MASAKI KASHIWARA
TERESA MONTEIRO FERNANDES

Involutivité des variétés microcaractéristiques

Bulletin de la S. M. F., tome 114 (1986), p. 393-402
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__393_0>

Bull. Soc. math. France,
114, 1986, p. 393-402.

INVOLUTIVITÉ DES VARIÉTÉS MICROCARACTÉRISTIQUES

PAR

MASAKI KASHIWARA et TERESA MONTEIRO FERNANDES (*), (**)

RÉSUMÉ. — Sur une variété analytique complexe de Poisson on démontre que l'intersection d'une sous-variété involutive V avec l'hypersurface des zéros d'une fonction holomorphe f est involutive si le flot hamiltonien de f est tangent à V.

On applique ce résultat pour retrouver l'involutivité des variétés microcaractéristiques $C_\Lambda(\mathscr{M})$ et $C^1_\Lambda(\mathscr{M})$, $\mathscr{M}$ désignant un système microdifférentiel sur une variété complexe X et Λ une sous-variété lisse involutive de $T^* X$.

ABSTRACT. — We prove that the intersection of an involutive subset V of a complexe analytic Poisson manifold with the zeros of a holomorphic function f is also involutive if the associated Hamiltonian vector field is tangent to V.

We apply this result to give a new proof of the involutivity of the microcharacteristic varieties $C_\Lambda(\mathscr{M})$ and $C^1_\Lambda(\mathscr{M})$, where $\mathscr{M}$ denotes a microdifferential system on a complex manifold X, and Λ is an involutive submanifold of $T^* X$.

Introduction

Dans cet article on se propose de démontrer le résultat suivant:

(*) Si V est une sous-variété involutive d'une variété symplectique et si f est une fonction dont le flot hamiltonien est tangent à V, alors $V \cap f^{-1}(0)$ est aussi involutive.

(*) Texte reçu le 14 octobre 1985, révisé le 12 mars 1986.

(*) Partiellement subventionnée par l'Instituto Nacional de Investigaçãs Cientifica et Faculdade de Ciencias de Lisboa.

(**) M. KASHIWARA, R.I.M.S., Université de Kyoto, Japon.

T. MONTEIRO FERNANDES, Dpto. de Matematica, Fac. de Ciencias de Lisboa, et C.M.A.F., Instituto Nacional de Investigaçãs Cientifica, Portugal.

Ayant en vue les applications on travaille ici dans le cadre plus général des variétés munies d'une structure de Poisson. Ce sont des variétés analytiques complexes dont l'anneau des fonctions holomorphes est muni d'un crochet de Poisson, la 2-forme anti-symmétrique associée sur son fibré cotangent n'étant pas nécessairement non dégénérée. La notion de structure de Poisson remonte à Lie [L, S]. Une étude détaillée de ces variétés a été faite par A. Weinstein dans son travail [W.A].

On établit ici les notions de variété de Poisson et on généralise dans ce cadre le théorème déjà cité.

L'outil essentiel dans la démonstration de ce théorème est un résultat dû à Hironaka [H] concernant l'existence de stratifications qui vérifient la condition A_f de Thom.

Comme application on démontre que la variété 1-microcaractéristique, introduite par le deuxième auteur (*cf.* aussi Laurent [L]), est involutive; pour cela on a besoin d'un résultat de Gabber [G] concernant l'involutivité du support caractéristique.

Une deuxième conséquence du théorème ci-dessus est l'involutivité du cône normal à une sous-variété involutive le long d'un sous-ensemble analytique involutif d'une variété symplectique.

En particulier la variété microcaractéristique d'un module microdifférentiel introduite par le premier auteur et P. Schapira ([K-S] 1.) est involutive.

Soit X une variété complexe et V une sous-variété involutive lisse de $T^* X$, le fibré cotangent à X. Alors le fibré normal $T_V(T^* X)$ est plongé, comme une hypersurface, dans la déformation normale $\widetilde{V_{T^*X}}$ de V. Pour un système microdifférentiel $\mathcal{M}$, on définit d'abord $\mathrm{Ch}_V(\mathcal{M})$, la variété caractéristique par rapport à V, comme une sous-variété de $\widetilde{V_{T^*X}}$ de sorte que la variété 1-microcaractéristique $C_V^1(\mathcal{M})$ est obtenue comme l'intersection de $\mathrm{Ch}_V(\mathcal{M})$ et $T_V(T^* X)$. L'involutivité de $\mathrm{Ch}_V(\mathcal{M})$ résulte du théorème de Gabber sur l'involutivité du support caractéristique.

L'involutivité de $C_V^1(\mathcal{M})$ en résulte et du fait que $T_V(T^* X)$ est l'hypersurface des zéros d'une fonction dont le flot hamiltonien est identiquement nul.

Finalement l'involutivité de la variété microcaractéristique $C_V(\mathcal{M})$ résulte, par la même méthode, de celle du support de $\mathcal{M}$.

Ces deux applications ont aussi été démontrées par Y. Laurent [L] par une méthode tout à fait différente.

(*) Ce théorème est énoncé et démontré d'une forme plus générale dans [K-K] Proposition 12. Mais cette formulation (et donc sa démonstration) est fausse.

1. Variétés de Poisson

1.1. Soit X une variété analytique complexe et notons $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X.

DÉFINITION 1.1.1. — *Nous dirons que X est une* **variété de Poisson** *si X est munie d'un homomorphisme $\mathbb{C}$-bilinéaire $\{\bigstar,\bigstar\}:\mathcal{O}_X\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X$ qui satisfait les conditions suivantes:*

(i) $\{f,g\}=-\{g,f\}$,

(ii) $\{fg,h\}=f\{g,h\}+g\{f,h\}$,

(iii) $\{\{f,g\},h\}+\{\{g,h\},f\}+\{\{h,f\},g\}=0.$

On appelle $\{f,g\}$ le crochet de Poisson de f et g. Voici quelques exemples de variétés de Poisson:

Exemple 1.1.2. — Toute variété symplectique est une variété de Poisson. En particulier le fibré cotangent d'une variété lisse est muni d'une structure de Poisson.

Exemple 1.1.3. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Alors son dual $\mathfrak{g}^*$ est muni d'une structure de Poisson par

$$\{a,b\}=[a,b] \qquad \text{pour} \quad a,b\in\mathfrak{g}.$$

Ici [,] est le commutateur qui provient de la structure d'algèbre de Lie, les éléments de $\mathfrak{g}$ étant regardés comme des fonctions linéaires sur $\mathfrak{g}^*$.

Exemple 1.1.4. — Soit $X=\mathbb{C}^n$ avec les coordonnées $z_1,\ldots,z_n$. Soient $a_{ij}(i,j=1\ldots n)$ des fonctions holomorphes sur X. Alors les relations $\{z_i,z_j\}=a_{ij}$ donnent une structure de Poisson sur X si et seulement si on a les relations

$$a_{ij}=-a_{ji} \quad \text{pour tout } i,j. \tag{1.1.5}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left[a_{i\nu}\frac{\partial}{\partial z_\nu}(a_{jk})+a_{j\nu}\frac{\partial}{\partial z_\nu}(a_{ki})+a_{k\nu}\frac{\partial}{\partial z_\nu}(a_{ij})\right]=0. \tag{1.1.6}$$

En particulier, si $n=2$ alors, pour toute $f \in \mathcal{O}_X$, $\{z_1, z_2\}=f$ définit sur X une structure de Poisson.

DÉFINITION 1.1.7. — *Soit X une variété de Poisson et $f \in \mathcal{O}_X$. On définit le* **flot hamiltonien** *de f, noté H_f, par $H_f(g)=\{f, g\}$, pour tout $g \in \mathcal{O}_X$.*

Par définition 1.1.1 (i) et (ii) H_f est une dérivation de $\mathcal{O}_X$.

DÉFINITION 1.1.8. — *Supposons X lisse. On note encore $\{\bigstar, \bigstar\}$ la forme bilinéaire alternée sur le fibré cotangent $T^* X$ définie par :*

$$\{dg(x), dh(x)\}_x=\{g, h\}(x) \qquad \text{pour} \quad g, h \in \mathcal{O}_{X, x}.$$

Remarque. — La forme $\{\bigstar, \bigstar\}_x$ est bien définie car $dh(x)=0$ implique $H_g(h)(x)=0$.

DÉFINITION 1.1.9. — *Soit X une variété de Poisson, V une sous-variété de X et soit $\mathscr{I}_V$ l'idéal de définition de V. On dit que V est* **involutive** *(resp.* **invariante)** *si $\{\mathscr{I}_V, \mathscr{I}_V\} \subset \mathscr{I}_V$ (resp. $\{\mathscr{I}_V, \mathcal{O}_X\} \subset \mathscr{I}_V$).*

On note **Reg** V la partie lisse de V, c'est-à-dire, l'ensemble des points $x \in V$ tels qu'il existe un voisinage W de x tel que $V \cap W$ soit une sous-variété lisse de X.

La définition 1.1.8 entraîne aussitôt que, si X est lisse, V est involutive (resp. invariante) si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{Reg}\, V$, on a

$$\{(T_V^* X)_x, (T_V^* X)_x\}_x=0 \qquad (\text{resp. } \{(T_V^* X)_x, T_x^* X\}_x=0).$$

Ici $T_V^* X$ désigne le fibré conormal à V.

Observons que si V est une sous-variété invariante, V est naturellement munie d'une structure de Poisson induite par celle de X.

Exemple 1.1.10. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie. Alors d'après l'exemple 1.1.3, $\mathfrak{g}^*$ est aussi muni d'une structure de Poisson. Soit $\mathfrak{h}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$. Alors son orthogonal $\mathfrak{h}^\perp$ est une sous-variété involutive (resp. invariante) dans $\mathfrak{g}^*$ si et seulement si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ (resp. un idéal de $\mathfrak{g}$). Supposons de plus que $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie complexe et connexe G. Alors une sous-variété fermée de $\mathfrak{g}^*$ est invariante si et seulement si elle est invariante par l'action co-adjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$.

On démontre facilement le lemme suivant :

LEMME 1.1.11. — *Si I_V est engendré par des fonctions $f_1, \ldots, f_l$ alors V est involutive si et seulement si $\{f_j, f_k\} \in I_V$ pour tout j, k.*

Voici le résultat essentiel de ce paragraphe :

THÉORÈME 1.1.12. — *Soit X une variété lisse de Poisson, V une sous-variété involutive de X et f une fonction holomorphe sur X telle que H_f soit tangent à V. Alors $f^{-1}(0) \cap V$ est involutive.*

Démonstration. — On utilisera le lemme suivant conséquence d'un résultat de Hironaka (corollaire 1, p. 248 de [H]) :

LEMME 1.1.13. — *Soit X une variété analytique complexe, V une sous-variété de X et $f \in \mathcal{O}_X$. Soit $V_0 = f^{-1}(0) \cap V$. Alors il existe un sous-ensemble S analytique fermé de V_0 qui satisfait les conditions suivantes :*

(i) *$V_0 \setminus S$ est lisse et dense dans V_0,*

(ii) *Si une suite $x_n \in \mathbf{Reg}\, V$ tend vers un point $x_0 \in V_0 \setminus S$ et $T_{x_n} V \cap \mathbf{Ker}\, df(x_n)$ tend vers un sous-espace τ de $T_{x_0} X$ alors $\tau \supset T_{x_0} V_0$.*

Pour démontrer le théorème 1.1.12 on peut supposer V irréductible. De plus si f est identiquement nulle sur V le théorème est trivial et donc on peut supposer que $\mathbf{dim}\, V_0 = \mathbf{dim}\, V - 1$.

Prenons S comme dans le lemme 1.1.13. Comme la condition d'involutivité se vérifie sur un ouvert dense de V_0, plaçons nous dans un voisinage d'un point x_0 de $V_0 \setminus S$. Soit $x_n \in \mathbf{Reg}\, V$ telle que $x_n \to x_0$ et $T_{x_n} V \cap \mathbf{ker}\, df(x_n) \to \tau$. D'après le lemme 1.1.13, τ contient $T_{x_0} V_0$ et donc $\tau = T_{x_0} V_0$ car $\mathbf{dim}\, \tau = \mathbf{dim}\, V_0$. Par suite

$$[T_{x_n} V \cap \mathbf{Ker}\, df(x_n)]^{\perp} = (T_V^* X)_{x_n} + \mathbb{C}\, df(x_n) \to (T_{V_0}^* X)_{x_0}.$$

Ici $\perp$ désigne l'orthogonal. D'après les hypothèses on a

$$\begin{aligned}\{ (T_V^* X)_{x_n} + \mathbb{C}\, df(x_n), (T_V^* X)_{x_n} + \mathbb{C}\, df(x_n) \}_{x_n} \\ = \{ (T_V^* X)_{x_n}, (T_V^* X)_{x_n} \}_{x_n} + \{ (T_V^* X)_{x_n}, \mathbb{C}\, df(x_n) \}_{x_n} = 0.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Le théorème 1.1.12 entraîne immédiatement :

COROLLAIRE 1.1.14. — *Soit X une variété lisse de Poisson et soit $f \in \mathcal{O}_X$ telle que H_f soit identiquement nul. Soit V une sous-variété involutive de X. Alors $V \cap f^{-1}(0)$ est involutive.*

1.2. Rappelons maintenant la notion de « cône normal » due à Whitney [W]:

Soit X une variété analytique complexe et Y un sous-ensemble analytique de X; on note $\tilde{Y}_X$ le spectre analytique de $\mathscr{A}_Y = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathscr{I}_Y^K c^{-k} \subset \mathscr{O}_X[c, c^{-1}]$ où $\mathscr{I}_Y$ désigne l'idéal de définition de Y et $\mathscr{I}_Y^K = \mathscr{O}_X^k$ pour $k \leqslant 0$. On appelle $\widetilde{Y_X}$ la déformation normale de X le long de Y. Par définition, $\widetilde{Y_X}$ est construit comme suit:

La $\mathscr{O}_X$-algèbre $\mathscr{A}_Y$ se représente localement comme un quotient

$$A_Y \simeq \mathscr{O}_X[T_1, \ldots, T_l]/\mathscr{I}$$

où $\mathscr{O}_X[T_1, \ldots, T_l]$ désigne l'anneau des polynômes à coefficients holomorphes à l variables et $\mathscr{I}$ est un idéal homogène localement de type fini de $\mathscr{O}_X[T_1, \ldots, T_l]$.

Alors $\widetilde{Y_X}$ est la variété des zéros de I dans $X \times \mathbb{C}^l$.

Soit p la projection de $\widetilde{Y_X}$ sur X, soit S un sous-ensemble de X. On note $C_Y(S) = \overline{p^{-1}(S) \setminus c^{-1}(0)} \cap c^{-1}(0)$ et on l'appelle *cône normal* à Y le long de S. Ici c est regardée comme une fonction de $\widetilde{Y_X}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Soit maintenant X une variété de Poisson et soit Y une sous-variété lisse involutive de X. Alors $\widetilde{Y_X}$ est naturellement munie d'une structure de Poisson comme suit:

On a $\{\mathscr{I}_Y, \mathscr{I}_Y\} \subset \mathscr{I}_Y$, donc pour tout m et l, $\{\mathscr{I}_Y^m, \mathscr{I}_Y^l\} \mathscr{I}_Y^{m+l-1}$.

On peut donc définir le crochet de Poisson de $\mathscr{A}_Y$ en posant $\{ac^{-m}, bc^{-l}\} = \{a, b\}_X c^{-m-l+1}$ pour $a \in \mathscr{I}_Y^m, b \in \mathscr{I}_Y^l$ et en le prolongeant ensuite à $\mathscr{A}_Y$ par bilinéarité. Par construction $\{c, \mathscr{A}_Y\} = 0$. On définit alors le crochet de $\mathscr{O}_{\widetilde{Y_X}}$ en prolongeant celui de $\mathscr{A}_Y$.

Exemple 1.1.15. — Soit $X = \mathbb{C}^{2n}$ muni des coordonnées $(x_1 \ldots x_n; \xi_1 \ldots \xi_n)$. Avec le crochet de Poisson défini par les relations $\{\xi_i, x_j\} = \delta_{ij}$, $\{x_i, x_j\} = \{\xi_i, \xi_j\} = 0$, X est muni d'une structure symplectique et donc c'est une variété de Poisson. Soit Λ la sous-variété $\Lambda = \{(x, \xi) \in X;\ x_1 = \ldots = x_l = \xi_{l+1} = \ldots = \xi_n = 0\}$ avec $1 \leqslant l \leqslant n$. Alors l'algèbre $\mathscr{A}_\Lambda$ est la sous-algèbre de $\mathscr{O}_X[c, c^{-1}]$ engendrée par c, $x_i c^{-1}$, $\xi_j c^{-1}$ avec $i \leqslant l$ et $j > l$.

On note

$$t_j = \begin{cases} x_j c^{-1} & \text{pour } j \leqslant l, \\ x_j & \text{pour } j > l, \end{cases}$$

$$\eta_j = \begin{cases} \xi_j & \text{pour } j \leqslant l, \\ \xi_j c^{-1} & \text{pour } j > l. \end{cases}$$

On a $\Lambda_X = \mathbb{C}^{2n+1}$ avec les coordonnées $(c, t_1 \ldots t_n, \eta_1 \ldots \eta_n)$.
La structure de Poisson dans $\mathcal{O}_{\Lambda_X}$ est donc définie par les relations:

$$\begin{cases} \{c, t_j\} = \{c, \eta_j\} = 0, \\ \{\eta_j, t_k\} = \delta_{jk}, \\ \{\eta_j, \eta_k\} = \{t_j, t_k\} = 0. \end{cases}$$

1.3. Soit X une variété lisse de Poisson et soit Y une sous-variété involutive lisse de X. On a $c^{-1}(0) \simeq T_Y X$. Comme $H_c = 0$, $c^{-1}(0)$ est une sous-variété invariante donc munie de la structure de Poisson induite. De plus, on a par définition

$$\{f \circ p, g \circ p\}_{\tilde{Y}_X} = c\{f, g\}_X \qquad \text{pour } f, g \in \mathcal{O}_X.$$

Grâce au corollaire 1.1.14 on a le théorème suivant:

THÉORÈME 1.3.1. — *Soit S un sous-ensemble analytique involutif de X. Alors $C_Y(S)$ est involutif dans $\widetilde{Y_X}$ [et donc involutif dans $c^{-1}(0)$].*

Démonstration. — L'idéal de définition de $p^{-1}(S)$ est engendré par celui de S; donc, d'après le lemme 1.11.11, il est fermé par le crochet de Poisson. Par suite, $\overline{p^{-1}(S) \setminus c^{-1}(0)}$ est involutif. Le théorème découle alors du corollaire 1.1.14.

1.4. Supposons maintenant que X est une variété symplectique; si Λ est une sous-variété lagrangienne lisse de X on peut identifier $T_\Lambda X$ le fibré normal à Λ, au fibré $T^* \Lambda$ grâce à $-H$, où H est l'isomorphisme hamiltonien $T^* X \to TX$ associé à la 2-forme canonique de X. Notons σ cette forme. On a par définition:

pour tout $x \in X$, $\eta \in TX_x$, $\theta \in T^* X_x$

$$\sigma_x(\eta, H(\theta)) = \langle \theta, \eta \rangle.$$

On a alors:

PROPOSITION 1.4.1. — *La structure de Poisson de $T_\Lambda X$ induite par celle de $\widetilde{\Lambda_X}$ est égale, via $-H$, à la structure de Poisson de $T^* \Lambda$ associée à la structure symplectique de $T^* \Lambda$.*

Démonstration. — Prenons des coordonnées locales $(x, \xi) = (x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ de sorte que l'on identifie Λ à la sous-variété de $\mathbb{C}^{2n}$ définie par $\xi = 0$, et le crochet de Poisson sur X est comme dans l'exemple 1.1.15.

Grâce à $-H$ on identifie $(\xi, \langle t, dx \rangle) \in T^* \Lambda$ à $(\xi, \langle t, \partial/\partial\xi \rangle) \in T_\Lambda X$. Sur $\widetilde{\Lambda_X}$ on a les coordonnées (c, t, x) avec $\xi = ct$. Soient $f, g \in \mathcal{O}_{\widetilde{\Lambda}_X}$. Alors comme on a vu dans l'exemple 1.1.15.

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial t_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial t_i} \right),$$

qui coïncide sur $T_\Lambda (T^* X)$ avec le crochet de Poisson sur $T^* \Lambda$.

2. Application aux variétés microcaractéristiques

Rappelons la construction des variétés microcaractéristiques associées à un système microdifférentiel le long d'une sous-variété involutive.

2.1. Soit X une variété analytique complexe et soit $T^* X$ son fibré cotangent. On note $\mathcal{E}_X$ le faisceau des opérateurs microdifférentiels de Sato, Kawai et Kashiwara [S.K.K.], $\mathcal{E}_X(m)$ le sous-faisceau des opérateurs d'ordre inférieur ou égale à m et σ_m le morphisme « symbole d'ordre m » de $\mathcal{E}_X(m)$ dans $\mathcal{O}_{T^*X}(m)$, le faisceau des fonctions holomorphes sur $T^* X$, homogènes de degré m.

Soit $\mathcal{M}$ un système microdifférentiel, c'est-à-dire, $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{E}_X$-module cohérent. On note $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ et on appelle *variété caractéristique* de $\mathcal{M}$ le support de $\mathcal{M}$ dans $T^* X$.

Soit Λ une sous-variété involutive lisse de $\mathring{T}^* X$, le fibré cotangent privé de la section nulle. On note $\mathcal{J}_\Lambda = \{ p \in \mathcal{E}_X(1),\ \sigma_1(p)|_\Lambda = 0 \}$, $\mathcal{J}_\Lambda$ l'idéal de définition de Λ dans $\mathcal{O}_{\dot{T}^*X}$ et $\mathcal{E}_\Lambda = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{J}_\Lambda^m$ (*cf.* [K-O]); $\mathcal{E}_\Lambda$ est un anneau cohérent muni de la filtration par l'ordre $\mathcal{E}_\Lambda^{(m)} = \mathcal{E}_\Lambda \cap \mathcal{E}_X(m) = \mathcal{J}_\Lambda^m$, avec la convention $\mathcal{J}_\Lambda^m = \mathcal{E}_X(m)$ pour $m \leq 0$. On note $\mathbf{gr}(\mathcal{E}_\Lambda) = \oplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}_\Lambda^{(m)} / \mathcal{E}_\Lambda^{(m-1)}$ l'anneau gradué associé. C'est un anneau commutatif cohérent et on a

$\mathcal{O}_{\dot{T}^*X} \otimes_{\mathcal{O}_{T^*X}(0)} \mathbf{gr}(\mathcal{E}_\Lambda) \simeq \oplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}_\Lambda^m = \mathcal{A}_\Lambda$. Notons $\widetilde{\Lambda_{\dot{T}^*X}}$ par $\tilde{X}$ avec la structure de Poisson donnée dans le paragraphe 1.

2.2. Soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{E}_\Lambda$-module cohérent. Soit $\{\mathcal{N}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ une bonne filtration de $\mathcal{N}$, i.e., une filtration croissante de $\mathcal{N}$ par des $\mathcal{E}_X(0)$-sous-modules cohérents vérifiant

(i) $\mathcal{N} = \bigcup \mathcal{N}_k$,

(ii) $\mathcal{E}_\Lambda^{(m)} \mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_{k+m}$ pour tout m et k,

(iii) $\mathcal{E}_\Lambda^{(m)} \mathcal{N}_k = \mathcal{N}_{k+m}$ pour $m \geqslant 0$ et $k \gg 0$,

(iv) $\mathcal{E}_\Lambda^{(m)} \mathcal{N}_k = \mathcal{N}_{k+m}$ pour $m \leqslant 0$ et $k \ll 0$.

Soit $\mathbf{gr}(\mathcal{N})$ le gradué associé:
On note $\mathrm{Ch}_\Lambda(\mathcal{N}) = \mathbf{supp}(\mathcal{O}_{\tilde{X}} \otimes_{\mathbf{gr}\,\mathcal{E}_\Lambda} \mathbf{gr}\,\mathcal{N}) \subset \tilde{X}$. On démontre par les méthodes classiques (par exemple [K], [M-F] 2.) que $\mathrm{Ch}_\Lambda(\mathcal{N})$ ne dépend pas de la bonne filtration. L'anneau $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ étant fidèlement plat sur $\mathbf{gr}\,\mathcal{E}_\Lambda$ et en appliquant le théorème de Gabber [G] on obtient:

THÉORÈME 2.2.1. — *Pour tout $\mathcal{E}_\Lambda$-module cohérent $\mathcal{N}$, $\mathrm{Ch}_\Lambda(\mathcal{N})$ est involutive.*

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent. Prenons un $\mathcal{E}_\Lambda$-sous-module cohérent qui engendre $\mathcal{M}$ en tant qu'un $\mathcal{E}_X$-module. On pose

$$\mathrm{Ch}_\Lambda(\mathcal{M}) = \mathrm{Ch}_\Lambda(\mathcal{N})$$

ce qui a un sens puisque $\mathrm{Ch}_\Lambda(\mathcal{M})$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{N}$. On peut donc reformuler le théorème 2.2.1:

THÉORÈME 2.2.1. — *Pour tout $\mathcal{E}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$, $\mathrm{Ch}_\Lambda(\mathcal{M})$ est involutive.*

Par définition la variété 1-microcaractéristique de $\mathcal{M}$ le long de Λ est le sous-ensemble de $T_\Lambda(T^* X)$ donné par (*cf.* [M-F]):

$$C_\Lambda^1(\mathcal{M}) = \mathbf{supp}\left(\mathcal{O}_{\tilde{X}} \otimes_{\mathcal{A}_\Lambda} \frac{gr(\mathcal{N})}{cgr(\mathcal{N})}\right) = c^{-1}(0) \cap \mathrm{Ch}_\Lambda(\mathcal{M}).$$

La variété microcaractéristique de $\mathcal{M}$ le long de Λ est donnée par (*cf.* [K-S] 1)

$$C_\Lambda(\mathcal{M}) = C_\Lambda(\mathrm{Ch}(\mathcal{M})).$$

(Pour une étude approfondie voir aussi [S]).

D'après les résultats précédents (corollaire 1.1.14, théorème 1.3.1. et théorème 2.2.2.) on peut donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 2.2.3. — *Les variétés $C^1_\Lambda(\mathcal{M})$ et $C_\Lambda(\mathcal{M})$ sont involutives dans $T_\Lambda(T^*X)$.*

BIBLIOGRAPHIE

[B] BJÖRK (J. E.). — "Rings of Differential Operators", North Holland Math. Library Series, North Holland, Amsterdam-Oxford-New York, 1979.

[G] GABBER (O.). — "The integrability of the characteristic variety", *Amer. J. Math.*, vol. 103, n° 3, 1981, p. 445-468.

[H] HIRONAKA (H.). — Stratification and flatness, in "Real and Complex Singularities", Nordic Summer School, Oslo, 1976, Sijthoff and Noordhoff, 1977.

[K] KASHIWARA (M.). — "Systems of Microdifferential Equations" Notes by T. Monteiro Fernandes, *Progress in Math.*, n° 34, Birkhäuser, 1983.

[K-K] KASHIWARA (M.) et KAWAI (T.). — On holonomic systems for $\prod_{l=1}^{N}(f_l+\sqrt{-1}\,0)^{\lambda_l}$, *Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ.*, 15, 1979, p. 551-575.

[K-O] KASHIWARA (M.) et OSHIMA (T.). — "Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems" *Annals of Maths.*, 106, 1977, p. 145-200.

[K-S] KASIWARA (M.) et SCHAPIRA (P.). — 1. Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels dans le domaine complexe», *Inventiones Math.*, vol. 46, 1978, p. 17-38.
2. "Microhyperbolic systems", *Acta Mathematica*, vol. 142, 1979, p. 1-55.

[L] LAURENT (Y.). — « Théorie de la Deuxième Microlocalisation dans le Domaine Complexe», *Progress in Math.*, vol. 53, Birkhäuser, 1985.

[L-S] LIE (S.). — Theorie der transformations gruppen (Zweiter Abschnitt, unter mit wirking von Prof. Dr. Friedrich Engel), Leipzig, 1890.

[M] MALGRANGE (B.). — « L'involutivité des caractéristiques des systèmes différentiels et microdifférentiels », *Seminaire Bourbaki*, 522, 1977-1978.

[M-F] MONTEIRO FERNANDES (T.). — 1. Variété 1-microcaractéristique pour les $\mathscr{E}_X$-modules cohérents », *C.R. Acad. Sci.*, t. 290, série A, 1980, p. 787-790. 2. « Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels », *Astérisque*, S.M.F. (à paraître).

[S-K-K] SATO (M.) KAWAI (T.) et KASHIWARA (M.). — "Hyperfunctions and pseudodifferential equations", *Lecture Notes in Math.*, n° 287, p. 265-529 Springer Verlag, 1973.

[S] SCHAPIRA (P.). — "Microdifferential systems in the Complex Domain", *Grundelehren für Math.*, 269, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1985.

[W. A] WEINSTEIN (A.). — "The local structure of Poisson Manifolds", *Journal of Differential Geometry*, vol. 18, 1983, p. 523-557.

[W] WHITNEY (H.). — "Tangents to an analytic variety", *Annals of Math.*, vol. 81, 1964, p. 496-549.