BULLETIN DE LA S. M. F.

MARCEL GRANGÉ

Diviseurs de Leibenson et problème de Gleason pour $H^{\infty}(Omega)$ dans le cas convexe

Bulletin de la S. M. F., tome 114 (1986), p. 225-245

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__225_0>

Bull. Soc. math. France,
114, 1986, p. 225-245.

DIVISEURS DE LEIBENSON ET PROBLÈME DE GLEASON POUR $H^\infty(\Omega)$ DANS LE CAS CONVEXE

PAR

MARCEL GRANGÉ (*)

RÉSUMÉ. — Étant donné un ouvert convexe Ω à bord régulier de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$, et un point $a\in\Omega$, on donne des estimations pour les diviseurs de Leibenson au point a d'une fonction holomorphe bornée sur Ω. Dans le cas des boules unités $\mathbb{B}_n$, ces estimations sont indépendantes de la dimension.

ABSTRACT. — Let Ω be a convex open subset of $\mathbb{C}^n$ with C^2-boundary, and let a be a point in Ω. We estimate from above the Leibenson divisors at a of a bounded holomorphic function on Ω. In the special case of the unit balls $\mathbb{B}_n$, these estimations do not depend on the dimension.

Le problème de Gleason a été diversement étudié et résolu dans de nombreux cas; par Leibenson notamment dans le cas d'un ouvert convexe borné Ω à bord de classe C^2 pour les fonctions de $A(\Omega)$ [2]. HENKIN [2] et OVRELID [4] ont étudié pour cette même classe de fonctions le cas strictement pseudo-convexe. Pour la classe $H^\infty(\Omega)$ on peut citer AHERN et SCHNEIDER [1], KERZMAN et NAGEL [3], toujours dans le cas strictement pseudo-convexe, à bord régulier de classe C^4.

Dans le cas convexe (mais non nécessairement strictement convexe) les diviseurs de Leibenson sont les candidats naturels pour résoudre le problème de Gleason; nous démontrons dans cet article que si Ω est un ouvert convexe borné de $\mathbb{C}^n$, à bord régulier de classe $C^{1+\varepsilon}$, les diviseurs de

---

(*) Texte reçu le 2 juillet 1985.

Marcel GRANGÉ, Université Bordeaux I, Mathématiques et Informatique, 351 cours de la Libération 33405 Talence Cedex, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1986/02 225 21/$4.10

Leibenson $f_1, \ldots, f_n$ associés à un point a de Ω pour une fonction f de $H^\infty(\Omega)$, vérifient une inégalité du type

$$\operatorname{Sup}_{z \in \Omega} \left(\sum_{j=1}^n |f_j(z)|^2\right)^{1/2} \leqslant G_\Omega(a) \| f - f(a) \|_\infty$$

où $G_\Omega(a)$ est une constante ne dépendant que de la géométrie de l'ouvert Ω. En particulier $G_{B_n}(a)$ ne dépend pas de la dimension $n \geqslant 2$ et peut s'exprimer à l'aide de fonctions élémentaires. D'autre part un contre-exemple montre qu'au moins un diviseur de Leibenson n'est pas borné dans le cas où Ω est seulement à bord régulier de classe C^1.

I. Préliminaires géométriques

Dans cette partie nous mettons en évidence quelques paramètres géométriques pour un ouvert convexe borné de $\mathbb{C}^n$, en fonction desquels les diviseurs de Leibenson seront estimés.

Ω désigne un ouvert convexe borné de $\mathbb{C}^n$, contenant l'origine, à bord régulier de classe $C^{1+\varepsilon}$, et ρ désigne une fonction définissante de Ω : $\Omega = \{\rho < 0\}$, le gradient de ρ ne s'annulant pas sur $\{\rho = 0\} = \partial\Omega$.

D'autre part on considère la jauge p de Ω :

$$\Omega = \{p < 1\}, \qquad \partial\Omega = \{p = 1\}, \qquad \bar{\Omega}^c = \{p > 1\}$$

et pour tout z de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ on définit $z^* \in \partial\Omega$:

$$z^* = \frac{1}{p(z)} z.$$

Le produit hermitien usuel des deux éléments z et w de $\mathbb{C}^n$ est noté $\langle z, w \rangle$:

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j, \qquad \|z\| = (\langle z, z \rangle)^{1/2},$$

B_n désigne la boule unité ouverte de $\mathbb{C}^n$ et D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

A. La fonction J et quelques-unes de ses propriétés

On définit la fonction

$$[0,1[\times \partial\Omega \xrightarrow{J^0_\Omega} [0, +\infty]$$

$$J^0_\Omega(t, z) = \operatorname{Inf} \{ \|w - tz\|;\ \rho(w) = 0,\ \partial\rho(z).(w - tz) = 0 \}.$$

On peut vérifier immédiatement que J^0_Ω ne dépend pas de la fonction définissante choisie.

Remarquons tout de suite que si $n=1$, alors $J^0_\Omega(t, z)=+\infty$, en effet :

$$\partial\rho(z).(w-tz)=\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)(w-tz)=0,$$

donc $w=tz\in\Omega$; mais $w\in\partial\Omega$. L'ensemble dont on considère la borne inférieure est donc vide.

Si $n\geqslant 2$ on a immédiatement les inégalités :

$$0<d(tz, \partial\Omega)\leqslant J^0_\Omega(t, z)<+\infty.$$

Avant de produire quelques propriétés de J^0_Ω établissons un lemme technique :

LEMME 1. — *Pour toute partie compacte K dans Ω, le nombre*

$$R(K)=\operatorname{Inf}\left\{\frac{1}{1-t}\left|\rho(a+t(z-a))\right|;\ a\in K, z\in\partial\Omega, t\in[0,1[\right\}$$

est strictement positif.

Preuve. — Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction U : $U(t)=\rho(a+t(z-a))$

$$\left|U(t)-U(1)-(t-1)U'(1)\right|\leqslant(1-t)\operatorname{Sup}_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|U'(1+x(t-1))-U'(1)\right|.$$

Comme ρ est de classe $C^{1+\varepsilon}$ il existe une constante $C_\Omega>0$ telle que pour tous w et ζ du compact $\bar{\Omega}$ on ait :

$$\left\|d\rho(w)-d\rho(\zeta)\right\|\leqslant C_\Omega\left\|w-\zeta\right\|^\varepsilon,$$

compte tenu de l'expression de U' à l'aide de $d\rho$. et comme :

$$0\leqslant t\leqslant 1+x(t-1)\leqslant 1,$$

on obtient l'inégalité

$$\left|\rho(a+t(z-a))-(t-1)d\rho(z).(z-a)\right|\leqslant C_\Omega(1-t)^{1+\varepsilon}\left\|z-a\right\|^{1+\varepsilon}.$$

Mais Ω est convexe et borné, donc :

$$M(K) = \operatorname{Sup}\{\|z-a\|;\ a \in K, z \in \partial\Omega\} < +\infty,$$

$$\Delta(K) = \inf\{d\rho((z).(z-a);\ a \in K, z \in \partial\Omega\} > 0,$$

de sorte que si :

$$1-t \leqslant \left(\frac{\Delta(K)}{2\,C_\Omega\,M(K)^{1+\varepsilon}}\right)^{1/\varepsilon}$$

alors

$$\frac{1}{1-t}|\rho(a+t(z-a))| \geqslant \frac{1}{2}\Delta(K)$$

et de là on conclut aisément.

PROPOSITION 1. — *Pour tout* z *de* $\partial\Omega$ *la fonction*

$$t \to J^0_\Omega(t, z)$$

est continue sur $[0,1[$.

Preuve. — Soient $t_0 \in]0,1[$ et $t_1, t_2 \in [0, t_0]\ t_1 < t_2$. Comme $\partial\Omega$ est compact il existe w_1 tel que :

$$\rho(w_1) = 1, \qquad \partial\rho(z).(w_1 - t_1 z) = 0, \qquad J^0_\Omega(t_1, z) = \|w_1 - t_1 z\|,$$

définissons $w = z + (1-t_2)/(1-t_1)(w_1 - z)$. Comme $0 < (1-t_2)/(1-t_1) < 1$ w appartient à $\bar{\Omega}$, d'autre part pour le convexe ouvert contenant l'origine $-t_2 z + \Omega$ considérons :

$$(w - t_2 z)^* = w_2 - t_2 z \qquad \text{où} \quad w_2 \in \partial\Omega,$$

il existe alors $r \in [0,1]$ tel que : $w = t_2 z + r(w_2 - t_2 z)$. Si r était nul on aurait $w_1 = t_1 z \in \Omega$, ce qui est absurde puisque $\rho(w_1) = 0$; donc $r > 0$; alors il vient :

$$\partial\rho(z).(w_2 - t_2 z) \leqslant \|w_2 - t_2 z\| = \frac{1}{r}\|w - t_2 z\|$$

$$= \frac{1}{r}\,\frac{1-t_2}{1-t_1}\,d\rho(z).(w_1 - t_1 z) = 0,$$

donc

$$J^0_\Omega(t_2, z) \leqslant \| w_2 - t_2 \| = \frac{1}{r} \| w - t_2 z \| = \frac{1}{r} \frac{1-t_2}{1-t_1} \| w_1 - t_1 z \|,$$

C'est-à-dire

$$J^0_\Omega(t_2, z) \leqslant \frac{1}{r} \frac{1-t_2}{1-t_1} J^0_\Omega(t_1, z).$$

Appliquons le lemme 1 avec $K=[0, t_0]z$, on obtient :

$$|\rho(w)| \geqslant (1-r) R(K),$$

cependant, notant $C_1 = \sup_{\zeta \in \bar{\Omega}} \| d\rho(\zeta) \|$, on a :

$$|\rho(w)| = |\rho(w) - \rho(w_1)| \leqslant C_1 \| w - w_1 \|,$$

or

$$w - w_1 = \frac{t_2 - t_1}{1-t_1}(z - w_1),$$

et $\delta(\Omega)$ désignant le diamètre de Ω, il vient :

$$1 - r \leqslant \frac{C_1 \delta(\Omega)}{(1-t_0) R(K)} (t_2 - t_1),$$

de sorte que si :

$$t_2 - t_1 < \frac{(1-t_0) R(K)}{C_1 \delta(\Omega)} = \frac{1}{A(K)},$$

alors on a l'égalité (*)

$$J^0_\Omega(t_2, z) \leqslant \frac{1}{1 - A(K)(t_2 - t_1)} \frac{1-t_2}{1-t_1} J^0_\Omega(t_1, z).$$

De même il existe ζ_2 tel que :

$$\rho(\zeta_2) = 0, \qquad \partial\rho(z).(\zeta_2 - t_2 z) = 0, \qquad J^0_\Omega(t_2, z) = \| \zeta_2 - t_2 z \|.$$

Définissons

$$\zeta = z + \frac{1-t_1}{1-t_2}(\zeta_2 - z).$$

Comme

$$0<\frac{t_2-t_1}{1-t_1}<1 \qquad \text{et} \qquad \zeta_2=\zeta+\frac{t_2-t_1}{1-t_1}(z-\zeta),$$

ζ n'appartient pas à Ω puisque $\rho(\zeta_2)=0$; d'autre part pour le convexe ouvert contenant l'origine $-t_1 z+\Omega$ considérons

$$(\zeta-t_1 z)^*=\zeta_1-t_1 z \qquad \text{où} \quad \zeta_1\in\partial\Omega,$$

il existe alors $s\geqslant 1$ tel que : $\zeta=t_1 z+s(\zeta_1-t_1 z)$. Ensuite on a :

$$\partial\rho(z).(\zeta_1-t_1 z)=\frac{1}{s}\partial\rho(z).(\zeta-t_1 z)=\frac{1}{s}\,\frac{1-t_1}{1-t_2}\partial\rho(z).(\zeta_2-t_2 z)=0,$$

donc :

$$J_\Omega^0(t_1, z)\leqslant\|\zeta_1-t_1 z\|=\frac{1}{s}\|\zeta-t_1 z\|=\frac{1}{s}\,\frac{1-t_1}{1-t_2}\|\zeta_2-t_2 z\|,$$

c'est-à-dire

$$J_\Omega^0(t_1, z)\leqslant\frac{1}{s}\,\frac{1-t_1}{1-t_2}J_\Omega^0(t_2, z)$$

et comme $s\geqslant 1$ on a l'inégalité (**)

$$J_\Omega^0(t_1, z)\leqslant\frac{1-t_1}{1-t_2}J_\Omega^0(t_2, z).$$

Les deux inégalités (*) et (**) montrent que la fonction $t\to J_\Omega^0(t, z)$ est continue sur $[0, t_0]$, pour tout t_0 de $]0,1[$; donc cette fonction est continue sur $[0,1[$.

PROPOSITION 2. — *Il existe une constante Λ_0 (ne dépendant que de l'ouvert Ω) telle que pour tous t de $[0,1[$ et z de $\partial\Omega$:*

$$J_\Omega^0(t, z)\geqslant\Lambda_0(1-t)^{1/(1+\varepsilon)}.$$

Preuve. — z étant fixé dans $\partial\Omega$, il existe w tel que :

$$\rho(w)=0, \qquad \partial\rho(z).(w-tz)=0, \qquad J_\Omega^0(t, z)=\|w-tz\|,$$

appliquons le théorème des accroissements finis

$$|\rho(tz)+d\rho(tz).(w-tz)| \leqslant \|w-tz\| \operatorname{Sup}_{0\leqslant x\leqslant 1} \|d\rho(tz+x(w-tz))-d\rho(tz)\|,$$

la constante C_Ω ayant été définie dans la preuve du lemme 1 on obtient

$$|\rho(tz)+d\rho(tz).(w-tz)| \leqslant C_\Omega \|w-tz\|^{1+\varepsilon},$$

mais

$$d\rho(z).(w-tz)=2\operatorname{Re}\partial\rho(z).(w-tz)=0,$$

donc

$$|\rho(tz)| \leqslant \|d\rho(tz)-d\rho(z)\| \|w-tz\| + C_\Omega \|w-tz\|^{1+\varepsilon}.$$

Reprenant les constantes $R(0)$ et $M(0)$ définies dans la preuve du lemme 1, il vient

$$C_\Omega J_\Omega^0(t, z)^{1+\varepsilon} + C_\Omega M(0)^\varepsilon (1-t)^\varepsilon J_\Omega^0(t, z) - R(0)(1-t) > 0.$$

Considérons la fonction u_λ : $u_\lambda(x)=ax^{1+\varepsilon}+b\lambda^\varepsilon x-c\lambda$ définie pour $x\geqslant 0$ les constantes vérifiant : $a>0$, $b>0$, $c>0$ et le paramètre λ appartenant à $]0,1]$. La fonction u_λ étant strictement croissante sur $[0, +\infty[$ l'équation $u_\lambda(x)=0$ admet une racine unique $x(\lambda)>0$. Soit λ_0 l'unique nombre réel vérifiant

$$\begin{cases} a\lambda_0^{1+\varepsilon}+b\lambda_0-c=0, \\ \lambda_0>0, \end{cases}$$

alors pour tout $\lambda\in]0,1[$

$$u_\lambda(\lambda_0\lambda^{1/(1+\varepsilon)})=b\lambda_0\lambda(\lambda^{\varepsilon^2/(1+\varepsilon)}-1)<0,$$

posant $a=C_\Omega$, $b=C_\Omega M(0)^\varepsilon$, $c=R(0)\lambda=1-t$ on obtient pour tout t de $[0,1[$

$$J_\Omega^0(t, z)>\Lambda_0(1-t)^{1/(1+\varepsilon)},$$

où Λ_0 est déterminé comme suit :

$$\begin{cases} C_\Omega\Lambda_0^{1+\varepsilon}+C_\Omega M(0)^\varepsilon\Lambda_0-R(0)=0, \\ \Lambda_0>0. \end{cases}$$

COROLLAIRE. — $E_\Omega(0)=\operatorname{Sup}_{z\in\partial\Omega}\int_0^1 dt/J_\Omega^0(t, z)\leqslant 1+\varepsilon/\varepsilon\Lambda_0<+\infty.$

Si Ω désigne un ouvert convexe borné de $\mathbb{C}^n$ à bord régulier de classe $C^{1+\varepsilon}$ mais ne contenant pas nécessairement l'origine, pour tout $a \in \Omega$ on définit J^a_Ω sur $[0,1[\times \partial\Omega$

$$J^a_\Omega(t, z) = J^0_{-a+\Omega}(t, z-a).$$

Bien entendu $t \to J^a_\Omega(t, z)$ est continue sur $[0,1[$ pour tout z de $\partial\Omega$, et

$$E_\Omega(a) = \mathrm{Sup}_{z \in \partial\Omega} \int_0^1 \frac{dt}{J^a_\Omega(t, z)} < +\infty.$$

B. FORME INFINITÉSIMALE DE LA DISTANCE DE KOBAYASHI

Rappelons la définition : $\Omega \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{F_\Omega} \mathbb{R}_+$

$$F_\Omega(z, w) = \mathrm{Inf}\ X(z, w),$$

où : $X(z, w) = \{\alpha > 0;$ il existe $D \xrightarrow{f} \Omega$ holomorphe, $f(0) = z$ et $f'(0) = w\frac{1}{\alpha}\}$.

F_Ω est semi-continue supérieurement sur $\Omega \times \mathbb{C}^n$ et $F_\Omega(z, \xi w) = |\xi| F_\Omega(z, w)$ pour tout ξ de $\mathbb{C}$. De plus le classique lemme de Schwarz en une variable montre que *si φ est une fonction holomorphe bornée sur Ω, alors on a l'inégalité :* pour tous z de Ω et w de $\mathbb{C}^n$:

$$|\varphi'(z).\ w| \leqslant \|\varphi\|_\infty F_\Omega(z, w).$$

Le calcul de F_Ω dans le cas de la boule B_n est certainement connu mais pour la commodité du lecteur nous présentons le :

LEMME 2. — *Si $\Omega = B_n$, alors*

$$F_{B_n}(z, w) = \frac{(|\langle z, w\rangle|^2 + \|w\|^2(1-\|z\|^2))^{1/2}}{1-\|z\|^2}.$$

Preuve :

$$u = \frac{\langle z, w\rangle}{\|w\|^2}, \qquad R = \frac{1}{\|w\|^2}(|(z, w\rangle|^2 + \|w\|^2(1-\|z\|^2))^{1/2},$$

$$a = -\frac{u}{R} \in D.$$

on considère la fonction f:

$$f(\xi)=z+\left(u+R\frac{\xi+a}{1+\bar{a}\xi}\right)w.$$

On a

$$f(D)\subset B_n, \qquad f(0)=z, \qquad f'(0)=R\left(1-\frac{|u|^2}{R^2}\right)w$$

donc

$$F_{B_n}(z, w)\leqslant\frac{R}{R^2-|u|^2}=\frac{(|\langle z, w\rangle|^2+\|w\|^2(1-\|z\|^2))^{1/2}}{1-\|z\|^2}.$$

Soit $\alpha\in X(z, w)$ il existe donc $D\xrightarrow{f}\Omega$ holomorphe telle que $f(0)=z$ et $f'(0)=w\dfrac{1}{\alpha}$. On définit U et φ_z

$$U(\zeta)=(1-\|z\|^2)^{1/2}\zeta+\frac{1}{1+(1-\|z\|^2)^{1/2}}<\zeta, z>z,$$

$$\varphi_z(\zeta)=U\left(\frac{1}{1-\langle\zeta, z\rangle}(z-\zeta)\right).$$

φ_z est un automorphisme (holomorphe) de B_n; on considère la fonction g : $g(\xi)=\varphi_z(f(-\xi))$. On a $g(D)\subset B_n$, donc l'inégalité de Cauchy : $\|g'(0)\|\leqslant 1$; on calcule $\|g'(0)\|$ et on obtient

$$\alpha\geqslant\frac{(|\langle z, w\rangle|^2+\|w\|^2(1-\|z\|^2))^{1/2}}{1-\|z\|^2}$$

(Q.E.D).

La proposition suivante va nous permettre de définir un paramètre géométrique lié à la métrique de Kobayashi de l'ouvert convexe Ω.

PROPOSITION 3. — *La constante $E_\Omega(0)$ ayant été définie dans le corollaire* 1, *on a pour tout z de $\bar{\Omega}$, $z\neq 0$*

$$\Phi_\Omega^0(z) := \mathrm{Sup}_{\|u\|=1,\ \partial p(z^*).u=0}\int_0^1 F_\Omega(tz, u)\,dt\leqslant\frac{1}{p(z)}E_\Omega(0)$$

(p est la jauge de Ω).

Preuve. — Tout d'abord pour tout z de $\bar{\Omega}, z\neq 0$ et pour tout t de $[0,1[$ on a

$$F_\Omega(tz, u) \leqslant \frac{1}{p(z)} F_\Omega(tz^*, u),$$

en effet soit $\alpha \in X(tz^*, u)$, il existe $D \xrightarrow{f} \Omega$ holomorphe telle que

$$f(0) = tz^* \qquad \text{et} \qquad f'(0) = \frac{1}{\alpha} u.$$

Considérons la fonction g : $g(\xi) = p(z) f(\xi)$. Elle est à valeurs dans Ω car pour tout ξ de D on a

$$p(g(\xi)) = p(z) p(f(\xi)),$$

de plus

$$g(0) = tz \qquad \text{et} \qquad g'(0) = \frac{p(z)}{\alpha} u,$$

d'où l'inégalité annoncée.

Ensuite on démontre l'inégalité

$$F_\Omega(tz^*, u) \leqslant \frac{1}{J^0_\Omega(t, z^*)},$$

pour cela on considère la fonction f sur D

$$f(\xi) = tz^* + \xi J^0_\Omega(t, z^*) u,$$

si $f(D)$ n'était pas contenu dans Ω, il existerait ξ de D tel que $\rho(f(\xi)) \geqslant 0$, or $\rho(f(0)) = \rho(tz^*) < 0$; il existerait donc ξ_0 de D tel que $\rho(f(\xi_0)) = 0$; d'autre part

$$\partial\rho(z^*).(f(\xi_0) - tz^*) = \xi_0 J^0_\Omega(t, z^*) \partial\rho(z^*).u = 0$$

donc par définition de J^0_Ω on obtiendrait

$$J^0_\Omega(t, z^*) \leqslant \| f(\xi_0) - tz^* \|,$$

mais $\| f(\xi_0) - tz^* \| = |\xi_0| J^0_\Omega(t, z^*) < J^0_\Omega(t, z^*)$. Par suite on a l'inclusion $f(D) \subset \Omega$; de plus

$$f(0) = tz^* \qquad \text{et} \qquad f'(0) = J^0_\Omega(t, z^*) u,$$

d'où l'inégalité annoncée.

Compte tenu du corollaire 1 on obtient ensuite l'inégalité de l'énoncé.

Remarque 1. — Pour tout z de $\partial\Omega$ et pour tout $r \in]0,1]$ on a l'inégalité

$$\Phi_\Omega^0(rz) \leqslant \frac{1}{r}\Phi_\Omega^0(z).$$

Remarque 2. — Dans le cas où $\Omega = B_n$, $n \geqslant 2$, compte tenu de la proposition 2 on obtient tout de suite

$$\Phi_{B_n}^0(z) = \frac{1}{\|z\|}\operatorname{Arc}\sin\|z\|$$

et dans ce cas on peut calculer facilement $J_{B_n}^0$:

$$J_{B_n}^0(t, z) = \sqrt{1-t^2},$$

donc $E_{B_n}(0) = \pi/2$, de sorte que l'inégalité démontrée dans la proposition 3 est optimale si $\Omega = B_n$.

Compte tenu de la proposition précédente on définit

$$K_\Omega(0) = \operatorname{Sup}_{z \in \partial\Omega}\Phi_\Omega^0(z).$$

Si Ω désigne un ouvert convexe borné de $\mathbb{C}^n$ à bord régulier de classe $C^{1+\varepsilon}$ mais ne contenant pas nécessairement l'origine, pour tout $a \in \Omega$ on définit sur $\bar{\Omega}$: $\Phi_\Omega^a(z) = \Phi_{-a+\Omega}^0(z-a)$, et

$$K_\Omega(a) = \operatorname{Sup}_{z \in \partial\Omega}\Phi_\Omega^a(z).$$

Remarquons que dans le cas unidimensionnel la fonction Φ_Ω^a est nulle et $K_\Omega(a) = 0$.

Des calculs élémentaires mais compliqués, qu'on ne présente pas ici montrent que si $n \geqslant 2$:

$$\Phi_{B_n}^a(z) = 2\int_{(1-\|a\|^2)^{1/2}}^{+\infty} \frac{(x^2+\|a\|^2-|\langle a, z\rangle|^2)^{1/2}}{x(x^2+\|z-a\|^2)}\,dx,$$

$$K_{B_n}(a) = \frac{1}{1-\|a\|}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\sin\|a\|\right).$$

En général, en vertu de la proposition 3 on a l'inégalité

$$K_\Omega(a) \leqslant E_\Omega(a),$$

où $E_\Omega(a)$ est la constante définie à la fin du paragraphe A. Et des calculs assez compliqués montrent que la fonction $E_{B_n}(a)/K_{B_n}(a)$ est bornée dans B_n.

C. Nous aurons aussi besoin d'un autre paramètre géométrique qui mesure en quelque sorte la « rondeur » de Ω par rapport à l'un de ses points.

$\nu(z)$ désigne le vecteur unitaire normal en un point z de $\partial\Omega$; nous savons qu'on a :

$$0 < \frac{|\partial\rho(z).z|}{\|\partial\rho(z)\|\,\|z\|} = \left|\left\langle \frac{1}{\|z\|}z,\ \nu(z)\right\rangle\right| \leqslant 1.$$

Compte tenu de la compacité de $\partial\Omega$ on peut définir le nombre strictement positif

$$\Theta_\Omega(0) = \mathrm{Min}_{z\in\partial\Omega}\left|\left\langle \frac{1}{\|z\|}z,\ \nu(z)\right\rangle\right|.$$

Si Ω est un ouvert convexe borné de $\mathbb{C}^n$, à bord régulier de classe $C^{1+\varepsilon}$ (de classe C^1 suffirait) mais ne contenant pas nécessairement l'origine, on définit pour $a\in\Omega$

$$\Theta_\Omega(a) = \Theta_{-a+\Omega}(0) = \mathrm{Min}_{z\in\partial\Omega}\left|\left\langle \frac{1}{\|z-a\|}(z-a),\ \nu(z)\right\rangle\right|.$$

Dans le cas unidimensionnel $\Theta_\Omega(a)=1$ et si $\Omega=B_n$, $n\geqslant 2$ $\Theta_{B_n}(a)=(1-\|a\|^2)^{1/2}$.

II. Une version du lemme de Schwarz dans $\mathbb{C}^n$

A. L'ouvert Ω est comme dans la première partie. Étant donné une fonction holomorphe bornée φ sur Ω telle que $\varphi(0)=0$, on a *les diviseurs de Leibenson* Ψ_j, $j=1, \ldots, n$:

$$\Psi_j(z) = \int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(tz)\,dt,$$

Ψ_j est une fonction holomorphe sur Ω et pour tout z de Ω

$$\varphi(z)=\sum_{j=1}^{n} z_j \Psi_j(z).$$

Nous noterons $L_\varphi(z)$ la forme $\mathbb{C}$-linéaire :

$$L_\varphi(z)=\int_0^1 \varphi'(tz)\,dt=\sum_{j=1}^{n} \Psi_j(z)\,e_j^*,$$

$$\|L_\varphi(z)\|=(\sum_{j=1}^{n} |\Psi_j(z)|^2)^{1/2}.$$

Avant d'énoncer et de démontrer le théorème nous présentons le :

LEMME. — *Soient* a, $b>0$, $z\in\mathbb{C}^n$, $z\neq 0$, u *forme linéaire sur* $\mathbb{C}^n : u=\sum_{j=1}^{n} u_j e_j^*$, $u\neq 0$, $u(z)=1$. *On suppose* $n\geqslant 2$. *On a alors*

$$\operatorname{Max}_{\|h\|=1}(a\,|u(h)|+b\,\|h-u(h)z\|)=$$
$$(a^2\|u\|^2+b^2\|u\|^2\|z\|^2+2ab\,\|u\|(\|u\|^2\|z\|^2-1)^{1/2})^{1/2}.$$

Preuve esquissée :

$$L(h)=h-u(h)z,$$

$$F(h)=a\,|u(h)|+b\,\|L(h)\|, \qquad M=\operatorname{Max}_{\|h\|=1} F(h).$$

Si $u(h)=0$ ou $L(h)=0$, alors

$$M=b \qquad \text{ou} \qquad M=\frac{a}{\|z\|}.$$

On cherche donc les extremums de F sur $S\cap U$ où :

$$S=\{h;\ \|h\|=1\},$$
$$U=\{h;\ u(h)\neq 0 \text{ et } L(h)\neq 0\}.$$

Si z et $\bar{u}=\sum_{j=1}^{n} \bar{u}_j e_j$ sont $\mathbb{C}$-colinéaires, on obtient facilement

$$M=(a^2\|u\|^2+b^2)^{1/2}.$$

Si z et $\bar{u}=\sum_{j=1}^{n} \bar{u}_j e_j$ ne sont pas $\mathbb{C}$-colinéaires, l'examen de l'équation de Lagrange montre que si F est extrémale en h alors $h=t\bar{u}+sz$ où $\bar{u}=\sum_{j=1}^{n} \bar{u}_j e_j\in\mathbb{C}^n$. On est alors amené à chercher les extrémums de G sur $L\cap V$ où :

$$G(t, s)=a\,|s+t\,\|u\|^2|+b\,\|u\|\,(\|u\|^2\,\|z\|^2-1)^{1/2}\,|t|,$$
$$L=\{(t, s)\in\mathbb{C}^2;\ |t|^2\,\|u\|^2+2\operatorname{Re} t\bar{s}+|s|^2\,\|z\|^2=1\},$$
$$V=\{(t, s)\in\mathbb{C}^2;\ s+t\,\|u\|^2\neq 0,\ t\neq 0\}.$$

On écrit à nouveau les équations de Lagrange, qui, jointes à l'équation de liaison entre t et s, permettent de trouver les valeurs extrémales de G; un simple examen de celles-ci montre que M a pour valeur celle donnée dans l'énoncé.

THÉORÈME. — *Ω est un ouvert convexe borné de $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 2$, à bord régulier de classe $C^{1+\varepsilon}$, et contenant l'origine. Il existe une constante positive $\sigma(\Omega)$ telle que pour toute fonction holomorphe bornée φ sur Ω vérifiant $\varphi(0)=0$ et $\|\varphi\|_\infty\leqslant 1$, on ait* $\operatorname{Sup}_{z\in\Omega}\|\mathrm{L}_\varphi(z)\|\leqslant\sigma(\Omega)$ *et notant* $d(0)=\operatorname{dist}(0, \partial\Omega)$, *on a l'égalité :*

$$\sigma(\Omega)\leqslant\frac{1}{\Theta_\Omega(0)}\left[\frac{1}{d(0)^2}+K_\Omega(0)^2+2\frac{K_\Omega(0)}{d(0)}(1-\Theta_\Omega(0)^2)^{1/2}\right]^{1/2},$$

Preuve. — Soit $z\in\Omega$, $z\neq 0$. Considérons la forme $\mathbb{C}$-linéaire

$$u_{z^*} : u_{z^*}(h)=\frac{\partial\rho(z^*).h}{\partial\rho(z^*).z^*}$$

et l'opérateur linéaire associé

$$L_{z^*} : L_{z^*}(h)=h-u_{z^*}(h)\,z^*.$$

On a alors

$$L_\varphi(z).h=u_{z^*}(h)\int_0^1\varphi'(tz).z^*\,dt+\int_0^1\varphi'(tz).L_{z^*}(h)\,dt,$$

$$\int_0^1\varphi'(tz).z^*\,dt=\frac{1}{p(z)}\int_0^1\varphi'(tz).z\,dt=\frac{\varphi(z)}{p(z)},$$

d'autre part $\partial\rho(z^*).L_{z^*}(h)=0$ et comme $\|\varphi\|_\infty\leqslant 1$:

$$|\varphi'(tz).L_{z^*}(h)|\leqslant F_\Omega(tz, L_{z^*}(h)),$$

donc en vertu de la proposition 3

$$\left|\int_0^1 \varphi'(tz).L_{z^*}(h)\,dt\right| \leqslant \|L_{z^*}(h)\|\,\Phi^0_\Omega(z),$$

puis

$$|L_\varphi(z).h| \leqslant \frac{|\varphi(z)|}{p(z)}|u_{z^*}(h)| + \Phi^0_\Omega(z)\|L_{z^*}(h)\|.$$

Par suite, compte tenu du lemme 3, comme

$$\|u_{z^*}\| = \frac{\|\partial\rho(z^*)\|}{|\partial\rho(z^*).z^*|}$$

$$\|L_\varphi(z)\|^2 \leqslant \frac{|\varphi(z)|^2}{p(z)^2}\frac{\|\partial\rho(z^*)\|^2}{|\partial\rho(z^*).z^*|^2} + \Phi^0_\Omega(z)^2\|z^*\|^2\frac{\|\partial\rho(z^*)\|^2}{|\partial\rho(z^*).z^*|^2}$$
$$+2\frac{|\varphi(z)|}{p(z)}\Phi^0_\Omega(z)\frac{\|\partial\rho(z^*)\|}{|\partial\rho(z^*).z^*|}\left(\left(\frac{\|\partial\rho(z^*)\|\|z^*\|}{|\partial\rho(z^*).z^*|}\right)^2-1\right)^{1/2}.$$

Utilisant le paramètre $\Theta_\Omega(0)$ introduit dans (I.C.) il vient l'inégalité « interne » :

$$\|L_\varphi(z)\| \leqslant \frac{1}{\Theta_\Omega(0)}\left[\frac{|\varphi(z)|^2}{\|z\|^2} + \Phi^0_\Omega(z)^2 + 2\frac{|\varphi(z)|}{\|z\|}\Phi^0_\Omega(z)(1-\Theta_\Omega(0)^2)^{1/2}\right]^{1/2}.$$

Des remarques suivant la proposition 3, on a :

$$\Phi^0_\Omega(z) \leqslant \frac{1}{p(z)}\Phi^0_\Omega(z^*) \leqslant \frac{1}{p(z)}K(0),$$

mais $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$, donc

$$\|L_\varphi(z)\| \leqslant \frac{1}{\Theta_\Omega(0)}\left[\frac{1}{\|z\|^2} + \frac{K_\Omega(0)^2}{p(z)_2} + 2\frac{K_\Omega(0)}{\|z\|p(z)}(1-\Theta_\Omega(0)^2)^{1/2}\right]^{1/2}.$$

Ainsi L_φ est bornée en dehors d'un voisinage de l'origine relativement compact dans Ω, donc est bornée sur Ω. Considérons $d(0) = d(0, \partial\Omega) = \mathrm{Min}_{w\in\partial\Omega}\|w\|$, on a immédiatement pour tout $r\in[0,1[$ $\mathrm{Min}_{p(w)=r}\|w\| = rd(0)$, et en vertu du principe du maximum :

$$\mathrm{Sup}_{p(z)\leqslant r}\|L_\varphi(z)\| \leqslant \frac{1}{\Theta_\Omega(0)}\left[\frac{1}{r^2 d(0)^2} + \frac{K_\Omega(0)^2}{r^2} + 2\frac{K_\Omega(0)}{r^2 d(0)}(1-\Theta_\Omega(0)^2)^{1/2}\right]^{1/2}.$$

Par suite faisant tendre r vers 1, on obtient

$$\sup_{z\in\Omega}\|L_\varphi(z)\|\leqslant\frac{1}{\Theta_\Omega(0)}\left[\frac{1}{d(0)^2}+K_\Omega(0)^2+2\frac{K_\Omega(0)}{d(0)}(1-\Theta_\Omega(0)^2)^{1/2}\right]^{1/2}$$

et bien entendu

$$\sigma(\Omega)=\mathrm{Sup}\{\,\mathrm{Sup}_{z\in\Omega}\|L_\varphi(z)\|;\ \varphi\in H^\infty(\Omega).\ \varphi(0)=0\,\|\varphi\|_\infty\leqslant 1\,\}.$$

Cas de la boule B_n, $n\geqslant 2$

L'inégalité « interne » donnée dans la démonstration précédente est ici

$$\|L_\varphi(z)\|\leqslant\frac{1}{\|z\|}(|\varphi(z)|^2+(\mathrm{Arc}\sin\|z\|)^2)^{1/2},$$

de plus on a aussi

$$\sigma(B_n)\leqslant\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)^{1/2}.$$

Signalons que ces deux inégalités, dans ce cas particulier, auraient pu être obtenues à l'aide des automorphismes de la boule et de l'inégalité de Cauchy $\|\varphi'(0)\|\leqslant 1$.

En fait on a l'égalité pour tout entier $n\geqslant 2$

$$\sigma(B_n)=\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)^{1/2},$$

précisément pour la fonction φ

$$\varphi(z, w_1, \ldots, w_{n-1})=z(1-\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}w_j^2)^{1/2},$$

qui vérifie bien $\varphi(0, 0, \ldots, 0)=0$ et $\|\varphi\|_\infty=1$, on a

$$\sup_{z\in B_n}\|L_\varphi(z)\|=\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)^{1/2},$$

en effet notant $\Psi^*, \Psi_1^*, \ldots, \Psi_{n-1}^*$ les fonctions radiales (définies presque partout) associées aux diverseurs de Leibenson $\Psi, \Psi_1, \ldots, \Psi_n$, on a les relations suivantes pour tout système $(x_1, \ldots, x_{n-1})\,x_j>0$ vérifiant

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2 < 1 \qquad \text{avec} \quad x = (1 - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2)^{1/2} :$$

$$|\Psi^*(x, x_1, \ldots, x_{n-1})|^2 + \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} |\Psi_j^*(x, x_1, \ldots, x_{n-1})|^2 \leqslant \sigma(B_n)^2,$$

$$|\Psi^*(x, x_1, \ldots, x_{n-1})|^2 + \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} |\Psi_j^*(x, x_1, \ldots, x_{n-1})|^2$$
$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \operatorname{Arc\,sin}^2 x - \frac{2}{x^3}(1-x^2)^{1/2} \operatorname{Arc\,sin} x,$$

d'où le conclusion en faisant tendre x vers 1.

Il est remarquable que $\sigma(B_n)$ de dépend pas de $n \geqslant 2$, alors qu'il y a un saut entre $\sigma(B_1)$ et $\sigma(B_2)$ puisque $\sigma(B_1) = 1$ (c'est le classique lemme de Schwarz).

Il est non moins remarquable que le théorème précédent, énoncé et démontré dans le cas $n \geqslant 2$, donne, si l'on applique malgré tout dans le cas $n = 1$, le résultat bien classique

$$\operatorname{Sup}_{z \in \partial\Omega} \left| \frac{1}{z} \varphi(z) \right| \leqslant \frac{1}{d(0, \partial\Omega)},$$

car $\Theta_\Omega(0) = 1$ et $K_\Omega(0) = 0$.

B. *Un contre exemple : Si* Ω *est à bord régulier de classe* C^1 (*mais non* $C^{1+\varepsilon}$) *les diviseurs de Leibenson peuvent ne pas être bornés.*

1. Soit f: $[0,1[\to \mathbb{R}$ $f(x) = -x/\log x$, $f(0) = 0$. f est de classe C^1, strictement croissante, convexe, $f'(0) = 0$, d'image $[0, +\infty[$ et on a la fonction réciproque :

$$f^{-1} : \quad [0, +\infty[\to [0,1[,$$

f^{-1} est réelle-analytique sur $]0, +\infty[$ et

$$f^{-1}(y) = \textstyle\sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(y - \frac{e}{2} \right)^m,$$

soit r le rayon de convergence de cette série entière; on a immédiatement $0 < r \leqslant e/2$.

2. On considère la fonction g sur $D(e/2, r)$:

$$g(\xi) = \textstyle\sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\xi - \frac{e}{2} \right)^m,$$

on démontre facilement qu'on a $g(\xi) = \exp(-(1/\xi) g(\xi))$ puis l'inclusion

$$g\left(D\left(\frac{e}{2}, r\right)\right) \subset \mathbb{C} \setminus (]\infty, 0] \cup [1, \infty[).$$

3. Sur l'ouvert $\mathcal{O}=\mathbb{C}\setminus(]\infty, 0] \cup \{1\})$ on considère la fonction holomorphe F : $F(\zeta)= -(\zeta/\mathrm{Log}\,\zeta)$ (détermination principale du logarithme) comme on a $F_{|\,]0,1[}=f_{|\,]0,1[}$ on démontre aisément que $g(D(e/2, r))$ est contenu dans $\mathcal{O}$ et que g est biholomorphe de $D(e/2, r)$ sur son image, F étant la fonction réciproque de g.

4. Ensuite on a l'égalité

$$|g(\xi)| \leqslant (\pi^2+\mathrm{Log}^2|g(\xi)|)^{1/2}|\xi|,$$

qui prouve que g est bornée.

Si on suppose $r<e/2$; soit ξ_0, $|\xi_0-(e/2)|=r$ et soit $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ $\xi_n \in D(e/2, r)$ $\lim \xi_n=\xi_0$. Comme g est bornée, quitte à extraire une suite de $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ on peut supposer qu'on a :

$$\lim g(\xi_n)=\zeta_0.$$

On a

$$\zeta_0=\exp\left(-\frac{\zeta_0}{\xi_0}\right) \quad \text{et} \quad r<\frac{e}{2},$$

on obtient $\zeta_0 \in \mathcal{O}\setminus\{e\}$, donc $F(\zeta_0)=\xi_0$ et $F'(\zeta_0)\neq 0$, de sorte que F est biholomorphe au voisinage de ζ_0; de là on démontre aisément que ξ_0 est régulier pour la série entière définissant g. Mais toute série entière admet un point singulier sur son cercle de convergence, on a donc une contradiction et ainsi il vient $r=e/2$.

5. Pour tout ξ de $D(e/2, e/2)$ on a $g(|\xi|)\leqslant|g(\xi)|$; en effet si $\zeta\in\mathcal{O}$ on a $|\mathrm{Log}\,\zeta| \geqslant |\mathrm{Log}|\zeta||$, donc pour tout ζ,

$$|\zeta|\neq 1, \zeta\in\mathcal{O} : |F(\zeta)| \leqslant \frac{|\zeta|}{|\mathrm{Log}|\zeta||}.$$

Soit $\xi\in D(e/2, e/2)$, si $|g(\xi)|<1$, on a donc

$$|F(g(\xi))| \leqslant \frac{|g(\xi)|}{-\mathrm{Log}|g(\xi)|}=f(|g(\xi)|),$$

mais

$$|F(g(\xi))| = |\xi| = f(g(|\xi|)),$$

d'où l'inégalité $g(|\xi|) \leqslant |g(\xi)|$. Si $|g(\xi)| \geqslant 1$ on a alors

$$g(|\xi|) = f^{-1}(|\xi|) < 1 \leqslant |g(\xi)|.$$

6. Sur $U = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2;\ |w| < 1|\}$ on définit la fonction de classe C^1 $\rho(z, w) = |z|^2 + f(|w|) - 1$, et on considère l'ouvert $\Omega = \{\rho < 0\}$. On démontre aisément que Ω est convexe, borné, à bord régulier de classe C^1 et contient l'origine (Ω est même strictement convexe au sens géométrique).

On définit sur Ω la fonction holomorphe φ

$$\varphi(z, w) = \frac{w}{g(1-z^2)}.$$

On a $\varphi(0, 0) = 0$; $\varphi(0, rf^{-1}(1)) = r$ pour tout r de $[0, 1[$, et les inégalités :

$$|\varphi(z, w)| < \frac{f^{-1}(1-|z|^2)}{|g(1-z^2)|} \leqslant \frac{f^{-1}(|1-z^2|)}{|g(1-z^2)|} = \frac{g(|1-z^2|)}{|g(1-z^2)|} \leqslant 1,$$

donc $\|\varphi\|_\infty = 1$.

Considérons le diviseur de Leibenson

$$\Psi(z, w) = \int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial w}(tz, tw)\, dt,$$

pour tout $x \in]0,1[$ on a

$$\Psi(x, 0) = \int_0^1 \frac{dt}{f^{-1}(1-t^2x^2)} \geqslant \int_0^1 \frac{t\,dt}{f^{-1}(1-t^2x^2)},$$

effectuant le changement de variable $1 - t^2x^2 = f(y)$ il vient

$$\Psi(x, 0) \geqslant \frac{1}{2x^2}[\mathrm{Log}|\mathrm{Log}\, f^{-1}(1-x^2)| - \mathrm{Log}|\mathrm{Log}\, f^{-1}(1)|],$$

par suite $\lim_{x \to 1,\, x \leqslant 1} \Psi(x, 0) = +\infty$. Et on peut remarquer qu'effectivement le point $(1,0)$ de $\partial\Omega$ n'est pas de classe $C^{1+\varepsilon}$.

APPLICATION AU PROBLÈME DE GLEASON POUR H^*

Ω est un ouvert convexe borné de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, à bord régulier de classe $C^{1+\varepsilon}$ (ne contenant pas nécessairement l'origine). Étant donnée une fonction holomorphe bornée f sur Ω on définit les fonctions holomorphes g_j sur $\Omega \times \Omega$

$$g_j(a, z) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z_j}(a + t(z-a))\, dt.$$

On a évidemment

$$f(z) - f(a) = \sum_{j=1}^n (z_j - a_j)\, g_j(a, z).$$

On note $g(a, .)$ l'application holomorphe de Ω dans $\mathbb{C}^n$

$$g(a, z) = \sum_{j=1}^n g_j(a, z)\, e_j$$

et

$$\|g(a, z)\| = \left(\sum_{j=1}^n |g_j(a, z)|^2\right)^{1/2},$$

$$\|g(a, .)\|_\infty = \mathrm{Sup}_{z \in \Omega} \|g(a, z)\|.$$

En corollaire du théorème précédent on obtient que pour tout a de Ω il existe une constante $G_\Omega(a)$ telle que pour toute fonction holomorphe bornée f sur Ω

$$\|g(a, .)\|_\infty \leq G_\Omega(a)\, \|f - f(a)\|.$$

La preuve est immédiate en considérant sur $-a + \Omega$ la fonction holomorphe φ

$$\varphi(w) = \frac{1}{\|f - f(a)\|_\infty}(f(w+a) - f(a))$$

la constante $G_\Omega(a)$ peut s'exprimer en fonction des paramètres géométriques $d(a, \partial\Omega)$, $K_\Omega(a)$ et $\Theta_\Omega(a)$.

Cas de la boule B_n, $n \geq 2$

Compte tenu des expressions donnant $K_{B_n}(a)$ et $\Theta_{B_n}(a)$ on obtient pour $G_{B_n}(a)$

$$\frac{1}{(1-\|a\|)^{3/2}(1+\|a\|)^{1/2}}\quad(1+(\text{Arc}\cos\|a\|)^2+2\|a\|\,\text{Arcos}\|a\|)^{1/2}$$

et

$$G_{B_n}(a)\leqslant\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)^{1/2}\frac{1}{(1-\|a\|)^{3/2}(1+\|a\|)^{1/2}}.$$

On peut remarquer que $G_{B_n}(a)$ ne dépend pas de la dimension.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AHERN (P.) and SCHNEIDER (R.), Holomorphic Lipschitz functions in pseudo-convex domains, *Amer. J. Math.*, vol. 101, n° 3, 1979, p. 543-565.

[2] HENKIN (G. M.), Approximation of functions in pseudo-convex domains and the theorem of Z. L. Leibenson, *Bull. Acad. Polon. Sc.*, Sér. Math. Astronom. Phys., vol. 19, 1971, p. 37-42.

[3] KERZMAN (N.) and NAGEL (A.), Finitely generated ideals in certain function algebras. *J. Funct. Anal.*, *vol.*, 7, 1971, *p.* 212-215.

[4] OVRELID (N.), Generators of the maximal ideals of A($\bar{D}$), *Pacific J. Math.*, vol. 39, n° 1, 1971, p. 219-223.

[5] RUDIN (W.), *Function theory in the unit ball of* $\mathbf{C}^n$, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.