BULLETIN DE LA S. M. F.

ANNE BERTRAND-MATHIS

Développement en base θ, répartition modulo un de la suite $(x\theta^n)$, n≥ 0, langages codés et θ-shift

Bulletin de la S. M. F., tome 114 (1986), p. 271-323

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__271_0>

Bull. Soc. math. France,
114, 1986, p. 271-323.

DÉVELOPPEMENT EN BASE θ RÉPARTITION MODULO UN DE LA SUITE $(x\theta^n)_{n\geq 0}$ LANGAGES CODES ET θ-SHIFT

PAR

ANNE BERTRAND-MATHIS (*)

RÉSUMÉ. — Nous montrons que lorsque θ est un nombre de Pisot de degré s, l'on peut munir le tore Π^s d'un endomorphisme linéaire qui fait du tore un facteur, par une application continue, du θ-shift; nous appliquons ce qui précède à l'étude de la répartition modulo un de la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$.

Nous montrons que dans le cas général le θ-shift est un système dynamique symbolique codé et nous étudions quelques-unes de ses propriétés.

ABSTRACT. — We prove that when θ is a Pisot number of degree s, we may endow the torus Π^s with a linear endomorphism, so that the torus is a factor, by a continuous application, of the θ-shift. We apply the above to the study of the repartition modulo one of the sequence $(x\theta^n)_{n\geq 0}$.

We prove that in the general case, the θ-shift is a coded symbolic dynamic system and we study a few of its properties.

I. Notations

DÉVELOPPEMENTS EN BASE θ

Nous désignerons par $[t]$ et $\{t\}$ les parties entière et fractionnaire d'un nombre réel t; $\|t\|$ désignera la distance à l'entier le plus proche.

DÉFINITION I (Rényi). — Soit θ un nombre réel strictement supérieur à 1; tout nombre réel x s'écrit de façon unique sous la forme :

$$x=\varepsilon_0+\frac{\varepsilon_1}{\theta}+\ldots+\frac{\varepsilon_n}{\theta^n}+\ldots$$

(*) Texte reçu le 12 février 1985, révisé le 9 avril 1986.

Anne BERTRAND-MATHIS, Université de Bordeaux-I, Mathématiques et Informatique, 33405 Talence Cedex.

où $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant \varepsilon_i < \theta$ pour tout $i \geqslant 1$ avec les conditions équivalentes :

1. $\forall n \geqslant 0 \sum_{k>0} (\varepsilon_k/\theta^k) < 1/\theta^n$
2. $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 0}$ est définie par la relation de récurrence

$$\varepsilon_0 = [x], \qquad r_0 = \{x\}$$
$$\varepsilon_{n+1} = [\theta r_n], \qquad r_{n+1} = \{\theta r_n\}.$$

Nous dirons alors que la suite $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 0}$ est le développement en base θ, où θ-développement du nombre x et nous écrirons :

$$x = \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$$

On trouvera dans Rényi [1] et Parry [2] des détails sur cette question.

Étant donné deux suites $(b_0 b_1 \ldots)$ et $(c_0 c_1 \ldots)$ nous dirons que pour l'ordre lexicographique

$$b_0 b_1 \ldots < c_0 c_1 \ldots$$

s'il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que

$$b_0 \ldots b_{p-1} = c_0 \ldots c_{p-1}$$
$$b_p < c_p.$$

Fixons θ strictement supérieur à 1 mais n'appartenant pas à N, et soit $(a_0, a_1, a_2 \ldots)$ son θ développement ([1]).

Soit A l'alphabet $\{0, 1, \ldots, [\theta]\}$ muni de la topologie discrète et soit $A^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ sur A muni du shift T :

$$T(\varepsilon) = \varepsilon' \qquad \text{avec} \quad \varepsilon'_n = \varepsilon_{n+1}.$$

DÉFINITION II. — Nous appellerons θ-*shift unilatéral* $\bar{X}$ le sous-espace fermé T invariant de $A^{\mathbb{N}^*}$ formé des suites ε telles que

$$\forall p \geqslant 0, \quad T^p \varepsilon \leqslant (a_0 a_1 \ldots).$$

([1]) Nous poserons pour simplifier les écritures

$$(\dot{a}_0 a_1 \ldots \dot{}) = (a_0 a_1 \ldots a_{k-1} (a_k - 1) a_0 a_1 \ldots)$$

lorsque $(a_0 a_1 \ldots) = (a_0 \ldots a_k 00 \ldots)$ avec $a_k \neq 0$, et $(\dot{a}_0 \dot{a}_1 \ldots) = (a_0 a_1 \ldots)$ lorsque $(a_0 a_1 \ldots)$ *ne finit pas par des zéros.*

Nous appellerons θ-*shift bilatéral* $\underline{\bar{X}}$ son extension naturelle, c'est-à-dire l'ensemble des suites $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que

$$\forall p\in\mathbb{Z},\quad (\varepsilon_p\,\varepsilon_{p+1}\ldots)\leqslant(a_0'\,a_1'\ldots).$$

Nous appellerons *mot admissible en base* θ un mot figurant dans une suite de X. Un mot $c_0\ldots c_n$ est admissible en base θ si et seulement si

$$c_0\ldots c_n\leqslant a_0\ldots a_n$$
$$c_1\ldots c_n\leqslant a_0\ldots a_n$$
$$c_n\leqslant a_0.$$

Nous appellerons cylindre de $\bar{X}$ (resp. $\underline{\bar{X}}$) les ensembles de la forme

$$[b_1\ldots b_k]^l=\{\varepsilon\in\bar{X}(\text{resp. }\underline{\bar{X}});\ \varepsilon_{l+1}\ldots\varepsilon_{l+k}=b_1\ldots b_k\},$$

qui fournissent une base de voisinage de $\bar{X}$ (ou $\underline{\bar{X}}$). Nous munissons X de la distance usuelle

$$d((x_n)_{n\geqslant 0},\,(y_n)_{n\geqslant 0})=\textstyle\sum_{n\geqslant 0}(x_n-y_n)/(2^n).$$

Étant donné un élément $\varepsilon=(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ de X nous appellerons $\underline{\varepsilon}=(\underline{\varepsilon}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ l'élément $\underline{\varepsilon}$ de $\bar{X}$ tel que

$$\forall\, n\leqslant 0,\quad \underline{\varepsilon}_n=0$$
$$\forall\, n\geqslant 1,\quad \underline{\varepsilon}_n=\varepsilon_n.$$

Étant donné une mesure p T-invariante sur $\bar{X}$ nous noterons $\underline{P}$ son extension naturelle à $\underline{X}$.

L'ensemble X des suites $\varepsilon=(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ telles qu'il existe un nombre réel x appartenant à $[0, 1[$ dont le θ-développement est

$$x=0,\ \varepsilon_1\,\varepsilon_2\ldots$$

est égal à $\bar{X}$ privé des éléments suivants :

– si la suite $(a_0\,a_1\ldots$ ne se termine pas par des zéros, il faut enlever les suites ε pour lesquelles il existe un entier p tel que

$$T^p\varepsilon=(a_0\,a_1\ldots)$$

X est l'ensemble des suites telles que $\forall p\ T^p\varepsilon<(a_0\,a_1\,a_2\ldots)$.

— Si la suite $(a_0 \dots a_r \dots)$ est de la forme

$$a_0 \dots a_k 000 \dots \quad \text{où } a_k \text{ est non nul}$$

il faut enlever les suites ε telles qu'il existe un entier p avec :

$$T^p \varepsilon = a_0 \dots a_{k-1} (a_{k-1}) a_0 \dots a_{k-1} (a_k - 1) \dots$$

un peu comme en base 10 on choisit parfois les développements des nombres décimaux se terminant par des zéros; X est T-invariant et sa fermeture est $\bar{X}$. Nous noterons $\underline{X}$ son extension naturelle.

Notons que si $\theta = (a_0, a_1, a_2 \dots)$, la suite $(0, a_0, a_1 \dots)$ n'est pas un développement car $1 = (a_0/\theta) + (a_1/\theta^2) + \dots$ admet $(1, 000 \dots)$ pour θ développement.

Soit p la bijection de $[0, 1[$ dans X qui à un nombre réel x admettant pour θ-développement $(0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots)$ associe $\varepsilon = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots)$ et soit $\underline{p}$ l'application de $[0, 1[$ dans $\underline{X}$ qui au même nombre x associe $\underline{\varepsilon}$.

Soit T l'application de $[0, 1[$ dans lui-même : $x \to \{\theta x\}$. Alors

$$p \circ T = T \circ p.$$

Il existe [1] une unique mesure probabiliste T-invariante $\dot{\mu}_\theta$ sur $[0, 1[$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue; la mesure $\mu_\theta = p(\dot{\mu}_\theta)$ est T-invariante et c'est la mesure d'entropie maximale portée par le θ-shift.

Remarquons que tout sous-shift Y (ensemble fermé T-invariant) de $A^{\mathbb{N}}$ défini par la relation :

$$\exists v \in A^{\mathbb{N}}, \quad u \in Y \iff \forall n\, T^n u < v$$

est, d'après les travaux de Parry [2], un θ-shift.

Langages et codes

Soit A^* l'ensemble des mots sur un alphabet A; c'est un monoïde muni de la concaténation. Nous dirons qu'un mot a est facteur (resp. facteur gauche) d'un mot b s'il existe des mots d et d' (resp. un mot d') avec $b = dad'$ (resp. $b = ad'$).

Nous appellerons langage une partie de A^* et nous noterons $F(L)$ l'ensemble des facteurs des mots sur A. Le langage L est dit factoriel s'il contient tous ses facteurs. Il est dit prolongeable si pour tout mot a de L il existe deux mots non vides d et d' sur A tels que dad' appartienne encore à L. Il est dit transitif si pour tous mots w et v de L il existe $u \in A^*$ tel que vuw appartienne à L.

Nous appellerons sous-shift associé au langage L le sous-ensemble de $A^{\mathbb{Z}}$ formé des suites $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dont tous les blocs $b_k \ldots b_{k+p}$ appartiennent à $F(L)$, muni de la transformation T: $T(b_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (b_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$. Les mots de $F(L)$ seront dits mots admissibles pour le sous-shift.

Nous appellerons code préfixe une partie X de A^* qui engendre un sous-monoïde libre de A^* (tout mot de X^* admet une décomposition unique en mots de X) telle qu'aucun mot de X ne soit facteur gauche d'un autre mot de X.

Nous appellerons sous-shift codé de $A^{\mathbb{Z}}$ un sous-shift associé au langage M^* où M est un code préfixe.

Étant donné un langage $L \subset A^*$ nous appellerons relation d'équivalence syntaxique sur A^* la relation définie par

$$a \sim a' \iff \forall c, d \in A^*, \qquad cad \in \mathrm{L} \iff ca'd \in L.$$

Cette relation est compatible avec la concaténation et nous appellerons monoïde syntaxique M_L le monoïde quotient de A^* par la relation; nous appellerons morphisme syntaxique Φ_L la surjection canonique de A^* sur M_L.

Nous dirons qu'un langage est rationnel si son monoïde syntaxique est fini.

Nous dirons qu'un sous-shift est sofique s'il est associé à un langage rationnel factoriel (c'est-à-dire contenant tous ses facteurs) prolongeable.

Nous appellerons rayon de convergence ρ_M du code M, le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} {}^{\#}\{M \cap A^n\} z^n$ et nous appellerons rayon de convergence de M^* le rayon de convergence ρ_{M^*} de la série $\sum_{n \geq 0} {}^{\#}\{M^* \cap A^n\} z^n$ (${}^{\#}B$ désignant le cardinal d'un ensemble B).

Convergence modulo un

Soit $\mathbb{T}$ le tore et soit u un point de $\mathbb{T}$; nous dirons qu'une série réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ converge modulo un vers u si

$$\lim_{n \to \infty, m \to \infty} \left\| \left(\sum_{k=-m}^{n} u_k\right) - u \right\| = 0$$

et nous écrirons alors

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}, \text{ mod. } 1} u_k = u.$$

Nous ferons une convention analogue en ce qui concerne les tores $\mathbb{T}^s$.

MESURE ASSOCIÉE A UNE SUITE (nous entendrons par mesure une mesure borélienne positive de masse 1)

Étant donné un espace métrique E et une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ sur E, nous dirons que la mesure μ est associée à la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ suivant l'ensemble S s'il existe un sous-ensemble infini S tel que pour toute fonction continue f de E dans $\mathbb{R}$

$$\lim_{n \to \infty,\, n \in S} \frac{1}{n} [f(u_1) + \ldots + f(u_n)] = \mu(f)$$

et nous dirons que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est μ-répartie si l'on peut prendre $S = \mathbb{N}$.

Lorsque E est un tore nous dirons qu'une suite sur le tore est équirépartie modulo un si elle est répartie selon la mesure de Lebesgue.

II. Énoncé des résultats

Dans tout ce paragraphe, θ désignera un nombre réel strictement supérieur à 1 dont la nature arithmétique sera précisée s'il en est besoin, et $(a_0, a_1 a_2 \ldots)$ désignera son θ-développement.

DÉFINITION II (Parry). — Nous appellerons β-*nombre* (resp. β-*nombre simple*) les nombres θ dont le θ-développement est périodique après un certain rang (resp. se termine par des zéros).

THÉORÈME I. [1] — *Soit θ un nombre réel strictement supérieur à 1, $(a_0, a_1 a_2 \ldots)$ son développement en base θ; le θ-shift X est le sous-shift associé au langage codé $F(M^*)$ où M désigne le code préfixe défini comme suit :*

$$M = \{ a_0 \ldots a_k i;\ 0 \leq i < a_{k+1};\ k+1 = 0, 1, 2 \ldots \}$$

où $a_0 \ldots a_k$ désigne le mot vide quand $k+1=0$. Ainsi

$$M = \{ 0, 1, \ldots, a_0 - 1;\ a_0 0, a_0 1, \ldots a_0 a_1 - 1);\ a_0 a_1 0, \ldots \}$$

[1] Takahashi ([18]) a, dans un autre langage, montré la première assertion du Théorème I.

Ce code comprend a_k mots de longueur $k+1$ et est fini si et seulement si θ est un β-nombre simple.

Le rayon de convergence ρ_M est strictement supérieur à ρ_{M^*} et $\rho_{M^*}=1/\theta$.

Le θ-shift forme un système sofique si et seulement si θ est un β-nombre.

Ce théorème permet de prouver de façon immédiate un résultat classique ([3], [4]) :

COROLLAIRE. — *Le θ-shift forme un processus de Markov si et seulement si θ est un β-nombre simple.*

Parry [2] a montré que les β nombres sont des nombres algébriques dont tous les conjugués sont de module inférieur à 2, et que l'ensemble des β nombres est dense dans $[1, \infty[$; comme l'ensemble des nombres de Pisot est fermé, ces ensembles ne coïncident pas; on peut se demander si l'ensemble des β nombres est la réunion des ensembles des nombres de Pisot et Salem et si alors tout élément du corps d'un β nombre admet un développement périodique après un certain rang; (Klaus, Schmidt [10] a donné une autre démonstration du théorème 4 et a montré que si les nombres de $Q(\theta)$ ont tous un θ-développement périodique après un certain rang alors θ est un nombre de Pisot ou de Salem).

Nous dirons qu'un système (X, d, T) ou X est un espace métrique muni d'une distance d et T une transformation continu de X dans lui-même possède la propriété de spécification si pour tout $\varepsilon>0$ il existe $M(\varepsilon)$ tel que pour tout $k \geqslant 2$, pour tout k-uplet de points $x_1 \ldots x_k$ de X, pour tous les entiers

$$m_1 \leqslant n_1 < m_2 \leqslant n_2 < \ldots < n_k \leqslant n_k \qquad \text{avec} \quad m_i - n_{i-1} \geqslant M(\varepsilon)$$

pour $i=2, \ldots, k$ et pour tout entier p avec $p \geqslant M(\varepsilon)+n_k-m_1$, il existe un point x de X de période p tel que $d(T^s x, T^s x_i) \leqslant \varepsilon$ pour $m_i \leqslant s \leqslant n_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Cela signifie qu'étant donné k morceaux d'orbites, on peut les approcher par une orbite périodique pourvu qu'on aie assez de temps pour aller d'un morceau à l'autre, le temps en question étant indépendant des morceaux d'orbites, et en particulier de leur longueur.

Nous dirons qu'une mesure μ T-invariante sur un sous-shift est homogène au sens de Bowen s'il existe une constante K et un entier p tels que pour tout n, pour tous cylindres admissibles $[x_1 \ldots x_{n+p}]^0$ et $[y_1 \ldots y_n]^0$

$$K\mu[x_1 \ldots x_{n+p}]^0 \leqslant \mu[y_1 \ldots y_n]^0.$$

Le résultat suivant est inspiré de Sigmund [7] ([1]) :

THÉORÈME II. — *Soit* θ *un nombre strictement supérieur à* 1, $(a_0, a_1 a_2 \ldots)$ *son* θ*-développement. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $\exists h \in \mathbb{N}^*$, $a_{p+1} \ldots a_{p+h-1} = 0 \Rightarrow a_{p+h} \neq 0$

ou bien

la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ *se termine par des zéros (il s'agit alors d'un* β*-nombre simple).*

2. *Le* θ*-shift possède la propriété de spécification.*

3. *La mesure de Parry Rényi* μ_θ *est homogène au sens de Bowen et il existe une constante c telle que pour tout mot admissible* $c_1 \ldots c_n$

$$\mu([c_1 \ldots c_n]^0) \geq \frac{c}{\theta^n}.$$

Étant donné un alphabet A nous appellerons automate sur A la donné $(Q, \psi, \bar{q})$ d'un ensemble dénombrable d'états Q, d'une application $\psi | Q \times A \to Q$ qui se prolonge immédiatement à $Q \times A^*$ $(\psi(q, ab) = \psi(\psi(q, a), b)$ et d'un élément poubelle $\bar{q}$ de Q tel que

$$\forall u \in A^*, \quad \psi(\bar{q}, u) = \bar{q}.$$

L'ensemble des mots u tels que $\{\psi(q, u); q \in Q\}$ ne se réduit pas à $\bar{q}$ est dit langage reconnu par l'automate.

Nous dirons qu'un système codé est synchronisant s'il existe un automate (Q, ψ, q) reconnaissant le langage associé au système et un mot u tel que $Q(u)$ soit fini mais non réduit à $\bar{q}$ [5].

Soient B et C deux ensembles dénombrables, soient $(B^{\mathbb{Z}}, \mu, T)$ et $(C^{\mathbb{Z}}, \nu, T)$ deux ststèmes dynamiques. Nous dirons que ces systèmes sont finitairement isomorphes s'il existe des sous-ensembles mesurables B_1 et C_1 de $B^{\mathbb{Z}}$ et $C^{\mathbb{Z}}$, de mesure 1, et une application f bijective et bicontinue de B_1 sur C_1 commutant aux applications T et telle que $f(\mu) = \nu$.

Remarquons que la continuité en y signifie qu'il existe $n = n(y)$ tel que

$$[y_{-n} \ldots y_n] = [x_{-n} \ldots x_n] \quad \Rightarrow \quad (f(y))_0 = (f(x))_0.$$

Nous appellerons processus de Bernoulli tout système de la forme $(A^{\mathbb{Z}}, \mu, T)$ où μ est la mesure produit sur $A^{\mathbb{Z}}$ d'une mesure m sur A.

([1]) Sigmund a montré que 1. implique 2. et 3.

THÉORÈME III. — *Soit θ un nombre réel strictement supérieur à* 1, *$(a_0, a_1 a_2 \ldots)$ son θ-développement. Les propositions* non *A et B sont équivalentes et entraînent la proposition C* :

(*A*) *Tout mot admissible en base θ apparaît une infinité de fois dans la suite $(a_n)_{n \geq 0}$.*

(*B*) *Le θ-shift est un système synchronisant.*

(*C*) *Le θ-shift est finitairement isomorphe à un système de Bernoulli et la mesure de Parry μ_θ coïncide avec la mesure synchronisante* (1).

Soit W_n l'ensemble des mots de longueur n admissibles pour le θ-shift, et soit w_n son cardinal; soit P_n l'ensemble des mots périodiques de longueur n, c'est-à-dire des mots $q_1 \ldots q_n$ tels que $q_1 \ldots q_n q_1 \ldots q_n q_1 \ldots q_1 q_n$ est admissible, quel que soit le nombre de répétitions de $q_1 \ldots q_n$ — ainsi si $\theta^2 = \theta + 1$, 01010101 est dans P_8 — et soit p_n son cardinal; soit C_n l'ensemble des mots de la forme $c = ab \ldots l$ où $a, b, \ldots l$ sont des mots du code; nous les appellerons des messages, et ils sont tous admissibles en base θ, et font partie de P_n; soit c_n le cardinal de C_n.

Soit θ un β-nombre simple : $\theta = a_0 + \ldots + a_k/\theta^k$.

Le sous-shift associé à θ est Markovien d'ordre k; soit $\mathcal{M}$ la matrice associée; pour tous mots $u = u_0 \ldots u_k$ et $v = v_0 \ldots v_k$ admissibles de longueur k

$\mathcal{M}_{uv} = 1$ si $v_0 \ldots v_{k-1} = u_1 \ldots u_k$
et si $u_0 \ldots u_k v_k$ est admissible

$$\mathcal{M}_{uv} = 0 \text{ sinon.}$$

Il est classique [8] que

$$p_n = \operatorname{Tr} \mathcal{M}^n.$$

THÉORÈME IV. — 1. *Soit θ un nombre strictement supérieur à* 1, *$(a_0 a_1 a_2 \ldots)$ son développement en base θ.*

Alors c_n est le terme en Y^n du développement en série de la fonction

$$\frac{1}{1 - (a_0 Y + a_1 Y^2 + \ldots + a_n Y^{n+1} + \ldots)}$$

(1) Nous renvoyons à [5] pour l'étude des mesures synchronisantes; dans tous les cas la mesure μ_θ est la mesure d'entropie Log θ définie par le code M.

et il existe une constante H et une série entière $\sum_{n\geq 0} d_n Y^n$ de rayon strictement supérieur à $1/\theta$ telles que

$$c_n = H\,\theta^n + d_n$$

et c_n et $H\theta^n$ sont équivalents au voisinage de l'infini. De plus avec la convention $c_0 = 1$:

$$p_n = c_n + a_1 c_{n-2} + 2a_2 c_{n-3} + \ldots + k a_k c_{n-k-1} + \ldots + (n-1) a_{n-1} c_0$$

et il existe une constante J telle que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{\theta^n} = J$$

enfin si θ n'est pas un β nombre simple :

$$w_n = c_n + c_{n-1} + \ldots + c_0$$

si θ est un β-nombre simple : $\theta = a_0 + \ldots + (a_k/\theta^k)$ et si n est supérieur ou égal à k :

$$w_n = c_n + \ldots + c_{n-k-1}.$$

et dans les deux cas il existe une constante L telle que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{\theta^n} = L$$

(il est d'ailleurs classique que l'entropie topologique $\lim_{n\to\infty}(\operatorname{Log} w_n/n)$ du θ-shift est égale à $\operatorname{Log}\theta$).

2. *Soit θ un β-nombre simple : $\theta = a_0 + \ldots + a_k/\theta^k$; soit $R(X) = X^{k+1} - a_0 X^k - \ldots - a_k$, $\alpha_1 = \theta, \alpha_2 \ldots \alpha_k$ les racines de $R(X)$, $r_1 = 1, r_2 \ldots r_h$ leur multiplicité, soit B l'ensemble des valeurs propres de $\mathscr{M}$; alors*

$$B = \{\lambda_1 \ldots \lambda_h\} \qquad \text{ou bien} \quad B = \{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_h\}$$

$$p_n = \operatorname{Tr} \mathscr{M}^n$$

$$c_n = \theta^n c_1^1 + \sum_{i=2}^h \lambda_i^n (c_{r_i}^i n^{r_i - 1} + c_{r_i - 1}^i n^{r_i - 2} + \ldots + c_1^i,$$

où les termes $c_{r_j}^j$ sont tous différents de 0.

w_n s'écrit de même

$$w_n=\theta^n w_1^1+\sum_{i=2}^n \lambda_i^n (w_{r_i}^i n^{r_i-1}+\ldots+w_1^i),$$

avec des coefficients $w_{r_i}^i$ non-nuls sauf peut-être si λ_i est racine $(k+2)^0$ de l'unité.

Le nombre c_n et w_n s'écrivent de façon analogue lorsque θ est un β-nombre quelconque :

$$\theta=a_0+\frac{a_1}{\theta}+\ldots+\frac{a_m}{\theta^m}+\frac{a_{m+1}}{\theta^{m+1}}+\ldots$$
$$+\frac{a_{m+l}}{\theta^{m+l}}+\frac{a_{m+1}}{\theta^{m+l+1}}+\ldots+\frac{a_{m+l}}{\theta^{m+2l}}+\frac{a_{m+l+1}}{\theta^{m+2l+1}}+\ldots$$

Le polynôme $R(X)$ est alors

$$R(X)=X^{m+l+1}-(a_0 X^{m+l}+\ldots+a_m X^l+a_{m+1} X^{l-1}+\ldots+a_{m+l})$$
$$-(X^{m+1}-(a_0 X^m+\ldots+a_m))$$

dont θ est la seule racine réelle supérieure à 1 ([2]), et $\lambda_1 \ldots \lambda_h$ ses racines, de multiplicité $r_1 \ldots r_h$, mais on peut plus affirmer que les coefficients $c_{r_i}^i$ sont non nuls.

Les résultats qui suivent concernent essentiellement les nombres de Pisot.

Remarquons qu'un nombre supérieur à 1 est un nombre de Pisot si et seulement si la série $\sum_{m\geqslant 0}\|\theta^m\|$ converge.

LEMME I. — *Soit θ un nombre de Pisot; il existe une constante M et un nombre α strictement inférieur à 1 tels que*

1. *pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'entiers relatifs bornés par un nombre R en valeur absolue la série de terme général $(u_n\theta^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ converge modulo* un *vers un nombre y en vérifiant :*

$$\forall l\geqslant 0,\quad \forall h\geqslant 0,\quad \Big\|y-\sum_{n=-h}^{l} u_n\theta^n\Big\|<RM(\alpha^l+\alpha^h).$$

2. *Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, de θ-développement* $(0, \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon, \ldots)$

$$\forall h\geqslant 0,\quad \forall l\geqslant 0,\quad \left\|x\theta^n-\left(\varepsilon_{n-l}\theta^l+\ldots+\varepsilon_{n-1}\theta+\varepsilon_n+\frac{\varepsilon_{n+1}}{\theta}+\ldots+\frac{\varepsilon_{n+h}}{\theta^h}\right)\right\|$$
$$<M\alpha^l+\frac{1}{\theta^h}.$$

Cela signifie qu'on peut tronquer

$$x\theta^n = \varepsilon_0 \theta^n + \ldots + \varepsilon_{n-l}\theta^l + \ldots + \frac{\varepsilon_{n+h}}{\theta^n} + \frac{\varepsilon_{n+h+1}}{\theta^{n+1}} + \ldots$$

en conservant une bonne approximation.

Nous appellerons $\mathbb{Q}(\theta)$ l'ensemble des nombres du corps de θ : si θ est de degré s

$$\mathbb{Q}(\theta) - \{ c_0 + c_1\theta + \ldots + c_{s-1}\theta^{s-1} \quad \text{ou} \quad c_i \in \mathbb{Q} \}.$$

THÉORÈME V. — *Soit θ un nombre de Pisot; alors un nombre réel admet un développement en base θ périodique après un certain rang si et seulement s'il appartient à $\mathbb{Q}(\theta)$.*

Les nombres de Pisot sont donc des β-nombres.

Il s'ensuit que le θ-shift associé forme un système sofique et finitairement isomorphe à un processus de Bernoulli. Le théorème V généralise un résultat de Meyer [17].

Les résultats qui suivent s'appuient sur le :

THÉORÈME VI. — 1. *Soit θ un nombre de Pisot de degré s, vérifiant $\theta^s = b_s\theta^{s-1} + \ldots + b_1$; alors il existe une application continue q du θ-shift bilatéral $\underline{X}$ dans le tore $\mathbb{T}$ définie par :*

$$q((\varepsilon_n)_{n\geq 0}) = \textstyle\sum_{\mathrm{mod}\ 1,\, n\in Z} \varepsilon_n \theta^{-n}.$$

Cette application est uniformément continue et surjective et si

$$x = 0,\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots$$

si $\varepsilon = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots)$ et si $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_n)_{n\in Z}$,

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_n \qquad \textit{pour} \quad n \geqslant 0$$

$$0 \qquad \textit{sinon}.$$

Alors $\{ x\theta^n \} = q(T^n \underline{\varepsilon})$.

2. *Soit $(\mathbb{T}^s, T^s)$ le tore de dimension s muni de l'endomorphisme :*

$$T_s(x_1, \ldots, x_s) = (x_2, \ldots, x_s, b_1 x_1 + \ldots + b_s x_s).$$

L'application du θ-shift bilatéral $\underline{X}$ dans $\mathbb{T}^s$:

$$q((\varepsilon_n)_{n\in Z})=[q(\varepsilon), q(T\varepsilon), \ldots, q(T^{s-1}\varepsilon)]$$

est uniformément continue et vérifie :

$$T_s\circ q_s=q_s\circ T$$

et si

$$x=0,\quad \varepsilon_1\,\varepsilon_2\ldots\qquad \underline{\varepsilon}=\varepsilon_n\quad si\quad n\geqslant 0$$
$$0\quad sinon.$$

Alors

$$q_s(T^n(\underline{\varepsilon}))=(x\theta^n, \ldots, x\theta^{n+s-1}).$$

A un point x de $[0, 1]$ on associe donc successivement le point $p(x)$ du θ-shift unilatéral, le point $\underline{p(x)}$ du θ-shift bilatéral et le point $q_s(\underline{p(x)})$ du tore $\mathcal{T}^s$. Il en est de même pour les mesures T-invariantes sur $[0, 1]$.

Étant donné un espace métrique X muni d'une transformation T et de la tribu des boréliens, nous dirons qu'un point x appartenant à X est générique pour la mesure μ si la suite $(T^n x)_{n\geqslant 0}$ est répartie selon la mesure μ, et que la mesure μ est associée à x si la mesure μ est associée à la suite $(T^n x)_{n\geqslant 0}$.

Nous munirons implicitement le tore $\mathbb{T}^s$ de l'application T_s et de la tribu des boréliens.

THÉORÈME VII. — *Soit θ un nombre de Pisot de degré s; soit un point x de* $[0, 1]$, $\varepsilon=\varepsilon_1\,\varepsilon_2\ldots$ *son développement en base* θ; *si la mesure μ est associé au point x de* $[0, 1]$, *la mesure* $\underline{\mu}=p(\mu)$ *est associée au point* ε *du θ-shift bilatéral et enfin la mesure* $q_s(\mu)$ *est associée au point* $q_s(\underline{\varepsilon})$ *du tore* $\mathbb{T}^s$.

Plus généralement, l'image q_s d'une mesure T-invariante sur le θ-shift bilatéral est une mesure T_s invariante sur le tore $\mathbb{T}^s$; et toute mesure T_s invariante ν sur le tore est l'image d'une mesure invariante sur le θ-shift et l'on peut trouver un point générique pour ν de la forme :

$$(x, x\theta, \ldots, x\theta^{s-1}).$$

En réalité nous aurions pu écrire les théorèmes VI et VII sous la forme suivante :

THÉORÈME VI′. — *Soit $t=(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres réels tels que la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|t_n\|$ converge. Soit C un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$, $v=(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ un élément de $C^{\mathbf{Z}}$, μ une mesure sur $C^{\mathbf{Z}}$; alors le nombre $g(v)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}v_i t_i$ existe et l'application g_s de $C^{\mathbf{Z}}$ dans le tore $\mathbb{T}^s$*

$$v\to(g(v),\,g(Tv),\,\ldots,\,g(T^{s-1}v))$$

est continue.

Si la suite $(T^n(v))_{n\geqslant 0}$ de $C^{\mathbf{Z}}$ est répartie selon une mesure μ alors la suite

$$(g(T^n v),\,\ldots,\,g(T^{n+s-1}v))_{n\geqslant 0}$$

est répartie dans le tore $\mathbb{T}^s$ selon la mesure $g_s^*(\mu)$.

DEFINITION IV. — Soit θ un réel strictement supérieur à 1; nous dirons qu'un nombre réel x est normal en base θ si la suite $(x\theta^n)_{n\geqslant 0}$ est équirépartie modulo un; nous appellerons $B(\theta)$ l'ensemble de ces nombres.

Nous dirons qu'un nombre réel $x=\varepsilon_0,\,\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$ admet un développement normal en base θ si la suite $(T^n\varepsilon)_{n\geqslant 0}$ où $\varepsilon=\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$ est répartie dans X selon la mesure μ_θ de Rényi-Parry. Nous appellerons $N(\theta)$ l'ensemble de ces nombres.

Notons que $N(\theta)$ est toujours stable par translation entière et $B(\theta)$ l'est aussi lorsque θ est un nombre de Pisot puisque $\|\theta^n\|$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Nous nous limiterons donc implicitement à l'étude de $[0,1[$ lorsque θ sera un nombre de Pisot.

THÉORÈME VIII. — *Soit θ un nombre de Pisot de degré s; les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $x\in N(\theta)$

2. *La suite du tore $\mathbb{T}^s(x\theta^n,\,\ldots,\,x\theta^{n+s-1})_{n\geqslant 0}$ est équirépartie modulo* un.

COROLLAIRE IX. — *Soit θ un nombre de Pisot, alors $N(\theta)$ est inclus dans $B(\theta)$.*

COROLLAIRE X. — *Soit θ un nombre de Pisot; les propositions suivantes sont équivalentes* :

1. $x \in N(\theta)$.
2. *Pour tout nombre α de $\mathbb{Q}[\theta]$, αx appartient à $B(\theta)$.*
3. *Pour tout nombre α de $\mathbb{Z}[\theta]$, αx appartient à $B(\theta)$.*

THÉORÈME XI. — 1. *Soit θ un nombre de Pisot. Soit $\alpha \neq 0$, soit β appartenant à $\mathbb{Z}[\theta]$; alors*

$$\alpha N(\theta) + \beta = N(\theta).$$

2. *Soit p un entier supérieur ou égal à 1 :*

$$N(\theta^p) = N(\theta).$$

3. *Si $\sqrt[q]{\theta}$ est encore un nombre de Pisot*

$$N(\theta) \subset N(\sqrt[q]{\theta}).$$

Un corollaire immédiat est que :

COROLLAIRE XII. — *Soit θ un nombre de Pisot. Avec les notations ci-dessus*

$$\alpha N(\theta) + \beta \subset B(\theta)$$
$$N(\theta) \subset B(\theta^p)$$
$$N(\theta) \subset B(\theta^{p/q}).$$

Exemple. — Soit $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ la suite formée en juxtaposant les messages de longueur 1, puis ceux de longueur 2, et ainsi de suite (dans un ordre quelconque à l'intérieur de chaque groupe de messages de même longueur 1; la suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ est alors un θ développement et ([14])

$$x = \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{\theta^n}$$

est un élément de $N(\theta)$ (ceci même si θ n'est pas un nombre de Pisot).

Autre exemple. — Soit $(\varepsilon'_n)_{n \geq 0}$ la suite formée en juxtaposant les mots admissibles de longueur 1, puis ceux de longueur 2 et ainsi de suite (dans un ordre quelconque comme ci-dessus); bien que la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ ne soit pas un θ-développement, le nombre

$$x=\sum_{n\geq 1}\frac{\varepsilon_n}{\theta^n}$$

appartient, lorsque θ est un nombre de Pisot, à $N(\theta)$ [donc aussi à $B(\theta)$] (par exemple si $\theta=2+(1/\theta)+(1/\theta^2)+\ldots$,

$$(\varepsilon_n)_{n\geq 0}=010001101120000001010 0\times 20100101111 2001012100000\ldots$$

THÉORÈME XIII. — *Soit* $\theta>1$ *vérifiant* $\theta^{2r}=a\theta^r+1$ *ou* r, $a\in\mathbb{N}^*$; *soit* p *un entier supérieur ou égal à* 1 :

$$B(\theta)\subset B(\theta^p)$$

$$\frac{1}{p}B(\theta)=B(\theta).$$

Le charme de ce résultat est qu'il soit un tout petit peu du cadre des nombres de Pisot en passant à leurs racines r-èmes.

Nous donnerons une démonstration « probabiliste » d'une généralisation d'un théorème dû à Mendès France [15].

THÉORÈME XIV. — *Soit* θ *un nombre de Pisot.*

1. *Soit* $E=\{x;\ x=\sum\varepsilon_n/\theta^n;\ \varepsilon_n=0$ *ou* $1\}$ *où les chiffres* ε_n *apparaissent avec les probabilités* λ_0 *et* λ_1 *indépendamment les uns des autres* $(T^n\varepsilon)_{n\geq 0}$ *est réparti selon une mesure de Bernoulli). Alors :*

$$E\cap B(\theta)=\varnothing.$$

2. *Soit* a *un entier supérieur ou égal à* 1.

Soit $F=\{x;\ x=\sum\varepsilon_n/\theta^n$ *ou* $\varepsilon_n=0,\ldots,a-1\}$ *où les chiffres* ε_n *apparaissent indépendamment les uns des autres avec la probabilité* $1/a$. *Alors*

$$F\cap B(\theta)=\varnothing.$$

Enfin, le théorème XV (toujours directement inspiré des travaux de Mendès France) montre que si l'indépendance des chiffres est un obstacle à l'équirépartition dans le cas des nombres de Pisot, en général il n'en est rien.

THÉORÈME XV. — *Soit θ un nombre strictement supérieur à* 1 *tel que la suite* $(\theta^m)_{m\geq 0}$ *soit équirépartie modulo* un.
Alors

$$B(\theta)\subset N(\theta)$$

et la dimension de Hausdorff de la différence entre ces deux ensembles est positive.

On peut en réalité énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME XV *bis.* — *Soit θ un nombre réel supérieur à* 1; *supposons qu'il existe un nombre ε strictement positif tel que la densité inférieure de l'ensemble* $\{n;\|k\theta^n\|>\varepsilon\}$ *soit strictement positive pour* $k=1, 2, 3\dots$

Soit r un entier compris entre 1 *et θ.*

Soit E l'ensemble de Cantor

$$E=\{x\,|\,x=\textstyle\sum_{n\geq 1}\varepsilon_n\theta^{-n};\ \varepsilon_n=0, 1, \dots, r-1\}$$

muni de sa mesure de Lebesgue l.

Alors $E\cap N(\theta)$ est vide mais $E\cap B(\theta)$ est non vide : l-presque tout x de E appartient à $B(\theta)$.

Notons que les nombres de Salem, genre de « débouché naturel » des nombres de Pisot, rentrent dans la catégorie ci-dessus et que pour presque tout θ supérieur à 1 la suite $(\theta^n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un.

III. Démonstration des théorèmes I, II, III, IV

Soit M l'ensemble des mots explicités au théorème I :

$$M=\{0, \dots, a_0-1, a_0 0\,\text{etc.}\};$$

par exemple si $\theta^2=\theta+1$, $M=\{0, 10\}$; si $\theta=2+1/\theta+1/(\theta^2)+\dots$,

$$M=\{0, 1, 20, 210, 2110, \dots, 2111110, \dots\}.$$

Il est clair que M est une partie préfixe de A^*, donc un code [6] et que M comprend a_k mots de longueur $k+1$: il est donc bien fini si et seulement si $a_k=0$ à partir d'un certain rang avec la convention faite dans l'énoncé.

Montrons par récurrence sur la longueur $n+1$ d'un mot $b_0 \dots b_n$ que tout mot admissible en base θ est facteur d'un mot du monoïde M^* : c'est vrai pour $n=0$ car

si $b_0 < a_0$, b_0 lui-même est un mot du code,

si $b_0 = a_0$, soit h un indice tel que a_h soit non nul et que le développement de θ commence par $a_0 \dots a_h$: b_0 est facteur de ce mot. Si h n'existe pas c'est que θ est entier, et le mot $b_0 = a_0$ n'est pas admissible, la question ne se pose pas.

Supposons que tout mot admissible de longueur inférieure ou égale à n est facteur d'un mot de M^* et montrons qu'il en est de même pour les mots admissibles de longueur $n+1$; soit $b_0 \dots b_n$ un tel mot.

Si $b_0 < a_0$, b_0 est un mot du code, $b_1 \dots b_n$ est dans l'ensemble $F(M^*)$ des facteurs de M, et $b_0 \dots b_n$ aussi.

Si $b_0 = a_0$ et s'il existe h inférieur ou égal à n tel que :

$$b_0 \dots b_h = a_0 \dots a_{h-1}(a_h - 1) \qquad \text{ou} \quad i \in [1, a_h]$$

alors $b_0 \dots b_h$ est un mot du code, $b_{h+1} \dots b_n$ est de longueur inférieure à n ou vide donc dans $F(M^*)$ et $b_0 \dots b_n$ est dans $F(M^*)$.

Sinon $b_0 \dots b_n = a_0 \dots a_n$; s'il existe h tel que a_{n+h} soit non nul et que le développement de θ commence par $a_0 \dots a_n \dots\dots a_{n+h}$, $b_0 \dots b_n$ est facteur du mot du code $a_0 \dots a_n \dots\dots (a_{n+h} - 1)$; si un tel h n'existe pas c'est que le développement de θ se termine par des zéros et que le mot $a_0 \dots a_n = b_0 \dots b_n$ n'est pas admissible, la question ne se pose pas : les mots admissibles pour le θ-shift sont dans $F(M^*)$.

Réciproquement tout mot de $F(M^*)$ est admissible : d'après la définition 2 un mot $c_1 \dots c_n$ est admissible si

$$c_1 \dots c_n \leqslant a'_0 a'_1 a'_2 \dots$$
$$c_2 \dots c_n \leqslant a'_0 a'_1 a'_2 \dots$$
$$c_n \leqslant a'_0 a'_1 a'_2 \dots$$

pour l'ordre lexicographique; les mots du code sont des mots admissibles d'après leur définition au théorème I et même si $c_0 \dots c_h$ est un mot du code :

$$c_0 \dots c_h < a'_0 \dots a'_h$$
$$c_1 \dots c_h < a'_0 \dots a'_h$$
$$c_n < a_0 \dots a_h$$

Soit $b_1 \ldots b_n$ un mot de $F(M^*)$. Écrivons le

$$b_1 \ldots b_n = b_1 \ldots b_h b_{h+1} \ldots + b_l b_{l+1} \ldots b_n$$

où

$a_0 \ldots a_s b_1 \ldots b_h$ est un mot du code;

$b_{h+1} \ldots b_l$ est un message (produit de mots du code);

$b_{l+1} \ldots b_n a_r \ldots (a_{r+p}-1)$ est un mot du code.

Comme $a_0 \ldots b_h$ est un mot du code

$$b_1 \ldots b_h b_{h+1} \ldots b_l \ldots b_n < a_0 \ldots a_{n-1}$$

$$b_h b_{h+1} \ldots b_n < a_0 \ldots a_{n-1}.$$

Comme $b_{h+1} \ldots b_l$ est un message, produit de mots du code :

$$b_{h+1} \ldots b_n < a_0 \ldots a_{n-h-1} \leqslant a_0 \ldots a_n$$

$$b_l \ldots b_n < a_0 \ldots a_{n-h-1} < a_0 \ldots a_n.$$

Comme $b_{l+1} \ldots b_h$ est égal à $a_0 \ldots a_{r-1}$ les inégalités correspondantes sont vérifiées et $b_1 \ldots b_n$ est admissible.

Exemple. – Soit $\theta^2 = \theta + 1$ $(\theta = (1 + \sqrt{5}/2)$.

La suite $(a_0 a_1 \ldots)$ se termine par des zéros et vaut $(110000\ldots)$.

Un mot est admissible si le chiffre 1 est toujours suivi d'un zéro et le code est formé des mots 0 et 10.

Soit $\theta = (2, 1111\ldots)$.

Un mot est admissible si après le chiffre 2 ne figure aucun mot $111\ldots12$. Le code est formé des mots

0 1 210 2110 etc.

Soit $\theta = (1, 0100100010000\ldots)$.

Le code est formé par les mots :

$$0 \quad 100 \quad 101000 \quad 1010010000 \quad 101001000100000,$$

et ainsi de suite.

Il est clair que ρ_M est supérieur ou égal à 1 et comme

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{\theta^{n+1}} = 1, \quad \text{alors} \quad \rho_{M^*} = \frac{1}{\theta} \quad [6]$$

Le langage associé au θ-shift est factoriel, prolongeable et transitif comme tout langage codé.

Montrons que le monoïde syntaxique est fini (donc que le système est sofique) si et seulement si θ est un β-nombre.

Supposons que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ n'est pas périodique après un certain rang (c'est-à-dire que θ n'est pas un β-nombre).

Alors il existe un nombre infini d'indices $i_1, i_2, i_3 \ldots$ tels que les suites

$$(a_{i_k+1}\, a_{i_k+1} \ldots)$$

soient toutes distinctes.

Étant donné $i_1 \neq i_2$ il existe donc un entier $p \geq 0$ tel que

$$a_{i_1+1} \ldots a_{i_1+p-1} = a_{i_2+1} \ldots a_{i_2+p-1}$$

et pour fixer les idées

$$a_{i_1+p} < a_{i_2+p}.$$

Alors le mot $a_{i_2+1} \ldots a_{i_2+p-1} (a_{i_2+p} - 1)$ prolonge le mot $a_0 \ldots a_{i_2}$ mais pas le mot $a_0 \ldots a_{i_1}$: ces mots se trouvent dans des classes distinctes de la relation d'équivalence syntaxique, le monoïde syntaxique est donc infini et le système n'est pas sofique.

Soit $\theta = a_0 + (a_1/\theta) + \ldots + (a_k/\theta^k)$ un β nombre simple.

Soit $c_1 \ldots c_m$ un mot admissible, que l'on peut prolonger en un mot admissible

$$u_1 \ldots u_j = b_1 \ldots b_l c_1 \ldots c_m d_1 \ldots d_m$$

le mot $u_1 \ldots u_j$ est admissible si et seulement si

$$\forall h \geqslant 0, \quad u_h \ldots u_{n+k+1} < a_0 \ldots a_k$$

(on posera $u_r = 0$ si $r > j$ ou $r \leqslant 0$).

Les seules égalités qui ne sont pas vérifiées du seul fait que $b_1 \ldots b_l$, $c_1 \ldots c_m$, $d_1 \ldots d_m$ sont des mots admissibles sont (elles se superposent éventuellement si la longueur de $c_1 \ldots c_m$ est inférieure à k; on peut toujours supposer cette longueur supérieure à k)

$$b_{l-k} \ldots b_l c_1 < a_0 \ldots a_k$$
$$b_{l-k+1} \ldots b_l c_1 c_2 < a_0 \ldots a_k$$
$$b_l c_1 \ldots c_k < a_0 \ldots a_k$$
$$c_{m-k} \ldots c_m d_1 < a_0 \ldots a_k$$
$$c_{m-k+1} \ldots c_m d_1 d_2 < a_0 \ldots a_k$$

$$c_m d_1 d_2 \ldots d_k < a_0 \ldots a_k$$

avec la même convention

$$d_i = 0, \qquad i > n.$$

Ces inégalités sont en nombre fini lorsque $c_1 \ldots c_m$ parcourt l'ensemble des mots admissibles et le monoïde syntaxique est fini (les mots non admissibles de A sont tous dans la même classe, sans avenir ni passé).

LEMME I. — *Soit*

$$\theta = a_0 + \frac{a_1}{\theta} + \ldots + \frac{a_k}{\theta^k} + \frac{\alpha_1}{k+1} + \ldots + \frac{\alpha_p}{\theta^{k+p}} + \frac{\alpha_1}{\theta^{k+p+1}} + \ldots + \frac{\alpha_p}{\theta^{k+2p+1}} + \ldots$$

un β-nombre non simple.

Alors le monoïde syntaxique associé au θ-shift est isomorphe au monoïde syntaxique associé au β nombre simple

$$\theta_1 = a_0 + \frac{a_1}{\theta_1} + \ldots + \frac{a_k}{\theta_1^k} + \frac{\alpha_1}{\theta_1^{k+1}} + \ldots + \frac{\alpha_p}{\theta_1^{k+p}}.$$

Le θ-shift sera donc encore un système sofique lorsque θ est un β-nombre.

Un mot est admissible en base θ si a_0 n'y figure pas ou bien si lorsqu'on rencontre a_0, c'est sous la forme d'un bloc du type suivant :

$$a_0 0,\ a_0 1,\ \ldots,\ a_0(a_1-1)$$
$$a_0 a_1 0,\ \ldots,\ a_0 a_1(a_2-1),\ \ldots,\ a_0 a_1 \ldots a_{k-1} 0 \ldots a_0 a_1 \ldots a_{k-1}(a_k-1)$$
$$a_0 \ldots a_k \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p \ldots \alpha_1 \ldots \alpha_p \alpha_1 \ldots \alpha_h b$$

où $h \in \{0, p-1\}$ et $b < q_{k+1}$; ici le nombre de blocs $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ peut être 0 ou n'importe quel entier et b est un mot admissible.

Soit σ l'application contraction qui à un mot c associe le mot $\sigma(c)$ que nous formerons

– en transformant tout mot $a_0 \ldots a_k \alpha_1 \ldots \alpha_p \alpha_1 \ldots \alpha_p \ldots \alpha_1 \ldots \alpha_h b$ en $a_0 \ldots a_k \alpha_1 \ldots \alpha_h b$ (où $b < \alpha_{h+1}$) chaque fois qu'on le rencontre dans c;

– en transformant un mot $a_0 \ldots a_k \alpha_1 \ldots \alpha_p \ldots \alpha_1 \ldots \alpha_h$ lorsqu'il termine le mot c en $a_0 \ldots a_k \alpha_1 \ldots \alpha_h$;

– en transformant le début du mot c, lorsqu'il est de la forme

$$a_i \ldots a_k \alpha_1 \ldots \alpha_p \ldots, \alpha_1 \ldots \alpha_h b \quad \text{en} \quad a_i \ldots a_k \alpha_1 \ldots \alpha_h b$$

lorsqu'il est de la forme

$$\alpha_k \ldots \alpha_p \alpha_1 \ldots \alpha_p \ldots \alpha_1 \ldots \alpha_p \alpha_1 \ldots \alpha_h b$$
$$\text{en} \quad \alpha_k \ldots \alpha_p \alpha_1 \ldots \alpha_h b \qquad \text{si} \quad k > h$$
$$\text{en} \quad \alpha_k \ldots \alpha_h b \qquad \text{si} \quad k < h$$
$$\alpha_h b \qquad \text{si} \quad k = h$$

(ici b désigne éventuellement le mot vide si c est de la forme

$$a_i \ldots a_k \alpha_1 \ldots \alpha_p \alpha_1 \ldots \alpha_h \text{ ou } \alpha_k \ldots \alpha_p \ldots \alpha_1 \ldots \alpha_h).$$

Par exemple si $\theta = 4$, $321132113211\ldots$

$$\sigma(00432113211320104043043211321) = 00432010404304321$$
$$\sigma(211321132100) = 2100$$
$$\sigma(211321132113200) = 200.$$

Les mots obtenus sont exactement les mots admissibles pour le θ_1 shift où

$$\theta_1 = a_0 + \frac{a_1}{\theta} + \frac{a_2}{\theta^2} + \ldots + \frac{a_k}{\theta^k} + \frac{\alpha_1}{\theta^{k+1}} + \ldots + \frac{\alpha_p}{\theta^{k+p}}$$

Soient φ et φ_1 les surjections canoniques envoyant les mots de A^* dans les monoïdes syntaxiques associés à θ et θ_1 respectivement.

Si $\sigma(c) = \sigma(c')$ alors $\varphi(c) = \varphi(c')$ et $\varphi_1(\sigma c) = \varphi_1(\sigma c')$.

Réciproquement si $\varphi(c) = \varphi(c')$ c'est que $\varphi_1(\sigma c) = \varphi_1(\sigma c')$.

Soit σ l'application qui va du monoïde syntaxique associé à θ dans le monoïde associé à θ_1 définie par :

$$\sigma(\varphi(c) = \varphi_1(\sigma c)$$

elle est définie d'après ce qui précède, injective de même et surjective car un mot du θ_1 shift est admissible pour le θ-shift.

De plus

$$\begin{aligned} \sigma(\varphi(c c') &= \varphi_1(\sigma(c c')) \\ &= \varphi(\sigma(\sigma(c), \sigma(c')) \end{aligned}$$

(il peut apparaître des $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ à faire disparaître au contact de deux mots)

$$= \varphi_1(\sigma(c c')).$$

Nous obtenons donc un isomorphisme de monoïdes.

Nous aurions pu utiliser un automate reconnaissant le langage associé au shift pour faire cette démonstration, mais la relation entre les divers monoïdes syntaxiques n'apparaissait pas aussi bien.

Preuve du corollaire. — Soit L le langage associé au θ-shift. Si l'idéal $A^* \diagdown L$ de A^* est engendré par une famille finie de mots alors le sous-shift associé est une chaîne de Markov topologique et inversement.

Dans le cas du θ-shift cet idéal est engendré par les « mots interdits » qui sont :

— si θ est un β-nombre simple,

$$\theta = a_0 + \frac{a_1}{\theta} + \ldots + \frac{a_k}{\theta^k}$$

les mots de longueur $h \in [0, k]$ strictement supérieurs à $a_0 \ldots a_h$ et les mots supérieurs ou égaux à $a_0 \ldots a_k$; ils sont en nombre fini et nous obtenons une chaîne de Markov;

— si θ n'est pas un β nombre simple :

$$\theta = a_0 + \ldots + \frac{a_n}{\theta^n} + \ldots$$

et il existe une infinité d'indices i_m tels que a_{i_m} soit inférieur à a_0.

Les mots interdits sont les mots de longueur 2 supérieurs strictement à $a_0 a_1$, ceux de longueur 3 strictement supérieurs à $a_0 a_1 a_2$ et ainsi de suite.

Le mot $a_0 \ldots a_{i_m - 1}(a_{i_m} + 1)$ se trouve dans A^* et n'appartient pas à l'idéal engendré par les autres mots interdits (il est trop long pour les mots de longueur supérieure à i_m et les mots interdits de longueur inférieure commencent par $a_0 \ldots a_{i_m} + l$, $l > 0$).

Preuve du théorème II. — Montrons que $1 \Rightarrow 2$.

Soit $\varepsilon > 0$; érant donné h tel que $a_{k+1} \ldots a_{k+h-1} = 0 \Rightarrow a_{k+h} \neq 0$; prenons $M(\varepsilon)$ tel que

$$\frac{1}{2^{(M(\varepsilon)/4)}} < \varepsilon$$

$$M(\varepsilon) \geqslant 4h.$$

Soient $(x_{1n})_{n \geqslant 0} \ldots (x_{kn})_{n \geqslant 0}$ k points de X; soient $m_1 \leqslant n_1 < m_2 \leqslant n_2 \ldots < m_k \leqslant n_k$ avec $m_i - n_i - 1 > M(\varepsilon)$, soit $p \geqslant n_k - m_1 + M(\varepsilon)$.

Posons pour tout $i = 1 \ldots k$

$$z_{m_i - (M(\varepsilon)/4)} \ldots z_{m_i} \ldots z_{n_i} \ldots z_{n_i + (M(\varepsilon)/4)}$$
$$= x_{i,\, m_i - (M(\varepsilon)/4)} \ldots x_{i,\, m_i} \ldots x_{i,\, n_i} \ldots x_{i,\, n_i + (M(\varepsilon)/4)}$$
$$z_{n_i + (M(\varepsilon)/4)} \ldots z_{m_{i+1} - (M(\varepsilon)/4)} = 0 \ldots 0$$

et enfin :

$$z_{n_k + (M(\varepsilon)/2)} \ldots z_{m_1 + p - 1} = 0 \ldots 0$$

et ceci définit un élément $(z_n)_{n \geqslant 0}$ de période p, qui approche les pièces d'orbites de $(x_{1n})_{n \geqslant 0} \ldots (x_{kn})_{n \geqslant 0}$ comme il est demandé pour la propriété de spécification et qui appartient au θ-shift car la condition

$$q_{n+1} \dots q_{n+h-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{n+h} \neq 0$$

implique que si u et v sont deux mots admissibles et si $b = b_1 \dots b_h = 0$, alors le mot ubv est admissible.

Montrons que si (1) n'est pas vérifié, (2) ne l'est pas non plus. La suite $(a_b)_{n \geqslant 0}$ admet des plages de zéros arbitrairement longues suivies d'un a_i non nul. Il existe donc des entiers M arbitrairement grands tels que

$$a_{n+1} \dots a_{n+2M+1} = 0 \dots 0\, a \qquad \text{avec} \quad a \neq 0.$$

Aucun mot de la forme $a_0 \dots a_n\, b_1 \dots b_M\, 1$ n'est admissible car $a_0 \dots a_n$ doit être suivi de $2M$ zéros, alors que 1 est admissible et $a_0 \dots a_n$ aussi car la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ n'est pas périodique; pour k égal 2 la propriété de spécification n'est pas vérifiée.

Montrons que les propositions (1) et (3) sont équivalentes; supposons tout d'abord que θ n'est pas un β-nombre simple.

Soit $b_1 \dots b_h$ un mot admissible.

Alors

$$p^{-1}[b_1 \dots b_k]^0 = \left\{ \frac{b_1}{\theta} + \dots + \frac{b_h}{\theta^h} + \frac{c_{h+1}}{\theta^{h+1}} + \dots \right\}$$

ou pour tout n $T^n(b_1 \dots b_h c_{h+1} c_{h+2} \dots) < (a_0 a_1 a_2 \dots)$.

Si $b_1 \dots b_h$ ne finit pas par $a_0 \dots a_p$ alors la borne inférieure de p^{-1} $([b_1 \dots b_h]^0)$ est $(b_1/\theta) + \dots + (b_h/\theta^h)$ et la borne supérieure

$$\frac{b_1}{\theta} + \dots + \frac{b_h}{\theta^n} + \frac{a_0}{\theta^{n+1}} + \dots + \frac{a_n}{\theta^{h+n+1}} + \dots = \frac{b_1}{\theta} + \dots + \frac{b_h}{\theta^h} + \frac{1}{\theta^h}$$

et l'intervalle en question est la longueur $1/\theta^h$.

Si $b_1 \dots b_h$ finit par $a_0 \dots a_p$ alors la borne inférieure de

$$p^{-1}([b_1 \dots b_h^0]) \,\text{est}\, \frac{b_1}{\theta} + \dots + \frac{b_{h-2}}{\theta^{n-p-1}} + \frac{a_0}{\theta^{h-p-1}} + \dots + \frac{a_p}{\theta^h}$$

sa borne supérieure est

$$\frac{b_1}{\theta} + \dots + \frac{a_0}{\theta^{n-p-1}} + \dots + \frac{a_p}{\theta^h} + \frac{a_{p+1}}{\theta^{n+1}} + \dots$$

et sa longueur est

$$\frac{a_{p+1}}{\theta^{n+1}}+\ldots=\frac{1}{\theta^h}\left(\frac{a_{p+1}}{\theta}+\frac{a_{p+2}}{\theta^2}+\ldots\right).$$

Cette longueur est bornée inférieurement si et seulement si dans a_n ne figurent pas des plages de zéros de longueur arbitraire : si le nombre de zéro est au maximum h

$$\frac{a_{h+1}}{\theta}+\ldots>\frac{1}{\theta^{h+1}}.$$

S'il peut y avoir Q zéros, il se trouve des intervalles avec

$$\frac{a_{h+1}}{\theta}+\ldots<\frac{1}{\theta^Q}.$$

Si $\theta=a_0+\ldots+(a_k/\theta^k)$ est un β-nombre simple nous ferons de même en remarquant que les développements des nombres compris entre 0 et 1 sont les suites $b=(b_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$\forall m\geqslant 0,\quad T^m b<a_0\ldots a_{k-1}(a_{k-1})a_0\ldots a_{k-1}(a_{k-1})\ldots$$

Remarque. — Désignons par $l([b_1\ldots b_k])$ la longueur de l'intervalle $p^{-1}([b_1\ldots b_k]^0)$. Dans le cas des β-nombres et dans ce cas seulement les quantités

$$\frac{l(b_1\ldots b_k)}{\theta^k}$$

sont en nombre fini (donc forcément minorées).

Comme dans la mesure μ_θ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue l, il existe deux constantes positives c et C telles que :

$$cl(b_1\ldots b_k)<\mu([b_1\ldots b_k]^0)<cl(b_1\ldots b_k).$$

Si $(a_n)_{n\geq 0}$ ne possède pas de plages de zéros arbitrairement longues, il existe des constantes positives g et G telles que

$$\frac{g}{\theta^k}<\mu([b_1\ldots b_k]^0)<\frac{G}{\theta^k}$$

et donc pour tout cylindre $[x_1 \dots x_{n+p}]^0$ et $[g_1 \dots g_n]^0$

$$\frac{g}{G}\mu([x_1 \dots x_{n+p}]^0) < \frac{g}{G}\frac{G}{\theta^{k+p}} \leqslant \frac{g}{\theta^k} < \mu([g_1 \dots g_n]^0).$$

La propriété d'homogénéité est donc vérifiée.

Supposons maintenant que pour tout q il existe un indice n tel que $a_n \dots a_{n+q} = 0 \dots 0$.

Prenons

$$y_1 \dots y_n = a_0 \dots a_{n-1}$$

$$x = x_1 \dots x_{n+p} = 0 \dots 0$$

$$\mu(x_1 \dots x_{n+p}) \geqslant \frac{c}{\theta^{n+p}}$$

$$\mu(y_1 \dots y_n) \leqslant \frac{c}{\theta^{n+q}}.$$

Comme nous pouvons choisir q aussi grand que nous le désirons, la propriété d'homogénéité se trouve contredite.

Preuve du théorème III. — Soit $\theta = a_0, a_1 a_2 \dots$ un nombre strictement supérieur à 1. Définissons un automate reconnaissant le langage associé au θ shift (tout langage associé à un code est reconnu par un automate).

Si la suite $a_0, a_1 \dots$ se termine par des zéros, prenons comme automate

$$Q = (\bar{q}, a, q_{a_0}, q_{a_0 a_1}, \dots q_{a_0 \dots a_n}).$$

Si la suite $(a_0, a_1 \dots)$ ne se termine pas par des zéros, prenons comme automate

$$Q = (\bar{q}, q, q_{a_0}, q_{a_0 a_1}, \dots q_{a_0 \dots a_n}, \dots)$$

et définissons une application ψ de $Q \times A$ dans Q par :

$$\forall a \in A, \quad \bar{q}a = \bar{q}$$

$$\forall a < a_0, \quad qa = q$$

$$qa_0 = q_{a_0}$$

$$\forall a < a_1, \quad q_{a_0} a = q$$
$$q_{a_0} a_1 = q_{a_0 a_1}$$
$$\forall a > a_1, \quad q_{a_0} a = \bar{q}$$

et de même pour tout n :

$$\forall a < a_{n+1} \quad q_{a_0 a_n} a = q$$
$$q_{a_0 \ldots a_n} a_{n+1} = q_{a_0 \ldots a_{n+1}}$$
$$\forall a > a_{n+1}, \quad q_{a_0 \ldots a_n} a = \bar{q}.$$

Alors l'automate $(Q, \psi, \bar{q})$ reconnaît le langage associé au θ shift.

Remarquons que si la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est périodique après un certain rang, l'automate défini par :

$$Q_1 = (\bar{q}, q_{a_0}, q_{a_0 a_1}, \ldots, q_{a_0 \ldots a_m}, q_{a_0 \ldots a_m a_{m+1}}, \ldots, q_{a_0 \ldots a_m \ldots a_{m+l}})$$

avec $\psi(q_{a_0 \ldots a_{m+lh+r}}, q) = \psi(q_{a_0 \ldots a_{m+r}, a})$ reconnaît le langage associé au sous-shift (il s'agit d'un β nombre, pour lequel le sous-shift associé forme un système sofique); le système est alors synchronisant.

Montrons maintenant que non $A \Rightarrow B$. Soit $b_0 \ldots b_n$ un mot admissible n'apparaissant qu'un nombre fini de fois dans la suite $(a_n)_{n \geq 0}$: l'ensemble $\{Q \times b_0 \ldots b_n\}$ ne se réduit pas à $\bar{q}$ puisque $b_0 \ldots b_n$ est admissible mais il inclus dans $\{\bar{q}, q, q_{a_0} \ldots q_{a_0 \ldots a_h}\}$ si h est un indice tel que $b_0 \ldots b_n$ n'apparaisse pas dans la suite $(a_h a_{h+1} a_{h+2} \ldots)$, et cet ensemble est fini. Montrons que $A \Rightarrow$ non B. Soit une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ possédant la propriété A, par exemple la suite

10 10100 101010010000 1010100101010100100010000...

et soit $b_1 \ldots b_k$ un mot admissible en base θ; montrons par l'absurde qu'étant donné un automate (Q, ψ, q) reconnaissant le langage associé au θ-shift, $\psi(Q, b_1 \ldots b_k)$ ne peut être fini.

Soient $n_1, n_2 \ldots$ des indices tels que pour tout i :

$$a_0 \ldots a_{n_i} b_1 \ldots b_k = a_0 \ldots a_{n_i+k}.$$

Comme la suite $(q_n)_{n \geqslant 0}$ ne peut être périodique si elle possède la propriété A, les ensembles A_i de mots définis par :

$$A_i = \{ c_1 \ldots c_h ;\ a_0 \ldots a_{n_i} b_1 \ldots b_k c_1 \ldots c_h \text{ est admissible} \}$$

comprennent une infinité d'ensembles distincts; il est donc impossible que $\psi(Q, b_1 \ldots b_k)$ soit fini.

Montrons que si A n'est pas vraie, B est vrai; supposons que β n'est pas un β-nombre, sinon le système est sofique et B est alors vérifiée. Soit $b_1 \ldots b_h$ un mot admissible apparaissant un nombre fini de fois dans la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$; il existe donc m tel que

$$a_0 \ldots a_m b_1 \ldots b_h = a_0 \ldots a_{m+h}$$

et $b_1 \ldots b_n$ n'apparaît plus dans la suite $(a_{m+h+r})_{r \geqslant 0}$.

Soit $a_0 \ldots a_r$ le plus petit mot appartenant au code X et s'écrivant

$$a_0 \ldots a_m b_1 \ldots b_h c_1 \ldots c_i = a_0 \ldots a_{r-1} (a_r - 1).$$

L'image ψ $(Q \times a_0 \ldots (a_r - 1)))$ est finie tout comme $\psi(Q \times b_1 \ldots b_h)$ et [5] l'image de $a_0 \ldots (a_r - 1)$ par la surjection canonique φ sur le monoïde syntaxique appartient à l'idéal 0-minimal associé au code.

Toujours selon [5], soit Y le code préfixe constitué par l'ensemble des mots u de A^* tels que dans le monoïde syntaxique :

$$\varphi(a_0 \ldots (a_r - 1) u) = \varphi(a_0 \ldots (a_r - 1),$$

tels qu'aucun facteur gauche strict autre que le mot vide ne vérifie cette égalité.

Si le rayon de convergence du code Y est strictement supérieur au rayon $1/\theta$ de M^*, et si le plus grand diviseur commun des longueurs des éléments de Y est 1, et si μ_0 désigne la mesure synchronisante sur X, alors (X, T, μ_0) est finitairement isomorphe à un processus de Bernoulli ([5], théorème III. 15).

Or le code Y est égal à M : tout ceci est donc bien vérifié.

Il reste à montrer que la mesure synchronisante coïncide avec la mesure de Parry : c'est vrai parce que l'entropie de la mesure de synchronisante est $-\operatorname{Log} \rho = \operatorname{Log} \theta$, et que la seule mesure invariante d'entropie $\operatorname{Log} \theta$ sur le θ-shift est la mesure de Parry.

Preuve du théorème 1. — La fonction méromorphe

$$\frac{1}{1-(a_0 Y + a_1 Y^2 + \ldots + a_k Y^{k+1} + \ldots)}$$

se développe en

$$1 + (a_0 Y + \ldots + a_k Y^{k+1}) + (a_0 Y + \ldots + a_k Y^{k+1})^2 + \ldots$$

Comme le code M comporte a_i mots de longueur a_{i+1}, l'examen du facteur $(a_0 Y + \ldots a_k Y^{k+1})^h$ permet d'étudier les messages qui sont produits de n mots du code (on les obtient tous, une fois chacun car le monoïde engendré par M est libre et le code est préfixe). Le terme en Y^n de la série est le nombre de messages c_n de longueur n.

Le rayon de convergence ρ_M du code M, rayon de convergence de la série $\sum^s (M \cap A^n) . z^n = \sum a_{n-1} z^n$ est 1 (ou l'infini si θ est un β nombre simple.

On sait [2] que θ est la plus grande racine positive de l'équation en z :

$$1 = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^{n+1}} + \ldots$$

et il n'y a aucune autre racine de module inférieur ou égal à θ car les a_i sont positifs : pour avoir

$$|z| \leqslant \theta$$

$$1 = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \ldots = \frac{a_0}{\theta} + \frac{a_1}{\theta^2} + \ldots$$

il faudrait avoir

$$\frac{a_0}{z} = \frac{a_0}{\theta}$$

et comme a_0 n'est pas nul, $z = \theta$.

Comme le rayon de la série $\sum a_n z^{n+1}$ est au moins 1, il existe un disque ouvert de centre 0 de rayon supérieur à $1/\theta$ dans lequel la fonction méromorphe $1/(1-\sum_{n\geq 0} a_n Y^{n+1})$ n'a pas d'autre pole que $1/\theta$. Ainsi :

$$\frac{1}{1-(1_0 Y+\ldots+a_k Y^{k+1}+\ldots)}=\frac{H}{1-(Y/\theta)}+\sum_{n\geq 0} d_n Y^n$$

où $d_n Y^n$ est une série entière de rayon strictement supérieur à $1/\theta$, d'où l'équivalent de c_n.

Remarquons que tout mot admissible $m_1 \ldots m_n$ s'écrit

$$m_1 \ldots m_n = l_1 \ldots l_n$$

ou

$$m_1 \ldots m_n = l_1 \ldots l_k a_0 \ldots a_{r-1}$$

où $l_1 \ldots l_k$ est un message de longueur k (ceci est une propriété particulière du code associé au θ-shift); on en déduit la relation entre ω_n et les $(c_i)_{i\geq 0}$. Ainsi

$$\omega_n = \frac{L}{\theta^n}+\sum_{i=1}^{n} d_i.$$

Comme $\sum_{i=1}^{n} d_i$ est le coefficient de z^n de la série

$$(1+z+z^2+\ldots)(d_0+d_1 z+\ldots)$$

de rayon strictement supérieur à $1/\theta$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{\theta^n}=0$$

d'où l'équivalent de ω_n.

Évaluons maintenant p_n en fonction de c_n.

Un mot de p_n s'écrit si n est assez grand :

1. a, $a \in c_n$

ou

2. $b_1 a a_0$ ou $a_0 b_1$ est un mot du code de longueur 2 (il y en a a_1) et a appartient à c_{n-2}

ou $a_1 b_2 a a_0$ où $a_0 a_1 b_2$ est un mot du code de longueur 3 (il y en a a_2) et a appartient à c_{n-3}

$\vdots$

ou $a_1 \ldots a_{k-1} b a a_0$ où $a_0 \ldots a_{k-1} b$ est un mot du code de longueur $k+1$ (il y en a a_k) et où a appartient à c_{n-k+1}

et ainsi de suite jusqu'à épuisement des mots du code (si θ est un β-nombre simple) ou jusqu'à :

$a_1 \ldots a_{n-2} b a_0$ où $a_0 a_1 \ldots a_{n-2} b$ est un mot du code de longueur n (il y en a a_{n-1}).

ou encore

3. $b a a_0 a_1$ où a appartient à c_{n-3} et $a_0 a_1 b$ est un mot du code de longueur 3 (il y en a a_2)

$a_2 b a_0 a_1$ où a appartient à c_{n-4} et $a_0 a_1 a_2 b$ est un mot du code de longueur 4 (il y en a a_3) et ainsi de suite

4. $b a a_0 a_1 a_2$ ou a est dans c_{n-4} et $a_0 a_1 a_2 b$ est de longueur 4, etc.

On obtient ainsi tous les mots périodiques, une seule fois car le code est préfixe et leur nombre est

pour le cas 1 c_n,

pour le cas 2 $a_1 c_{n-2} + a_2 c_{n-3} + \ldots + a_{n-2} c_1 + a_{n-1} c_0$,

pour le cas 3 $a_2 c_{n-3} + \ldots + a_{n-2} c_1 + a_{n-1} c_0$,

pour le cas 4 $a_3 c_{n-4} + \ldots + a_{n-1} c_0$

et ainsi :

$$p_n = c_n + a_1 c_{n-2} + 2 a_2 c_{n-3} + \ldots + k a_k c_{n-k-1} + \ldots + (n-1) a_{n-1} c_0.$$

Comme pour ω_n on en déduit l'existence d'une constante J telle que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{\theta^n} = J$$

l'assertion 1 est donc prouvée.

Preuve de l'assertion 2. — θ est maintenant un β-nombre simple et la fonction méromorphe

$$\frac{1}{a-(a_0 Y+\ldots)}=\frac{1}{R(Y)}$$

est une fraction rationnelle, d'où l'écriture de c_n comme dans la proposition. Remarquons que 0 n'est pas racine de R.

Soit $u=(u_n)_{n\geq 0}$ une suite, S un polynôme

$$S(X)=t_m X^m+\ldots+t_0.$$

Posons $\varphi_s(u)=v$ où $v_n=t_m u_{n+m}+\ldots+t_0 u_n$.

Remarquons que $\varphi_{PQ}=\varphi_P\circ\varphi_Q$ et que l'ensemble des polynômes P tels que $\varphi_P(u)=0$ est un idéal $I(u)$ qui est distinct de $\{0\}$ si et seulement si la suite est récurrente.

La suite u s'écrit, si $\varphi_P(u)=0$:

$$u=\sum\nolimits_{\lambda \text{ racine de } P}\sum\nolimits_{i=0}^{m_\lambda} b_{\lambda,i}\, n^{i-1}\lambda^n$$

où m_λ désigne la multiplicité de λ dans P.

Et $I(u)$ est engendré par

$$\pi(X-\lambda)^{n_\lambda}$$

où le produit est pris sur

$$n_\lambda=\{\sup i+1;\ b_{\lambda,i}\neq 0\}.$$

Nous savons que la suite p_n est récurrente et aussi que c'est la trace d'une matrice $\mathcal{M}^n$ [8] :

$$p_n=\operatorname{Tr}\mathcal{M}^n=c_n+a_1 c_{n-2}+2a_2 c_{n-3}+\ldots+ka_k c_{n-k-1}.$$

Les valeurs propres de $\mathcal{M}$ sont donc 0 éventuellement et un certain nombre des racines de $R(X)$, celles qui ne disparaissent pas lorsqu'on passe de $(c_n)_{n\geq 0}$ à $(p_n)_{n\geq 0}$. Montrons qu'aucune de ces racines ne peut s'échapper

$p_n=\varphi_Q((c_n)_{n\geq 0})$ où

$$Q(X)=X^{k+1}+a_1 X^{k-1}+2a_2 X^{k-2}+\ldots+kq_k.$$

L'idéal $I((p_n)_{n \geqslant 0})$ est

$$T(X) = \pi(X - \lambda)$$

où le produit est pris sur les racines de $R(X)$ qui sont valeurs propres de $\mathcal{M}$ et tous les facteurs de T sont simples.

Soit r l'ordre d'une racine λ de $R(X)$; posons $Y = 1/X$:

$$R(X) = Y\left(\frac{1}{Y} - a_0 - a_1 Y - \ldots - a_k Y^k\right).$$

Aucune racine n'est nulle car a_k est non nul et $1/T$ est racine d'ordre r de $Y.R(1/Y)$ donc du polynôme :

$$Y^2\left(-\frac{1}{Y^2} - a_1 - 2a_2 Y - \ldots - kq_k Y^{k-1}\right) = -1 - 2a_1 Y - \ldots - ka_k Y^{k+1}$$

et λ est racine d'ordre $r-1$ du polynôme :

$$Q(X) = X^{k+1} + a_1 X^{k-1} + 2a_2 X^{k-2} + \ldots + ka_k.$$

Comme $T(X)Q(X)$ se trouve dans l'idéal $I((n^{r-1}\lambda^n)_{n \geqslant 0})$ engendré par $(X-\lambda)^r$ et comme $(X-\lambda)^r$ ne divise pas $Q(X)$, $X-\lambda$ divise $T(X)$: la valeur propre λ apparaît dans l'écriture de p_n.

Nous ferions un raisonnement analogue avec w_n et le polynôme $X^{k+1} + \ldots + 1$: une racine peut se perdre entre c_n et w_n, si elle est aussi racine $(k+2)^0$ de l'unité.

IV. Estimation de la partie fractionnaire de $x\theta^n$ et preuve des théorèmes IV à XI

Preuve du lemme I. — Soit s le degré de θ, $\alpha_2 \ldots \alpha_s$ les conjugués de θ différents de θ : ils sont donc de module strictement inférieur à 1.

Soit

$$\alpha = \max\left(|\alpha_2|, \ldots, |\alpha_s|, \frac{1}{\theta}\right).$$

Alors α est strictement inférieur à 1 et comme θ est un entier algébrique

$\theta^n + \alpha_2^n + \ldots + \alpha_s^n$ est toujours un entier relatif.

Pour tout $n \geqslant 0$:

$$\| \theta^n \| = \| \alpha_2^n + \ldots + \alpha_s^n \| \leqslant (s-1)\, \alpha^n.$$

Si n est négatif

$$\| \theta^n \| = \frac{1}{\theta^{|n|}} < \alpha^{|n|}.$$

Posons $y_{h,l} = \{ \sum_{n=-h}^{l} u_n \theta^n \}$ et considérons $y_{h,l}$ comme un point du tore.

$$\| y^{h+a,\, l+b} - y_{hl} \| \leqslant (s-1)\, R \sum_{n=-\infty}^{-h-1} \alpha^{|n|} + \sum_{n=l+1}^{\infty} \alpha^{|n|} \leqslant R\, s \frac{\alpha^h + \alpha^l}{1-\alpha}.$$

La suite $y_{h,l}$ est donc une suite de Cauchy sur le tore; elle y converge vers un point y et

$$\| y - y_{h,l} \| < \frac{2Rs}{1-\alpha} (\alpha^h + \alpha^l) < M\, (\alpha^h + \alpha^l).$$

Nous obtiendrons 2 en remarquant que si $x = 0,\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots$ alors

$$x\, \theta^n = \varepsilon_1\, \theta^{n-1} + \varepsilon_2\, \theta^{n-2} + \ldots + \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_{n+1}}{\theta} + \ldots$$

et ε_n est inférieur à θ pour tout n : posant en effet $\varepsilon_n = 0$ pour $n \leqslant 0$

$$\| x\, \theta^n - \varepsilon_{n-e}\, \theta^l + \ldots + \frac{\varepsilon_{n+h}}{\theta^h} \| < \left\| \sum_{s=h+1}^{\infty} - \varepsilon_{n+s}\, \theta^n + \sum_{t=k+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+k}}{\theta^t} \right\|.$$

Majorant la première somme par le procédé ci-dessus et la seconde à l'aide de la condition (1) sur les θ développements nous obtenons

$$\| x\, \theta^n - (\varepsilon_{n-l}\, \theta^l + \ldots + \frac{\varepsilon_{n+h}}{\theta^h}) \| < M\, \theta\, \alpha^l + \frac{1}{\theta^k}$$

ceci prouve le lemme.

Justifions la remarque faite au début du paragraphe : si θ est un nombre de Pisot, $\| \theta^m \|$ est majoré par α^m et la série $\sum \| \theta^m \|$ converge.

Si la série positive $\sum \| \theta^m \|$ converge alors $\sum \| \theta^m \|^2$ aussi et il est classique [9] qu'alors θ est un nombre de Pisot.

La méthode utilisée ne peut donc sortir du cadre des nombres de Pisot.

Preuve du théorème V. — Il est clair que si le θ-développement de x est périodique après un certain rang alors x est dans $\mathbb{Q}(\theta)$; montrons la réciproque.

Il est classique [9] que si x appartient à $\mathbb{Q}(\theta)$ la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$ n'a qu'un nombre fini de points d'accumulation modulo un, que nous imaginerons compris entre 0 et 1; d'où le lemme 5 qui exprime l'idée qu'à partir d'un certain rang le terme $x\theta^n$ se trouve proche de l'un des points d'accumulation et loin des autres.

LEMME 2. — *Soit θ un nombre de Pisot, x un nombre du corps de θ, $B_1 \ldots B_q$ un système de représentants des points d'accumulation modulo* un *de la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$:*

Soit $b=\inf_{j\in i}\|B_i-B_j\|$; alors

$$\exists p_0, \quad \forall \varepsilon<b/4, \quad \forall p>p_0, \quad \exists i=i(p),$$
$$\|x\theta^p-B_i\|<\varepsilon$$
$$\|x\theta^p-B_j\|>\frac{3b}{4} \quad \text{si} \quad j\neq i.$$

Nous poserons dans la suite $\varepsilon_n=0$ si $n\leqslant 0$.

LEMME 3. — *Soit θ un nombre de Pisot, x un nombre de $\mathbb{Q}(\theta)$, 0, ε_1, $\varepsilon_2 \ldots$ son θ développement.*

Soit $\eta>0$.

Il existe q_0, h_0 et l_0 tels que si p_1 et p_2 sont supérieurs à q_0, l supérieur à l_0 et h supérieur à h_0, alors

$$\varepsilon_{p_1-l}\ldots\varepsilon_{p_1+h}=\varepsilon_{p_2-l}\ldots\varepsilon_{p_2+h} \quad \Rightarrow \quad \|x\theta^{p_1}-x\theta^{p_2}\|<\eta.$$

Prenons l_0 et h_0 tels que $M\alpha^{l_0}+(1/\theta^{h_0})<b/16$.

Soit $q_0=p_0$ du lemme précédent.

Si $\varepsilon_{p_1-l}\ldots\varepsilon_{p_1+h}=\varepsilon_{p_2-l}\ldots\varepsilon_{p_2+h}$ alors d'après le lemme 1

$$\|x\theta^{p_1}-x\theta^{p_2}\|<2(M\alpha^l+\frac{1}{\theta^h})<\frac{b}{8}.$$

D'après le lemme 2 pour un même i

$$\|x\theta^{p_1}-B_i\|<\varepsilon$$

$$\|x\theta^{p_2}-B_i\|<\varepsilon$$

et si ε est inférieur à $\eta/2$

$$\|x\theta^{p_1}-x\theta^{p_2}\|<\eta.$$

LEMME 4. — *Soit θ un nombre de Pisot, x un nombre du corps de θ, $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ son θ développement; lorsque ce dernier ne se termine pas par des zéros, le nombre de zéros consécutifs que l'on peut y rencontrer est borné par un nombre que nous noterons $(L-2)(x)$.*

Supposons que ce soit faux : alors 0 est point d'accumulation modulo un de la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$.

Appliquons le lemme 2

$$\forall\varepsilon<b/8,\quad \forall p>q_0,\qquad \|x\theta^p\|>\varepsilon\ \Rightarrow\ \|x\theta^p\|>\frac{3b}{4}.$$

Choisissons k tel que $M\alpha^k<\varepsilon/2$, soit j tel que $3\varepsilon/2<1/\theta^j<b/4$.

Soit p un entier supérieur à p_0 tel que

$$\varepsilon_{p-k}=\varepsilon_{p-k+1}\ldots=\varepsilon_{p+j-1}=0,\qquad \varepsilon_{p+j}\neq 0$$

alors

$$x\theta^p=\varepsilon_1\theta^p+\ldots+\varepsilon_k\theta^{p-k}+\frac{\varepsilon_{p+j}}{\theta^j}+\ldots$$

$\varepsilon_1\theta^p+\ldots+\varepsilon_k\theta^{p-k}$ est inférieur à $\varepsilon/2$, $\varepsilon_{p+j}/\theta^j+\ldots$ est compris entre $3(\varepsilon/2)$ et $b/4$

$$\frac{3\varepsilon}{2}<\|x\theta^p\|<\frac{b}{4}+\varepsilon<\frac{b}{2}.$$

Ceci contredit le lemme 2. Notons que le nombre de zéros consécutifs est lié au nombre de points d'accumulation de la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$.

LEMME 5. — *Soit L un entier, M comme au lemme 1.*

Soit x un nombre réel dans le θ développement duquel on ne peut trouver plus de $L-2$ zéros consécutifs.

Soient h et l tels que

$$\frac{1}{\theta^h} < \frac{1}{2}.$$

Soient p_1 et p_2 tels que

$$\varepsilon_{p_1-l} \ldots \varepsilon_{p_1+h} = \varepsilon_{p_2-l} \ldots \varepsilon_{p_2+h}$$

$$\varepsilon_{p_1+h+1} > \varepsilon_{p_2+h+1}.$$

Alors $\| x\,\theta^{p_1} - x\,\theta^{p_2} \| > (1/\theta^{h+L}) - 2\,M\,\alpha^l$.

$$\| x\,\theta^{p_1} - x\,\theta^{p_2} \| = \varepsilon_0\,\theta^p + \ldots + \varepsilon_{p_1-l-1}\,\theta^l$$
$$-(\varepsilon_0\,\theta^{p_2} + \ldots + \varepsilon_{p_2-l-1}\,\theta^l) + \left(\frac{\varepsilon_{p_1+h+1}}{\theta^{h+1}} - \frac{\varepsilon_{p_2+h+1}}{\theta^{h+1}}\right)$$
$$+\left(\frac{\varepsilon_{p_1+h+2}}{\theta^{h+2}} + \ldots\right) - \left(\frac{\varepsilon_{p_2+h+2}}{\theta^{h+2}} + \ldots +\right)$$

le premier morceau est majoré par $2\,M\,\alpha^l$,

$$\frac{\varepsilon_{p_1+h+1}}{\theta^{h+1}} - \frac{\varepsilon_{p_2+h+1}}{\theta^{h+1}} \geqslant \frac{1}{\theta^{h+1}}$$

l'un au moins des $L-1$ nombres $\varepsilon_{p_1+h+2} \ldots \varepsilon_{p_2+h+L}$ est non nul

$$\left(\frac{\varepsilon_{p_1+h+2}}{\theta^{h+2}} + \ldots\right) > \frac{1}{\theta^{h+L}}$$

Enfin

$$\left(\frac{\varepsilon_{p_2}}{\theta^{h+2}} + \ldots\right) < \frac{1}{\theta^{h+1}}.$$

Comme les normes impliquées dans un calcul sont petites (c'est pour cela qu'on a choisi $1/\theta^h$ petit) :

$$\| x\,\theta^{p_1} - x\,\theta^{p_2} \| > \frac{1}{\theta^{h+1}} + \frac{1}{\theta^{h+2}} - \frac{1}{\theta^{h+1}} - 2\,M\,\alpha^l > \frac{1}{\theta^{h+L}} - 2\,M\,\alpha^l.$$

Montrons le théorème 4 à l'aide des lemmes 3 et 5 : fixons h_0 et l_0 comme au lemme 3, fixons h supérieur à h_0, l supérieur à l_0 avec

$$\frac{1}{\theta^h}<\frac{1}{2}$$

$$M\alpha^l<\frac{1}{8\,\theta^{h+L}}.$$

Fixons $\eta<1/4$ tel que $\eta<1/4\,\theta^{h+L}$.

D'après le lemme 3 il existe q_0 tel que

$$\forall p_1>q_0,\quad \forall p_2>q_0,\qquad \varepsilon_{p_1-l}\ldots\varepsilon_{p_1+h}=\varepsilon_{p_2-l}\ldots\varepsilon_{p_2+h}$$

$$\Rightarrow\quad \|\,\theta^{p_1}-x\,\theta^{p_2}\,\|<\eta<\frac{1}{4\,\theta^{h+L}}.$$

D'après le lemme I si alors $\varepsilon_{p_1+h+1}>\varepsilon_{p_2+h+2}$

$$\|\,x\,\theta^{p_1}-x\,\theta^{p_2}\,\|>\frac{1}{\theta^{h+L}}-2\,M\,\alpha^l$$

$$>\frac{1}{2\,\theta^{h+L}}$$

ce qui est absurde : $\varepsilon_{p_1+h+1}=\varepsilon_{p_2+h+2}$ et la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ est périodique.

Parry [2] a montré que les β nombres sont des nombres algébriques dont tous les conjugués sont de module inférieur à 2, et que l'ensemble des β nombres est dense dans $[1,\infty[$; comme l'ensemble des nombres de Pisot est fermé, ces ensembles ne coïncident pas; on peut se demander si l'ensemble des β nombres est la réunion des ensembles des nombres de Pisot et Salem et si alors tout élément du corps d'un β nombre admet un développement périodique après un certain rang; (Klaus, Schmidt [10] a donné une autre démonstration du théorème 4 et a montré que si les nombres de $Q(\theta)$ ont tous un θ-développement périodique après un certain rang alors θ est un nombre de Pisot ou de Salem).

Preuve du théorème VI. – Remarquons que l'application T_s admet pour matrice

$$M=\begin{matrix} 0 & 0 & . & \dots & 0 & b_1 \\ 1 & 0 & . & \dots & . & . \\ 0 & 1 & 0 & \dots & . & \vdots \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & 0 & \dots & 1 & b_s \end{matrix}$$

son polynôme caractéristique est $X^s - b_s X^{p-1} - \dots - b_1$ et ses valeurs propres sont θ et ses conjugués.

$$T_s(x, x\theta, \dots, x\theta^{s-1}) = (x\theta, x\theta^2 \dots x\theta^{s-1}\, x(b_1 + b_2\theta + \dots b_s\theta^{s-1})) = (x\theta, \dots, x\theta^s)$$

et plus généralement si $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in Z}$ (les sommes sont prises modulo un) :

$$q_s(\varepsilon) = (\textstyle\sum_{n\in Z} \varepsilon_N \theta^{-n}, \sum_{n\in Z} \varepsilon_{n+1} \theta^{-n}, \dots, \sum_{n\in Z} \varepsilon_{n+s-1} \theta^{-n}) = (\sum_{n\in Z} \varepsilon_n \theta^{-n}, \sum_{n\in Z} \varepsilon_n \theta^{-n+1}, \dots, \sum_{n\in Z} \varepsilon_n \theta^{-n+s-1})$$

$$T_s q_s(\varepsilon) = (\textstyle\sum_{n\in Z} \varepsilon_n \theta^{-n+1}, \sum_{n\in Z} \varepsilon_n \theta^{-n+2}, \dots, \sum_{n\in Z} \varepsilon_n \theta^{-n+s-1}, \sum_{n\in Z} \varepsilon_n (b_1\theta^{-n} + \dots + b_s \theta^{-n+s-1}))$$

le dernier terme n'est autre que $\sum_{n\in Z} b_n \theta^{-n+s}$

$$T_0 q_s(\varepsilon) = (\textstyle\sum_{n\in Z} \varepsilon_{n+1} \theta^{-n}, \sum_{n\in Z} \varepsilon_{n+1} \theta^{-n+1}, \dots \sum_{n\in Z} \varepsilon_{n+1} \theta^{-n+s-1},$$

$T_s q_s(\varepsilon)$ est donc égal à $q_s(T\varepsilon)$.

La preuve du théorème VI est immédiate à l'aide du lemme I, ainsi que celle de la première partie du théorème VI (parce que l'application g est continue), seule reste à montrer la surjectivité et l'existence du point générique $(x, x\theta, \dots, x\theta^{s-1})$.

Soit ν une mesure T_s invariante sur $\mathbb{T}^s$: elle admet un point générique $(t_1 \dots t_s)$ d'après le théorème de Kakutani.

Écrivons $b_1 \dots b_s$ dans la base de vecteurs propres

$$v_1 = (1, \theta, \dots \theta^{s-1}),$$

$$v_2 = (1, \alpha_2, \dots \alpha_2^{s-1}) \dots v_s = (1, \alpha_s, \dots \alpha_s^{s-1}),$$

$$(t_1 \ldots t_s)=\lambda_1 v_1+\ldots \lambda_s v_s$$

$$(T_s^n(t_1 \ldots t_s)=\theta^n \lambda_1 v_1+\ldots+\alpha_s^n \lambda_s v_s.$$

Les suites $(T_s^n((t_1 \ldots t_s))_{n\geq 0}$ et

$$(\theta^n \lambda_1 v_1)_{n\geq 0}=((\lambda_1 \theta^n, \lambda_1 \theta^{n+1}, \ldots, \lambda_1 \theta^{n+s-1}))_{n\geq 0}$$

sont adjacentes modulo un et admettent la même répartition : $(\lambda, \lambda\theta, \ldots \lambda\theta^{s-1})$ est donc un point générique pour la mesure ν.

Montrons que dans le théorème VIII, 1 implique 2.

Soit x appartenant à $N(\theta)$ donc générique pour la mesure de Parry μ_θ : alors la suite $(x\theta^n, x\theta^{n+1}, \ldots, x\theta^{n+s-1})_{n\geq 0}$ est générique pour une mesure $q_s(\mu_\theta)$.

Comme

– presque tout x est dans $N(\theta)$

– pour presque tout x la suite $(x\theta^n, \ldots, x\theta^{n+s-1})_{n\geq 0}$ est équirépartie dans le tore

la mesure $q_s(\mu_\theta)$ ne peut être que la mesure de Lebesgue.

Le corollaire 8 s'ensuit aussitôt.

Pour démontrer que $2\Rightarrow 1$, nous démontrerons un lemme, raffinement d'un résultat de Salem [9].

LEMME 6. — *Soit θ un nombre de Pisot de degré s; il existe un réel positif A tel que pour tout nombre x de θ-développement* $(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots)$ *et tout entier N, il existe λ appartenant à* $\mathbb{Z}[\theta]$ *tel que :*

$$\forall m=1, 2\ldots$$

$$\left\|\lambda\theta^m x-\lambda\frac{\varepsilon_{m+1}}{\theta}+\ldots+\frac{\varepsilon_{m+N}}{\theta^N}\right\|<\frac{A}{\theta^{N/s}}.$$

Nous entendons par $\mathbb{Z}[\theta]$ *l'ensemble des nombres de la forme* $b_0+\ldots+b_{s-1}\theta^{s-1}$ *ou* $b_i\in\mathbb{Z}$.

Soit P le polynôme minimal de θ, Q le polynôme réciproque de P [lorsque $P(x)=a_0X^s+\ldots+a_s$ alors $Q(X)=a_sX^s+\ldots+a_0$]. Soit R un polynôme quelconque de degré $s-1$ à coefficients entiers, T son polynôme réciproque. Développons R/Q en éléments simples; le terme constant de

Q étant égal à 1, et $\alpha_2 \ldots \alpha_s$ désignant les conjugués de θ:

$$\frac{R(Y)}{Q(Y)}=\sum_{m=0}^{\infty} d_m Y^m \qquad \text{où} \quad d_m \text{ appartient à } \mathbb{Z}$$

$$=\frac{\lambda}{1-\theta y}+\sum_{i=2}^{s}\frac{\mu_i}{1-\alpha_i y}.$$

avec

$$(1) \qquad \lambda=\frac{T(\theta)}{P'(\theta)} \qquad \text{et} \qquad \mu_i=\frac{T(\theta)}{P'(\alpha_i)}.$$

Identifions les termes en Y^m :

$$\lambda\theta^m=d_m+\delta_m \qquad \text{où} \quad \delta_m=\sum_{i=2}^{s}\mu_i\alpha_i^m \quad \text{et} \quad \lim_{m\to\infty}\delta_m=0.$$

Quitte à changer R en $-R$, nous pouvons supposer λ positif.

Fixons un entier N et un nombre $x=0, \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots$;

Soit m un entier strictement positif; nous pouvons écrire modulo un :

$$(2) \quad \lambda\theta^m x=\lambda\left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\theta}+\ldots+\frac{\varepsilon_{m+N}}{\theta^N}\right)$$
$$+\lambda\left(\frac{\varepsilon_{m+N+1}}{N+1}+\frac{\varepsilon_{m+N+2}}{\theta^{N+2}}+\ldots\right)$$
$$+\varepsilon_m\delta_0+\ldots+\varepsilon_1\delta_{m-1}+\varepsilon_0\delta_m.$$

Le déterminant des formes linéaires en les variables $e_1 \ldots e_s$

$$\frac{T(\theta)}{P'(\theta)}=e_1\theta^{s-1}+\ldots+e_s$$

$$\frac{T(\alpha_2)}{P'(\alpha_2)}=e_1\alpha_2^{s-1}+\ldots+e_s$$

$$\frac{T(\alpha_s)}{P'(\alpha_s)}=e_1\alpha_s^{s-1}+\ldots+e_s$$

est égal à

$$D=\begin{matrix} \theta^{s-1} & \theta^{s-2}\ldots & 1 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ \alpha_2^{s-1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\ \alpha_s^{s-1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \end{matrix}$$

Il est non nul et ne dépend pas de N. Soit a un réel positif vérifiant :

$$\left(\frac{a}{\theta^{N/s}}\right)^s \geqslant \frac{|D|}{\theta^N} \prod_{i=2}^s (1-\alpha_i)^{-1}\theta^{s-1}.$$

Le théorème de Minkowski [11] montre que nous pouvons choisir comme coefficient $b_0 \ldots b_{s-1}$ de T des entiers relatifs tels que :

$$\left|\frac{T(\theta)}{P'(\theta)}\right| \frac{1}{\theta^N} < \frac{a}{\theta^{N/s}} \tag{3}$$

et pour $i=2\ldots s$

$$\left|\frac{T(\alpha_i)}{P'(\alpha_i)} \frac{[\theta]}{1-\alpha_i}\right| < \frac{a}{\theta^{N/s}} \tag{4}$$

T étant choisi, d'après (1), (3) et la condition (2) sur les θ-développements :

$$\left\|\left(\frac{\varepsilon_{m+N+1}}{\theta^{N+1}} + \frac{\varepsilon_{m+N+2}}{\theta^{N+2}} + \ldots\right\| < \frac{a}{\theta^{N/s}}.$$

D'après (1) et (4) :

$$\begin{aligned} &\|\varepsilon_m \delta_0 + \ldots \varepsilon_1 \delta_{m-1} + \varepsilon_0 \delta_m\| \\ &\qquad = \|\varepsilon_m \textstyle\sum_{i=2}^s \mu_i + \varepsilon_{m-1} \sum_{i=2}^s \mu_i \alpha_i + \ldots + \sum_{i=2}^s \mu_i \alpha_i^m\| \\ &\qquad\qquad \leqslant \frac{s-1}{\theta^{N/s}} \frac{a[\theta]}{|1-\alpha_i|} \end{aligned}$$

selon (1) :

$$\left\|\lambda\theta^m x - \lambda\left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\theta} + \ldots\right)\right\| < \frac{sa}{\theta^{N/s}}$$

et le lemme est prouvé pour $A=as$.

LEMME 7. — *Soit θ un nombre de Pisot de degré s, x un nombre n'appartenant pas à $N(\theta)$; alors il existe un nombre non nul de $Z[\theta]$ tel que la suite* $(\lambda x \theta^n, \ldots, \lambda x \theta^{n+s-1})_{n \geq 0}$ *ne soit pas équirépartie modulo* un.

Un tel nombre x admet une mesure associée m distincte de la mesure de Parry-Renyi μ_θ, donc qui n'est pas, à cause de l'ergodicité de μ_θ, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Ainsi pour tout K positif, il existe un entier N et un cylindre $[c_1 \ldots c_{N+s}]^0$ tels que le rapport entre la mesure du cylindre et la longueur de l'intervalle $p^{-1}([c_1 \ldots c_{N+s}]^0)$ soit supérieur à K. Comme cette longueur peut être minorée par H/θ^N (d'après une remarque faite lors de la démonstration du théorème II)

$$m[c_1 \ldots c_{N+s}] > \frac{HK}{\theta^N}.$$

Fixons A comme au lemme précédent, fixons K tel que

$$HK > 2^{s+1}.A^s.$$

Fixons N et $c_1 \ldots c_{N+s}$ comme ci-dessus et choisissons λ en fonction de N comme au lemme 6.

La fréquence de l'apparition de $(\lambda x \theta^m \ldots \lambda x \theta^{m+s-1})$ dans le pavé.

$$P = \left\{ x_1 \ldots x_s;\ \left\| x_1 - \lambda\left(\frac{c_1}{\theta} + \ldots + \frac{c_N}{\theta^N}\right)\right\| < \frac{A}{\theta^{N/s}} \right.$$
$$\vdots$$
$$\left. \left\| x_s - \lambda\left(\frac{c_s}{\theta} + \ldots + \frac{c_{N+s}}{\theta^N}\right)\right\| < \frac{A}{\theta^{N/s}} \right\}$$

au moins égale à la fréquence $m[c_1 \ldots c_{N+s}]$ avec laquelle le cylindre $[c_1 \ldots c_{N+s}]$ apparaît dans le θ-développement de x.

Le volume du pavé est $(2A/\theta^{N/s})^s$; comme $HK/\theta^N > 2.(2^s A^s/\theta^N)$; le s-uplet $(\lambda x \theta^n \ldots \lambda x \theta^{n+s-1})$ tombe trop souvent dans le pavé P pour que la suite soit équirépartie modulo un : ceci termine la preuve du théorème VIII. Le corollaire IX est une conséquence immédiate du théorème VIII.

Preuve du corollaire X. — Une suite $(u_n^1 \ldots u_n^s)_{n \geq 0}$ est équirépartie dans le tore $\mathbb{T}^s$ si et seulement si pour tout s-uplet $a_1 \ldots a_s$ d'entiers différents de $(0 \ldots 0)$ la suite $(a_1 u_n^1 \ldots a_s u_n^s)_{n \geq 0}$ est équirépartie modulo un.

Il existe donc, dès que x n'appartient pas à $N(\theta)$, un s-uplet d'entiers non tous nuls tel que la suite

$$(a_1 x\theta^n+\alpha_2 x\theta^{n+1}+\ldots+a_s x\theta^{n+s})_{n\geq 0}$$
$$=((a_1+a_2\theta+\ldots+a_0\theta^{s-1})x\theta^n)_{n\geq 0}$$

ne soit pas équirépartie modulo un : $a=a_1+\ldots+a_s\theta^{s-1}$ est le nombre de$\mathbb{Z}[\theta]$cherché.

Inversement, si x appartient à $N(\theta)$, si $\alpha=b_1+\ldots+b_s\theta^{s-1}$ est un nombre non nul de $\mathbb{Z}[\theta]$ alors la suite

$$(\alpha x\theta^n)_{n\geq 0}=(b_1 x\theta^n+\ldots+b_s x\theta^{n+s-1})_{n\geq 0}$$

est équirépartie modulo un.

Preuve du théorème XI. — Soit x un élément de $N(\theta)$, et α un élément de $\mathbb{Z}[\theta]$; si αx n'était pas dans $N(\theta)$, il existerait λ appartenant à $\mathbb{Z}[\theta]$ tel que

$$\lambda\alpha x\notin B(\theta).$$

Mais $\alpha\lambda$ est encore dans $\mathbb{Z}[\theta]$: c'est impossible d'après le corollaire X.

Lorsque α est dans $\mathbb{Z}[\theta]$, la suite $\alpha\theta^n$ tend vers zéro et les suites $(x\theta^n)_{n\geq 0}$ et $((\alpha+x)\theta^n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes : x et $x+\alpha$ se trouvent simultanément dans $N(\theta)$ d'après le corollaire 9.

Reste à montrer que nous pouvons diviser par un entier non nul q; appelons $\hat\theta^n$ l'entier le plus proche de θ^n et remarquons que si n est assez grand $\hat\theta^n$ vérifie la même relation de récurrence que θ^n et donc la suite $\hat\theta^n$ est périodique modulo q après un certain rang que nous désignerons par n_0, de période h. Pour tout entier a, et tout nombre α de $\mathbb{Z}[\theta]$, si $\alpha x=0$, $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\ldots$

$$\alpha\frac{x}{q}\theta^{n+ah}=\frac{\varepsilon^1}{q}\theta^{n+ah-1}+\frac{\varepsilon_2}{q}\theta^{n+ah-2}+\ldots+\frac{\varepsilon_{n+ah}}{q}+\frac{\varepsilon_{n+ah+1}}{q\theta}+\ldots$$

$$\alpha_q^x=\theta^n=\frac{\varepsilon_1}{q}\theta^{n-1}+\ldots+\frac{\varepsilon_n}{q}+\frac{\varepsilon_{n+1}}{q\theta}+\ldots$$

et

$$\alpha_q^x\theta^{n+ah}-\alpha_q^x\theta^n=\sum_{p=-\alpha}^{\alpha}t_p\varepsilon_{n-p}$$

où pour $p \geqslant 0$:

$$t_{-p} = \frac{\theta^{p+ah} - \theta^p}{q}$$

$$t_p = \frac{1}{q\,\theta^{p-ah}} - \frac{1}{q\,\theta^p}.$$

La série $\sum_{p \geqslant 0} \| t_p \|$ converge évidemment.

$$t_{-p} = \frac{\hat{\theta}^{p+ah} - \hat{\theta}^p}{q} + \frac{\{\theta^{p+ah}\} - \{\theta^p\}}{q}$$

et comme $\hat{\theta}^{p+ah} - \theta^p$ est un multiple de q après un certain rang, la série $\sum_{p=0}^{\infty} \| t_{-p} \|$ converge encore.

Nous pouvons donc appliquer le théorème V' : la suite $(\alpha (x/q) (\theta^{n+ah} - \theta^n))_{n \geqslant 0}$ est répartie suivant la mesure $g(\mu_\theta)$ car αx est dans $N(\theta)$.

Comme pour presque tout nombre g, la suite $((\theta^{ah} - 1)(v/q)\theta^n)_{n \geqslant 0}$ est équirépartie modulo un, $g(\mu_\theta)$ n'est autre que la mesure de Lebesgue.

Ainsi $(\alpha/q) N(\theta)$ est inclus dans $N(\theta)$.

Comme $y = (q/\alpha).(\alpha/q) y$, $N(\theta)$ est inclus dans $(\alpha/q) N(\theta)$.

Montrons que $N(\theta)$ est inclus dans $N(\theta^P)$. Soit x appartenant à $N(\theta)$, α appartenant à $\mathbb{Q}[\theta]$; la suite $u_n = (\alpha x \theta^{np}, \alpha x \theta^{np+1}, \ldots, \alpha x^{n+p+s-1})_{n \geqslant 0}$ est répartie dans le tore $\mathbb{T}^s$ selon une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue car la fréquence avec laquelle le s-uplet u_n tombe dans un pavé P donné de volume c est au plus p fois supérieur à la fréquence avec laquelle le s-uplet $(\alpha x \theta^n, \ldots, \alpha x \theta^{n+s-1})_{n \geqslant 0}$ y tombe; comme la transformation T_s est ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue, la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ ne peut admettre d'autre mesure associée que la mesure de Lebesgue; ainsi αx est dans $B(\theta^p)$ et selon le corollaire IX, x se trouve dans $N(\theta^p)$ (remarquons que $\mathbb{Q}[\theta] = \mathbb{Q}[\theta^p]$).

Cas des racines q-ièmes : remarquons que $\sqrt[q]{\theta}$ est encore un nombre de Pisot si et seulement s'il appartient à $\mathbb{Q}(\theta)$, où, ce qui est équivalent, si les degrés sur $\mathbb{Q}$ de θ et $\sqrt[q]{\theta}$ sont les mêmes.

Si en effet $\sqrt[q]{\theta}$ *est un nombre de Pisot, alors*

$$\lim_{n \to \infty} \| \theta^{1/q}.\theta^n \| = 0.$$

et il est classique qu'alors $\sqrt[q]{\theta}$ appartient au corps de θ [9].

Inversement, si θ et $\sqrt[q]{\theta}$ sont de mêmes degrés sur $\mathbb{Q}$ les conjugués de θ sont $\beta_2^q \dots \beta_s^q$ ou $\beta_2 \dots \beta_s$ sont les conjugués de θ. Les modules des β_i^s sont donc, comme ceux des β_i^s, inférieurs à 1 et $\sqrt[q]{\theta}$ est un nombre de Pisot.

Supposons donc que $\sqrt[q]{\theta}$ est un nombre de Pisot.

Soit x appartenant à $N(\theta)$, α appartenant à $\mathbb{Q}[\theta^{1/q}]$ qui est égal à $\mathbb{Q}(\theta)$; la suite $(\alpha x \sqrt[q]{\theta^n})_{n \geq 0}$ est obtenue en juxtaposant les suites $(\alpha x \theta^n)_{n \geq 0}$, $(\alpha x \sqrt[q]{\theta}\, \theta^n)_{n \geq 0} \dots (\alpha x \sqrt[q]{\theta^{q-1}}\, \theta^n)_{n \geq 0}$. Ces suites sont équiréparties modulo un car $\alpha\theta^{(a/q)}$ est dans $\mathbb{Q}(\theta)$ et la suite $(\alpha x \sqrt[q]{\theta^n})_{n \geq 0}$ est donc équirépartie modulo un : x se trouve donc dans $N(\sqrt[q]{\theta})$.

Le corollaire XII s'ensuit immédiatement.

Le premier exemple est une application au θ shift d'un résultat concernant les systèmes associés à des langages codés [14].

Ito et Shiokawa [16] ont montré que la suite $(\varepsilon_n')_{n \geq 0}$ est générique pour la mesure μ_θ sur $A^{\mathbb{N}}$. D'après le théorème 5′, la suite $(x\theta^n, \dots, x\theta^{n+s-1})_{n \geq 0}$ *est répartie dans le tore* $\mathbb{T}^s$ selon la mesure $g(\mu_\theta)$ qui est encore la mesure de Lebesgue, et x est dans $N(\theta)$.

L'idée des exemples ci-dessus est due à Champernowne [12] inventeur, en base entière, du Champernombre.

Preuve du théorème XIII. — Nous nous appuierons sur un théorème de van der Corput-Delange [13] : soit une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ et un entier a non nul tels que pour tout $p \geqslant 0$ la suite $(u_{n+ap} - u_n)_{n \geq 0}$ soit équirépartie modulo un : alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ l'est aussi ainsi que les suites $(u_{pn})_{n \geq 0}$ pour tout p non nul.

LEMME 8. — *Soit* $\theta > 1$ *vérifiant pour deux entiers non nuls r et a*

$$\theta^{2r} = a_\theta^r \pm 1.$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $x \in B(\theta)$;
2. $(\theta^{4r} - 1)\, x \in B(\theta)$;
3. $\forall m\, (\theta^{8mr} - 1)\, x \in B(\theta)$.

Lorsque $\theta^{2r} - a\theta^r - 1 = 0$, alors

$$\theta^r - \frac{1}{\theta^r} \in \mathbb{Z}.$$

$$\theta^{2r} + \frac{1}{\theta^{2r}} = \left(\theta^r - \frac{1}{\theta^r}\right)^r + 2 \text{ aussi.}$$

Développant $(\theta^{2r} + (1/\theta^{2r}))^n$ nous obtenons par récurrence

$$\forall n, \quad \theta^{2nr} + \frac{1}{\theta^{2nr}} \in \mathbb{Z}.$$

Si $\theta^{2r} - a\theta^r + 1 = 0$ alors $\theta^r + (1/\theta^r) \in \mathbb{Z}$ et nous obtenons en développant $(\theta^r + (1/\theta^r)^n$

$$\forall n, \quad \theta^{nr} + \frac{1}{\theta^{nr} \in \mathbb{Z}}.$$

Remarquons que pour tout k $\theta^k B(\theta) = B(\theta)$.

Montrons que $x \in B(\theta) \Rightarrow (\theta^{4r} - 1) x \in B(\theta)$.

Soit $u_n = x(\theta^{4r} - 1)\theta^n$.

Pour tout p

$$u_{n+4pr} - u_n = x(\theta^{4r+4pr} - \theta^{4pr} - \theta^{4r} + 1)\theta^n$$

$(\theta^{4pr+4r} - \theta^{4pr} - \theta^{4r} + 1) =$

$$= \theta^{2r+2pr}\left(\theta^{2+2pr} + \frac{1}{\theta^{2+2pr}} - \theta^{2pr-2r} - \frac{1}{\theta^{2pr-2r}}\right) = m\,\theta^{2r+4pr}$$

où m est un entier non nul si p est assez grand.

$$u_{n+4pr} - u_n = m \,.\, \theta^{2r+2pr} \,.\, x\theta^n$$

et donc $(u_{n+4pr} - u_n)_{n \geq 0}$ est une suite équirépartie modulo un pour tout p, donc u_n est équirépartie modulo un d'après le critère de Van der Corput-Delange : la suite $((\theta^{4r} - 1) x\theta^n)_{n \geq 0}$ est équirépartie modulo un.

Montrons que $x(\theta^{4r} - 1) \subset B(\theta) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}^* \; x(\theta^{8m} - 1) \in B(\theta)$.

Soit $m = 2^l m_0$

$$(\theta^{4m_0 r} - 1) x \in B(\theta) \quad \Rightarrow \quad (\theta^{8nr} - 1) x \in B(\theta)$$

puisque

$$\theta^{8m_0r}-1=(\theta^{4m_0r}-1)(\theta^{4m_0r}+1)=(\theta^{4m_0r}-1)\,\theta^{2m_0r}.\left(\theta^{2m_0r}+\frac{1}{\theta^{2m_0r}}\right)$$

et on vient de même à $2^l m_0 r$ en appliquant

$$x\in B(\theta)\quad\Rightarrow\quad x(\theta^{4r}-1)\in B(\theta).$$

Prenons l tel que m_0 soit impair : $m_0=2k+1$.

Si $m_0=1$ c'est fini.

Sinon montrons que $(\theta^{4r}-1)x\in B(\theta)\Rightarrow(\theta^{4r(2k+1)}-1)x\in B(\theta)$ et nous aurons fini :

$$(\theta^{4r(2k+1)}-1)=(\theta^{4r}-1)(\theta^{2k.4r}+\theta^{2(k-1).4r}+\ldots+1)$$

$$=(\theta^{4r}-1)(\theta^{k.4r})\left(\theta^{k.4r}+\theta^{(k-1)4r}+\ldots+1\ldots+\frac{1}{\theta^{k.4r}}\right)$$

$$=(\theta^{4r}-1)\,\theta^{4r}.m$$

où m est un entier : le résultat est prouvé.

Le théorème de Van der Corput montre immédiatement que $3\Rightarrow 1$.

Prouvons le théorème 12 : soit x appartenant à $B(\theta)$. Soit $u_n=(x\,\theta^n)_{n\geq 0}$; d'après le lemme, la suite $(u_{n+8pr}-u_n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un pour tout p et donc les suites $(u_{np})_{n\geq 0}$ le sont aussi pour tout p non nul : $B(\theta)$ est inclus dans $B(\theta^p)$.

Traitons le cas de la division par q.

Remarquons que la suite $(\theta^{2mr}+(1/\theta^{2mr}))$ est une suite périodique modulo q : en effet si m est supérieur à 2

$$\theta^{2m}+\frac{1}{\theta^{2m}}=\left(\theta^{2(m-1)r}+\frac{1}{\theta^{2(m-1)r}}\right)\left(\theta^{2r}+\frac{1}{\theta^{2r}}\right)-\left(\theta^{2(n-2)}+\frac{1}{\theta^{2(n-2)}}\right).$$

Le résidu modulo q de $\theta^{2nr}+(1/\theta^{2nr})$ est donc fonction des résidus précédents qui sont en nombre fini : la suite est donc périodique modulo q après un certain rang.

Le même raisonnement fait à l'envers montre qu'elle est périodique.

Soit h un nombre pair. Considérons

$$\theta^{4hr}-1=(\theta^{4r}-1)(\theta^{4(h-1)r}+\theta^{4(h-2)1}+\ldots+\theta^{4r}+1)$$

$$=(\theta^{4r}-1)(\theta^{2(h-1)})\left(\theta^{2(h-1)r}+\theta^{2(h-3)r}+\ldots+\theta^2+\frac{1}{\theta^r}+\ldots+\frac{1}{2^{(h-1)r}}\right).$$

Posons

$$v_n=\theta^{2nr}+\frac{1}{\theta^{2nr}}$$

$$\theta^{4hr}-1=(\theta^4-1)\,\theta^{2(h-1)}(v_1+v_3+\ldots+v_{h-1}).$$

Il y a $h/2$ termes v_i dans la somme; soit λ la période modulo q de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$; supposons h multiple de $2\lambda q$:

$$h=2\lambda qm \qquad \text{où} \quad m \text{ appartient à } \mathbb{N}$$

$$B=u_1+\ldots+u_{h-1}=(u_1+\ldots+u_{\lambda-1})\,qm$$

$$\frac{\theta^{4hr}-1}{q}=(\theta^{4r}-1)\,\theta^{2(h-1)r}\,m.$$

D'après le lemme précédent et le théorème de van der Corput, si x appartient à $B(\theta)$, $(x(\theta^{4hr}-1)/q)$ y est aussi pour h multiple de $2\lambda q$ et donc x/q appartient à $B(\theta)$.

Preuve du théorème XIV. — Soit ν la mesure associée à la suite $(x\,\theta^n)_{n\geqslant 0}$.

Elle s'écrit comme somme de produits de convolution :

$$\nu=\delta_0 * \nu_1+\delta_1 * \nu_1$$

où δ_i est la mesure de Dirac en i/θ, $i=0$, 1, affectée du coefficient λ_i et ν_1 est la mesure associée, d'après le théorème 5', à la suite :

$$(y_1\,\theta^n)_{n\geqslant 0}=\left(\varepsilon_0\,\theta^n+\ldots+\varepsilon_n+\frac{\varepsilon_{n+2}}{\theta^2}+\ldots\right)_{n\geqslant 0}$$

(le terme ε_1/θ a été supprimé).

Montrons que si ν est la mesure de Lebesgue ν_1 aussi est la mesure de Lebesgue :

si ν_1 n'est pas la mesure de Lebesgue, il existe un intervalle $[a\,b]$ tel que

$$\nu_1\,[a,\,b]<b-a.$$

Alors

$$\nu_1\left[\frac{1}{\theta}+a,\ \frac{1}{\theta}+b\right]>b-a$$

car

$$\lambda_0\,\nu_1\,[a,\ b]+\lambda_1\,\nu_1\left[\frac{1}{\theta}+a,\ \frac{1}{\theta}+b\right]=1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_0+\lambda_1=1.$$

De même

$$\nu_1\left[\frac{2}{\theta}+a,\ \frac{2}{\theta}+b\right]<b-a$$

et généralement

$$\nu_1\left[\frac{2k+1}{\theta}+a,\ \frac{2k+1}{\theta}+b\right]>b-a$$

ce qui contredit l'hypothèse

$$\nu_1\,[a,\ b]<b-a$$

car une sous-suite des intervalles $[((2k+1)/\theta)+a,\ ((2k+1)/\theta)+b]$ converge vers $[a,\ b]$.

De même, la mesure ν_1^1 est égale à la mesure de Lebesgue où ν_1^1 est la mesure associée à la suite

$$y_1\,\theta^n=\varepsilon_0\,\theta^n+\ldots+\varepsilon_{n+2}\,\theta^2+\frac{\varepsilon_{n-2}}{\theta^2}+\ldots$$

à l'aide du théorème 5′ car $\nu_1=\delta_0'*\delta_1'*\nu_1$; où δ_i' est la mesure de Dirac en $i_1(\theta)$ affectée du coefficient λ_i.

Et ainsi de suite jusqu'à la mesure ν_k^k associée à la suite

$$(y_k^k)_n=\varepsilon_n\,\theta^n+\ldots+\varepsilon_{n+k+1}\,\theta^{k+1}+\frac{\varepsilon_{n-k-1}}{\theta^{k+1}}+\ldots$$

mais si k est assez grand, la quantité ci-dessus est tellement petite que la suite $(y_k^k)_n$ n'est même pas dense dans $[0,\ 1]$ dont pas du tout équirépartie.

Soit encore ν la mesure associée à la suite $(x\,\theta^n)_{n\geqslant 0}$.

Elle s'écrit comme une somme de produits de convolution :

$$\nu=(\delta_0+\ldots+\delta_{a-1})*\nu_1$$

où δ_i est la mesure de Dirac en i/θ affectée du coefficient $1/a$ et ν_1 est la mesure associée d'après le théorème 5′ à la suite

$$(y_1^n)_{n\geqslant 0}=\left(\varepsilon_0\,\theta^n+\ldots+\varepsilon_n+\frac{\varepsilon_{n+2}}{\theta^2}+\ldots\right)_{n\geqslant 0}.$$

Montrons que si ν est la mesure de Lebesgue, alors ν_1, aussi.

A un coefficient S non nul près, la série de Fourier de ν_1 $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ et celle, $(\gamma_n')_{n\geqslant 0}$, de ν, vérifient :

$$\begin{aligned}\gamma_n&=S\,\gamma_n^1\cdot\sum_{j=0}^{a-1}e^{2i\pi nj\theta^{-1}}\\&=S\,\gamma_n^1\cdot\frac{1-e^{-2i\pi na\theta^{-1}}}{1-e^{-2i\pi n\theta^{-1}}}\end{aligned}$$

Si $\gamma_n=0$, comme $e^{-2i\pi na\theta^{-1}}$ est non nul, γ_n^1 est nul si $n\geqslant 1$.

En itérant ce raisonnement comme précédemment, compte tenu du fait que $1-e^{2i\pi na\theta^p}$ n'est jamais nul, on montre que ν ne peut être la mesure de Lebesgue.

Nous avons donné les mêmes probabilités aux divers chiffres pour pouvoir dire que la somme $\sum_{j=1}^{a-1}(1/a)\,e^{2i\pi nj\theta^p}$ était non nulle.

Nous ne donnerons pas la preuve du théorème 14 car c'est une généralisation immédiate de celle de M. Mendès-France [14].

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Rényi, Representations for real numbers and their ergodic properties, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, vol. 8, 1957, p. 401-414.

[2] W. Parry, On the β-expansion of real numbers, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, vol. 11, 1960, p. 401-416.

[3] Ito Takahashi, Markov subshifts and realization of β-expansions, *J. Math. Soc. Japan*, vol. 26, n 1, 1974.

[4] Hofbauer, Maximal mesures for simple piecewise monotonic transformations, *Z. Wahrschein. Verw Gebiete*, vol. 52, 1980, n° 3.

[5] F. Blanchard, G. Hansel, Systèmes codés (à paraître).

[6] S. EILENBERG, Automata, langages and machines, vol. A, London Academic Press, 1974.
[7] SIGMUND, On the Distribution of periodic points for β-shifts, *Monatshefte für Mathematik*, vol. 82, 1976, p. 247-252.
[8] J. M. FRANKS, Homology an dynamical systems, conference board of the mathematical sciences published by the American Mathematical Society.
[9] J.-P. KAHANE, R. SALEM, Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Paris, Hermann, 1963.
[10] K. SCHMIDT, On periodic expansions of Pisot numbers and Salem numbers.
[11] J. W. S. CASSELS, An introduction to diophantine approximation, Cambridge Univ. Press, London, 1957.
[12] D. CHAMPERNOWNE, The construction of decimals normal in the scale of ten, *J. London Math. Soc.*, vol. 8, 1950, p. 254-260.
[13] M. MENDES FRANCE, T. KAMAE, VAN DER CORPUT, Difference Theorem, *Israel J. of Math.*, 1978-1979, p. 31-32.
[14] A. BERTRAND-MATHIS, Mesure de Champernowne sur certains systèmes codés (à paraître).
[15] M. MENDES FRANCE, *Thèse*, *Israel J. of Math.*, 1966.
[16] S. ITO, I. SHIOKAWA, A construction of β-normal sequence, *J. Math. Soc. Japan*, vol. 27, n° 1, 1975.
[17] Y. MEYER, Nombres algébriques et Analyse harmonique, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e année, t. 3, 1970, p. 75-110.
[18) Y. TAKAHASHI, Shift with orbit basis and realization of one dimensional maps, *Osaka J. Math.*, 20, 1983, p. 599-629