ZHI-YING WEN

# Sur quelques théorèmes de convergence du processus de naissance avec interaction des voisins

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 114 (1986), p. 403-429
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__403_0>

*Bull. Soc. math. France,*
114, 1986, p. 403-429.

# SUR QUELQUES THÉORÈMES DE CONVERGENCE DU PROCESSUS DE NAISSANCE AVEC INTERACTION DES VOISINS

par

ZHI-YING WEN (*)

RÉSUMÉ. — On étudie une classe de processus de naissance qui généralisent les processus de Galton-Watson classiques en ce sens que la population est structurée et qu'une certaine dépe,dance est autorisée entre les descendances de voisins. On obtient des conditions nécessaires et suffisantes à la non dégénérescence du processus et à l'existence de moments. On établit aussi un théorème de limite centrale et une loi du logarithme itéré.

ABSTRACT. — This paper deals with a class of birth processes which generalize the classical Galton-Watson processes: the population is given a structure and some statistical dependence is allowed between the offsprings of neighbours. Necessary and sufficient conditions are given in order the process of non-degenerate and moments exist. A central limit theorem and a law of iterated logarithm are also established.

## Introduction

Les processus de Galton-Watson classiques ont été étudiés par de nombreux auteurs dont S. ASMUSEEN ([1], [2]), K. B. ATHREYA [3], T. E. HARRIS [5], C. C. HEYDE ([6], [7], [8]). L'étude de divers modèles de B. Mandelbrot a conduit J. PEYRIÈRE ([10], [11], [12])a introduire des processus de naissance qui diffèrent des processus de Galton-Watson sur deux points. Le premier est que la population à l'instant $n$ est arrangée en graphe, le second est qu'une certaine dépendance est autorisée entre les

(*) Texte reçu le 16 octobre 1984.

Zhi-Ying WEN, Université Paris-XI, Bât. n° 425, U.R. 754, 91405 Orsay Cedex.

descendances des individus d'une même génération. Dans cet article nous étudions ces processus dans le cas où il y a un seul type d'individus.

Dans la section 1 de cet article, on étudiera la condition de non-dégénérescence, et dans la section 2, on discutera de l'existence de moments et de la convergence dans $L^p(1<p\leqslant 2)$. Dans [12], J. PEYRIÈRE a démontré le théorème de limite centrale pour ce processus, on donnera deux nouvelles démonstrations de ce théorème; elles paraissent plus simples et plus directes. En appliquant un théorème de V. SHERGIN [13] et la méthode de S. ASMUSEEN [2], une loi de logarithme itéré sera démontré dans la section 4. Tous les résultats sont obtenus dans les mêmes conditions que celle du processus de Galton-Watson.

Dans cet article, on adoptera les notions suivantes :

On note $X_n$ le nombre d'individus à la $n$-ième génération, on suppose toujours $X_0=1$; les $\gamma_{n,\,i}(n=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,i=1,\,2,\,\ldots)$ représentent le nombre de descendants du $i$-ième individu de la $n$-ième génération, ils ont la même distribution que $\gamma$. Comme pour le processus de Galton-Watson, on a

$$X_n=\sum_{i=0}^{X_{n-1}}\gamma_{n,\,i}.$$

On note $F$ la fonction de distribution de $\gamma$, $m$ l'espérance de $\gamma$, $\sigma^2$ sa variance, $\mathscr{F}_n$ la $\sigma$-algèbre engendrée par les $\gamma_{k,\,i}$, $k=0,\,1,\,\ldots,\,n-1$, $i=1,\,2,\,\ldots$

En outre, on suppose que

$$p_0=P(X_1=0\,|\,X_0=1)=P(\gamma=0)=0,$$
$$p_1=P(\gamma=1)<1, \qquad m=E(\gamma)<\infty.$$

On dit qu'une suite $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires est $l$-dépendante, s'il existe un entier $l$, tel que, quels que soient $X_r$, $X_s$ satisfaisant $|r-s|>l$, les $X_r$ et $X_s$ sont indépendantes. On supposera que, pour chaque $n$, la suite $\{\gamma_{n,\,i}\}_i$ est $l$-dépendante. Nous appellerons le processus $\{X_n\}$, processus de Galton-Watson $l$-dépendant.

## 1. La condition de non-dégénérescence

D'abord, on établit quelques lemmes et propositions.

PROPOSITION 1.1. — *Soit $Z_n=X_n/m^n$, alors on a*

$$E(X_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n)=m\,X_n;$$

(i) $$E(X_{n+1} \mid X_0=1)=m\,E(X_n \mid X_0=1)=m^{n+1};$$
$$E(X_{n+k} \mid \mathscr{F}_n)=m^k X_n.$$

(ii) $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ *est une martingale positive, elle converge donc presque sûrement vers une limite que l'on note Z; en outre*

$$0\leqslant Z<\infty, \quad \text{p. s.},$$
$$E(Z \mid \mathscr{F}_0)\leqslant Z_0,\ E(Z \mid Z_0=1)\leqslant 1.$$

La démonstration est facile et on l'omet.

PROPOSITION 1.2. — $X_n$ *tend vers l'infini presque sûrement.*

*Démonstration.* — Si $X_n$ ne tend pas vers l'infini, alors la suite $X_n$ est constante à partir d'un certain rang $n_0$, alors, si $n\geqslant n_0$

$$P(X_{n+1}=X_n \mid X_{n0})\leqslant p_1$$

alors

$$P(X_{n0+k}=X_{n0+k-1}=\ldots=X_{n0} \mid X_{n0})\leqslant p_1^k.$$

Remarquons $p_1<1$, donc $p_1^k$ tend vers zéro quand $k$ tend vers zéro quand $k$ tend vers l'infini, ce qui achève la démonstration.

On dira que $(n+1, j)$ descend de $(n, i)$ si l'on a, $i\leqslant X_n$ et

$$\textstyle\sum_{1\leqslant l<i}\gamma_{n,\,l}<j\leqslant\sum_{1\leqslant l\leqslant i}\gamma_{n,\,l},$$

$(n+k, j)$ descend de $(n, i)$ s'il existe une suite $j_0, j_1, j_2, \ldots, j_k$ telle que $j_0=i$, $j_k=j$ et telle que $(n+l, j_l)$ descende de $(n+l-1, j_{l-1})$ pour $l=1, 2, \ldots, k$.

Maintenant, on note $X_{N,\,i}$ le $i$-ième individu de la $n$-ième génération, et $Z_{n,\,i}$ la limite correspondant à la proposition 1.1 (ii) appliquée à $X_{N,\,i}$; soit $X_{N,\,i,\,k}$ le nombre d'éléments de la génération $N+k$ descendant de $X_{N,\,i}$, alors, on a

$$X_{N,\,i,\,k}=\text{nombre de } (N+k, j) \text{ qui descendent de } (N, i)$$

et

$$Z_{N,\,i}=lim_{k\to\infty}\frac{1}{m^k}X_{N,\,i,\,k}$$

mais

$$X_{N+k}=\sum_{i=1}^{X_N} X_{N,\ i,\ k}$$

donc

$$Z=\lim_{k\to\infty}\frac{X_{N+k}}{m^{N+k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{m^N}\sum_{i=1}^{X_N}\frac{X_{N,\ i,\ k}}{m^k}$$

$$=\frac{1}{m^N}\sum_{i=1}^{X_N}\lim_{k\to\infty}\frac{X_{N,\ i,\ k}}{m^k}=\frac{1}{m^N}\sum_{i=1}^{X_N} Z_{N,\ i}$$

Donc on a démontré

LEMME 1.1. — *Les $Z_{N,\ i}$, $i=1, 2, \ldots, X_{N-1}$ sont l-dépendantes conditionnellement à $\mathscr{F}_n$, avec $P(Z_{N,\ i}\leqslant\alpha\,|\,\mathscr{F}_N)=P(Z\leqslant\alpha\,|\,X_0=1)$; en outre on a*

$$Z=\frac{1}{m^N}\sum_{i=1}^{X_N} Z_{N,\ i}.$$

PROPOSITION 1.1.3. — *$P(Z>0)>0$ entraîne $P(Z>0)=1$.*

*Démonstration.* — Compte tenu de l'hypothèse $P(Z>0)>0$, on a

$$q=P(Z=0)<1.$$

En utilisant le théorème de convergence des martingales [14], on a

$$I(Z=0)=P(Z=0\,|\,\mathscr{F}_\infty)=\lim_{n\to\infty}P(Z=0\,|\,\mathscr{F}_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}P(Z_{n,\ i}=0,\ i=1, 2, \ldots, X_n\,|\,\mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}P(Z_{n,\ 1}=0,\ Z_{n,\ 1+(l+1)}=0, \ldots, Z_{n,\ 1+(l+1)[(X_n-1)/(l+1)]}=0\,|\,\mathscr{F}_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{[(X_n-1)/(l+1)]}P(Z_{n,\ 1+i(l+1)}=0\,|\,\mathscr{F}_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}q^{[(X_n-1)/(l+1)]}=0,\quad \text{P. S.}$$

les trois dernières égalités sont dues respectivement au lemme 1.1 et à la proposition 1.2.

Maintenant, énonçons le théorème principal de cette section.

THÉORÈME 1.1. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$Z_n\to Z$ dans $L^1$;*

(ii) $E(Z)=1$;

(iii) $P(Z>0)=1$;

(iv) $E(\gamma \log \gamma)=\int_0^\infty x \log^+ x d F(x)<\infty$.

*Démonstration.* — On a

$$Z=1+\sum_{i=1}^{X_N}\{Z_{n+1}-Z_n\}$$

grâce à la proposition 1.1 (ii), $\{Z_{n+1}-Z_n\}_{n\geq 0}$ est une suite d'incréments de martingale, on l'approchera par une autre suite d'incréments de martingale bornée dans $L^2$. On pose

$$(1.1') \qquad Z'_{n+1}=\frac{1}{m^{n+1}}\sum_{i=1}^{X_n}\gamma_{n,\,i}I(\gamma_{n,\,i}\leq m^n)$$

$$(1.1) \quad R_n=Z_n-E(Z'_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n)=E(Z_{n+1}-Z'_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n)$$
$$=\frac{1}{m^{n+1}}E\Big(\sum_{i=1}^{X_n}\gamma_{n,\,i}I(\gamma_{n,\,i}>m^n)\,|\,\mathscr{F}_n\Big)$$
$$=\frac{Z_n}{m}\int_{m^n}^\infty x\,dF(x)$$

donc, la suite $\{Z'_{n+1}-Z_n+R_n\}_{n\geq 0}$ est une suite d'incréments de martingale.

LEMME 1.2. — *On a*

(i) $\sum_{n=0}^\infty(P(Z'_{n+1}=Z_{n+1})<\infty$;

(ii) $\sum_{n=0}^\infty(\mathrm{Var}(Z'_{n+1}-Z_n+R_n)<\infty$;

(iii) $\sum_{n=0}^\infty ER_n=\frac{1}{m}\sum_{n=0}^\infty\int_{m^n}^\infty xd F(x)<\infty$

*si et seulement si*

$$\int_0^\infty x\log^+ x\,dF(x)<\infty.$$

*Démonstration.* — (i) Soit

$$\Delta_n=\bigcup_{i=1}^{X_n}\{\omega;\ \gamma_{n,\,i}>m^n\}$$

alors

$$P(Z'_{n+1}\neq Z_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n)=E(1_{\Delta_n}\,|\,\mathscr{F}_n)$$

on a

$$E(1_{\Delta_n} \mid \mathscr{F}_n) \leqslant X_n \int_{m^n}^{\infty} dF(x)$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(Z'_{n+1} \neq Z_{n+1}) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} EX_n \int_{m^n}^{\infty} dF(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} m^n \int_{m^n}^{\infty} dF(x)$$

$$= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m^n I(x > m^n)\, dF x),$$

pour $x$ fixé, il existe un $k$, tel que $m^k \leqslant x < m^{k+1}$, donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} m^n I(x > m^n) = \sum_{n=0}^{k} m^n = \frac{m^k - 1}{m-1} < \frac{mx}{m-1} = O(x),$$

ce qui entraîne (i).

(ii) D'abord, remarquons

$$E(Z'_{n+1} E(Z'_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)) = E[E(Z'_{n+1} E(Z'_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \mid \mathscr{F}_n)]$$

$$= E[E(Z'_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)]^2,$$

d'après $(1.1)'$, on a

$$\operatorname{Var}\{Z'_{n+1} - Z_n + R_n\} = \operatorname{Var}\{Z'_{n+1} - E(Z'_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)\} = E[\operatorname{Var}(Z'_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)].$$

maintenant, on pose

$$A_n = E(\gamma_{n,\, i} I(\gamma_{n,\, i} \leqslant m^n)) = \int_0^{m^n} x\,d\,F(x),$$

$$B_n = E(\gamma_{n,\, i}^2 I(\gamma_{n,\, i} \leqslant m^n)) = \int_0^{m^n} x^2\, dF(x),$$

par suite, on estime la variance conditionnelle de $Z'^{\,2}_{n+1}$,

(1.2) $E(Z'^{\,2}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)$

$$= \frac{1}{m^{2n+2}} E[\textstyle\sum_{i,\, j=1}^{X_n} \gamma_{n,\, i}\gamma_{n,\, j} I(\gamma_{n,\, i} \leqslant m^n) I(\gamma_{n,\, j} \leqslant m^n) \mid \mathscr{F}_n)]$$

$$= \frac{1}{m^{2n+2}} E[\textstyle\sum_1 + \sum_2 \mid \mathscr{F}_n]$$

où

$$\textstyle\sum_1 = \sum_{|i-j|>l} \gamma_{n,\, i}\gamma_{n,\, j} I(\gamma_{n,\, i} \leqslant m^n) I(\gamma_{n,\, j} \leqslant m^n);$$

$$\textstyle\sum_2 = \sum_{|i-j|\leqslant l} \gamma_{n,\, i}\gamma_{n,\, j} I(\gamma_{n,\, i} \leqslant m^n) I(\gamma_{n,\, j} \leqslant m^n).$$

Remarquons les faits suivants :

(1) si $|i-j|>l$, les $\gamma_{n,\, i}$ et $\gamma_{n,\, j}$ sont indépendants, donc

$$\begin{aligned} E[\gamma_{n,\, i}\gamma_{n,\, j} I(\gamma_{n,\, i} \leqslant m^n) I(\gamma_{n,\, j} \leqslant m^n)] \\ &= E(\gamma_{n,\, i} I(\gamma_{n,\, i} \leqslant m^n)) . E(\gamma_{n,\, j} . I(\gamma_{n,\, j} . I(\gamma_{n,\, j} \leqslant m^n) \\ &= A_n^2; \end{aligned}$$

(2) si $|i-j|\leqslant l$, en utilisant l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} E(\gamma_{n,\, i}\gamma_{n,\, j} I(\gamma_{n,\, i} \leqslant m^n) I(\gamma_{n,\, j} \leqslant m^n) \\ &\leqslant [E(\gamma_{n,\, i}^2 I(\gamma_{n,\, i} \leqslant m^n)) . E(\gamma_{n,\, j}^2 I(\gamma_{n,\, j} \leqslant m^n))]^{1/2} \\ &= B_n; \end{aligned}$$

(3) par calcul, on obtient que le nombre des termes de $\sum_2$ est

$$\beta_n = (2l+1) X_n - l(l+1)$$

[ou bien $(2l+1) X_n + O(1)$], donc, on en déduit

$$E(\textstyle\sum_1 \mid \mathscr{F}_n) = (X_n^2 - X_n - \beta_n) A_n^2 \tag{1.3}$$

$$E(\textstyle\sum_2 \mid \mathscr{F}_n) \leqslant \beta_n B_n \tag{1.4}$$

d'autre part,

$$[E(Z'_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)]^2 = \frac{1}{m^{2n+2}} [E(\textstyle\sum_{i=1}^{X_n} \gamma_{n,\, i} I(\gamma_{n,\, i} \leqslant m^n) \mid \mathscr{F}_n)]^2 \tag{1.5}$$

$$= \frac{X_n^2 A_n^2}{m^{2n+2}}$$

Compte tenu de (1.2) à (1.5), on a

$$\operatorname{Var}(Z'_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \leqslant \frac{\beta_n B_n}{m^{2n+2}} \leqslant \frac{c X_n B_n}{m^{2n+2}}$$

où $c$ est une constante positive.

On obtient finalement

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Var}\{Z'_{n+1} - Z_n + R_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} E \operatorname{Var}(Z'_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant \frac{c}{m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{m^n} = \frac{c}{m^2} \int_0^{\infty} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I(x < m^n)}{m^n} dF(x),$$

or

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{I(x \leqslant m^n)}{m^n} = O\left(\frac{1}{x}\right),$$

ce qui entraîne (ii).

(iii) Remarquons (1.1) et $EZ_n = 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} ER_n = \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\frac{Z_n}{m} \int_{m^n}^{\infty} x d F(x)\right)$$

$$= \frac{1}{m} \int_0^{\infty} x \sum_{n=0}^{\infty} I(x > m^n) dF(x),$$

on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} I(x > m^n) = O(\log x)$$

donc (iii) est vrai. □

Utilisant les théorèmes de convergence des martingales [14], le lemme de Borel-Cantelli et le lemme 1.2, on obtient

LEMME 1.3. — (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \{Z'_{n+1} - Z_n + R_n\}$ *converge presque sûrement et dans* $L^2$;

(ii) $Z_n = Z'_n$ *à partir d'un certain rang.*

*Démonstration du théorème* 1.1. — L'équivalence entre (i) et (ii) du théorème 1.1 est due à la théorie des martingales ([14], pp. 319-320). Parce que $EZ = 1$ implique $P(Z > 0) > 0$, donc, par la proposition 1.2, aussi (iii).

Pour démontrer le théorème, il nous reste à démontrer que (iii) implique (iv) et (iv) implique (ii).

(iii)$\Rightarrow$(iv). Soit $Z^* = \mathrm{knf}_n Z_n$. Si $Z^*(\omega)=0$, il existe une sous-suite $Z_{n_k}$ tel que $Z_{n_k} \to 0$, quand $k \to \infty$; mais $Z_n \to Z$, presque sûrement, on a donc presque sûrement $\{\omega;\ Z^*(\omega)=0\} \subset \{\omega)=0\}$; clairement, $Z(\omega)=0$ implique $Z^*(\omega)=0$, on obtient donc

$$P(Z^*>0)=P(Z>0)=1.$$

Par le lemme 1.3, nous avons vu que $\sum_{n=0}^{\infty}\{Z_{n+1}-Z_n+R_n\}$ converge presque sûrement, d'autre part, obvervons

$$\sum_{n=0}^{\infty}(Z'_{n+1}-Z_n)=Z-1,$$

alors, $\sum_{n=0}^{\infty} R_n$ converge presque sûrement. Par conséquent, on a presque sûrement

$$\infty > \sum_{n=0}^{\infty} R_n \geqslant \frac{Z^*}{m}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_{m^n}^{\infty} xd\,F(x)\right),$$

mais $P(Z^*>0)=1$, donc il existe un $\omega$, tel que $Z^*(\omega)>0$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{m^n}^{\infty} xd\,F(x)<\infty.$$

D'après le lemme 1.2 (iii), ce qui entraîne

$$\int_0^{\infty} x\log^+ xd\,F(x)<\infty. \quad \square$$

(iv)$\Rightarrow$(i). Si

$$\int_0^{\infty} x\log^+ xd\,F(x)<\infty,$$

par le lemme 1.2 (iii), on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} ER_n<\infty.$$

Grâce à $R_n \geqslant 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} R_n$ converge dans $L^1$, et il en est de même pour $\sum_{n=0}^{\infty}\{Z'_{n+1}-Z_n\}$ par le lemme 1.3 (i), donc

$$\lim_{N\to\infty} E[\sum_{N+1}^{\infty}(Z'_{n+1}-Z_n)]=0,$$

mais $Z_{n+1} \geqslant Z'_{n+1}$ et $EZ_n = 1$, on en déduit que

$$EZ = E\,[1 + \textstyle\sum_{n=0}^{N} (Z_{n+1} - Z_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} (Z_{n+1} - Z_n)]$$
$$\geqslant 1 + E(\textstyle\sum_{n=N+1}^{\infty} (Z'_{n+1} - Z_n))$$

alors $EZ \geqslant 1$. Mais d'après le lemme de Fatou, on a aussi $EZ \leqslant 1$, donc

$$EZ = 1. \quad \square$$

## 2. Conditions d'existence des moments

LEMME 2.1. — *Soit $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ une suite stationnaire de variables aléatoires l-dépendantes, ayant la même distribution d'espérance m et de variance $\sigma^2$. Alors, si $n \geqslant l+1$, on a*

$$\operatorname{Var} S_n = A\,n - B$$

*où*

$$A = \sigma^2 + 2\lambda_l - 2\,l m^2, \qquad B = 2\lambda'_l - l(l+1)\,m^2,$$
$$\lambda_l = \textstyle\sum_{j=1}^{l} EX_1\,X_{1+j}, \quad \lambda'_l = \sum_{j=1}^{l} j\,EX_1\,X_{1+j}.$$

*Démonstration :*

$$ES_n^2 = E\,(\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i)^2 = n\,EX_1^2 + \sum_{i \neq j,\ |i-j| \leqslant l} EX_i\,X_j + {}_{|i-j| > l} EX_i\,X_j,$$

compte tenu de la stationnarité de la suite, on en déduit

$$\textstyle\sum_{i \neq j,\ |i-j| \leqslant l} EX_i\,X_j = 2\,(n-l) \sum_{j=1}^{l} EX_1\,X_{1+j} + 2 \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{j=1}^{k} EX_1\,X_{1+j}$$
$$= 2\,n \textstyle\sum_{j=1}^{l} EX_1\,X_{1+j} - 2\,(l \sum_{j=1}^{l} EX_1\,X_{1+j} - \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{j=1}^{k} EX_1\,X_{1+j})$$
$$= 2\,n\,\lambda_l - 2\,\lambda'_l,$$

de plus, le nombre des termes dans $\sum_{i \neq j,\ |i-j| \leqslant l}$ est $l(2n-l-1)$. D'autre part, utilisons la $l$-dépendance de la suite, on a

$$\textstyle\sum_{|i-j| > l} EX_i\,X_j = \sum_{|i-j| > l} EX_i\,EX_j = [n^2 - n - l\,(2\,n - l - 1)]\,m^2,$$

donc,

$$\operatorname{Var}\,S_n = ES_n^2 - (ES_n)^2$$

$$= n\,EX_1^2 + 2n\lambda_l - \lambda_l' + [(n^2 - n - l(2n - l - 1)]\,m^2 - n^2 m^2$$
$$= n(\sigma^2 + 2\lambda_l - 2\,lm^2) - [2\lambda_l' - l(l+1)\,m^2$$
$$= A\,n - B. \quad \square$$

Maintenant, utilisons la stationnarité de notre processus. Pour chaque $m$, $n$, on a

$$E\,\gamma_{m,\,i}\,\gamma_{m,\,j} = E\,\gamma_{n,\,i}\,\gamma_{n,\,j}.$$

Donc, on peut définir une suite $\{\gamma_i\}_{i\geq 0}$ stationnaire de v. a. d'espérance $m$ et de variance $\sigma^2$, qui a même distribution que la suite $\{\gamma_{n,\,i}\}_{i\geq 0}$ pour chaque $n$.

On note

$$\lambda_l = \sum_{j=1}^{l} E\,\gamma_1\,\gamma_{1+j}, \qquad \lambda_l' = \sum_{j=1}^{l} j\,E\,\gamma_1\,\gamma_{1+j},$$
$$A = \sigma^2 + 2\lambda_l - 2\,lm^2, \qquad B = 2\lambda_l' - l(l+1)\,m^2.$$

Proposition 2.1. — *Si* $X_0 \geq l+1$, *on a*

(i) $$\operatorname{Var}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = AX_n - B;$$

(ii) $$\tau_{n+1}^2 = \operatorname{Var}(X_{n+1} \mid X_0) = \frac{A\,m^n(m^{n+1} - 1)\,X_0}{m-1} - \frac{B(m^{2n+2} - 1)}{m^2 - 1};$$

(iii) $$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var} Z_n = \frac{AX_0}{m(m-1)} - \frac{B}{m^2 - 1}.$$

*Démonstration.* — (i) On l'obtient immédiatement du lemme 2.1.

(ii) On vérifie sans peine que l'on a

$$\tau_{n+1}^2 = E\operatorname{Var}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) + \operatorname{Var} E(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n),$$

d'après (i) et la proposition 1.1 (i)

$$\tau_{n+1}^2 = AX_0\,m^n - B + m^2\,\tau_n^2,$$

on en déduit par itération

$$\tau_{n+1}^2 = AX_0\,m^n \left(\sum_{k=0}^{n} m^k\right) - B\left(\sum_{k=0}^{n} m^{2k}\right)$$

$$= AX_0 \frac{m^n (m^{n+1}-1)}{m-1} - B \frac{m^{2n+2}-1}{m^2-1}.$$

(iii) $\lim_{n \to \infty} \operatorname{Var} Z_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\tau_{n+1}^2}{m^{2n+2}} = \frac{AX_0}{m(m-1)} - \frac{B}{m^2-1}$. $\square$

*Remarque.* — Quand $X_0$ est inférieur à $l+1$, en général, on ne peut pas obtenir une formule comme (iii). Par exemple, on prend $X_0 = 1$, $l = 1$, $p_1 > 0$, alors $X_1 \geqslant 2$ presque sûrement. On obtient

$$\tau_{n+1}^2 = \frac{A m^n (m^n - 1)}{m-1} - \frac{B(m^{2n}-1)}{m^2-1} + m^{2n} \sigma^2$$

donc

$$\operatorname{Var} Z_{n+1} = \frac{A(1-(1/m^{2n})}{m^2(m-1)} - \frac{B(1-(1/m^{2n})}{m^2(m^2-1)} + \frac{\sigma^2}{m^2} \to \frac{A}{m^2(m-1)} - \frac{B}{m^2(m^2-1)} + \frac{\sigma^2}{m^2}$$

qui n'est pas égal à $(A/m(m-1)) - (B/(m^2-1))$.

Mais, on peut démontrer que $\operatorname{Var} Z_n$ converge quand-même. Pour cela, on définit un temps d'arrêt fini

$$\tau = \inf[n \geqslant 1;\ X_n \geqslant l+1],$$

et on utilise le résultat de la proposition 2.1.

LEMME 2.2. — *Soit $\{\gamma_n\}_{n \geqslant 1}$ une suite de variables l-dépendantes aléatoire positive, $\varphi(x) = x^{p-1}$, $x \geqslant 0$, $1 < p \leqslant 2$, alors, on a*

$$ES_n \varphi(S_n) \leqslant ES_n \cdot \varphi(ES_n) + \textstyle\sum_{i=1}^n E(\gamma_i \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \varphi(\gamma_j)),$$

où $\Lambda_{i,n}$ désigne l'ensemble $\{j,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ |i-j| \leqslant l\}$ et $\Lambda_{i,n}^c$ désinge l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\} - \Lambda_{i,n}$.

*Démonstration :*

$$E(S_n \varphi(S_n)) = E(\textstyle\sum_{i=1}^n \gamma_i \varphi(S_n)) = \sum_{i=1}^n E\gamma_i \varphi(\sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \gamma_j + \sum_{j \in \Lambda_{i,n}^c} \gamma_j)$$

$$\leqslant \textstyle\sum_{i=1}^n E[\gamma_i \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \varphi(\gamma_j)] + \sum_{i=1}^n E(\gamma_i \varphi(\sum_{j \in \Lambda_{i,n}^c} \gamma_j)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n} E[\gamma_i \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \varphi(\gamma_j)] + \sum_{i=1}^{n} E(\gamma_i) E(\varphi(S_n))$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} E[\gamma_i \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \varphi(\gamma_j)] + \sum_{i=1}^{n} E(\gamma_i) \varphi(ES_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} E[\gamma_i \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \varphi(\gamma_j)] + E(S_n) \varphi(ES_n),$$

à cause de la concavité de $\varphi$, on a les premières et deuxièmes inégalités, et l'inégalité de Jensen entraîne la troisième. La troisième égalité est due à l'hypothèse de $l$-dépendance.

THÉORÈME 2.1. — *On suppose que $Z$ a le sens de la proposition* 1.1, *si le $p$*-ième *moment de $\gamma$ est fini, alors on a*

$$c_1 E\gamma^p \leqslant EZ^p \leqslant c_2 E\gamma^p,$$

*où $c_1$ et $c_2$ sont des constantes positives, $1<p\leqslant 2$.*

*Démonstration.* — (i) On prend $n=X_n$, $\gamma_i=\gamma_{n,i}/m^{n+1}$ dans le lemme 2.2, on a

$$S_n=\frac{1}{m^{n+1}}\sum_{i=1}^{X_n}\gamma_{n,i}=Z_{n+1},$$

d'après le lemme 2.2, on obtient par calcul

$$(2.1) \quad E(Z_{n+1}\varphi(Z_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n) \leqslant E(Z_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)\varphi(E(Z_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n) \mid \mathscr{F}_n) + \sum_{i=1}^{X_n} E(\gamma_i \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \varphi(\gamma_j) \mid \mathscr{F}_n)$$

mais

$$E(\gamma_i \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \varphi(\gamma_j) \mid \mathscr{F}_n) = \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} E(\gamma_i \varphi(\gamma_j) \mid \mathscr{F}_n),$$

par l'inégalité de Hölder, on a

$$E(\gamma_i \varphi(\gamma_j) \mid \mathscr{F}_n) = E\left(\frac{\gamma_{n,i}}{m^{n+1}}\left(\frac{\gamma_{n,i}}{m^{n+1}}\right)^{p-1}\right) = \frac{E(\gamma_{n,i}\gamma_{n,j}^{p-1})}{m^{(n+1)p}}$$
$$\leqslant \frac{1}{m^{(n+1)p}}(E\gamma_{n,i}^p)^{1/p}[E(\gamma_{n,j})^{(p-1)q}]^{1/q} = \frac{1}{m^{(n+1)p}}E\gamma^p,$$

où $(1/p)+(1/q)=1$. En outre, on remarque que, pour chaque $i$,

$$\text{Card } \Lambda_{i,n} \leqslant 2l+1.$$

donc

$$E(\gamma_i \textstyle\sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \varphi(\gamma_j) \mid \mathscr{F}_n) \leqslant \dfrac{3\, l\, E\gamma^p}{m^{(n+1)p}}. \tag{2.2}$$

Parce que $\{Z_n\}_{n \geqslant 0}$ est une martingale, (2.1) et (2.2) donnent

$$E(Z_{n+1}\varphi(Z_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n) \leqslant Z_n \varphi(Z_n) + \frac{3\, l\, X_n}{m^{(n+1)p}\, p} E\gamma^p. \tag{2.3}$$

Substituons $\varphi(x)$ par $x^{p-1}$ et prenons l'espérance dans (2.3), on a

$$E(Z_{n+1}\varphi(Z_{n+1}) - Z_n\varphi(Z_n)) = E(Z_{n+1}^p - Z_n^p) \leqslant \frac{3\, l\, E\gamma^p}{m^p} \cdot \frac{1}{m^{(p-1)n}},$$

d'après le lemme de Fatou, on en déduit

$$\begin{aligned} EZ^p \leqslant \lim_{n \to \infty} EZ_n^p = \underline{\lim}_{n \to \infty} \{ 1 + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} (EZ_{k+1}^p - EZ_k^p) \} \\ \leqslant 1 + \frac{3\, l\, E\gamma^p}{m^p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^{(p-1)k}} = O(E\gamma^p), \end{aligned}$$

ce qui démontre la deuxième inégalité du théorème 2.1.

(2) A cause de la convexité et de l'inégalité de Jensen, on a

$$E\gamma^p = EX_1^p = m^p EZ_1^p = m^p E(E(Z \mid \mathscr{F}_1))^p \leqslant m^p EZ^p \tag{2.4}$$

d'après le théorème 1.1 et la théorie de martingale ([14], théorème 4.1), $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots, Z_\infty = Z\}$ est une martingale, donc on a la troisième égalité de (2.4). □

THÉORÈME 2.2. — *Si l'on a*

$$E\gamma(\log^+ \gamma)^{\alpha+1} < \infty \quad \textit{pour un } \alpha > 0,$$

*alors, on a*

$$EZ(\log^+ Z)^\alpha < \infty.$$

*Démonstration.* — Définissons

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_1 x, & 0 \leqslant x \leqslant x_0 \\ [\log^+ x]^\alpha + c_2, & x_0 \leqslant x < \infty \end{cases}$$

où $x_0>1$, $(d^2/dx^2)(\log x)^\alpha<0$ quand $x \geqslant x_0$; $c_1=(d/dx)(\log x)^\alpha|_{x=x_0}$, $c_2=c_1 x_0-(\log x_0)^\alpha$; donc, $\varphi(0)=0$, $\varphi(x)$ est croissante et concave. Soit

$$X_n=n, \qquad \gamma_i=\frac{\gamma_{n,\,i}}{m^{n+1}}, \qquad S_n=\frac{1}{m^{n+1}}\sum_{i=1}^{X_n}\gamma_{n,\,i}=Z_{n+1},$$

comme dans la démonstration du théorème 2.1, on obtient

$$E(Z_{n+1}\,\varphi(Zn+1)\,|\,\mathcal{F}_n)\leqslant E(Z_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)\,\varphi(E(Z_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)) + \sum_{i=1}^{X_n} E(\gamma_i \sum_{j\in\Lambda_{i,\,n}}\varphi(\gamma_j)\,|\,\mathcal{F}_n).$$

Maintenant, on estime les termes $E(\gamma_i\,\varphi(\gamma_j))$, remarquons que la fonction $\varphi$ est croissante, on a

$$E(\gamma_i-\gamma_j)[\varphi(\gamma_i)-\varphi(\gamma_j)]\geqslant 0,$$

donc

$$2E\frac{\gamma}{m^{n+1}}\varphi\left(\frac{\gamma}{m^{n+1}}\right)=E\gamma_i\,\varphi(\gamma_i)+E\gamma_j\,\varphi(\gamma_j) \geqslant E\gamma_i\,\varphi(\gamma_j)+E\gamma_j\,\varphi(\gamma_i).$$

On en déduit

$$\sum_{i=1}^{X_n} E(\gamma_i \sum_{j\in\Lambda_{i,\,n}}\varphi(\gamma_j)\,|\,\mathcal{F}_n)\leqslant(2l+1)\,X_n\,E\frac{\gamma}{m^{n+1}}\varphi\left(\frac{\gamma}{m^{n+1}}\right) \leqslant \frac{3\,l\,X_n}{m^{n+1}}E\,\gamma\varphi\left(\frac{\gamma}{m^{n+1}}\right).$$

En suite, on répète le procédé du théorème 2.1 et on obtient

$$EZ\,\varphi(Z)\leqslant\varphi(1)+\frac{3\,l}{m}\int_0^\infty x\sum_{n=0}^{\infty}\varphi\left(\frac{x}{m^{n+1}}\right)dF(x).$$

Pour chaque $x$ fixé, on peut choisir $k$, tel que

$$(\bigstar) \qquad \frac{x}{m^{k+1}}\leqslant x_0<\frac{x}{m^k}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi\left(\frac{x}{m^{n+1}}\right)=\sum_{n=0}^{k-1}\varphi\left(\frac{x}{m^{n+1}}\right)+\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{x}{m^{n+1}}\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{k-1}\left(\left[\log^+\left(\frac{x}{m^{n+1}}\right)\right]^{\alpha}+c_2\right)+c_1\sum_{n=k}^{\infty}\frac{x}{m^{n+1}},$$

mais, d'après (★), on a

$$k=O(\log x), \qquad \sum_{n=k}^{\infty}\frac{x}{m^{n+1}}=O(x),$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi\left(\frac{x}{m^{n+1}}\right)=O([\log^+ x]^{\alpha+1}),$$

ce qui achève la démonstration. □

En appliquant les théorèmes 1.1, 2.1, la proposition 2.1 et le théorème de convergence de martingale, on obtient

THÉORÈME 2.3. — *Sous l'hypothèse que le* $p$-ième *moment de* $\gamma$ *est fini,* $Z_n$ *tend vers* $Z$ *dans* $L^p$ $(1<p\leqslant 2)$. *En outre, on a* $P(Z=0)=0$; *en particulier,* $Z_n$ *tend vers* $Z$ *dans* $L^2$; *et si* $X_0\geqslant l+1$, *on a*

$$\operatorname{Var} Z=\frac{AX_0}{m(m-1)}-\frac{B}{m^2-1},$$

*où* $A$, $B$ *ont les mêmes sens que dans la proposition* 2.1.

*Remarque.* — Dans le cas d'une lettre considérée dans [12] par J. PEYRIÈRE, le théorème du paragraphe 3.4 de celui-ci est un cas particulier du théorème ci-dessus, de plus, on a obtenu une expression précisée de Var $Z$.

## 3. Un théorème de limite centrale

LEMME 3.1. — *Soit* $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *une suite stationnaire de variables aléatoires l-dépendantes, équidistribuées, d'espérance nulle et de variance* $\sigma^2$. *Soit* $s_n^2=\operatorname{Var}(S_n)$. *Alors on a*

$$P\left(\frac{S_n}{s_n}\leqslant y\right)\to\Phi(y), \qquad n\to\infty,$$

$$\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2}\,dx.$$

*Démonstration.* – Définissons deux suites de nombres entiers $\{k_n\}_{n\geq 1}$ et $\{n_i\}_{0\leq i\leq k_n}$ de la façon suivente :

$$k_n=[n^{2/3}], \qquad n_i=\left[\frac{in}{k_n}\right].$$

On note

$$\lambda_n=\min_i\left\{\left[\frac{(i+1)n}{k_n}\right]-\left[\frac{in}{k_n}\right]\right\}.$$

On définit deux suites de variables aléatoires $\{Y_{n,\,i}\}$ et $\{Z_{n,\,i}\}$ ainsi :

$$Y_{n,\,i}=X_{n_i+1}+X_{n_i+2}+\ldots+X_{n_i+\lambda_n-l};$$

$$Z_{n,\,i}=X_{n_i+\lambda_n-l+1}+X_{n_i-\lambda_n-l+2}+\ldots+X_{n_{i+1}},$$

alors

$$S_n=\sum_{i=0}^{k_n-1} Y_{n,\,i}+\sum_{i=0}^{k_n-1} Z_{n,\,i}=S'_n+S''_n.$$

On note

$$s_n'^{\,2}=\mathrm{Var}(S'_n), \qquad s_n''^{\,2}=\mathrm{Var}(S''_n).$$

Remarquons les faits suivants :

(i) Pour chaque $p>q$,

$$(n_{p+1}-n_p)-(n_{q+1}-n_q)=\left[\frac{(p+1)n}{k_n}\right]-\left[\frac{pn}{k_n}\right]-\left[\frac{(q+1)n}{k_n}\right]+\left[\frac{qn}{k_n}\right]$$

$$\leq\frac{p+1}{k_n}n-\frac{p}{k_n}n+1-\frac{q+1}{k_n}n+1+\frac{q}{k_n}n=2,$$

donc, quand $n$ est suffisamment grand, le nombre des termes de chaque $Y_{n,\,i}$ est $\lambda_n-l$, il est supérieur strictement à $l$, et le nombre des termes de chaque $Z_{n,\,i}$ est compris entre $l$ et $l+2$. Parce que la suite $\{X_n\}$ est $l$-dépendante et stationnaire, les variables $Y_{n,\,i}$ sont indépendantes et équidistribuées. Les variables $Z_{n,\,i}$ sont indépendantes.

(2) Chaque terme $X_r$ de $S''_n$ est indépendant de tous les termes $X_s$ de $S'_n$ sauf d'au plus $l+1$ d'entre eux. Par un calcul similaire à celui du lemme 2. 1, on peut obtenir

$$s_n^2 = \operatorname{Var} S_n = n\,\sigma^2 + 2\,n\,\lambda_l + O(1),$$

où $\lambda_l$ a le même sens que dans le lemme 2. 1, donc

$$\frac{s_n^2}{k_n^2} = \frac{n(\sigma^2 + 2\lambda_l) + O(1)}{n^{2/3}} \to \infty, \qquad n \to \infty \tag{3.1}$$

d'aprés (1), (2), on a

$$|E(S'_n S''_n)| \leqslant k_n (l+1)(l+2)\,|E(X_i X_j)| \leqslant k_n (l+2)^2\,\sigma^2 \tag{3.2}$$

où $|i-j| \leqslant l$;

$$E(S''^{\,2}_n) = \sum_{i=0}^{k_n-1} E(Z^2_{n,\,i}) \leqslant k_n (l+2)^2\,\sigma^2$$

mais

$$E(S_n^2) = E(S'^{\,2}_n) + 2\,E(S'_n S''_n) + E(S''^{\,2}_n),$$

par (3.2) et (3.3), on a

$$|E(S_n^2) - E(S'^{\,2}_n)| \leqslant 3\,k_n (l+2)^2\,\sigma^2.$$

Utilisant (3. 1), on obtient

$$\frac{s'_n}{s_n} \to 1, \qquad n \to \infty, \tag{3.4}$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{S''_n}{S_n}\right)^2 \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{3.5}$$

Parce que

$$\frac{S_n}{s_n} = \frac{s'_n}{s_n} \cdot \frac{S'_n}{s'_n} + \frac{S''_n}{s_n},$$

donc, $S_n/s_n \to \varphi$ en distribution si $S'_n/s'_n \to \Phi$ en distribution par (3.4) et (3.5). Mais les $Y_{n,\,i}$ sont indépendantes et ont même distribution, en appliquant une généralisation du théorème de limite centrale (BILLINGSLEY

[4], théorème 27.2), on obtient $S'_n/s'_n \to \varphi$ en distribution, et ce qui achève la démonstration. □

Maintenant, supposons que les $Z_{n,\,i}$, $i=1, 2, \ldots, X_n$ ont le même sens que dans le lemme 1.1, d'après le lemme 1.1, on a les faits suivants :

(1) les $Z_{n,\,i}$ ont la même distribution que $Z$ conditionnellement à $\mathscr{F}_n$, c'est-à-dire

$$P(Z_{n,\,i} \leqslant y \mid \mathscr{F}_n) = P(Z \leqslant y), \quad \text{P. S.} \tag{3.6}$$

(2) les $Z_{n,\,i}$ sont $l$-dépendantes conditionnellement à $\mathscr{F}_n$;

(3)

$$Z - Z_n = \frac{1}{m^n} \sum_{i=1}^{X_n} (Z_{n,\,i} - 1). \tag{3.7}$$

Evidemment, les $Z_{n,\,i} - 1$, $i=1, 2, \ldots, X_n$ satisfont les hypothèses du lemme 3.1.

D'autre part, pour chaque $\omega_0$, $P(Z_{n,\,i} < y \mid \mathscr{F}_n)(\omega_0)$ définit une fonction de distribution, en utilisant (3.6), la stationnarité de la suite $\{Z_{n,\,i}\}$ et le théorème d'existence de Kolmogorov, on peut définir une suite $\{Z_i\}_{i \geqslant 1}$, telle que

(i) elle a la même distribution que $Z$;

(ii) pour chaque $n$, on a

$$E(Z_{n,\,i} Z_{n,\,j}) = E(Z_i Z_j); \tag{3.8}$$

(iii) pour chaque $n$ et $k$ fixés, on a

$$P\left(\sum_{i=1}^{k} (Z_{n,\,i} - 1) \leqslant y \mid \mathscr{F}_n\right) = P\left(\sum_{i=1}^{k} (Z_i - 1 \leqslant y)\right) \quad \text{P. S.} \tag{3.9}$$

THÉORÈME 3.1. — *La loi de* $(Z - Z_n)\, m^n / ((\tau^2 + 2\lambda_l) X_n)^{1/2}$ *converge étroitement vers une loi de Gauss normale, où* $\tau^2$ *est la variance de* $Z - 1$ *et*

$$\lambda_l = \sum_{j=1}^{l} E(Z_1 - 1)(Z_{1+j} - 1).$$

*Première démonstration.* — En appliquant (3.9) et la définition de l'espérance conditionnelle, on peut vérifier sans peine qu'on a

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{X_n} (Z_{n,\,i} - 1)}{((\tau^2 + 2\lambda_l) X_n)^{1/2}} \leqslant y \mid \mathscr{F}_n\right)(\omega_0) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{X_n(\omega_0)} (Z_i - 1)}{((\tau^2 + 2\lambda_l) X_n(\omega_0))^{1/2}} \leqslant y\right), \quad \text{P. S.}$$

compte tenu de (3.7) et (3.8), et on remarque la suite

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{X_n(\omega_0)}(Z_i-1)}{((\tau^2+2\lambda_l)X_n(\omega_0))^{1/2}}\leqslant y\right)$$

est exactement une sous-suite de la suite

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{X_n}(Z_i-1)}{((\tau^2+2\lambda_l)n)^{1/2}}\leqslant y\right)$$

pour chaque $\omega_0$, d'après le lemme 3.1, elle tend vers $\Phi(y)$ quand $n$ tend vers l'infini, c'est-à-dire

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{X_n}(Z_{n,\,i}-1)}{((\tau^2+2\lambda_l)X_n)^{1/2}}\leqslant y\mid \mathscr{F}_n\right)\to\Phi(y)\quad \text{P. S.}$$

Prenons l'espérance, on obtient le résultat que nous voulons.

*Deuxième démonstration.* — Étant donné $X_n$, remarquons que les $Z_{n,\,i}$ et $X_n$ sont indépendantes, on a quand-même

$$m^n(Z-Z_n)=\sum_{i=1}^{X_n}(Z_{n,\,i}-1),$$

maintenant

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{X_n}(Z_{n,\,i}-1)}{((\tau^2+2\lambda_l)X_n)^{1/2}}\leqslant y\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}(Z_{n,\,i}-1)}{((\tau^2+2\lambda_l)k)^{1/2}}\leqslant y\mid X_n=k\right)P(X_n=k)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}(Z_{n,\,i}-1)}{((\tau^2+2\lambda_l)k)^{1/2}}\leqslant y\right)P(X_n=k),$$

mais, d'après le lemme (3.1), $P(\sum_{i=1}^{k}(Z_{n,\,i}-1)/((\tau^2+2\lambda_l)k)^{1/2}\leqslant y)$ tend vers $\Phi(y)$ quand $k$ tend vers l'infini, donc, pour chaque $\varepsilon>0$, il existe un $K$, tel que,

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}(Z_{n,\,i}-1)}{((\tau^2+2\lambda_l)k)^{1/2}}\leqslant y\right)-\Phi(y)<\frac{\varepsilon}{2},$$

dès que $k > K$; d'autre part, d'après la proposition 1.1, on peut choisir $n$ suffisamment grand, tel que

$$\sum_{i=1}^{K} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}(Z_{n,\,i}-1)}{((\tau^2+2\lambda_l)\,X_n)^{1/2}}\leqslant y\right)P(X_n=k)$$

$$\leqslant \sup_{1\leqslant k\leqslant K} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}(Z_{n,\,i}-1)}{((\tau^2+2\lambda_l)\,k)^{1/2}}\leqslant y\right)P(1\leqslant X_n\leqslant K)<\frac{\varepsilon}{2}$$

alors, on a

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{X_n}(Z_{n,\,i}-1)}{((\tau^2+2\lambda_l)\,X_n)^{1/2}}\leqslant y\right)-\Phi(y)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}(Z_{n,\,i}-1)}{((\tau^2+2\lambda_l)\,k)^{1/2}}\leqslant y\right)P(X_n=k)-\Phi(y)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{P\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}(Z_{n,\,i}-1)}{((\tau^2+2\lambda_l)\,k)^{1/2}}\leqslant y\right)-\Phi(y)\right\}P(X_n=k)$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=K+1}^{\infty} P(X_n=k)\leqslant\varepsilon.$$

Notre deuxième démonstration est ainsi terminée.

## 4. Loi de logarithme itéré

LEMME 4.1. — (i) *Soit* $\{T_n\}_{n\geqslant 0}$ *une suite de variables aléatoires telle que*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_n<\infty \quad \text{P. S.} \tag{4.1}$$

*où*

$$\Delta_n=\sup_{y\in R}\left|P(T_n\leqslant y\ \mathscr{F}_n)-\Phi(y)\right|$$

*alors*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{T_n}{(2\log n)^{1/2}}\leqslant 1,\qquad \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{T_n}{(2\log n)^{1/2}}\geqslant -1 \text{ P. S.}; \tag{4.2}$$

(ii) *On peut remplacer les inégalités par égalités dans* (4.2), *si les* $T_n$ *sont* $\mathscr{F}_{n+k}$*-mesurable pour certain* $k \geqslant 1$.

*Démonstration.* — Remarquons les identités

$$(2\pi)^{-1}(1-\Phi(y)) = \int_y^\infty e^{-x^2/2}\,dx \simeq \frac{1}{y} e^{-y^2/2}, \qquad y \to \infty$$

on a donc

$$(4.3)\sum_{n=1}^{\infty}(1-\Phi(2\eta\log n)^{1/2}) \simeq c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-\eta}}{(\log n)^{1/2}}\begin{cases} <\infty & \text{si} \quad \eta>1, \\ =\infty & \text{si} \quad \eta<1, \end{cases}$$

où $c$ est une constante positive.

Prenons

$$A_n = \{\omega,\ T_n > (2\eta \log n)^{1/2}\},$$

en utilisant (4.1) et (4.3), on a

(4.4)
$$\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n \mid \mathscr{F}_n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\{1-\Phi(2\eta\log n)^{1/2}+\Delta_n\} < \infty, \qquad \text{si} \quad \eta>1,$$

(4.5)
$$\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n \mid \mathscr{F}_n) \geqslant \sum_{n=0}^{\infty}\{1-\Phi\, 2\eta\log n)^{1/2}-\Delta_n\} = \infty, \qquad \text{si} \quad \eta \leqslant 1.$$

Donc, pour démontrer (i), il nous suffit d'utiliser (4.4) et le lemme de Borel-Cantelli conditionnel

$$\{\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \mid \mathscr{F}_n) < \infty\} \subseteqq_{\text{P.S.}} \{\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n^c} < \infty\}.$$

Pour obtenir (ii), il faut utiliser (4.5) et une généralisation du lemme de Borel-Cantelli conditionnel ([9], p. 144) : si $A_n$ est $\mathscr{F}_{n+k}$ mesurable pour certain $k \geqslant 1$, alors

$$\{\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \mid \mathscr{F}_n) < \infty\} =_{\text{P.S.}} \{\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} < \infty\},$$
$$\{\textstyle\sum_{n-1}^{\infty} P(A_n \mid \mathscr{F}_n) = \infty\} =_{\text{P.S.}} \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

LEMME 4.2. — *Soit* $\{X_n\}_{n \geqq 0}$ *une suite de variables aléatoires l-dépendantes, équidistribuées, d'espérance nulle, de variance* $\sigma^2$ *et ayant un moment* *du troisième ordre fini, alors, on a*

$$\Delta_n \leqslant \frac{c(l+1)\,n\,E|X_1|^3}{\sigma_n^3}, \tag{4.6}$$

*où c est une constante positive, $\sigma_n^2$ est variance de $S_n$.*

C'est le théorème 2 de SHERGIN [13].

THÉORÈME 4.1. — *On a*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{m^n(Z-Z_n)}{(2(\tau^2+2\lambda_l)X_n\log n)^{1/2}}=1,$$

$$\underline{\lim}\frac{m^n(Z-Z_n)}{(2(\tau^2+2\lambda_l)X_n\log n)^{1/2}}=-1, \quad \text{P.S.}$$

*où les $\tau^2$ et $\lambda_l$ ont les mêmes sens que dans la section* 3.

*Démonstration.* — Étape (1). Considérons les variables $Z_{n,\,i}$, $Z_i$ comme dans le paragraphe 3. On va démontrer d'abord

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{X_n}(Z_{n,\,i}-1)}{(2(\tau^2+2\lambda_l)X_n\log n)^{1/2}}\leqslant 1, \tag{4.7}$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{X_n}(Z_{n,\,i}-1)}{(2(\tau^2+2\lambda_l)X_n\log n)^{1/2}}\geqslant -1$$

Pour simplifier, on note $Y_{n,\,i}=Z_{n,\,i}-1$, on voit facilement que les $Y_{n,\,i}$ satisfont les hypothèses du lemme 4.2.

On pose

$$Y'_{n,\,i}=Y_{n,\,i}I(|Y_{n,\,i}\leqslant m^{n/2}), \qquad \tilde{Y}_{n,\,i}=Y'_{n,\,i}-EY'_{n,\,i}$$

et

$$\tilde{S}_n=\sum_{i=1}^{X_n}\tilde{Y}_{n,\,i}, \qquad \tilde{\theta}_n^2=\operatorname{Var}(\tilde{S}_n\,|\,\mathcal{F}_n), \qquad T_n=\frac{\tilde{S}_n}{\tilde{\theta}_n}.$$

On voit sans peine que l'on a

$$\tilde{\theta}_n^2=X_n(E\tilde{Y}_{n,\,i}^2+2\tilde{\lambda}_l)+O(1)$$

où

$$\tilde{\lambda}_l = \sum_{j=1}^{l} E(\tilde{Y}_{n,\,1}\, \tilde{Y}_{n,\,1+j})$$

mais il est évident que $E(\tilde{Y}_{n,\,i}\, \tilde{Y}_{n,\,j})$ tend vers $EY_{n,\,i}\, Y_{n,\,j}$ quand $n$ tend vers l'infini, on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\theta}_n^2}{X_n} = \tau^2 + 2\lambda_l \tag{4.8'}$$

Maintenant, par un calcul direct, on obtient

$$\begin{aligned} E|\tilde{Y}_{n,\,i}|^3 &\leqslant E|Y'_{n,\,i}|^3 \\ &\quad + 3E|Y'_{n,\,i}|E|Y'_{n,\,i}|^2 + 3(E|Y'_{n,\,i}|)^2 E|Y'_{n,\,i}| + (E|Y'_{n,\,i}|)^3 \\ &\leqslant 8E|Y'_{n,\,i}|^3 = 8\int_{|y|\leqslant m^{n/2}} |y|^3\, dF(y) \end{aligned}$$

Répétons la démonstration du théorème 3.1 et appliquons le lemme 4.2. On a presque sûrement

$$\Delta_n = \sup_{y\in R} |P(T_n \leqslant y \mid \mathscr{F}_n) - \Phi(y)| \leqslant 8c\frac{X_n}{\tilde{\theta}_n^3}\int_{|y|\leqslant m^{n/2}} |y|^3\, dF(y).$$

Compte tenu de (4.8) et du fait que, pour chaque $\omega_0$ fixé, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n &\leqslant c' \sum_{n=0}^{\infty} m^{-n/2} \int_{|y|\leqslant m^{n/2}} |y|^3\, dF(y) \\ &= c' \int_{-\infty}^{\infty} |y|^3 \sum_{n=0}^{\infty} m^{-n/2} I(|y| \leqslant m^{n/2})\, dF(y) \\ &\leqslant c'' \int_{-\infty}^{\infty} |y|^3 |y|^{-1}\, dF(y) = c'' \int_{-\infty}^{\infty} y^2\, dF(y) < \infty \end{aligned}$$

où $c'$, $c''$ sont des constantes positives.

Par le lemme 4.1, pour démontrer (4.7), il suffit de démontrer

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{X_n} Y_{n,\,i}}{(2(\tau^2 + 2\lambda_l) X_n \log n)^{1/2}} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{T_n}{(2\log n)^{1/2}} \quad \text{P. S.}$$

Compte tenu de (4.8′) et des définitions des $Y'_{n,i}$, $\tilde{Y}_{n,i}$, $T_n$, $T_n$, il suffit que

$$\sum_{i=1}^{X_n}\{Y_{n,i}-Y'_{n,i}\}=o\{m^{n/2}(\log n)^{1/2}\},$$
$$\sum_{i=1}^{X_n}EY'_{n,i}=o\{m^{n/2}(\log n)^{1/2}\},$$

il suffit que

$$(4.9)\qquad \begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}m^{-n/2}(\log n)^{-1/2}\left(\sum_{i=1}^{X_n}|Y_{n,i}-Y'_{n,i}|\right)<\infty\\ \sum_{n=0}^{\infty}m^{-n/2}(\log n)^{-1/2}\sum_{i=1}^{X_n}|EY'_{n,i}|<\infty\end{gathered}$$

mais

$$\begin{aligned}|EY'_{n,i}|=|E(Y'_{n,i}-Y_{n,i})|\leqslant E|Y'_{n,i}-Y_{n,i}|&\\ &=E|Y_{n,i}|I(|Y_{n,i}|>m^{n/2})\\ &=\int_{|y|>m^{n/2}}|y|\,dF(y),\end{aligned}$$

et remarquons $X_n(\omega)=O(m^n)$, pour démontrer (4.6), il suffit que

$$(4.10)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}m^{n/2}(\log n)^{-1/2}\int_{|y|>m^{n/2}}|y|\,dF(y)<\infty$$

[pour la première assertion de (4.9), on prend l'espérance]. En effet, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}m^{n/2}\int_{|y|>m^{n/2}}|y|\,dF(y)&=\int_{-\infty}^{\infty}|y|\sum_{n=0}^{\infty}m^{n/2}I(|y|>m^{n/2})\,dF(y)\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}O(y^2)\,dF(y)<\infty,\end{aligned}$$

donc, (4.6) est vrai.

*Étape* (2). — Maintenant, on remplace $Z$ par $Z_k$ dans la démonstration de l'étape (1), on note

$$\tau_k^2=\mathrm{Var}(Z_k-1),\qquad \lambda_{k,l}=\sum_{j=1}^{l}E(Z_{k,1}-1)(Z_{k,1+j}-1).$$

où les $Z_{k,i}$ ont même distribution que $Z_k$,

$$S'_n=\sum_{i=1}^{X_n}(Z_{n,k,i}-1)=m^n(Z_{n+k}-Z_n)$$

est $\mathscr{F}_{n+k}$—mesurable, les $Z_{n,\,k,\,i}$ ont le même sens que dans le lemme 1.1.

Reprenons la démonstration précédente et appliquons le lemme 4.1 (ii). On obtient

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{S'_n}{(2(\tau_k^2+2\lambda_{k,\,l})X_n\log n)^{1/2}}=1,$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{S'_n}{(2(\tau_k^2+2\lambda_{k,\,l})X_n\log n)^{1/2}}=-1\quad\text{P. S.}$$

Évidemment, on a

$$(4.11)\qquad \tau_k^2\to\tau^2,\qquad \lambda_{k,\,l}\to\lambda_l,\qquad k\to\infty.$$

*Étape* (3) :

$$\frac{m^n(Z-Z_n)}{(2(\tau^2+2\lambda_l)X_n\log n)^{1/2}}=\frac{m^{n+k}(Z-Z_{n+k})}{(2(\tau^2+2\lambda_l)X_{n+k}\log(n+k))^{1/2}}$$
$$\times\left(\frac{X_{n+k}\log(n+k)}{X_n\log n}\right)^{1/2}m^{-k}+\frac{S'_n}{(2(\tau_k^2+2\lambda_{k,\,l})X_n\log n)^{1/2}}\left(\frac{\tau_k^2+2\lambda_{k,\,l}}{\tau^2+2\lambda_l}\right)^{1/2}$$

Parce que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m^{n+k}(Z-Z_{n+k})}{(2(\tau^2+2\lambda_l)X_{n+k}\log(n+k))^{1/2}}\geqslant -1,$$

par l'étape (1), et

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{S'_n}{(2(\tau_k^2+2\lambda_{k,\,l})X_n\log n)^{1/2}}=1$$

par l'étape (2), et

$$\frac{\tau_k^2+2\lambda_{k,\,l}}{\tau^2+2\lambda_l}\to 1,\qquad k\to\infty$$

par (4.11), on a finalement

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{m^n(Z-Z_n)}{(2(\tau^2+2\lambda_l)X_n\log n)^{1/2}}\geqslant(-1)\,m^{-k/2}+\left(\frac{\tau_k^2+2\lambda_{l,\,k}}{\tau^2+2\lambda_l}\right)^{1/2}$$

qui tend vers 1 quand $k$ tend vers l'infini.

On démontre de même que la limite inférieure est $-1$.

Je tiens à apporter ma reconnaissance à Monsieur le Professeur J. Peyrière, qui m'a dirigé, aidé et encouragé dans le présent travail.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] ASMUSEEN (S.). – Some martingale methods in the limit theory of supercritical branching processes, *Advance in Probability and Related Topics*, vol.. 5, 1976, p. 1-26.

[2] ASMUSEEN (S.). – Almost sure behavior of linear functions of supercritical branching processes, *Trans. Americqn Math.*, vol. 1, 1977, p. 233-248.

[3] ATHREYA (K. B.)) and NEY (P. E.). – *Branching processes*, Springer, New York, 1972.

[4] BILLINGSLEY. – *Probability and mesure*, J. Wiley and Sons, 1965.

[5] HARRIS (T. E.). – *The theory of branching processes*, Berlin, Springer, 1963.

[6] HEYDE (C. C.) and BROWN (B. M.). – An invariance principle and some convergence rate results for branching processes, *Z.W.* 1971, p. 270-278.

[7] HEYDE (C. C.). – Some central limit analogues for supercritical Galton-Watson processes, *J. appl. Prob.*, vol. 8, 1971, p. 52-59.

[8] HEYDE (C. C.). – Some almost sure convergence theorem for branching processes, *Z.W.*, vol. 20, 1971, p. 189-192.

[9] NEVEU (J.). – *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, Paris, 1970.

[10] PEYRIÈRE (J.). – *Mandelbrot random beadsets and birth processes with interaction*, I.B.M. Research report, RC-7417.

[11] PEYRIÈRE (J.). – Processus de naissance avec interaction des voisins, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 289, 1979, p. 223-224 et 557.

[12] PEYRIÈRE (J.). – Processus de naissance avec interactions voisins, évolution de graphes, *Ann. Inst. Fourier*, vol. 31, 1981.

[13] SHERGIN (V. V.). – On the convergence rate in the central limit theorem for *m*-dependent random variables, *Theory Prob. Appl.*, vol. 24, 1979, p. 782-796.

[14] DOOB (J. L.). – *Stochastic processes*, J. L. Doob, Wiley, New York, 1953.