la projection π^* de $\tilde{H}_{f(p)}$ sur $T_{f(p)}M$, $f=\pi\circ\tilde{f}$, est **C**-linéaire par définition, $\tilde{f}$ coïncide avec le relèvement canonique de sa projection f.

Soit $\tilde{f}'$ le relèvement canonique de f dans l'autre espace de twisteurs $(Z^-(M), \mathscr{J}^-)$.

Nous désignons par b la 1-forme fondamentale du fibré tangent image T de f dans $\overset{-1}{f}(TM)$ au-dessus de $\Sigma-\tilde{S}$, b^+ et b^- ses composantes **C**-linéaires et **C**-antilinéaires identifiées respectivement aux composantes verticales $\tilde{f}_*'^V$ et $\tilde{f}_*^V$ de $\tilde{f}_*'$ et $\tilde{f}_*$ respectivement.

Comme f est conforme, dire que $\tilde{f}_*'^V$ (resp. $\tilde{f}_*^V$) est **C**-linéaire, c'est-à-dire que $\tilde{f}'$ (resp. $\tilde{f}$) est holomorphe, équivaut à dire que la *forme fondamentale positive* B^+ (resp. la *forme fondamentale négative* B^-) définie par

$$B^+(U, V)=b^+(U)(f_* V)$$

$$(\text{resp. } B^-(U, V)=b^-(U)(f_* V)),$$

$$U, V\in T_p\Sigma, \qquad p\in\Sigma,$$

est symétrique.

Ainsi, $\tilde{f}$ est holomorphe si et seulement si $\tilde{f}'$ l'est aussi.

Dans ce cas, la forme fondamentale B est J-anti-invariante, de sorte que la restriction de f à $\Sigma-\tilde{S}$ est harmonique. Comme $\Sigma-\tilde{S}$ est dense sur Σ, f est elle-même harmonique.

Nous avons ainsi établi *une correspondance bijective naturelle*, découverte par J. EELLS et S. SALAMON ([E-S]$_1$, [E-S]$_2$, [Sa]), *entre les applications harmoniques conformes non constantes de* (Σ, J) *dans* (M, γ), *les applications* *holomorphes non verticales de* (Σ, J) *dans* $(Z^+(M), \mathscr{J}^+)$ *et les applications holomorphes non verticales de* (Σ, J) *dans* $(Z^-(M), \mathscr{J}^-)$.

2.6. Comme la détermination des courbes holomorphes dans une variété presque complexe non intégrable, comme c'est le cas de $\mathscr{J}^+$ et $\mathscr{J}^-$, est malaisée en général, nous nous intéressons à une classe particulière d'applications harmoniques (conformes) définie de la façon suivante.

DÉFINITION 1. — *Une pseudo-immersion superminimale à droite* (resp. *à gauche*) d'une surface de Riemann (Σ, J) dans une variété riemannienne (orientée, de dimension 4) (M, γ) est une pseudo-immersion conforme de (Σ, J) dans (M, γ) dont le relèvement canonique dans l'espace des twisteurs positifs $Z^+(M)$ (resp. l'espace des twisteurs négatifs $Z^-(M)$) est *horizontal*.

DÉFINITION 2. — *Une pseudo-immersion superminimale à droite* (resp. *à gauche*) est une pseudo-immersion conforme telle que la 1-forme fondamentale du fibré tangent image T dans $\overset{-1}{f}(TM)$ prenne ses valeurs dans le fibré des homomorphismes **C**-linéaires (resp. **C**-antilinéaires) de (T, J) dans (N, J^+).

DÉFINITION 3. — *Une pseudo-immersion superminimale à droite* (resp. *à gauche*) est une pseudo-immersion conforme telle que la structure complexe associée J^+ (resp. J^-) de $\overset{-1}{f}(TM)$ (*cf.* 2.5) est D-parallèle pour la connexion de Levi-Civita D.

L'équivalence des définitions 1 et 3 est tautologique, celle des définitions 1 et 2 résulte immédiatement des relations (13) de 2.5.

De la définition 2 résulte immédiatement qu'*une pseudo-immersion superminimale à droite* (*à gauche*) *composée avec une application* $\pm$*-holomorphe* (*non constante*) *d'une surface de Riemann* (Σ', J') *dans* (Σ, J) *est encore une pseudo-immersion superminimale à droite* (*à gauche*) *de* (Σ', J') *dans* (M, γ).

Si f est superminimale à droite (à gauche) son relèvement canonique dans $Z^+(M)$ (ou $Z^-(M)$) est holomorphe à la fois par les structures $\mathscr{J}^+$ et $\mathscr{J}_1^+$ ($\mathscr{J}^-$ et $\mathscr{J}_1^-$).

En particulier, *une pseudo-immersion superminimale est minimale*, en vertu de 2.5.

Nous obtenons aussi, toujours en vertu de 2.5, *une correspondance bijective naturelle entre les pseudo-immersions superminimales à droite* (resp.

à gauche) de (Σ, J) *dans* (M, γ), *et les courbes holomorphes horizontales de* (Σ, J) *dans* $(Z^+(M), \mathscr{J}_1^+)$ (resp. de (Σ, J) *dans* $(Z^-(M), \mathscr{J}_1^-)$).

Remarque. — Si f est une pseudo-immersion superminimale à droite (resp. à gauche) de (Σ, J) dans (M, γ), la connexion de Levi-Civita D de $f^{-1}(TM)$ est J^+-linéaire (resp. J^--linéaire) (définition 2 ci-dessus). Elle définit donc une structure de fibré vectoriel holomorphe (de rang 2) sur $(f^{-1}(TM), J^+)$ (resp. sur $(f^{-1}(TM), J^-)$) (*supra* 1.2).

Comme la 1-forme fondamentale b est alors de type $(1, 0)$, le fibré tangent image (T, J), muni de sa structure holomorphe induite par ∇ (*supra* 1.9), est alors un *sous-fibré holomorphe* (de rang 1) de $(f^{-1}(TM), J^+)$ (resp. de $(f^{-1}(TM), J^-)$).

2.7. La forme fondamentale B d'une pseudo-immersion f de (Σ, J) dans (M, γ) est une section du produit tensoriel (réel) $K \otimes_{\mathbf{R}} K \otimes_{\mathbf{R}} N$ où le fibré canonique K de (Σ, J) est considéré comme un fibré vectoriel réel de rang 2, isomorphe au fibré cotangent $(T\Sigma)^*$.

Si f est minimale, B est une section de $K^2 \otimes_{\mathbf{R}} N$, où le carré tensoriel complexe K^2 du fibré canonique est encore considéré comme un fibré vectoriel réel de rang 2.

Enfin, si f est superminimale à droite (resp. à gauche), B est une section du fibré holomorphe de rang 1 $K^2 \otimes_{\mathbf{C}} (N, J^+)$ (resp. $K^2 \otimes_{\mathbf{C}} (N, J^-)$) où, cette fois, K^2 est considéré lui-même comme un fibré vectoriel holomorphe de rang 1, ainsi que $(N, J^{\pm})$ grâce à la connexion ∇.

Par définition, B est une section holomorphe de $K^2 \otimes_{\mathbf{C}} (N, J^+)$ ou $K^2 \otimes_{\mathbf{C}} (N, J^-)$ si

$$\nabla_{\partial/\partial \bar{w}} (B_{\partial/\partial w,\ \partial/\partial w}) = 0$$

par toute carte complexe $\{ w \}$ sur (Σ, J).

Il n'est pas vrai, en général, que B soit holomorphe lorsque f est superminimale. Il résulte en effet directement de l'équation de Codazzi-Mainardi (6) (*supra* 1.13) que

$$(14) \qquad \nabla_{\partial/\partial \bar{w}} (B_{\partial/\partial w}) = [R_{f_*(\partial/\partial \bar{w}),\ f_*(\partial/\partial w)}\, f_*(\partial/\partial w)]^N$$

où R est la courbure de (M, γ). Le terme de droite n'est pas nul en général.

Il l'est pourtant, si la courbure sectionnelle de (M, γ) est constante.

Nous obtenons ainsi la :

PROPOSITION. — *Si f est une pseudo-immersion superminimale à droite* (resp. à gauche) *de* (Σ, J) *dans une variété riemannienne* (*orientée, de dimension* 4) *à courbure sectionnelle constante, la forme fondamentale B est une section holomorphe du fibré vectoriel holomorphe* (de rang 1) $K^2 \otimes_{\mathbf{C}} (N, J^+)$ (resp. $K^2 \otimes_{\mathbf{C}} (N, J^-)$).

COROLLAIRE. — *Si f est une pseudo-immersion superminimale à droite* (resp. *à gauche*) *non totalement géodésique d'une surface de Riemann compacte* (Σ, J) *de genre g dans une variété riemannienne orientée, de dimension* 4, *à courbure sectionnelle constante, le nombre de points réguliers de Σ où f est totalement géodésique est inférieur ou égal à* $\chi(N)+4g-4-m$ (resp. $-\chi(N)+4g-4-m$) *où $\chi(N)$ est la classe d'Euler du fibré normal muni de son orientation naturelle* (égale, encore, à la classe de Chern $c(N, J^+)$ de (N, J^+)), *et m l'indice de ramification total de f.*

En particulier, on a l'inégalité

$$\chi(N)+4g-4-m \geqslant 0 \qquad (\text{resp. } -\chi(N)+4g-4-m \geqslant 0).$$

Démonstration. — Comme B est une section holomorphe non triviale du fibré vectoriel holomorphe de rang 1 $K^2 \otimes_{\mathbf{C}} (N, J^+)$ (resp. $K^2 \otimes_{\mathbf{C}} (N, J^-)$) de classe de Chern égale à $4g-4+\chi(N)$ (resp. $4g-4-\chi(N)$), ce nombre mesure les zéros de B, qui sont de deux sortes : les points singuliers de f et les points réguliers où f est totalement géodésique.

Remarque. — L'inégalité obtenue dans le corollaire précédent est particulièrement intéressante quand (Σ, J) est la sphère de Riemann.

Compte tenu du corollaire 1 de 2.8 (*infra*), nous en déduisons que *pour toute application harmonique* (*non constante*) *non totalement géodésique de S^2 dans la sphère canonique S^4, $|\chi(N)|$ est supérieur ou égal à $4+m$.*

Nous verrons une interprétation twistorielle de ce fait au paragraphe 2.11.

2.8. Considérons la *forme biquadratique complexe* β définie sur la surface de Riemann (Σ, J) par

$$\beta(W) = (B_{W,W}, B_{W,W}), \qquad \forall\, W \in T_p^{1,0}\Sigma, \quad \forall\, p \in \Sigma$$

où B est la forme fondamentale (C-linéarisée) d'une pseudo-immersion f de (Σ, J) dans (M, γ). Cette forme β peut être vue comme une section de la puissance tensorielle quatrième K^4 du fibré canonique K de (Σ, J).

Elle ne dépend que de la partie J-anti-invariante de B.

LEMME. — *Si f est une pseudo-immersion minimale de* (Σ, J) dans (M, γ), *elle est superminimale* (à droite ou à gauche) *en un point p de Σ si et seulement si la forme biquadratique β s'annule en ce point.*

Démonstration. — En posant

$$W=\frac{1}{2}(U-iJU), \qquad U\in T_p\Sigma,$$

un calcul immédiat, tenant compte de la J-anti-invariance de B, montre que

$$\beta(W)=\frac{1}{4}[(|B_{U,U}|^2-|B_{JU,U}|^2)-2i(B_{U,U}, B_{JU,U})]$$

qui montre que, dans N_p, $B_{JU,U}$ est orthogonal à et de même norme que $B_{U,U}$, c'est-à-dire est égal à $\pm J^+ B_{U,U}$, si et seulement si $\beta(W)$ est nul en p.

PROPOSITION. — *Si f est une pseudo-immersion minimale d'une surface de Riemann (Σ, J) dans une variété riemannienne (M, γ) à courbure sectionnelle constante, la forme biquadratique β est une section holomorphe de K^4.*

Démonstration. — Conséquence immédiate de l'équation de Codazzi-Mainardi (14) de 2.7.

COROLLAIRE 1. — *Toute pseudo-immersion minimale de la sphère de Riemann S^2 dans la sphère canonique S^4 est superminimale* (à droite ou à gauche).

COROLLAIRE 2. — *Si f est une pseudo-immersion minimale, mais non superminimale, d'une surface de Riemann compacte* (Σ, J) de genre $g(g\geq 1)$ *dans une variété riemannienne orientée, de dimension* 4, *à courbure sectionnelle constante, le nombre de points réguliers où f est superminimale* (à droite ou à gauche) *est inférieur ou égal à* $2(4(g-1)-m)$.

En particulier, l'indice de ramification total m est inférieur ou égal à $4(g-1)$.

Démonstration. — Conséquence directe de ce que la classe de Chern de K^4 vaut $8(g-1)$ et que chaque point singulier de f fournit un zéro, de multiplicité double (au moins), de β.

Remarque 1. — Nous appelons *superminimale* une pseudo-immersion f qui, en tout point p de Σ, est superminimale à droite *ou* à gauche.

Nous n'excluons pas — *a priori* — la possibilité où f est superminimale à droite sur une partie de Σ et à gauche sur le complémentaire, car cette distinction n'est pas visible au travers de la forme biquadratique β.

Ce cas mixte est toutefois exclu lorsque les données sont analytiques (ce qui est le cas que nous venons de considérer où (M, γ) est à courbure sectionnelle constante et, aussi, le cas où (M, γ) est une variété de Kähler-Einstein).

Dans ce cas, si f est superminimale, elle est superminimale à droite (globalement) ou superminimale à gauche (globalement).

Remarque 2. — Pour autant que nous sachions, tous les exemples *connus* de pseudo-immersions minimales de surfaces de Riemann dans S^4 (qui ne soient pas contenues dans S^3) sont induites par des courbes holomorphes de l'espace projectif complexe $\mathbf{C}P^2$ au moyen de la correspondance de R. BRYANT [Br] et sont, par définition, superminimales.

2.9. Nous avons vu en 1.14 comment *l'équation de Gauss tangentielle* (7) se simplifie lorsque f est une pseudo-immersion minimale de (Σ, J) dans (M, γ).

Si (M, Σ) est de dimension 4 et orientée, le fibré $\mathrm{End}_a N$ des endomorphismes antisymétriques du fibré normal N est, de même que $\mathrm{End}_a T$ (*supra* 1.13), trivial. Nous considérons la trivialisation associée à la structure complexe J^+ vue comme une section de $\mathrm{End}_a(N)$.

Ainsi, les 2-formes qui figurent dans *l'équation de Gauss normale* (8) *sont-elles des formes scalaires* (réelles).

En particulier, $(1/2\pi)\, R^N$ représente la classe de Chern du fibré vectoriel complexe (de rang 1) (N, J^+), c'est-à-dire la classe d'Euler $\chi(N)$ de N muni de son orientation naturelle.

On a alors le :

LEMME. — *Si f est une pseudo-immersion superminimale à droite* (resp. *à gauche*), *la 2-forme $b \wedge \hat{b}$ est égale à $-\hat{b} \wedge b$* (resp. à $+\hat{b} \wedge b$).

En particulier, elle est définie-positive (resp. *définie-négative*) *en dehors des points où f est totalement géodésique* (supra 1.14).

Démonstration. — Puisque le fibré $\mathrm{End}_a(N)$ a été trivialisé au moyen de J^+, on a

$$(b \wedge \hat{b})_{U, JU} = (b(U) \circ \hat{b}(JU)\nu, J^+\nu) - (b(JU) \circ \hat{b}(U)\nu, J^+\nu),$$
$$\forall U \in T_p\Sigma, \quad \forall p \in \Sigma,$$

pour un élément unitaire quelconque ν de N_p.

Le fait que f soit minimale, se traduit, au niveau de $\hat{b}$, par la relation

$$(5') \qquad \hat{b}(JU)\nu = -J\hat{b}(U)\nu, \qquad \forall \nu \in N_p, \quad \forall U \in T_p\Sigma, \quad \forall p \in \Sigma$$

(*cf.* (5) *supra*).

Il en résulte alors que

$$\begin{aligned}(b \wedge \hat{b})_{U, JU} &= 2(J\hat{b}(U)\nu, \hat{b}(U)J^+\nu)\\ &= 2\det(\hat{b}(U))\end{aligned}$$

où le déterminant $\det(\hat{b}(U))$ s'entend relativement à tout repère orthonormé $\{\xi, J\xi\}$ de T et $\{\nu, J^+\nu\}$ de N.

Si, en outre, f est superminimale à droite (resp. à gauche), $\hat{b}(U)$ est un homomorphisme C-linéaire (resp. C-antilinéaire) de (N, J^+) dans (T, J) et $2\det(\hat{b}(U))$ est égal à $|\hat{b}(U)|^2 = |b(U)|^2$ (resp. à $-|\hat{b}(U)|^2 = -|b(U)|^2$), ce qui, compte tenu du lemme 1.14, prouve notre assertion.

COROLLAIRE. — *Si f est une pseudo-immersion superminimale à droite* (resp. *à gauche*) *de* (Σ, J) (*compacte*) *dans* (M, γ) (*orientée, de dimension* 4), *l'équation de Gauss normale* (8), *intégrée sur* Σ, *se lit*

$$\frac{1}{2\pi}\|B\|^2 = \chi(N) - \int_\Sigma [R^f]^N$$

$$\left(\text{resp. } \frac{1}{2\pi}\|B\|^2 = -\chi(N) + \int_\Sigma [R^f]^N\right),$$

où $\|B\|^2$ *est la norme au carré* (*globale*) *de la forme fondamentale B* (cf. (9) de 1.14) *et* $[R^f]^N$ *la composante normale de la courbure de* (M, γ) (supra 1.13).

2.10. Nous supposerons, dans ce paragraphe, que (M, γ) est à courbure sectionnelle constante, égale à c.

Les équations de Gauss (7) et (8) d'une pseudo-immersion f de (Σ, J) dans (M, γ) se réduisent alors à

$$R^T = cf^* \varphi + \hat{b} \wedge b$$
$$R^N = b \wedge \hat{b}$$

où φ est la forme caractéristique de f (*supra* 1.6) et $f^* \varphi$ est la forme-volume $\mu(f)$ (*supra* 1.7).

Si f est minimale et Σ compacte, la première équation devient, rappelons-le (relation (10') de 1.14), après intégration sur Σ,

$$2\pi\chi(T) = 2\pi(2-2g+m) = c.V(f) - \|B\|^2$$

où $V(f)$ est le volume total de f.

Si f est, en outre, superminimale à droite (resp. à gauche), la seconde équation de Gauss devient, après intégration sur Σ,

$$(15) \qquad 2\pi\chi(N) = \|B\|^2 \qquad (\text{resp. } 2\pi\chi(N) = -\|B\|^2).$$

Nous en déduisons, outre les résultats de 1.14 (qui valent pour n quelconque), la :

PROPOSITION. — *Soit* (M, γ) *une variété riemannienne* (orientée, de dimension 4) *à courbure sectionnelle constante* c.

Pour toute pseudo-immersion superminimale à droite (resp. *à gauche*) f *d'une surface de Riemann compacte* (Σ, J) *de genre* g *dans* (M, γ),

(*a*) *la classe d'Euler* $\chi(N)$ *du fibré normal muni de son orientation naturelle est non négative* (resp. *non positive*);

(*b*) *la norme au carré* (*globale*) $\|B\|^2$, *divisée par* 2π, *est un nombre entier, égal à* $\chi(N)$ (resp. *égal à* $-\chi(N)$);

(*c*) *si* (M, γ) *est plate*, $\chi(N)$, g *et l'ordre total de singularité* m *sont liés par la relation*

$$2-2g+m+\chi(N)=0$$
$$(\text{resp. } 2-2g+m-\chi(N)=0);$$

(*d*) *si c est positif, le volume total V* (*f*) *de f, divisé par* $2\pi/c$, *est un nombre entier :*

$$V(f)=\frac{2\pi}{c}(2-2g+m+\chi(N))$$

$$\left(\text{resp. } V(f)=\frac{2\pi}{c}(2-2g+m-\chi(N))\right).$$

En particulier, si f n'est pas totalement géodésique,

$$V(f)\geqslant\frac{4\pi}{c}(3+m-3g);$$

(*e*) *si c est négatif, on a*

$$V(f)=\frac{2\pi}{(-c)}(2g-2-m-\chi(N))$$

$$\left(\text{resp. } V(f)=\frac{2\pi}{(-c)}(2g-2-m+\chi(N))\right).$$

En particulier, le genre g est supérieur à 1 (cf. 1.14). *Si* $g=2$ *et si f n'est pas totalement géodésique, f est une immersion. En général, on a l'inégalité*

$$m\leqslant 2(g-1)-1$$

avec l'égalité si et seulement si f est totalement géodésique.

Démonstration. — Relecture des relations (14) et (15). L'inégalité dans (*d*) est une conséquence de la proposition 2.8 (corollaire).

2.11. Le cas $c>0$, dans la proposition 2.10 peut être affiné au moyen de l'interprétation « twistorielle » des pseudo-immersions superminimales (cf. *supra* 2.5). On a la :

Proposition. — *Pour toute pseudo-immersion superminimale f d'une surface de Riemann compacte* (Σ, J) *de genre g dans la sphère canonique* S^4 *(en particulier, toute application harmonique non constante f de la sphère de Riemann* S^2 *dans la sphère canonique* S^4*), le volume total* $V(f)$ *de f est un multiple entier de* 4π.

Si f n'est pas totalement géodésique, cet entier est supérieur ou égal à 3.

(Dans le cas où (Σ, J) est la sphère de Riemann, *cf.* [Ca] et [Ba]).

Démonstration. — Remarquons, tout d'abord, que nous pouvons supposer f superminimale à droite, puisque l'antipodie de S^4 échange la droite et la gauche.

Son relevé canonique τ^+ est (*supra* 2.6) une application holomorphe et horizontale de (Σ, J) dans $(Z^+(S^4), \mathcal{J}_1^+)$ qui n'est autre que l'espace projectif complexe $\mathbf{C}P^3$ avec sa structure complexe naturelle (*cf.* [A-H-S]).

Il est facile de vérifier que la classe de Chern du fibré horizontal H de $\mathbf{C}P^3$ est égal à $2h$, si h désigne le générateur (positif) de la cohomologie entière de $\mathbf{C}P^3$ (*cf.* [G-L]).

Comme τ^+ est horizontale, nous en déduisons l'égalité entre classes de Chern (ou classes d'Euler) sur Σ

$$\chi(T)+\chi(N)=2d$$

où $d=(\tau^+)^* h$ est le *degré* de τ^+.

En combinant (14) et (15), nous obtenons ainsi la relation

$$\mathrm{Vol}(f)=4\pi d.$$

En outre, si $d=1$ ou 2, la courbe holomorphe $\tau^+(\Sigma)$ est plane (non singulière) et il est facile de vérifier qu'elle ne peut être horizontale que si $d=1$ (correspondant au plongement équatorial de S^2 dans S^4).

Remarque. — Une façon d'engendrer des pseudo-immersion totalement géodésiques d'une surface de Riemann (Σ, J) de genre g dans la sphère canonique S^4 est de composer le plongement équatorial de S^2 dans S^4 avec une application holomorphe (non constante) quelconque de (Σ, J) dans S^2.

L'indice de ramification total de l'application composée est alors égal à celui de $\tilde{f}$ qui est égal, comme il est bien connu (*cf.* [G-H], p. 218, par exemple), à

$$m=2(g+\tilde{d}-1)$$

où $\tilde{d}$ est le degré de $\tilde{f}$, égal, comme on le vérifie aisément, au degré d du relèvement canonique τ de f dans $\mathbf{C}P^3$.

En reportant cette valeur dans la proposition 2.10 (d), avec $\chi(N)=0$ puisque f est totalement géodésique, nous retrouvons, dans ce cas particulier, la relation

$$V(f)=4\pi \bar{d}=4\pi d$$

obtenue ci-dessus.

3. Pseudo-immersions superminimales dans une variété kählérienne

3.1. Dans cette troisième partie, nous supposerons que la variété riemannienne (M, γ)-orientée, de dimension 4- est *kählérienne*, c'est-à-dire que son fibré tangent TM est muni d'une structure complexe $\jmath$ induisant l'orientation de M (cf. *supra* 2.1), compatible avec la métrique et parallèle pour la connexion de Levi-Civita.

La structure kählérienne sera notée $(M, \gamma, \jmath)$ où $\jmath$ doit être considérée comme une donnée supplémentaire (susceptible d'être modifiée) par rapport à la métrique et l'orientation de M qui sont fixées une fois pour toutes.

Nous notons ω la forme de Kähler de $(M, \gamma, \jmath)$ et ρ la *forme de Ricci* définie de façon similaire à partir du tenseur de Ricci r (*supra* 2.1) par

$$\rho(X, Y)=r(\jmath X, Y), \qquad \forall X, Y\in T_x M, \quad \forall x\in M.$$

La distinction « à gauche », « à droite » que nous avons considérée à propos des pseudo-immersions superminimales et qui pouvait apparaître superflue dans la mesure où l'on passe de l'une à l'autre par simple changement d'orientation de M, acquiert, maintenant que l'orientation de M est liée à la structure complexe $\jmath$, une importance considérable, comme nous allons voir.

3.2. L'espace des twisteurs positifs $Z^+(M)$ de la variété kählérienne $(M, \gamma, \jmath)$ admet deux sections canoniques correspondant à la structure complexe $\jmath$ et à sa conjuguée $-\jmath$.

Leurs images sont deux sous-variétés *horizontales* de $Z^+(M)$, puisque $\jmath$ est kählérienne.

En particulier, toute application $\pm$- holomorphe de (Σ, J) dans la variété complexe $(M, \jmath)$ est une pseudo-immersion superminimale à droite de (Σ, J) dans (M, γ) *pour toute structure kählérienne* $\jmath$ *sur la variété riemanienne orientée* (M, γ).

3.3. DÉFINITION 1. — Une application f de (Σ, J) dans une variété kählérienne (M, γ, j) est dite *lagrangienne* (ou *totalement réelle*) si l'image réciproque $f^* \omega$ de la forme de Kähler ω de (M, γ, j) est nulle sur Σ.

DÉFINITION 2. — Dans les mêmes conditions, f est dite *Ricci-lagrangienne* si l'image réciproque $f^* \rho$ de la forme de Ricci ρ de (M, γ, j) est nulle sur Σ.

Les deux définitions sont disjointes en général. La seconde est vide si le tenseur de Ricci r de (M, γ) est nul. Elles coïncident, au contraire, si (M, γ, j) est de Kähler-Einstein à courbure scalaire non nulle.

On a la

PROPOSITION. — *Toute pseudo-immersion minimale lagrangienne f d'une surface de Riemann (Σ, J) dans une variété kählérienne (M, γ, j) est une pseudo-immersion superminimale à droite de* (Σ, J) dans (M, γ).

Démonstration. — Le fait que f soit lagrangienne équivaut au fait que j échange le fibré tangent image T est le fibré normal N.

Comme j est D-parallèle, il en résulte que

$$\tilde{b}(U)\circ \mathrm{j} = \mathrm{j} \circ b(U), \qquad \forall\, U \in T_p \Sigma, \quad p \in \Sigma,$$

c'est-à-dire encore que *l'endomorphisme* $\mathrm{j} \circ b$ *de* T *est symétrique.*

Par ailleurs, la structure complexe J^+ de $\overset{-1}{f}(TM)$ associée à f (*supra*, 2.5) *anticommute* à j. En effet, si $\{X, \mathrm{j} X, Y, \mathrm{j} Y\}$ est un repère orthonormé de $T_{f(p)} M$, $p \in \Sigma$, tel que $\{X, Y = JX\}$ engendre le fibré tangent image T_p, la forme de Kähler F^+ associée à J^+ est égale (en identifiant vecteurs et covecteurs) à

$$F^+ = X \wedge Y - \mathrm{j} X \wedge \mathrm{j} Y$$

qui est clairement j-anti-invariante.

On a alors successivement, pour tout élément ξ de T_p et tout élément U de $T_p \Sigma$, $p \in \Sigma$,

$$(a) \qquad \begin{aligned} (b(U) J\xi, \mathrm{j}\,\xi) &= (b(U)\xi, \mathrm{j} J \xi) \quad (\text{symétrie de } \mathrm{j} \circ b), \\ &= -(b(U)\xi, J^+ \mathrm{j}\,\xi) \quad (\text{car } \mathrm{j} \circ J = -J^+ \circ \mathrm{j}), \\ &= (J^+ b(U)\xi, \mathrm{j}\,\xi) \end{aligned}$$

et

$$(b)\qquad \begin{aligned}(b(U)J\xi, \mathrm{j}J\xi) &= (b(JU)\xi, \mathrm{j}J\xi) \quad (\text{minimalité de } f),\\ &= (b(JU)J\xi, \mathrm{j}\xi) \quad (\text{symétrie de } \mathrm{j}\circ b),\\ &= -(b(U)\xi, \mathrm{j}\xi) \quad (\text{minimalité de } f),\\ &= -(J^+ b(U)\xi, J^+ \mathrm{j}\xi),\\ &= (J^+ b(U)\xi, \mathrm{j}J\xi) \quad (\text{car } \mathrm{j}\circ J = -J^+\circ \mathrm{j}),\end{aligned}$$

d'où l'on tire que

$$b(U)J\xi = J^+ b(U)\xi, \qquad \forall \xi \in T_p, \quad \forall U \in T_p\Sigma, \quad \forall p \in \Sigma$$

c'est-à-dire, f est superminimale à droite (2.6, définition 2).

3.4. Les faits énoncés en 3.3 et 3.4 admettent une réciproque partielle, sous la forme de la

PROPOSITION. — *Soit* (M, γ, j) *une variété kählérienne de dimension* 4.

Toute pseudo-immersion superminimale à droite d'une surface de Riemann (Σ, J) dans (M, γ) *est* $\pm$*-holomorphe ou Ricci-lagrangienne.*

Démonstration. — Comme M est kählérienne, le fibré $\Lambda^2_+ M$ des 2-formes (réelles) anti-autoduales sur M se décompose suivant

$$\Lambda^2_+ M = 1 \oplus K(M)$$

où 1 est le fibré trivial engendré par la forme de Kähler ω et $K(M)$ le fibré canonique de M dont les éléments sont les 2-formes (alternées) j-anti-invariantes de M.

Ainsi, le relèvement canonique τ^+ de f dans $Z^+(M) \simeq S_{\sqrt{2}}(\Lambda^2_+ M)$(*supra* 2.1) est-il de la forme

$$\tau^+(p) = a\,.\,\omega(p) + \Psi(p), \qquad p \in \Sigma,$$

où a est une fonction réelle sur Σ et Ψ une section de $\overset{-1}{f}(K(M))$ au-dessus de Σ, telles que

$$a^2 + \frac{1}{2}|\Psi|^2 = 1.$$

Par hypothèse, la 2-forme $a.\omega+\Psi$, considérée comme section du fibré $\overset{-1}{f}(\Lambda^2_+ M)$, est parallèle pour la connexion de Levi-Civita induite.

Comme ω et Ψ sont de types différents (relativement à $\mathfrak{j}$) et $\mathfrak{j}$ est parallèle, $a.\omega$ et Ψ sont eux-mêmes parallèles.

En particulier, *a est constant* sur Σ.

Si Ψ est nulle, a est égale à ± 1 et f est $\pm$-holomorphe.

Dans le cas contraire, Ψ est une section parallèle non triviale de $\overset{-1}{f}(K(M))$ au-dessus de Σ.

Il en résulte que la courbure de $\overset{-1}{f}(K(M))$, qui est égale à l'image réciproque $f^*\rho$ de la forme de Ricci ρ de $(M, \gamma, \mathfrak{j})$, est nulle.

COROLLAIRE 1 (*cf.* aussi [E-S]$_2$, cor. 11.4). *Une pseudo-immersion superminimale à droite d'une surface de Riemann* (Σ, J) *dans une variété de Kähler-Einstein de dimension* (*réelle*) 4, *à courbure scalaire non nulle, est* $\pm$*-holomorphe ou lagrangienne* (= totalement réelle).

COROLLAIRE 2. — *Toute pseudo-immersion minimale lagrangienne de* (Σ, J) *dans* $(M, \gamma, \mathfrak{j})$ *kählérienne* (*de dimension* 4) *est aussi Ricci-lagrangienne.*

Démonstration. — Conséquence directe des propositions 3.3 et 3.4.

COROLLAIRE 3. — *Soit* (M, γ) *une variété riemannienne orientée de dimension* 4 *dont le tenseur de Ricci ne s'annule en aucun point.*

Chaque structure kählérienne adaptée $(M, \gamma, \mathfrak{j})$, *s'il en existe, est isolée: il existe un voisinage de* $\mathfrak{j}$ *dans l'espace des structures hermitiennes adaptées à* (M, γ) *qui ne comporte aucune structure kählérienne en dehors de* $\mathfrak{j}$.

Démonstration. — En tout point x de M, il existe, par hypothèse, un 2-plan $\mathfrak{j}$-invariant P de $T_x M$ tel que la restriction à P de la forme de Ricci ne soit pas nulle.

Comme $\mathfrak{j}$ est intégrable, il existe une courbe holomorphe locale de (Σ, J) dans $(M, \mathfrak{j})$ — où (Σ, J) est un ouvert de $\mathbf{C}$ — et un point p de Σ, d'image x, tel que $f_*(T_p\Sigma)$ soit P. L'application f est alors une pseudo-immersion superminimale à droite de (Σ, J) dans (M, γ).

Elle est donc $\pm$-holomorphe ou Ricci-lagrangienne pour toute structure kählérienne adaptée $\mathfrak{j}'$.

Si $\jmath'$ est suffisamment proche de $\jmath$, ce dernier cas est exclus (ainsi que le cas anti-holomorphe). Il en résulte que le 2-plan P est également $\jmath'$-invariant ce qui implique, puisque $\jmath$ et $\jmath'$ induisent la même orientation par hypothèse, qu'elles coïncident (cf. *supra* 2.3). $\square$

3.5. Les espaces modèles en géométrie kählérienne sont les variétés à courbure sectionnelle holomorphe constante.

Une partie des résultats de la deuxième partie obtenus lorsque la variété but est à courbure sectionnelle constante valent encore dans ce nouveau cadre.

On a tout d'abord la:

PROPOSITION. — *La forme fondamentale B d'une pseudo-immersion superminimale à droite f d'une surface de Riemann (Σ, J) (de fibré canonique K) dans une variété kählérienne $(M, \gamma, \jmath)$ à courbure sectionnelle holomorphe constante est une section holomorphe du fibré vectoriel holomorphe $K^2 \otimes_{\mathbf{C}} (N, J^+)$.*

En particulier, si Σ est compacte, de genre g, et si f n'est pas totalement géodésique, le nombre de points réguliers où f est totalement géodésique est inférieur ou égal à $4g-4+\chi(N)-m$, où m est l'indice de ramification total de f.

Démonstration. — Nous pouvons supposer que la courbure sectionnelle holomorphe n'est pas nulle (cf. *supra* 2.7, où ce cas a été examiné).

Par 3.4, nous savons que f est $\pm$-holomorphe ou lagrangienne. Dans l'un ou l'autre de ces cas, le second membre de l'équation de Codazzi-Mainardi (6) est nul, comme on s'en convainc aisément à partir de la relation

$$
\begin{aligned}
R_{X,Y} Z = \frac{c}{4}((X, Z)\, Y - (Y, Z)\, X + (\jmath X, Z)\, \jmath\, Y \\
-(\jmath Y, Z)\, \jmath\, X + 2(\jmath X, Y)\, \jmath\, Z), \\
\forall X, Y, Z \in T_x M, \quad \forall x \in M,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

qui exprime la courbure d'une variété kählérienne $(M, \gamma, \jmath)$ à courbure sectionnelle holomorphe constante égale à c.

Nous concluons alors comme en 2.7.

3.6. La conclusion du résultat précédent n'est pas vraie (en général) lorsque f est superminimale *à gauche* (et (N, J^+) remplacé par (N, J^-)) sauf s'il existe une structure kählérienne adaptée à (M, γ) munie de l'orientation *opposée* (ce qui n'est pas le cas, par exemple, lorsque (M, γ, j) est l'espace projectif complexe $\mathbf{C} P^2$).

De même, la proposition 2.8 ne s'étend pas au cas où la variété but est à courbure sectionnelle holomorphe constante.

Nous avons toutefois l'analogue du corollaire 1 de 2.8 sous la forme précise suivante:

PROPOSITION. — *Une application harmonique (non constante) de la sphère de Riemann S^2 dans l'espace projectif complexe $\mathbf{C} P^2$ (muni de sa structure kählérienne canonique) est $\pm$-holomorphe ou superminimale à gauche.*

Remarque. — Le cas où la variété but est à courbure sectionnelle holomorphe constante nulle ou négative a été écarté par la proposition 1. Mais la démonstration que nous donnons de la proposition ci-dessus vaut également dans ce cas.

Avant de démontrer la proposition (due, pour l'essentiel, à J. EELLS-J. C. WOOD [E-W]) nous signalons le corollaire suivant:

COROLLAIRE 1. — *Une immersion minimale lagrangienne (= totalement réelle) f de la sphère de Riemann S^2 dans $\mathbf{C} P^2$ est totalement géodésique.*

Démonstration. — Par 3.3, f est superminimale à droite. Par la proposition ci-dessus, f est superminimale à gauche. Elle est donc totalement géodésique.

Démonstration de la proposition (cette démonstration est largement inspirée de [La]).

Nous avons, jusqu'à présent, déterminé une structure hermitienne sur $T_x M$ par un opérateur complexe J ou la forme de Kähler associée.

Nous pouvons aussi la définir, de façon équivalente, par un sous-espace complexe isotrope maximal (pour le produit scalaire $\mathbf{C}$-linéaire $(.,.)$) du complexifié $T_x^{\mathbf{C}} M = T_x M \otimes \mathbf{C}$. Cet espace est, par définition, l'espace des vecteurs (complexes) de type $(1,0)$ (relativement à J), c'est-à-dire de la forme $X - iJX$, où X est un élément quelconque de $T_x M$.

Soit $\{w\}$ une carte complexe sur Σ. Le vecteur complexe $\partial/\partial w$ est de type $(1,0)$ sur Σ. Comme f est conforme, $f_*(\partial/\partial w)$ est isotrope et de type $(1,0)$ relativement à l'une ou l'autre des structures complexes canoniques $J^{\pm}$ induites par f sur $T_{f(p)} M$, en tout point p du domaine de définition de $\{w\}$ (*supra* 2.5).

Supposons que f ne soit pas $\pm$-holomorphe.

Les vecteurs complexes $f_*(\partial/\partial w)$ et $\mathrm{j} f_*(\partial/\partial w)$ engendrent alors un 2-plan complexe de $T^{\mathbb{C}}_{f(p)} M$.

Ce 2-plan est isotrope.

Il contient $f_*(\partial/\partial w)$ donc est associé à J^+ ou à J^-. Mais il contient aussi le vecteur complexe $f_*(\partial/\partial w) - i\,\mathrm{j}(f_*(\partial/\partial w))$ qui est de type (1,0) relativement à j. C'est donc le 2-plan isotrope associé à J^- (*cf.* 2.3, remarque finale).

Par ailleurs, il résulte immédiatement de la définition 2 de 2.6 que f est superminimale à droite (resp. à gauche) si et seulement si $B_{\partial/\partial w, \partial/\partial w}$ appartient au 2-plan isotrope $\{f_*(\partial/\partial w), \mathrm{j} f_*(\partial/\partial w)\}$, soit donc

$$(f_* \partial/\partial w, B_{\partial/\partial w, \partial/\partial w}) = 0 \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{j} f_*(\partial/\partial w), B_{\partial/\partial w, \partial/\partial w}) = 0.$$

La première égalité est toujours vérifiée puisque les complexifiés $T^{\mathbb{C}}$ et $N^{\mathbb{C}}$ sont orthogonaux dans $\overset{-1}{f}(T^{\mathbb{C}} M)$.

La seconde égalité est fausse en général pour une surface de Riemann quelconque, mais vraie si (Σ, J) est la sphère de Riemann, en vertu du

LEMME. — *Soit f une pseudo-immersion minimale d'une surface de Riemann (Σ, J) dans une variété kählérienne (de dimension 4) à courbure sectionnelle holomorphe constante.*

La forme cubique complexe (= section de la puissance tensorielle K^3 du fibré canonique K de (Σ, J) κ *déterminée, relativement à une carte complexe* $\{w\}$ *de* Σ, *par*

$$\kappa(\partial/\partial w) = (\mathrm{j} f_* \partial/\partial w, B_{\partial/\partial w, \partial/\partial w})$$

est holomorphe.

En particulier, elle est nulle si (Σ, J) est la sphère de Riemann.

Démonstration du lemme. — On a

$$\begin{aligned}\partial/\partial \bar{w}(\mathrm{j} f_*(\partial/\partial w), B_{\partial/\partial w, \partial/\partial w})&\\ &= (D_{\partial/\partial \bar{w}}(\mathrm{j}(f_*(\partial/\partial w))), B_{\partial/\partial w, \partial/\partial w})\\ &\qquad + (\mathrm{j} f_*(\partial/\partial w), D_{\partial/\partial \bar{w}}(B_{\partial/\partial w, \partial/\partial w}))\end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite est égal, puisque M est kählérienne, à $(\mathrm{j}\, D_{\partial/\partial \bar{w}}(f(\partial/\partial w)), B_{\partial/\partial w,\, \partial/\partial w})$ qui est nul par 1.4.

Le second terme est nul aussi. En effet, d'après l'équation de Codazzi-Mainardi (14), $D_{\partial/\partial \bar{w}}(B_{\partial/\partial w,\, \partial/\partial w})$ est égal à $[R_{f_*(\partial/\partial \bar{w}),\, f_*(\partial/\partial w)} f_*(\partial/\partial w)]^N$ qui est, comme on le vérifie aisément à partir de (16), une combinaison linéaire (complexe) de $f_*(\partial/\partial w)$ et $f_*(\partial/\partial \bar{w})$.

Ainsi κ est une section holomorphe de K^3. En particulier, κ est nulle si (Σ, J) est la sphère de Riemann en vertu du fait, déjà invoqué à plusieurs reprises, que, dans ce cas, K ni aucune de ses puissances tensorielles positives n'admettent de sections holomorphes non triviales.

Ceci achève la démonstration du lemme et donc, aussi, de la proposition.

3.7. Du lemme précédent, nous tirons en fait le résultat suivant (qui généralise la proposition 3.6):

Proposition. — *Toute pseudo-immersion minimale d'une surface de Riemann compacte de genre g dans une variété kählérienne de dimension* 4 *à courbure sectionnelle holomorphe constante dont l'indice de ramification total m est supérieur à* $3(g-1)$ *est* $\pm$*-holomorphe ou superminimale à gauche.*

Démonstration. — Si f n'est ni $\pm$-holomorphe, ni superminimale à gauche, alors la forme cubique κ est une section holomorphe non triviale de K^3 dont la classe de Chern est égale à $6(g-1)$.

Les zéros de K sont de trois sortes: les points singuliers de f (comptés avec multiplicité double), les points réguliers de f où f est $\pm$-holomorphes et ceux où f est superminimale à gauche.

Le nombre de points de Σ de ces deux dernières sortes est ainsi inférieur où égal à $2(3g-3-m)$ ce qui prouve la proposition.

Remarque. — D'après la proposition ci-dessus, une pseudo-immersion minimale d'une surface de Riemann de genre 1 dans $\mathbf{C}P^2$ qui n'est ni $\pm$-holomorphe ni superminimale à gauche doit être une immersion (en outre elle n'est superminimale à gauche ou $\pm$-holomorphe en aucun point de Σ).

Un exemple d'une telle immersion est donné par le *plongement de Clifford* du tore carré dans $\mathbf{C}P^2$ qui est lagrangien (donc superminimal à droite).

3.8. DÉFINITION. — Soient $(M, \gamma, \mathfrak{j})$ une variété kählérienne (de dimension quelconque) et f une pseudo-immersion de (Σ, J) dans $(M, \gamma, \mathfrak{j})$.

L'angle d'holomorphie de f en un point p de Σ est l'angle θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, défini par

$$\cos\theta = (\varphi, \omega)$$

où (φ, ω) est le produit scalaire en p de la forme caractéristique φ de f et de la forme de Kähler ω de (M, γ, j). (*Cf.* [Li] et aussi [E-G-T].)

Ce produit scalaire est, par définition, la *trace* de φ (relative à $\mathfrak{j}$), notée trace (φ).

Si M est de dimension 4, on a aussi

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(F^{+}, \omega)$$

où $F^{+} = (\varphi + {}^{*}\varphi)$ est la forme de Kähler associée au relèvement canonique de f dans l'espace des twisteurs positifs $Z^{+}(M)$.

Ainsi $\cos\theta$ n'est autre que la fonction a qui intervient dans la démonstration de la proposition 3.4.

Nous avons vu, à cette occasion, que *l'angle d'holomorphie d'une pseudo-immersion superminimale à droite de* (Σ, J) *dans* $(M, \gamma, \mathfrak{j})$ *est constant* (*cf.*, aussi, $[\text{E-S}]_2$, corollaire 11.4), ce que nous vérifions à nouveau puisque la dérivée de $\cos\theta$ dans la direction d'un vecteur U de $T_p\Sigma$ s'écrit

$$U.\cos\theta = \frac{1}{2}(D_U F^{+}, \omega)$$

qui est nulle, par définition, si f est superminimale à droite (*cf.* 2.6, définition 1).

Si $(M, \gamma, \mathfrak{j})$ est à courbure sectionnelle holomorphe constante, les formes $[R^f]^T$ et $[R^f]^N$ qui interviennent dans les équations de Gauss (7) et (8) d'une pseudo-immersion f ne dépendent que de l'angle d'holomorphie de f. De façon précise, on a le :

LEMME. — *Soient* $(M, \gamma, \mathfrak{j})$ *une variété kählérienne* (de dimension quelconque) *à courbure sectionnelle holomorphe constante, égale à c, et f une pseudo-immersion d'une surface de Riemann* (Σ, J) *dans* $(M, \gamma, \mathfrak{j})$.

La 2-forme (scalaire) $[R^f]^T$ *qui intervient dans l'équation de Gauss tangentielle* (7) *est égale à*

$$[R^f]^T = \frac{c}{4}(1+3\cos^2\theta) f^* \varphi$$

où φ *est la forme caractéristique* de f et φ *l'angle d'holomorphie.*

Si M est de dimension (réelle) 4, *la 2-forme* (scalaire) $[R^f]^N$ *qui intervient dans l'équation de Gauss normale* (8) (cf. 1.16 et 2.14), *est égale à*

$$[R^f]^N = \frac{c}{4}(3\cos^2\theta - 1) f^* \varphi.$$

Démonstration. — De l'expression (16) de la courbure nous tirons immédiatement

$$[R^f]^T = \frac{c}{4}(f^*\varphi + f^*(\mathrm{j}\,\varphi) + 2(\omega,\varphi) f^*\omega)$$

$$= \frac{c}{4}(1 + (\mathrm{j}\,\varphi, \varphi) + 2(\omega,\varphi)^2) f^*\varphi,$$

où j note l'involution naturelle induite par j sur $\Lambda^2 M$ (cf. *supra* 1.3).

Il est facile de vérifier que $(\mathrm{j}\,\varphi,\varphi)$ est égal à $(\omega,\varphi)^2$, ce qui prouve la première partie du lemme.

Si M est de dimension 4, la forme caractéristique du fibré normal N, avec son orientation naturelle, est égale à $_*\varphi$ et on a

$$[R^f]^N = \frac{c}{4}(f^*(_*\varphi) + f^*(\mathrm{j}_*\varphi) + 2(\omega, _*\varphi) f^*\omega)$$

$$= \frac{c}{4}((\mathrm{j}_*\varphi, \varphi) + 2(\omega,\varphi)^2) f^*\varphi.$$

On vérifie aisément que $\mathrm{j}_*\varphi$ est égale à $-\varphi + (\omega,\varphi).\omega$ (en effet, φ s'écrit, de façon unique, sous la forme

$$\varphi = \frac{(\omega,\varphi)}{2}.\omega + \varphi_0^+ + \varphi^-$$

où φ_0^+ est j-invariant à trace nulle (donc anti-autoduale) et φ^- j-anti-invariant (donc autoduale, ainsi que ω). Il en résulte que

$$\mathrm{j} * \varphi = * \mathrm{j}\, \varphi = \frac{(\omega, \varphi)}{2} . \omega - \varphi_0^+ - \varphi^- .$$

Ceci achève la démonstration du lemme.

3.9. Ainsi, les équations de Gauss d'une pseudo-immersion f de (Σ, J) dans une variété kählérienne de dimension 4 (M, γ, j) à courbure sectionnelle holomorphe constante c s'écrivent

$$R^T = \frac{c}{4}(3\cos^2\theta + 1) f^* \varphi + \hat{b} \wedge b$$

$$R^N = \frac{c}{4}(3\cos^2\theta - 1) f^* \varphi + b \wedge \hat{b}$$

(la première étant vraie pour M de dimension quelconque).

Compte tenu de 1.12 et 2.9, nous en déduisons la:

Proposition. — *Soient* (M, γ, j) *une variété kählérienne* (de dimension quelconque) *à courbure sectionnelle holomorphe constante c et f une pseudo-immersion minimale d'une surface de Riemann compacte de genre g dans* (M, γ, j). *On a la relation*

$$2\pi(2 - 2g + m) = \frac{c}{4}\int_\Sigma (3\cos^2\theta + 1)\,\mu - \|B\|^2 \tag{17}$$

où θ *est l'angle d'holomorphie de f*, μ la forme-volume (*cf.* 1.7), $\|B\|$ *la norme au carré de la forme fondamentale* (cf. 1.14) *et m l'indice de ramification total de f.*

Si, en outre, M est de dimension 4 *et f est superminimale à droite* (resp. à gauche), *on a*

$$2\pi\chi(N) = \frac{c}{4}\int_\Sigma (3\cos^2\theta - 1) + \|B\|^2 \tag{18}$$

$$\left(\text{resp. } 2\pi\chi(N) = \frac{c}{4}\int_\Sigma (3\cos^2\theta - 1) - \|B\|^2\right).$$

3.10. D'après la proposition 3.4, dans le cas où la courbure sectionnelle holomorphe c est négative ou positive (nous écartons le cas où $c=0$, qui a déjà été considéré dans le paragraphe 2), une pseudo-immersion superminimale à droite est holomorphe ($\theta=0$), anti-holomorphe ($\theta=\pi$) ou lagrangienne ($\theta=\pi/2$).

Nous obtenons ainsi la

PROPOSITION 1. — *Soit f une application $\pm$-holomorphe d'une surface de Riemann compacte de genre g dans l'espace projectif complexe canonique* $\mathbf{C}P^2$ $(c=+1)$.

Le volume total $V(f)$ de f et la norme au carré $\|B\|^2$ de la forme fondamentale B de f sont quantifiés de la façon suivante :

$$V(f)=4\pi|d|$$
$$\|B\|^2=2\pi(2|d|-2+2g-m)$$

où d désigne le degré topologique de f (positif si f est holomorphe, négatif si f est anti-holomorphe) et m l'indice de ramification total de f.

Remarque. — Ces formules généralisent les formules bien connues quand f est une immersion.

Dans ce cas, la seconde formule s'écrit encore

$$\|B\|^2=2\pi|d|(|d|-1).$$

Démonstration de la proposition 1. — Simple lecture des équations de Gauss intégrées (17) et (18), avec $\cos\theta=1$, en observant que

$$\chi(T)+\chi(N)=f^*(c_1(\mathbf{C}P^2, \pm\mathfrak{j})=\pm 3f^*(h)$$

où $c_1(\mathbf{C}P^2, \pm\mathfrak{j})=\pm c_1(\mathbf{C}P^2, \mathfrak{j})$ note la première classe de Chern de $\mathbf{C}P^2$ relative à sa structure complexe canonique $\mathfrak{j}$ et à sa conjuguée $-\mathfrak{j}$, et h le générateur (positif) de la cohomologie entière de $\mathbf{C}P^2$, de sorte que $f^*(h)$ est égal, *par définition*, au *degré topologique d* de f.

PROPOSITION 2. — *Soient $(M, \gamma, \mathfrak{j})$ une variété kählérienne (de dimension 4) à courbure sectionnelle holomorphe constante négative c et f une application $\pm$-holomorphe d'une surface de Riemann compacte de genre g dans (M, γ).*

Le volume total $V(f)$ et $\| B \|^2$ sont alors quantifiés de la façon suivante :

$$V(f)=\frac{4\pi}{(-3c)}(2g-2-m-\chi(N))$$

$$\| B \|^2=\frac{2\pi}{3}(2\chi(N)+2g-2-m)$$

où m est l'ordre total de singularité de f.

En particulier, on a

$$V(f)\leqslant\frac{8\pi}{(-3c)}(3g-3-m).$$

Démonstration. — Simple lecture des équations de Gauss (17) et (18), toujours avec $\cos^2\theta=1$. La dernière inégalité est alors une conséquence de la proposition 3.5 (*cf.* aussi, *supra* proposition 1.12).

PROPOSITION 3. — *Pour toute pseudo-immersion minimale lagrangienne f d'une surface de Riemann compacte de genre g dans une variété kählérienne (de dimension* 4) *à courbure sectionnelle holomorphe constante c, on a la relation*

$$\chi(N)+2-2g+m=0$$

où m est l'ordre total de singularité de f, et $\chi(N)$ est positif si c est négatif.

Démonstration (simple lecture des équations de Gauss (17) et (18), avec $\cos\theta=0$).

Remarque. — Par la proposition 3.5, on sait que $\chi(N)$ est supérieur ou égal, *dans le cas où f n'est pas totalement géodésique,* à $4-4g+m$.

Nous retrouvons ainsi le fait que toute pseudo-immersion minimale lagrangienne de la sphère de Riemann dans $\mathbf{C}P^2$ est totalement géodésique (cf. *supra*, corollaire 1 de 3.6) et nous déduisons qu'*une pseudo-immersion minimale lagrangienne non totalement géodésique d'une surface de Riemann compacte de genre* 1 *dans $\mathbf{C}P^2$ est une immersion.*

3.11. Dans le cas où f est superminimale *à gauche*, nous tirons immédiatement des équations de Gauss (17) et (18) la

PROPOSITION. — *Pour toute pseudo-immersion superminimale à gauche d'une surface de Riemann compacte de genre g dans une variété kählérienne* *de dimension* (réelle) 4 *à courbure sectionnelle holomorphe constante c* (non nulle), *on a*

$$V(f)=\frac{4\pi}{c}(2-2g+m-\chi(N))$$

où m est l'indice de ramification total de f.

Remarque 1. — Dans le cas où $(M, \gamma, \mathfrak{j})$ est l'espace projectif complexe canonique $\mathbf{C}P^2$ $(c=+1)$, toute pseudo-immersion superminimale à gauche f de (Σ, J) dans $\mathbf{C}P^2$ se relève, par définition, en une application holomorphe et horizontale τ^- de (Σ, J) dans des twisteurs (négatifs) $Z^-(\mathbf{C}P^2)$ que l'on identifie à l'*espace* $\mathbf{D}^3$ *des drapeaux complexes* de $\mathbf{C}P^2$ muni de sa structure complexe ordinaire (*cf.* [A-H-S], p. 438 et § 4, *infra*).

Il est facile d'établir que l'image réciproque, par τ^-, de la première classe de Chern $c_1(H)$ du fibré horizontal de $\mathbf{D}_3$ est égale à la somme d_1+d_2 déduite du *bidegré* (d_1, d_2) de f (*cf.* [G-L] et aussi § 4, *infra*), de sorte que

$$\chi(T)+\chi(N)=d_1+d_2$$

puisque τ^- est horizontal.

Nous déduisons alors de la proposition 3.11 la relation

$$V(f)=4\pi(d_1+d_2)$$

que l'on trouve dans [G-L] (formule (6.8)) dans le cas où f est une immersion.

Si f n'est pas le plongement canonique (holomorphe et totalement géodésique) de la sphère de Riemann dans $\mathbf{C}P^2$ (ou le plongement conjugué), la somme d_1+d_2 est supérieure ou égale à 4.

Remarque 2. — Toujours dans le cas où la variété but est l'espace projectif $\mathbf{C}P^2$ (muni de sa structure kählérienne canonique, $c=+1$), si f est une immersion, génériquement injective, on a (*cf.* [G-L], (6.3))

$$\chi(N)=2i(f)+d^2$$

où d est le degré topologique de f (cf. *supra* 3.10) et $i(f)$ l'indice (algébrique) d'auto-intersection de f, nul si f est un plongement.

De la proposition 3.11, nous retrouvons alors la relation

$$i(f)=1-g-1/2(a+d^2)$$

établie en [G-L] (théorème D), où $a=V(f)/4\pi$, d'où l'on déduit sans peine que $i(f)$ ne peut être nul, dans le cas où $g=0$, si f n'est pas le plongement canonique (ou son conjugué) de la sphère de Riemann dans $\mathbf{C}P^2$.

Nous retrouvons ainsi, comme il est remarqué en [G-L], *via* la proposition 3.6, qu'une *immersion harmonique*, non $\pm$*-holomorphe, de la sphère de Riemann dans* $\mathbf{C}P^2$ *ne peut être un plongement*, résultat dû à S. WEBSTER [We].

Dans le paragraphe 4, nous étendrons ce résultat au cas général où f est une pseudo-immersion, en faisant usage de la méthode utilisée en [G-L] dans le cas où la variété but est la sphère canonique S^4.

4. Applications harmoniques injectives de la sphère de Riemann dans l'espace projectif $\mathbf{C}P^2$

4.1. Cette quatrième partie est consacrée à démontrer le

THÉORÈME. — *Une application harmonique f injective, au sens ensembliste, de la sphère de Riemann dans l'espace projectif complexe* $\mathbf{C}P^2$ *muni de sa métrique canonique est holomorphe ou anti-holomorphe.*

Remarque préliminaire. — Alors que les seuls *plongements* holomorphes de $\mathbf{C}P^1$ dans $\mathbf{C}P^2$ sont les droites complexes et les coniques, il existe, en degré supérieur à 2, des applications holomorphes injectives de $\mathbf{C}P^1$ dans $\mathbf{C}P^2$ ayant un ordre de singularité total m quelconque (différent de zéro).

Une série d'exemples est donnée par les courbes complexes

$$f_m: \quad (\alpha:\beta)\in\mathbf{C}P^1 \to (\alpha^{m+1}\beta:\alpha^{m+2}:\beta^{m+2})\in\mathbf{C}P^2$$

où $(\alpha:\beta)$ sont les coordonnées homogènes sur $\mathbf{C}P^1$. Cette application est clairement injective et admet l'origine $(0:1)$ comme unique point singulier, d'ordre m.

4.2. La démonstration du théorème s'appuie essentiellement sur le fait qu'une application harmonique f non $\pm$-holomorphe de la sphère de Riemann $\mathbf{C}P^1$ dans $\mathbf{C}P^2$ est superminimale à gauche (cf. *supra* 3.6).

Toute pseudo-immersion superminimale à gauche d'une surface de Riemann (Σ, J) dans $\mathbf{C}P^2$ induit et est induite par une application holomorphe horizontale F (cf. *supra* 2.10) de (Σ, J) dans l'espace des twisteurs négatifs $Z^-(\mathbf{C}P^2)$, lui-même identifié à l'espace des drapeaux complexes $\mathbf{D}_3$ de $\mathbf{C}P^2$.

Rappelons que $\mathbf{D}_3$ est l'hypersurface complexe (de bidegré (1, 1)) du produit $\mathbf{C}P^2 \times (\mathbf{C}P^2)^*$ — où *l'espace projectif dual* $(\mathbf{C}P^2)^*$ s'entend comme la variété des droites projectives complexes de $\mathbf{C}P^2$ —, constituée par les couples (x, l) tels que x appartienne à l.

Nous notons q_1 et q_2 les projections (holomorphes) de $\mathbf{D}_3$ sur $\mathbf{C}P^2$ et $(\mathbf{C}P^2)^*$ respectivement.

L'application twistorielle π de $\mathbf{D}_3$ sur $\mathbf{C}P^2$ est définie comme suit : $\pi((x, l))$ est le point à l'infini y de l relativement à x (c'est-à-dire, la droite complexe y de $\mathbf{C}^3$ est orthogonale à x dans le 2-plan l, pour la métrique hermitienne usuelle de $\mathbf{C}^3$) (*cf.* aussi, *infra* 4.3).

En tout point (x, l) de $\mathbf{D}_3$, le plan tangent $T_{(x, l)}\mathbf{D}_3$, considéré comme espace vectoriel complexe de dimension 3, est l'espace des couples (a, b) d'endomorphismes $\mathbf{C}$-linéaires de x dans $\mathbf{C}^3/x$ et l dans $\mathbf{C}^3/l$ respectivement, tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{a} & \mathbf{C}^3/x \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ l & \xrightarrow{b} & \mathbf{C}^3/l \end{array}$$

soit commutatif, où i désigne l'inclusion de x dans l et r la projection naturelle de $\mathbf{C}P^3/x$ sur $\mathbf{C}^3/l$.

Le sous-espace horizontal $H_{(x, l)}$ (*supra* 2.3) est alors constitué des couples (a, b) tels que

$$r \circ a = b \circ i = 0.$$

Parmi ceux-ci, nous trouvons les couples $(a, 0)$ et $(0, b)$ correspondant aux deux *directions horizontales distinguées* engendrées respectivement par les fibres de q_2 et de q_1.

Nous observons que la détermination de la distribution horizontale H ainsi que des directions horizontales distinguées, ne dépend d'aucune métrique sur $\mathbf{C}P^2$, contrairement à celle de π et de l'espace tangent vertical $T^V_{(x,l)}\mathbf{D}_3$.

Pour déterminer celui-ci, nous identifions, au moyen de la métrique hermitienne usuelle de $\mathbf{C}^3$, les quotients $\mathbf{C}^3/x$ et $\mathbf{C}^3/l$ à $y \oplus z$ et z respectivement, où y est l'orthogonal de x dans l et z l'orthogonal de l dans $\mathbf{C}^3$.

Nous en déduisons l'identification

$$T_{(x,l)}\mathbf{D}_3 = \operatorname{Hom}(x, y) \oplus \operatorname{Hom}(y, z) \oplus \operatorname{Hom}(x, z)$$

où chacun des facteurs s'entend comme l'espace (à une dimension complexe) des homomorphismes $\mathbf{C}$-linéaires des espaces concernés.

Nous avons alors les identifications naturelles

$$T^V_{(x,l)}\mathbf{D}_3 = \operatorname{Hom}(x, z), \qquad H_{(x,l)} = \operatorname{Hom}(x, y) \oplus \operatorname{Hom}(y, z).$$

On observe que la différentielle π_* de π, qui est nulle, par définition sur la composante verticale $\operatorname{Hom}(x, z)$, est $\mathbf{C}$-linéaire sous le sous-espace $\operatorname{Hom}(y, z)$ tangent à la fibre de q_1, et $\mathbf{C}$-antilinéaire sur le sous-espace $\operatorname{Hom}(x, y)$ tangent à la fibre de q_2.

Nous en déduisons facilement que *les applications holomorphes* (resp. *antiholomorphes*) *totalement géodésiques* (*supra* 1.8) *de* (Σ, J) *dans* $\mathbf{C}P^2$ *sont exactement les applications obtenues en composant une application holomorphe* (le relèvement canonique F) *de* (Σ, J) *dans* $\mathbf{C}P^1$ (*identifié à une fibre de* q_2 (resp. de q_1)) *avec le plongement canonique holomorphe* (resp. *antiholomorphe*) *de* $\mathbf{C}P^1$ *dans* $\mathbf{C}P^2$.

Si nous excluons ces deux cas, le relèvement canonique F de toute application superminimale à gauche (non $\pm$-holomorphe) f de (Σ, J) dans $\mathbf{C}P^2$ induit, au moyen des projections q_1 et q_2, deux applications holomorphes (non constantes) C et C^* de (Σ, J) dans $\mathbf{C}P^2$ et $(\mathbf{C}P^2)^*$ respectivement, *qui sont duales l'une de l'autre* (C^* est le prolongement holomorphe à (Σ, J) de l'application qui, à tout point régulier p de C dans Σ, associe la droite projective tangente à C en p).

Inversement, toute application holomorphe (non constante) C de (Σ, J) dans $\mathbf{C}P^2$ induit, avec son application duale C^*, une application holomorphe horizontale $F = (C, C^*)$ de (Σ, J) dans $\mathbf{D}_3$ dont la projection par π est une pseudo-immersion superminimale à gauche (Σ, J) dans $\mathbf{C}P^2$.

Le *bidegré* de f est le couple (d_1, d_2) où d_1 est le degré de C et d_2 celui de C^* (d_2 est la *classe* de C).

Ces deux nombres sont non négatifs, nuls si et seulement si f est holomorphe ($d_1=0$) ou antiholomorphe ($d_2=0$) (f est alors, dans les deux cas, totalement géodésique).

Dans le cas contraire, d_1 et d_2 sont supérieurs ou égale à 2 (car $d_1=1$ — resp. $d_2=1$ — implique $d_2=0$ — resp. $d_1=0$) (cf. *supra* 3.11, rem. 1).

4.3. La *projection twistorielle* π de $\mathbf{D}_3$ sur $\mathbf{C}P^2$ peut s'interpréter (de façon plus twistorielle !) de la façon suivante.

Nous notons G la variété produit déjà considérée $\mathbf{C}P^2 \times (\mathbf{C}P^2)^*$.

Cette variété est munie d'une *structure réelle*, c'est-à-dire d'une involution antiholomorphe σ définie par

$$\sigma((x, l))=(l^{\perp}, x^{\perp})$$

où $l^{\perp}$ désigne la droite complexe orthogonale à l et $x^{\perp}$ le 2-plan complexe orthogonal à x dans $\mathbf{C}^3$.

Ainsi $\mathbf{C}P^2$ s'identifie à la variété $G^{\mathbf{R}}$ des éléments *réels* de G constituée des couples $(x, x^{\perp})$ où x décrit $\mathbf{C}P^2$ (en adoptant le point d'une inverse, G apparaît comme la *variété complexifiée* de $\mathbf{C}P^2$).

On observera que $G^{\mathbf{R}}$ et $\mathbf{D}_3$ ont une intersection vide dans G.

Chaque élément (y, m) de G-$\mathbf{D}_3$ détermine une *droite* de $\mathbf{D}_3$, c'est-à-dire la courbe complexe de $\mathbf{D}_3$, isomorphe à $\mathbf{C}P^1$, constituée des drapeaux (x, l) tels que x appartienne à la droite projective m et l passe par le point y.

Parmi les droites de $\mathbf{D}_3$, nous distinguons les *droites réelles* (ou *verticales*) correspondant aux éléments réels $(x, x^{\perp})$ de G.

L'application twistorielle π est alors l'application de $\mathbf{D}_3$ dans $G^{\mathbf{R}} \simeq \mathbf{C}P^2$ qui, à tout point de $\mathbf{D}_3$, associe l'*unique* droite réelle passant par ce point.

4.4. On observera que les fibres des projections q_1 et q_2 qui déterminent, en tout point de $\mathbf{D}_3$, les directions horizontales distinguées, ne sont pas des droites au sens qui vient d'être défini.

De façon générale, *l'ensemble des droites passant* par un drapeau déterminé (x, l) *est en bijection avec l'ensemble des directions tangentes* (*complexes*) non horizontales *dans* $T_{(x, l)}\mathbf{D}_3$.

4.5. Nous définissons une *application rationnelle* Z du produit $\mathbf{D}_3 \times \mathbf{D}_3$ dans G de la façon suivante :

à chaque couple $((x_1, l_1), (x_2, l_2))$ de $\mathbf{D}_3 \times \mathbf{D}_3$ nous associons l'ensemble des éléments (y, m) de G tels que le point y appartienne à l_1 et l_2 et que la droite (projective) m contienne x_1 et x_2.

Z détermine une (vraie) application holomorphe sur l'ouvert de $\mathbf{D}_3 \times \mathbf{D}_3$ constitué des couples $((x_1, l_1), (x_2, l_2))$ d'éléments *complètement distincts*, c'est-à-dire n'appartenant pas à une même fibre de q_1 ou q_2.

Si les éléments du couple sont distincts mais appartiennent à une même fibre de q_1 ou q_2, Z lui associe cette fibre.

Enfin, à tout point (x, l) de la diagonale, Z associe l'ensemble des (y, m) tels que y appartienne à l et m contienne x.

4.6. Considérons une application holomorphe *horizontale* $F=(C, C^*)$ de (Σ, J) dans $\mathbf{D}_3$, dont l'image ne soit pas contenue dans une fibre de q_1 ou q_2, où C est la projection $q_1 \circ F$ de F sur $\mathbf{C}P^2$ et C^* – égale à $q_2 \circ F$ – est la courbe duale de C.

Nous supposons en outre que F est génériquement injective.

L'ensemble des couples (p_1, p_2) de points de Σ tels que $F(p_1)$ et $F(p_2)$ soient complètement distincts est un ouvert dense $\mathcal{U}$ du produit $\Sigma \times \Sigma$.

La *variété des sécantes* $\mathrm{Sec}(F)$ est définie comme la projection, dans G, de la fermeture, dans $(\Sigma \times \Sigma) \times G$, du graphe $\{((p_1, p_2), Z((F(p_1), F(p_2))) \mid (p_1, p_2) \in \mathcal{U}\}$.

On a alors le

LEMME. — *Si la projection $f=\pi \circ F$ de F par π est injective (au sens ensembliste), l'intersection de* $\mathrm{Sec}(F)$ *avec $G^{\mathbf{R}}$ est vide.*

Démonstration. — Puisque f est injective, F est aussi injective.

Si p_1 et p_2 sont deux points distincts de Σ, ou bien $F(p_1)$ et $F(p_2)$ sont complètement distincts et ne peuvent être reliés par une droite réelle puisqu'alors $f(p_1)$ et $f(p_2)$ coïncideraient, ou bien $F(p_1)$ et $F(p_2)$ ont un élément commun (mais pas les deux) et l'image au sens des applications rationnelles du couple $(F(p_1), F(p_2))$ dans $\mathrm{Sec}(F)$ est incluse dans $\mathbf{D}_3$, dont l'intersection avec $G^{\mathbf{R}}$ est vide.

Il reste à montrer que l'image de la diagonale Σ de $\Sigma \times \Sigma$ dans $\mathrm{Sec}(F)$ est elle-même incluse dans $\mathbf{D}_3$.

Ceci est clairement vrai pour les points p de Σ où les projections $C=q_1 \circ F$ ou $C^*=q_2 \circ F$ sont régulières.

Il reste donc à examiner le cas des points p de Σ où C *et* C^* sont singulières.

Le lemme est alors équivalent à l'assertion suivante (où le terme *courbe complexe* désigne une application holomorphe injective d'un ouvert $\mathscr{V}$ de l'origine dans $\mathbf{C}$ dans une variété complexe).

Soit $T=(T_1, T_2)$ une courbe complexe (que nous pouvons supposer régulière) à valeurs dans un voisinage de (p, p) dans le produit $\Sigma \times \Sigma$, avec $T(0)=(p, p)$.

Le couple de points $(T_1(t), T_2(t))$, $t \in \mathscr{V}$, détermine une sécante de C dans $\mathbf{C}P^2$ et de C^* de $(\mathbf{C}P^2)^*$ que nous notons respectivement $C \circ T(t)$ et $C^* \circ T(t)$.

Considérant la limite de ces sécantes quand t tend vers zéro, nous obtenons la

PROPOSITION. — *Si $C \circ T(t)$ tend vers une droite projective de $\mathbf{C}P^2$ distincte de la tangente en p à C, la sécante $C^* \circ T(t)$ tend vers la tangente en p à C^*.*

En d'autres termes, les deux sécantes ne peuvent tendre simultanément vers des droites projectives (dans $\mathbf{C}P^2$ et $(\mathbf{C}P^2)^*$ respectivement) distinctes de la limite « naturelle » constituée par la tangente en p à C et C^*.

Démonstration. — Si $\{w\}$ est une carte convenablement choisie de Σ au voisinage de p, la courbe complexe C s'écrit

$$X=w^n, \qquad Y=\textstyle\sum_{i=m}^{\infty} a_i w^i, \qquad Z=1, \quad a_m \neq 0,$$

où $(X:Y:Z)$ sont les coordonnées homogènes dans $\mathbf{C}P^2$ et n et m deux nombres entiers supérieurs à 1, où m est supérieur à n et non divisible par n (*cf.* par exemple [Za], p. 13).

Les nombres n et les exposants des termes non nuls dans le développement de Y sont premiers entre eux.

Les *exposants caractéristiques* (*nombres de Puiseux*) sont les nombres $(\beta_1=m, \beta_2, \ldots, \beta_r)$, $r \geqslant 1$, déterminés comme suit : β_i, $i=1, \ldots, r$ est l'exposant d'un terme non nul de Y tel qu'il ne soit pas divisible par le plus grand commun diviseur (p. g. c. d.) e_i de n et des exposants effectifs précédant β_i dans Y.

Nous obtenons ainsi une suite décroissante $e_1 > e_2 > \ldots > e_r > 1$ de p. g. c. d. (avec $e_1 = n$) et une suite croissante (mais finie) d'exposants $\beta_1 = m < \beta_2 < \ldots < \beta_r$, (si m et n sont premiers entre eux, $r = 1$ et les suites $\{e_i\}$ et $\{\beta_i\}$ se limitent à un terme chacun, respectivement n et m) (*cf.* [Za], *loc. cit.* ou [Co], Book II, Ch. 2).

La courbe complexe T, étant supposée régulière, peut s'écrire (à un changement près du paramètre t)

$$w \circ T_1(t) = t, \qquad w \circ T_2(t) = \alpha t + b_1 t^{\rho_1} + \ldots$$

Nous notons $\operatorname{val}(\Theta)$ (pour *valuation*) l'exposant du terme non nul de plus bas degré d'une série entière Θ en t (avec $\Theta(0) = 0$).

Il est clair que la sécante $C \circ T(t)$ ne peut tendre vers une droite projective distincte de la tangente $C^*(p)$ à C en p que si on a

$$\operatorname{val}(X_1(t) - X_2(t)) \geqslant \operatorname{val}(Y_1(t) - Y_2(t))$$

où

$$(X_1(t) : Y_1(t) : Z_1(t) = 1) \qquad \text{et} \qquad (X_2(t) : Y_2(t) : Z_2(t) = 1)$$

sont les coordonnées homogènes de $C(T_1(t))$ et $C(T_2(t))$ respectivement.

Ceci ne peut se produire que si α est une racine n-ième de l'unité, différente de 1.

Plus précisément, si α est une racine (e_j)-ième de l'unité, mais non (e_{j+1})-ième, on a

$$\operatorname{val}(X_1(t) - X_2(t)) = n + \rho_1$$
$$\operatorname{val}(Y_1(t) - Y_2(t)) = \inf(m + \rho_1, \beta_j)$$

de sorte que l'inégalité précédente implique que ρ_1 est supérieur ou égal à $\beta_j - n$.

Soit T une telle courbe complexe, et considérons la sécante correspondante $C^* \circ T$ dans $(\mathbf{C}P^2)^*$.

Dans les coordonnées homogènes duales, la courbe duale C^* s'écrit

$$\xi = -\frac{1}{n}\sum_{i=m}^{\infty} i a_i w^{i-n}, \qquad \eta = 1,$$
$$\zeta = \frac{1}{n}\sum_{i=m}^{\infty} (i-n) a_i w^i.$$

Si

$$(\xi_1(t):\eta_1(t):\zeta_1(t)) \qquad \text{et} \qquad (\xi_2(t):\eta_2(t)=1:\zeta_2(t))$$

notent respectivement les coordonnées homogènes des points $C^*(T_1(t))$ et $C^*(T_2(t))$, on a

$$\operatorname{val}(\xi_1(t)-\xi_2(t))=\inf(m-n+\rho_1,\ \beta_j-n)=\beta_j-n$$
$$\operatorname{val}(\zeta_1(t)-\zeta_2(t))=\inf(m+\rho_1,\ \beta_j)=\beta_j$$

et donc

$$\operatorname{val}(\xi_1(t)-\xi_2(t))<\operatorname{val}(\zeta_1(t)-\zeta_2(t))$$

qui montre que $C^*\circ T(t)$ tend vers la tangente $C(p)$ en p à C^*.

Ceci achève la démonstration de la proposition, et donc du lemme 4.6.

4.7. Compte tenu du lemme 4.6, le théorème 4.1 est une conséquence immédiate de la

PROPOSITION. — *Soit $F=(C, C^*)$ une application holomorphe horizontale génériquement injective d'une surface de Riemann (Σ, J) de genre g dans l'espace des drapeaux $\mathbf{D}_3$, dont l'image n'est contenue dans aucune fibre de q_1 et q_2, où $C=q_1\circ F$ et $C^*=q_2\circ F$ sont de degré d_1 et d_2 respectivement $(d_1, d_2\geqslant 2)$.*

Le nombre d'intersection (au sens algébrique) *de la variété des sécantes* $\operatorname{Sec}(F)$ *avec la variété $G^{\mathbf{R}}\simeq \mathbf{C}P^2$ des éléments réels de $G=\mathbf{C}P^2\times(\mathbf{C}P^2)^*$ est égale, en valeur absolue, à*

$$|[\operatorname{Sec}(F)].[G^{\mathbf{R}}]|=\frac{1}{2}[(d_1-d_2)^2+d_1+d_2+2g-2] \tag{19}$$

En particulier, $\operatorname{Sec}(F)$ *et $G^{\mathbf{R}}$ ont une intersection non vide.*

Démonstration. — L'homologie entière de G, en dimension 4, est engendrée par les trois éléments σ_1, σ_2 et σ_3 représentés respectivement par

$\sigma_1=\{$ensemble des couples (x, l) ayant leur premier élément fixé dans $\mathbf{C}P^2\}$

$\sigma_2=\{$ensemble des couples (x, l) ayant leur second élément fixé dans $(\mathbf{C}P^2)^*\}$

$\sigma_3 = \{$ ensemble des couples (x, l) dont le premier élément appartient à une droite projective donnée et le second élément passe par un point donné de $\mathbf{C}P^2\}$.

La table de multiplication, pour l'intersection, est la suivante :

$$\sigma_1 . \sigma_1 = \sigma_2 . \sigma_2 = 0, \qquad \sigma_1 . \sigma_2 = 1$$
$$\sigma_1 . \sigma_3 = \sigma_2 . \sigma_3 = 0, \qquad \sigma_3 . \sigma_3 = 1.$$

Nous considérons en outre, les deux éléments de $H_4(G, \mathbf{Z})$ δ_1 et δ_2 représentés par

$\delta_1 = \{$ ensemble des *drapeaux* (x, l) tels que x appartient à une droite fixée $\}$

$\delta_2 = \{$ ensemble des *drapeaux* (x, l) tels que l passe par un point fixé $\}$.

On a clairement

$$\delta_1 . \sigma_1 = 0, \qquad \delta_1 . \sigma_2 = 1, \qquad \delta_1 . \sigma_3 = 1$$
$$\delta_2 . \sigma_1 = 1, \qquad \delta_2 . \sigma_1 = 0, \qquad \delta_2 . \sigma_3 = 1$$

et donc

(20) $$\delta_1 = \sigma_1 + \sigma_3, \qquad \delta_2 = \sigma_2 + \sigma_3 \quad .$$

Comme δ_1 et δ_2 sont représentés par des sous-variétés de $\mathbf{D}_3$, on a

$$[G^{\mathbf{R}}] . \delta_1 = [G^{\mathbf{R}}] . \delta_2 = 0,$$

où $[G^{\mathbf{R}}]$ note la classe d'homologie de la variété $G^{\mathbf{R}}$ dans $H_4(G, \mathbf{Z})$ et donc

$$[G^{\mathbf{R}}] . \sigma_1 = [G^{\mathbf{R}}] . \sigma_2 = -[G^{\mathbf{R}}] . \sigma_3.$$

Par ailleurs, on a clairement

$$|[G^{\mathbf{R}}] . \sigma_1| = |[G^{\mathbf{R}}] . \sigma_2| = |[G^{\mathbf{R}}] . \sigma_3| = 1$$

d'où l'on tire

(21) $$[G^{\mathbf{R}}] = \pm(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3)$$

Il reste à déterminer la classe d'homologie $[\mathrm{Sec}(F)]$ de $\mathrm{Sec}(F)$, c'est-à-dire les entiers $[\mathrm{Sec}(F)] . \sigma_1$, $[\mathrm{Sec}(F)] . \sigma_2$ et $[\mathrm{Sec}(F)] . \sigma_3$.

Pour les deux premiers, on a clairement

$$(22)\qquad \begin{aligned}[\mathrm{Sec}(F)].\sigma_1 &= \frac{d_2(d_2-1)}{2},\\ [\mathrm{Sec}(F)].\sigma_2 &= \frac{d_1(d_1-1)}{2}.\end{aligned}$$

LEMME. — *On a*

$$(23)\qquad [\mathrm{Sec}(F)].\sigma_3=(d_1-1)(d_2-1)-g$$

Démonstration du lemme. — Compte tenu des relations

$$(24)\qquad [\mathrm{Sec}(F)].\sigma_3=[\mathrm{Sec}(F)].\delta_1-[\mathrm{Sec}(F)].\sigma_1 =[\mathrm{Sec}(F)].\delta_2-[\mathrm{Sec}(F)].\sigma_2$$

déduites de (20), il nous suffit de calculer $[\mathrm{Sec}(F)].\delta_1$ ou $[\mathrm{Sec}(F)].\delta_2$.

Or, $[\mathrm{Sec}(F)].\delta_1$ est le nombre de drapeaux (x, l) appartenant à $\mathrm{Sec}(F)$ tels que x appartienne à une droite projective donnée l_0 que l'on supposera en position générale, c'est-à-dire ne passant par aucun des points singuliers de la courbe algébrique C (y compris les points d'inflexions et les points de contact avec les bitangentes).

La droite projective l_0 coupe C en d_1 points distincts $\{x_1, \ldots, x_{d_1}\}$.

Soit x_i l'un de ces points.

Les drapeaux (x_i, l) appartenant à $\mathrm{Sec}(F)$ sont constitués :

– du drapeau tangent (x_i, l_{i1}) à C en x_i,

– des (d_2-2) drapeaux (x_i, l_{ij}), $j=2, \ldots, d_2-1$, où les l_{ij} sont les droites projectives tangentes à C passant par x_i.

Nous obtenons ainsi $d_1(d_2-1)$ drapeaux.

En outre, $\mathrm{Sec}(F)\cap\delta_1$ comprend les drapeaux (x, l) tels que x appartient à l_0 et l est une bitangente ou une tangente en un point d'inflexion de C (points doubles et cusps de la courbe duale C^*) dont le nombre est $b+f$ dans la notation de [G-H]. D'après [G-H], p. 280, on a

$$b+f=-g+\frac{(d_2-1)(d_2-2)}{2},$$

d'où l'on tire

$$[\mathrm{Sec}(F)].\delta_1 = d_1(d_2-1) + \frac{(d_2-1)(d_2-2)}{2} - g. \tag{25}$$

En substituant C^* à C, nous obtenons de même

$$[\mathrm{Sec}(F)].\delta_2 = d_2(d_1-1) + \frac{(d_1-1)(d_1-2)}{2} - g. \tag{26}$$

Nous vérifions ainsi l'égalité des deux derniers membres de (24), et l'égalité (23).

A partir de (22), (23) et (21), nous obtenons immédiatement la relation (19) de la proposition 4.7.

La dernière assertion est une conséquence immédiate de (19), compte tenu du fait que d_1+d_2 est supérieur ou égal à 4 (cf. *supra* 4.2).

Ceci achève la démonstration de la proposition 4.7 et donc du théorème 4.1.

4.8. Le théorème 4.1 se présente, en fait, comme un cas particulier du :

THÉORÈME. — *Une application harmonique non $\pm$-holomorphe d'une surface de Riemann compacte de genre g dans l'espace projectif complexe canonique* $\mathbf{C}P^2$, *admettant un indice de ramification total m supérieur à* $3(g-1)$, *n'est pas injective.*

Démonstration. — D'après la proposition 1.12, f est conforme, et d'après la proposition 3.7 elle est superminimale à gauche. Le reste de la démonstration est une conséquence directe du lemme 4.6 et de la proposition 3.7.

Remarque. — En vertu de la proposition 1.12, du corollaire 2 de 2.8 et de Theorem 5.1 de [G-L], Theorem B de [G-L] peut être complété de la façon suivante : *il n'existe pas d'application harmonique injective d'une surface de Riemann compacte de genre g dans la sphère canonique* S^4 *admettant un indice de ramification total supérieur à* $4(g-1)$, *en dehors du plongement équatorial de* S^2 *dans* S^4.

BIBLIOGRAPHIE

[A-B] ATIYAH (M. F.) and BOTT (R.). — The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, *Philos. Trans. Royal Soc. London*, Ser. A, vol. 308, 1982, p. 524-615.

[A-H-S] ATIYAH (M. F.), HITCHIN (N. J.) and SINGER (I. M.). — Self-duality in four-dimensional riemannian geometry, *Proc. Royal Soc. London*, Ser. A, vol. 362, 1978, p. 425-461.

[Ba] BARBOSA (L.). — On minimal immersions of S^2 into S^n, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 210, 1975, p. 75-106.

[Br] BRYANT (R.). — Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the 4-spheres, *J. Diff. Geom.*, vol. 17, 1982, p. 455-473.

[Ca] CALABI (E.). — Minimal immersions of surfaces in euclidean spheres, *J. Diff. Geom.*, vol. 1, 1967, p. 111-125.

[Co] COOLIDGE (J. L.). — *A treatise on algebraic plane curves*, Dover.

[E-G-T] ESCHENBURG (J.-H.), GUADALUPE (I. V.) and DE AZEVEDO TRIBUZY (R.). — The fundamental equations of minimal surfaces in $\mathbf{C}P^2$, *Math. Ann.*, vol. 270, 1985, p. 571-598.

[E-L] EELLS (J.) and LEMAIRE (L.). — A report on harmonic maps, *Bull. London Math. Soc.*, vol. 10, 1978, p. 1-68.

[E-S]$_1$ EELLS (J.) and SALAMON (S.). — Constructions twistorielles des applications harmoniques, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 296, série I, 1983, p. 685-687.

[E-S]$_2$ EELLS (J.) and SALAMON (S.). — Twistorial construction of harmonic maps of surfaces into four-manifolds, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa* (à paraître).

[E-W] EELLS (J.) and WOOD (J.C.). — Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces, *Advances in Math.* 49, 1983, p. 217-263.

[Fr] FRIEDRICH (T.). — *On surfaces in Four-spaces*, Humboldt Universität zu Berlin, Preprint 63, 1983.

[G-O-R] GULLIVER II (R. D.), OSSERMAN (R.) and ROYDEN (H. L.). — A theory of branched immersions of surfaces, *Am. J. Math.*, vol. 95, 1973, p. 750-812.

[Ga] GAUDUCHON (P.). — Immersions superminimales dans une variété de dimension 4, *Séminaire École polytechnique*, 1984.

[G-L] GAUDUCHON (P.) and LAWSON Jr (H. B.). — Topologically nonsingular minimal cones, *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 34, n° 4, 1985.

[La] LAWSON Jr (H. B.). — Surfaces minimales et la construction de Calabi-Penrose, *Séminaire Bourbaki*, n° 624, 1984.

[Li] LICHNEROWICZ (A.). — Applications harmoniques et variétés kählériennes, *Symposia Mathematica, Ist. Naz. Alt. Mat.*, vol. III, 1970.

[Sa] SALAMON (S.). — Harmonic and holomorphic maps, in *Geometry Seminar Luigi Bianchi, Lecture Notes in Math.*, n° 1022, Springer-Verlag, 1983.

[W] WOOD (J. C.). — Singularities of harmonic maps and applications of the Gauss-Bonnet formula, *Am. J. Math.*, vol. 99, n° 6, p. 1329-1344.

[We] WEBSTER (S.). — Minimal surfaces in a Kähler surface, *J. Diff. Geom.*, 20, 1984, p. 463-470.

[Za] ZARISKI (O.). — *Le problème des modules pour les branches planes* (cours donné à l'École polytechnique, octobre-novembre 1973, rédigé par KMETY (F.) et MERLE (M.), appendice de TEISSIER (B.)).