

# BULLETIN DE LA S. M. F.

MARCEL GRANGÉ

**Diviseurs de Leibenson et problème de Gleason  
pour  $H^\infty(\Omega)$  dans le cas convexe**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 114 (1986), p. 225-245

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1986\\_\\_114\\_\\_225\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__225_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**DIVISEURS DE LEIBENSON  
ET PROBLÈME DE GLEASON  
POUR  $H^\infty(\Omega)$  DANS LE CAS CONVEXE**

PAR

MARCEL GRANGÉ (\*)

---

RÉSUMÉ. — Étant donné un ouvert convexe  $\Omega$  à bord régulier de classe  $C^2$  dans  $\mathbb{C}^n$ , et un point  $a \in \Omega$ , on donne des estimations pour les diviseurs de Leibenson au point  $a$  d'une fonction holomorphe bornée sur  $\Omega$ . Dans le cas des boules unités  $B_n$ , ces estimations sont indépendantes de la dimension.

ABSTRACT. — Let  $\Omega$  be a convex open subset of  $\mathbb{C}^n$  with  $C^2$ -boundary, and let  $a$  be a point in  $\Omega$ . We estimate from above the Leibenson divisors at  $a$  of a bounded holomorphic function on  $\Omega$ . In the special case of the unit balls  $B_n$ , these estimations do not depend on the dimension.

Le problème de Gleason a été diversement étudié et résolu dans de nombreux cas; par Leibenson notamment dans le cas d'un ouvert convexe borné  $\Omega$  à bord de classe  $C^2$  pour les fonctions de  $A(\Omega)$  [2]. HENKIN [2] et OVRELID [4] ont étudié pour cette même classe de fonctions le cas strictement pseudo-convexe. Pour la classe  $H^\infty(\Omega)$  on peut citer AHERN et SCHNEIDER [1], KERZMAN et NAGEL [3], toujours dans le cas strictement pseudo-convexe, à bord régulier de classe  $C^4$ .

Dans le cas convexe (mais non nécessairement strictement convexe) les diviseurs de Leibenson sont les candidats naturels pour résoudre le problème de Gleason; nous démontrons dans cet article que si  $\Omega$  est un ouvert convexe borné de  $\mathbb{C}^n$ , à bord régulier de classe  $C^{1+\epsilon}$ , les diviseurs de

---

(\*) Texte reçu le 2 juillet 1985.

Marcel GRANGÉ, Université Bordeaux I. Mathématiques et Informatique, 351 cours de la Libération 33405 Talence Cedex, France.

Leibenson  $f_1, \dots, f_n$  associés à un point  $a$  de  $\Omega$  pour une fonction  $f$  de  $H^\infty(\Omega)$ , vérifient une inégalité du type

$$\text{Sup}_{z \in \Omega} (\sum_{j=1}^n |f_j(z)|^2)^{1/2} \leq G_\Omega(a) \|f - f(a)\|_\infty$$

où  $G_\Omega(a)$  est une constante ne dépendant que de la géométrie de l'ouvert  $\Omega$ . En particulier  $G_{B_n}(a)$  ne dépend pas de la dimension  $n \geq 2$  et peut s'exprimer à l'aide de fonctions élémentaires. D'autre part un contre-exemple montre qu'au moins un diviseur de Leibenson n'est pas borné dans le cas où  $\Omega$  est seulement à bord régulier de classe  $C^1$ .

### I. Préliminaires géométriques

Dans cette partie nous mettons en évidence quelques paramètres géométriques pour un ouvert convexe borné de  $\mathbb{C}^n$ , en fonction desquels les diviseurs de Leibenson seront estimés.

$\Omega$  désigne un ouvert convexe borné de  $\mathbb{C}^n$ , contenant l'origine, à bord régulier de classe  $C^{1+\epsilon}$ , et  $\rho$  désigne une fonction définissante de  $\Omega : \Omega = \{\rho < 0\}$ , le gradient de  $\rho$  ne s'annulant pas sur  $\{\rho = 0\} = \partial\Omega$ .

D'autre part on considère la jauge  $p$  de  $\Omega$  :

$$\Omega = \{p < 1\}, \quad \partial\Omega = \{p = 1\}, \quad \bar{\Omega}^c = \{p > 1\}$$

et pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  on définit  $z^* \in \partial\Omega$  :

$$z^* = \frac{1}{p(z)} z.$$

Le produit hermitien usuel des deux éléments  $z$  et  $w$  de  $\mathbb{C}^n$  est noté  $\langle z, w \rangle$  :

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j, \quad \|z\| = (\langle z, z \rangle)^{1/2},$$

$B_n$  désigne la boule unité ouverte de  $\mathbb{C}^n$  et  $D$  le disque unité ouvert de  $\mathbb{C}$ .

#### A. LA FONCTION $J$ ET QUELQUES-UNES DE SES PROPRIÉTÉS

On définit la fonction

$$[0, 1[ \times \partial\Omega \xrightarrow{J_R} [0, +\infty]$$

$$J_\Omega^0(t, z) = \text{Inf} \{ \|w - tz\|; \rho(w) = 0, \partial\rho(z) \cdot (w - tz) = 0 \}.$$

On peut vérifier immédiatement que  $J_{\Omega}^0$  ne dépend pas de la fonction définissante choisie.

Remarquons tout de suite que si  $n = 1$ , alors  $J_{\Omega}^0(t, z) = +\infty$ , en effet :

$$\partial\rho(z) \cdot (w - tz) = \frac{\partial\rho}{\partial z}(z) (w - tz) = 0,$$

donc  $w = tz \in \Omega$ ; mais  $w \in \partial\Omega$ . L'ensemble dont on considère la borne inférieure est donc vide.

Si  $n \geq 2$  on a immédiatement les inégalités :

$$0 < d(tz, \partial\Omega) \leq J_{\Omega}^0(t, z) < +\infty.$$

Avant de produire quelques propriétés de  $J_{\Omega}^0$  établissons un lemme technique :

LEMME 1. — Pour toute partie compacte  $K$  dans  $\Omega$ , le nombre

$$R(K) = \inf \left\{ \frac{1}{1-t} \left| \rho(a + t(z-a)) \right|; a \in K, z \in \partial\Omega, t \in [0, 1[ \right\}$$

est strictement positif.

*Preuve.* — Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction  $U : U(t) = \rho(a + t(z-a))$

$$\left| U(t) - U(1) - (t-1)U'(1) \right| \leq (1-t) \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| U'(1+x(t-1)) - U'(1) \right|.$$

Comme  $\rho$  est de classe  $C^{1+\epsilon}$  il existe une constante  $C_{\Omega} > 0$  telle que pour tous  $w$  et  $\zeta$  du compact  $\bar{\Omega}$  on ait :

$$\|d\rho(w) - d\rho(\zeta)\| \leq C_{\Omega} \|w - \zeta\|^{\epsilon},$$

compte tenu de l'expression de  $U'$  à l'aide de  $d\rho$ , et comme :

$$0 \leq t \leq 1 + x(t-1) \leq 1,$$

on obtient l'inégalité

$$\left| \rho(a + t(z-a)) - (t-1)d\rho(z) \cdot (z-a) \right| \leq C_{\Omega} (1-t)^{1+\epsilon} \|z-a\|^{1+\epsilon}.$$

Mais  $\Omega$  est convexe et borné, donc :

$$M(K) = \text{Sup} \{ \|z - a\|; a \in K, z \in \partial\Omega \} < +\infty,$$

$$\Delta(K) = \inf \{ d\rho((z) \cdot (z - a)); a \in K, z \in \partial\Omega \} > 0,$$

de sorte que si :

$$1 - t \leq \left( \frac{\Delta(K)}{2 C_{\Omega} M(K)^{1+\varepsilon}} \right)^{1/\varepsilon}$$

alors

$$\frac{1}{1-t} |\rho(a + t(z-a))| \geq \frac{1}{2} \Delta(K)$$

et de là on conclut aisément.

PROPOSITION 1. — Pour tout  $z$  de  $\partial\Omega$  la fonction

$$t \rightarrow J_{\Omega}^0(t, z)$$

est continue sur  $[0, 1[$ .

*Preuve.* — Soient  $t_0 \in ]0, 1[$  et  $t_1, t_2 \in [0, t_0]$   $t_1 < t_2$ . Comme  $\partial\Omega$  est compact il existe  $w_1$  tel que :

$$\rho(w_1) = 1, \quad \partial\rho(z) \cdot (w_1 - t_1 z) = 0, \quad J_{\Omega}^0(t_1, z) = \|w_1 - t_1 z\|,$$

définissons  $w = z + (1 - t_2)/(1 - t_1)(w_1 - z)$ . Comme  $0 < (1 - t_2)/(1 - t_1) < 1$   $w$  appartient à  $\bar{\Omega}$ , d'autre part pour le convexe ouvert contenant l'origine  $-t_2 z + \Omega$  considérons :

$$(w - t_2 z)^* = w_2 - t_2 z \quad \text{où } w_2 \in \partial\Omega,$$

il existe alors  $r \in [0, 1]$  tel que :  $w = t_2 z + r(w_2 - t_2 z)$ . Si  $r$  était nul on aurait  $w_1 = t_1 z \in \Omega$ , ce qui est absurde puisque  $\rho(w_1) = 0$ ; donc  $r > 0$ ; alors il vient :

$$\begin{aligned} \partial\rho(z) \cdot (w_2 - t_2 z) &\leq \|w_2 - t_2 z\| = \frac{1}{r} \|w - t_2 z\| \\ &= \frac{1}{r} \frac{1 - t_2}{1 - t_1} d\rho(z) \cdot (w_1 - t_1 z) = 0, \end{aligned}$$

donc

$$J_{\Omega}^0(t_2, z) \leq \|w_2 - t_2 z\| = \frac{1}{r} \|w - t_2 z\| = \frac{1}{r} \frac{1-t_2}{1-t_1} \|w_1 - t_1 z\|,$$

C'est-à-dire

$$J_{\Omega}^0(t_2, z) \leq \frac{1}{r} \frac{1-t_2}{1-t_1} J_{\Omega}^0(t_1, z).$$

Appliquons le lemme 1 avec  $K=[0, t_0]z$ , on obtient :

$$|\rho(w)| \geq (1-r) R(K),$$

cependant, notant  $C_1 = \sup_{\zeta \in \bar{\Omega}} \|d\rho(\zeta)\|$ , on a :

$$|\rho(w)| = |\rho(w) - \rho(w_1)| \leq C_1 \|w - w_1\|,$$

or

$$w - w_1 = \frac{t_2 - t_1}{1 - t_1} (z - w_1),$$

et  $\delta(\Omega)$  désignant le diamètre de  $\Omega$ , il vient :

$$1 - r \leq \frac{C_1 \delta(\Omega)}{(1-t_0) R(K)} (t_2 - t_1),$$

de sorte que si :

$$t_2 - t_1 < \frac{(1-t_0) R(K)}{C_1 \delta(\Omega)} = \frac{1}{A(K)},$$

alors on a l'égalité (\*)

$$J_{\Omega}^0(t_2, z) \leq \frac{1}{1 - A(K)(t_2 - t_1)} \frac{1-t_2}{1-t_1} J_{\Omega}^0(t_1, z).$$

De même il existe  $\zeta_2$  tel que :

$$\rho(\zeta_2) = 0, \quad \partial\rho(z) \cdot (\zeta_2 - t_2 z) = 0, \quad J_{\Omega}^0(t_2, z) = \|\zeta_2 - t_2 z\|.$$

Définissons

$$\zeta = z + \frac{1-t_1}{1-t_2} (\zeta_2 - z).$$

Comme

$$0 < \frac{t_2 - t_1}{1 - t_1} < 1 \quad \text{et} \quad \zeta_2 = \zeta + \frac{t_2 - t_1}{1 - t_1}(z - \zeta),$$

$\zeta$  n'appartient pas à  $\Omega$  puisque  $\rho(\zeta_2) = 0$ ; d'autre part pour le convexe ouvert contenant l'origine  $-t_1 z + \Omega$  considérons

$$(\zeta - t_1 z)^* = \zeta_1 - t_1 z \quad \text{où} \quad \zeta_1 \in \partial\Omega,$$

il existe alors  $s \geq 1$  tel que :  $\zeta = t_1 z + s(\zeta_1 - t_1 z)$ . Ensuite on a :

$$\partial\rho(z) \cdot (\zeta_1 - t_1 z) = \frac{1}{s} \partial\rho(z) \cdot (\zeta - t_1 z) = \frac{1}{s} \frac{1 - t_1}{1 - t_2} \partial\rho(z) \cdot (\zeta_2 - t_2 z) = 0,$$

donc :

$$J_{\Omega}^0(t_1, z) \leq \|\zeta_1 - t_1 z\| = \frac{1}{s} \|\zeta - t_1 z\| = \frac{1}{s} \frac{1 - t_1}{1 - t_2} \|\zeta_2 - t_2 z\|,$$

c'est-à-dire

$$J_{\Omega}^0(t_1, z) \leq \frac{1}{s} \frac{1 - t_1}{1 - t_2} J_{\Omega}^0(t_2, z)$$

et comme  $s \geq 1$  on a l'inégalité (\*\*)

$$J_{\Omega}^0(t_1, z) \leq \frac{1 - t_1}{1 - t_2} J_{\Omega}^0(t_2, z).$$

Les deux inégalités (\*) et (\*\*) montrent que la fonction  $t \rightarrow J_{\Omega}^0(t, z)$  est continue sur  $[0, t_0]$ , pour tout  $t_0$  de  $]0, 1[$ ; donc cette fonction est continue sur  $[0, 1[$ .

**PROPOSITION 2.** — *Il existe une constante  $\Lambda_0$  (ne dépendant que de l'ouvert  $\Omega$ ) telle que pour tous  $t$  de  $[0, 1[$  et  $z$  de  $\partial\Omega$ :*

$$J_{\Omega}^0(t, z) \geq \Lambda_0 (1 - t)^{1/(1+\varepsilon)}.$$

*Preuve.* —  $z$  étant fixé dans  $\partial\Omega$ , il existe  $w$  tel que :

$$\rho(w) = 0, \quad \partial\rho(z) \cdot (w - tz) = 0, \quad J_{\Omega}^0(t, z) = \|w - tz\|,$$

appliquons le théorème des accroissements finis

$$|\rho(tz) + d\rho(tz) \cdot (w - tz)| \leq \|w - tz\| \text{Sup}_{0 \leq x \leq 1} \|d\rho(tz + x(w - tz)) - d\rho(tz)\|,$$

la constante  $C_\Omega$  ayant été définie dans la preuve du lemme 1 on obtient

$$|\rho(tz) + d\rho(tz) \cdot (w - tz)| \leq C_\Omega \|w - tz\|^{1+\varepsilon},$$

mais

$$d\rho(z) \cdot (w - tz) = 2 \text{Re } \partial\rho(z) \cdot (w - tz) = 0,$$

donc

$$|\rho(tz)| \leq \|d\rho(tz) - d\rho(z)\| \|w - tz\| + C_\Omega \|w - tz\|^{1+\varepsilon}.$$

Reprenant les constantes  $R(0)$  et  $M(0)$  définies dans la preuve du lemme 1, il vient

$$C_\Omega J_\Omega^0(t, z)^{1+\varepsilon} + C_\Omega M(0)^\varepsilon (1-t)^\varepsilon J_\Omega^0(t, z) - R(0)(1-t) > 0.$$

Considérons la fonction  $u_\lambda : u_\lambda(x) = ax^{1+\varepsilon} + b\lambda^\varepsilon x - c\lambda$  définie pour  $x \geq 0$  les constantes vérifiant :  $a > 0, b > 0, c > 0$  et le paramètre  $\lambda$  appartenant à  $]0, 1[$ . La fonction  $u_\lambda$  étant strictement croissante sur  $[0, +\infty[$  l'équation  $u_\lambda(x) = 0$  admet une racine unique  $x(\lambda) > 0$ . Soit  $\lambda_0$  l'unique nombre réel vérifiant

$$\begin{cases} a\lambda_0^{1+\varepsilon} + b\lambda_0 - c = 0, \\ \lambda_0 > 0, \end{cases}$$

alors pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$

$$u_\lambda(\lambda_0 \lambda^{1/(1+\varepsilon)}) = b\lambda_0 \lambda (\lambda^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} - 1) < 0,$$

posant  $a = C_\Omega, b = C_\Omega M(0)^\varepsilon, c = R(0)\lambda = 1 - t$  on obtient pour tout  $t$  de  $]0, 1[$

$$J_\Omega^0(t, z) > \Lambda_0 (1-t)^{1/(1+\varepsilon)},$$

où  $\Lambda_0$  est déterminé comme suit :

$$\begin{cases} C_\Omega \Lambda_0^{1+\varepsilon} + C_\Omega M(0)^\varepsilon \Lambda_0 - R(0) = 0, \\ \Lambda_0 > 0. \end{cases}$$

COROLLAIRE. —  $E_\Omega(0) = \text{Sup}_{z \in \partial\Omega} \int_0^1 dt / J_\Omega^0(t, z) \leq 1 + \varepsilon/\varepsilon \Lambda_0 < +\infty.$



Si  $\Omega$  désigne un ouvert convexe borné de  $\mathbb{C}^n$  à bord régulier de classe  $C^{1+\varepsilon}$  mais ne contenant pas nécessairement l'origine, pour tout  $a \in \Omega$  on définit  $J_\Omega^a$  sur  $[0, 1[ \times \partial\Omega$

$$J_\Omega^a(t, z) = J_{-\Omega+a}^0(t, z-a).$$

Bien entendu  $t \rightarrow J_\Omega^a(t, z)$  est continue sur  $[0, 1[$  pour tout  $z$  de  $\partial\Omega$ , et

$$E_\Omega(a) = \sup_{z \in \partial\Omega} \int_0^1 \frac{dt}{J_\Omega^a(t, z)} < +\infty.$$

## B. FORME INFINITÉSIMALE DE LA DISTANCE DE KOBAYASHI

Rappelons la définition :  $\Omega \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{F_\Omega} \mathbb{R}_+$

$$F_\Omega(z, w) = \inf X(z, w),$$

où :  $X(z, w) = \{ \alpha > 0; \text{ il existe } D \xrightarrow{f} \Omega \text{ holomorphe, } f(0) = z \text{ et } f'(0) = w \frac{1}{\alpha} \}$ .

$F_\Omega$  est semi-continue supérieurement sur  $\Omega \times \mathbb{C}^n$  et  $F_\Omega(z, \xi w) = |\xi| F_\Omega(z, w)$  pour tout  $\xi$  de  $\mathbb{C}$ . De plus le classique lemme de Schwarz en une variable montre que si  $\varphi$  est une fonction holomorphe bornée sur  $\Omega$ , alors on a l'inégalité : pour tous  $z$  de  $\Omega$  et  $w$  de  $\mathbb{C}^n$  :

$$|\varphi'(z) \cdot w| \leq \|\varphi\|_\infty F_\Omega(z, w).$$

Le calcul de  $F_\Omega$  dans le cas de la boule  $B_n$  est certainement connu mais pour la commodité du lecteur nous présentons le :

LEMME 2. — Si  $\Omega = B_n$ , alors

$$F_{B_n}(z, w) = \frac{(|\langle z, w \rangle|^2 + \|w\|^2(1 - \|z\|^2))^{1/2}}{1 - \|z\|^2}.$$

Preuve :

$$u = \frac{\langle z, w \rangle}{\|w\|^2}, \quad R = \frac{1}{\|w\|^2} (|\langle z, w \rangle|^2 + \|w\|^2(1 - \|z\|^2))^{1/2},$$

$$a = -\frac{u}{R} \in D.$$

on considère la fonction  $f$  :

$$f(\xi) = z + \left( u + R \frac{\xi + a}{1 + \bar{a}\xi} \right) w.$$

On a

$$f(D) \subset B_n, \quad f(0) = z, \quad f'(0) = R \left( 1 - \frac{|u|^2}{R^2} \right) w$$

donc

$$F_{B_n}(z, w) \leq \frac{R}{R^2 - |u|^2} = \frac{(|\langle z, w \rangle|^2 + \|w\|^2 (1 - \|z\|^2))^{1/2}}{1 - \|z\|^2}.$$

Soit  $\alpha \in X(z, w)$  il existe donc  $D \xrightarrow{f} \Omega$  holomorphe telle que  $f(0) = z$  et  $f'(0) = w \frac{1}{\alpha}$ . On définit  $U$  et  $\varphi_z$

$$U(\zeta) = (1 - \|z\|^2)^{1/2} \zeta + \frac{1}{1 + (1 - \|z\|^2)^{1/2}} \langle \zeta, z \rangle z,$$

$$\varphi_z(\zeta) = U \left( \frac{1}{1 - \langle \zeta, z \rangle} (z - \zeta) \right).$$

$\varphi_z$  est un automorphisme (holomorphe) de  $B_n$ ; on considère la fonction  $g : g(\xi) = \varphi_z(f(-\xi))$ . On a  $g(D) \subset B_n$ , donc l'inégalité de Cauchy :  $\|g'(0)\| \leq 1$ ; on calcule  $\|g'(0)\|$  et on obtient

$$\alpha \geq \frac{(|\langle z, w \rangle|^2 + \|w\|^2 (1 - \|z\|^2))^{1/2}}{1 - \|z\|^2}$$

(Q.E.D).

La proposition suivante va nous permettre de définir un paramètre géométrique lié à la métrique de Kobayashi de l'ouvert convexe  $\Omega$ .

PROPOSITION 3. — La constante  $E_\Omega(0)$  ayant été définie dans le corollaire 1, on a pour tout  $z$  de  $\bar{\Omega}$ ,  $z \neq 0$

$$\Phi_\Omega^0(z) := \text{Sup}_{\|u\|=1, \partial_p(z^*, u)=0} \int_0^1 F_\Omega(tz, u) dt \leq \frac{1}{p(z)} E_\Omega(0)$$

( $p$  est la jauge de  $\Omega$ ).

Preuve. — Tout d'abord pour tout  $z$  de  $\bar{\Omega}$ ,  $z \neq 0$  et pour tout  $t$  de  $[0, 1[$  on a

$$F_{\Omega}(tz, u) \leq \frac{1}{p(z)} F_{\Omega}(tz^*, u),$$

en effet soit  $\alpha \in X(tz^*, u)$ , il existe  $D \xrightarrow{f} \Omega$  holomorphe telle que

$$f(0) = tz^* \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{1}{\alpha} u.$$

Considérons la fonction  $g : g(\xi) = p(z) f(\xi)$ . Elle est à valeurs dans  $\Omega$  car pour tout  $\xi$  de  $D$  on a

$$p(g(\xi)) = p(z) p(f(\xi)),$$

de plus

$$g(0) = tz \quad \text{et} \quad g'(0) = \frac{p(z)}{\alpha} u,$$

d'où l'inégalité annoncée.

Ensuite on démontre l'inégalité

$$F_{\Omega}(tz^*, u) \leq \frac{1}{J_{\Omega}^0(t, z^*)},$$

pour cela on considère la fonction  $f$  sur  $D$

$$f(\xi) = tz^* + \xi J_{\Omega}^0(t, z^*) u,$$

si  $f(D)$  n'était pas contenu dans  $\Omega$ , il existerait  $\xi$  de  $D$  tel que  $\rho(f(\xi)) \geq 0$ , or  $\rho(f(0)) = \rho(tz^*) < 0$ ; il existerait donc  $\xi_0$  de  $D$  tel que  $\rho(f(\xi_0)) = 0$ ; d'autre part

$$\partial \rho(z^*) \cdot (f(\xi_0) - tz^*) = \xi_0 J_{\Omega}^0(t, z^*) \partial \rho(z^*) \cdot u = 0$$

donc par définition de  $J_{\Omega}^0$  on obtiendrait

$$J_{\Omega}^0(t, z^*) \leq \|f(\xi_0) - tz^*\|,$$

mais  $\|f(\xi_0) - tz^*\| = |\xi_0| J_{\Omega}^0(t, z^*) < J_{\Omega}^0(t, z^*)$ . Par suite on a l'inclusion  $f(D) \subset \Omega$ ; de plus

$$f(0) = tz^* \quad \text{et} \quad f'(0) = J_{\Omega}^0(t, z^*) u,$$

d'où l'inégalité annoncée.

Compte tenu du corollaire 1 on obtient ensuite l'inégalité de l'énoncé.

Remarque 1. — Pour tout  $z$  de  $\partial\Omega$  et pour tout  $r \in ]0, 1]$  on a l'inégalité

$$\Phi_{\Omega}^0(rz) \leq \frac{1}{r} \Phi_{\Omega}^0(z).$$

Remarque 2. — Dans le cas où  $\Omega = B_n$ ,  $n \geq 2$ , compte tenu de la proposition 2 on obtient tout de suite

$$\Phi_{B_n}^0(z) = \frac{1}{\|z\|} \text{Arc sin } \|z\|$$

et dans ce cas on peut calculer facilement  $J_{B_n}^0$  :

$$J_{B_n}^0(t, z) = \sqrt{1-t^2},$$

donc  $E_{B_n}(0) = \pi/2$ , de sorte que l'inégalité démontrée dans la proposition 3 est optimale si  $\Omega = B_n$ .

Compte tenu de la proposition précédente on définit

$$K_{\Omega}(0) = \text{Sup}_{z \in \partial\Omega} \Phi_{\Omega}^0(z).$$

Si  $\Omega$  désigne un ouvert convexe borné de  $\mathbb{C}^n$  à bord régulier de classe  $C^{1+\epsilon}$  mais ne contenant pas nécessairement l'origine, pour tout  $a \in \Omega$  on définit sur  $\bar{\Omega}$  :  $\Phi_{\Omega}^a(z) = \Phi_{-a+\Omega}^0(z-a)$ , et

$$K_{\Omega}(a) = \text{Sup}_{z \in \partial\Omega} \Phi_{\Omega}^a(z).$$

Remarquons que dans le cas unidimensionnel la fonction  $\Phi_{\Omega}^a$  est nulle et  $K_{\Omega}(a) = 0$ .

Des calculs élémentaires mais compliqués, qu'on ne présente pas ici montrent que si  $n \geq 2$  :

$$\Phi_{B_n}^a(z) = 2 \int_{(1-\|a\|^2)^{1/2}}^{+\infty} \frac{(x^2 + \|a\|^2 - |\langle a, z \rangle|^2)^{1/2}}{x(x^2 + \|z-a\|^2)} dx,$$

$$K_{B_n}(a) = \frac{1}{1-\|a\|} \left( \frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } \|a\| \right).$$

En général, en vertu de la proposition 3 on a l'inégalité

$$K_{\Omega}(a) \leq E_{\Omega}(a),$$

où  $E_{\Omega}(a)$  est la constante définie à la fin du paragraphe A. Et des calculs assez compliqués montrent que la fonction  $E_{B_n}(a)/K_{B_n}(a)$  est bornée dans  $B_n$ .

C. Nous aurons aussi besoin d'un autre paramètre géométrique qui mesure en quelque sorte la « rondeur » de  $\Omega$  par rapport à l'un de ses points.

$v(z)$  désigne le vecteur unitaire normal en un point  $z$  de  $\partial\Omega$ ; nous savons qu'on a :

$$0 < \frac{|\partial\rho(z) \cdot z|}{\|\partial\rho(z)\| \|z\|} = \left| \left\langle \frac{1}{\|z\|} z, v(z) \right\rangle \right| \leq 1.$$

Compte tenu de la compacité de  $\partial\Omega$  on peut définir le nombre strictement positif

$$\Theta_{\Omega}(0) = \text{Min}_{z \in \partial\Omega} \left| \left\langle \frac{1}{\|z\|} z, v(z) \right\rangle \right|.$$

Si  $\Omega$  est un ouvert convexe borné de  $\mathbb{C}^n$ , à bord régulier de classe  $C^{1+\epsilon}$  (de classe  $C^1$  suffirait) mais ne contenant pas nécessairement l'origine, on définit pour  $a \in \Omega$

$$\Theta_{\Omega}(a) = \Theta_{-a+\Omega}(0) = \text{Min}_{z \in \partial\Omega} \left| \left\langle \frac{1}{\|z-a\|} (z-a), v(z) \right\rangle \right|.$$

Dans le cas unidimensionnel  $\Theta_{\Omega}(a) = 1$  et si  $\Omega = B_n$ ,  $n \geq 2$   
 $\Theta_{B_n}(a) = (1 - \|a\|^2)^{1/2}$ .

## II. Une version du lemme de Schwarz dans $\mathbb{C}^n$

A. L'ouvert  $\Omega$  est comme dans la première partie. Étant donné une fonction holomorphe bornée  $\varphi$  sur  $\Omega$  telle que  $\varphi(0) = 0$ , on a les diviseurs de Leibenson  $\Psi_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  :

$$\Psi_j(z) = \int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(tz) dt,$$

$\Psi_j$  est une fonction holomorphe sur  $\Omega$  et pour tout  $z$  de  $\Omega$

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^n z_j \Psi_j(z).$$

Nous noterons  $L_\varphi(z)$  la forme  $\mathbb{C}$ -linéaire :

$$L_\varphi(z) = \int_0^1 \varphi'(tz) dt = \sum_{j=1}^n \Psi_j(z) e_j^*,$$

$$\|L_\varphi(z)\| = (\sum_{j=1}^n |\Psi_j(z)|^2)^{1/2}.$$

Avant d'énoncer et de démontrer le théorème nous présentons le :

LEMME. — Soient  $a, b > 0, z \in \mathbb{C}^n, z \neq 0, u$  forme linéaire sur  $\mathbb{C}^n : u = \sum_{j=1}^n u_j e_j^*, u \neq 0, u(z) = 1$ . On suppose  $n \geq 2$ . On a alors

$$\text{Max}_{\|h\|=1} (a|u(h)| + b\|h - u(h)z\|) =$$

$$(a^2\|u\|^2 + b^2\|u\|^2\|z\|^2 + 2ab\|u\|(\|u\|^2\|z\|^2 - 1)^{1/2})^{1/2}.$$

Preuve esquissée :

$$L(h) = h - u(h)z,$$

$$F(h) = a|u(h)| + b\|L(h)\|, \quad M = \text{Max}_{\|h\|=1} F(h).$$

Si  $u(h) = 0$  ou  $L(h) = 0$ , alors

$$M = b \quad \text{ou} \quad M = \frac{a}{\|z\|}.$$

On cherche donc les extremums de  $F$  sur  $S \cap U$  où :

$$S = \{h; \|h\| = 1\},$$

$$U = \{h; u(h) \neq 0 \text{ et } L(h) \neq 0\}.$$

Si  $z$  et  $\bar{u} = \sum_{j=1}^n \bar{u}_j e_j$  sont  $\mathbb{C}$ -colinéaires, on obtient facilement

$$M = (a^2\|u\|^2 + b^2)^{1/2}.$$

Si  $z$  et  $\bar{u} = \sum_{j=1}^n \bar{u}_j e_j$  ne sont pas  $\mathbb{C}$ -colinéaires, l'examen de l'équation de Lagrange montre que si  $F$  est extrémale en  $h$  alors  $h = t\bar{u} + sz$  où  $\bar{u} = \sum_{j=1}^n \bar{u}_j e_j \in \mathbb{C}^n$ . On est alors amené à chercher les extrémums de  $G$  sur  $L \cap V$  où :

$$G(t, s) = a|s+t||u||^2 + b\|u\|(\|u\|^2\|z\|^2 - 1)^{1/2}|t|,$$

$$L = \{(t, s) \in \mathbb{C}^2; |t|^2\|u\|^2 + 2\operatorname{Re} t\bar{s} + |s|^2\|z\|^2 = 1\},$$

$$V = \{(t, s) \in \mathbb{C}^2; s+t\|u\|^2 \neq 0, t \neq 0\}.$$

On écrit à nouveau les équations de Lagrange, qui, jointes à l'équation de liaison entre  $t$  et  $s$ , permettent de trouver les valeurs extrémales de  $G$ ; un simple examen de celles-ci montre que  $M$  a pour valeur celle donnée dans l'énoncé.

**THÉORÈME.** —  $\Omega$  est un ouvert convexe borné de  $\mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 2$ , à bord régulier de classe  $C^{1+\varepsilon}$ , et contenant l'origine. Il existe une constante positive  $\sigma(\Omega)$  telle que pour toute fonction holomorphe bornée  $\varphi$  sur  $\Omega$  vérifiant  $\varphi(0) = 0$  et  $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ , on ait  $\operatorname{Sup}_{z \in \Omega} \|L_\varphi(z)\| \leq \sigma(\Omega)$  et notant  $d(0) = \operatorname{dist}(0, \partial\Omega)$ , on a l'égalité :

$$\sigma(\Omega) \leq \frac{1}{\Theta_\Omega(0)} \left[ \frac{1}{d(0)^2} + K_\Omega(0)^2 + 2 \frac{K_\Omega(0)}{d(0)} (1 - \Theta_\Omega(0)^2)^{1/2} \right]^{1/2},$$

*Preuve.* — Soit  $z \in \Omega$ ,  $z \neq 0$ . Considérons la forme  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$u_{z^*} : u_{z^*}(h) = \frac{\partial \rho(z^*) \cdot h}{\partial \rho(z^*) \cdot z^*}$$

et l'opérateur linéaire associé

$$L_{z^*} : L_{z^*}(h) = h - u_{z^*}(h)z^*.$$

On a alors

$$L_\varphi(z) \cdot h = u_{z^*}(h) \int_0^1 \varphi'(tz) \cdot z^* dt + \int_0^1 \varphi'(tz) \cdot L_{z^*}(h) dt,$$

$$\int_0^1 \varphi'(tz) \cdot z^* dt = \frac{1}{p(z)} \int_0^1 \varphi'(tz) \cdot z dt = \frac{\varphi(z)}{p(z)},$$

d'autre part  $\partial \rho(z^*) \cdot L_{z^*}(h) = 0$  et comme  $\|\varphi\|_\infty \leq 1$  :

$$|\varphi'(tz) \cdot L_{z^*}(h)| \leq F_\Omega(tz, L_{z^*}(h)),$$

donc en vertu de la proposition 3

$$\left| \int_0^1 \varphi'(tz) \cdot L_{z^*}(h) dt \right| \leq \|L_{z^*}(h)\| \Phi_{\Omega}^0(z),$$

puis

$$|L_{\varphi}(z) \cdot h| \leq \frac{|\varphi(z)|}{p(z)} |u_{z^*}(h)| + \Phi_{\Omega}^0(z) \|L_{z^*}(h)\|.$$

Par suite, compte tenu du lemme 3, comme

$$\begin{aligned} \|u_{z^*}\| &= \frac{\|\partial\rho(z^*)\|}{|\partial\rho(z^*) \cdot z^*|} \\ \|L_{\varphi}(z)\|^2 &\leq \frac{|\varphi(z)|^2}{p(z)^2} \frac{\|\partial\rho(z^*)\|^2}{|\partial\rho(z^*) \cdot z^*|^2} + \Phi_{\Omega}^0(z)^2 \|z^*\|^2 \frac{\|\partial\rho(z^*)\|^2}{|\partial\rho(z^*) \cdot z^*|^2} \\ &\quad + 2 \frac{|\varphi(z)|}{p(z)} \Phi_{\Omega}^0(z) \frac{\|\partial\rho(z^*)\|}{|\partial\rho(z^*) \cdot z^*|} \left( \left( \frac{\|\partial\rho(z^*)\| \|z^*\|}{|\partial\rho(z^*) \cdot z^*|} \right)^2 - 1 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Utilisant le paramètre  $\Theta_{\Omega}(0)$  introduit dans (I.C.) il vient l'inégalité « interne » :

$$\|L_{\varphi}(z)\| \leq \frac{1}{\Theta_{\Omega}(0)} \left[ \frac{|\varphi(z)|^2}{\|z\|^2} + \Phi_{\Omega}^0(z)^2 + 2 \frac{|\varphi(z)|}{\|z\|} \Phi_{\Omega}^0(z) (1 - \Theta_{\Omega}(0)^2)^{1/2} \right]^{1/2}.$$

Des remarques suivant la proposition 3, on a :

$$\Phi_{\Omega}^0(z) \leq \frac{1}{p(z)} \Phi_{\Omega}^0(z^*) \leq \frac{1}{p(z)} K(0),$$

mais  $\|\varphi\|_{\infty} \leq 1$ , donc

$$\|L_{\varphi}(z)\| \leq \frac{1}{\Theta_{\Omega}(0)} \left[ \frac{1}{\|z\|^2} + \frac{K_{\Omega}(0)^2}{p(z)^2} + 2 \frac{K_{\Omega}(0)}{\|z\| p(z)} (1 - \Theta_{\Omega}(0)^2)^{1/2} \right]^{1/2}.$$

Ainsi  $L_{\varphi}$  est bornée en dehors d'un voisinage de l'origine relativement compact dans  $\Omega$ , donc est bornée sur  $\Omega$ . Considérons  $d(0) = d(0, \partial\Omega) = \text{Min}_{w \in \partial\Omega} \|w\|$ , on a immédiatement pour tout  $r \in ]0, 1[$   $\text{Min}_{p(w)=r} \|w\| = rd(0)$ , et en vertu du principe du maximum :

$$\text{Sup}_{p(z) \leq r} \|L_{\varphi}(z)\| \leq \frac{1}{\Theta_{\Omega}(0)} \left[ \frac{1}{r^2 d(0)^2} + \frac{K_{\Omega}(0)^2}{r^2} + 2 \frac{K_{\Omega}(0)}{r^2 d(0)} (1 - \Theta_{\Omega}(0)^2)^{1/2} \right]^{1/2}.$$

Par suite faisant tendre  $r$  vers 1, on obtient



$$\sup_{z \in \Omega} \|L_{\varphi}(z)\| \leq \frac{1}{\Theta_{\Omega}(0)} \left[ \frac{1}{d(0)^2} + K_{\Omega}(0)^2 + 2 \frac{K_{\Omega}(0)}{d(0)} (1 - \Theta_{\Omega}(0)^2)^{1/2} \right]^{1/2}$$

et bien entendu

$$\sigma(\Omega) = \text{Sup} \{ \text{Sup}_{z \in \Omega} \|L_{\varphi}(z)\|; \varphi \in H^{\infty}(\Omega), \varphi(0) = 0, \|\varphi\|_{\infty} \leq 1 \}.$$

*Cas de la boule  $B_n$ ,  $n \geq 2$*

L'inégalité « interne » donnée dans la démonstration précédente est ici

$$\|L_{\varphi}(z)\| \leq \frac{1}{\|z\|} (|\varphi(z)|^2 + (\text{Arc sin } \|z\|)^2)^{1/2},$$

de plus on a aussi

$$\sigma(B_n) \leq \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{1/2}.$$

Signalons que ces deux inégalités, dans ce cas particulier, auraient pu être obtenues à l'aide des automorphismes de la boule et de l'inégalité de Cauchy  $\|\varphi'(0)\| \leq 1$ .

*En fait on a l'égalité pour tout entier  $n \geq 2$*

$$\sigma(B_n) = \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{1/2},$$

précisément pour la fonction  $\varphi$

$$\varphi(z, w_1, \dots, w_{n-1}) = z \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} w_j^2\right)^{1/2},$$

qui vérifie bien  $\varphi(0, 0, \dots, 0) = 0$  et  $\|\varphi\|_{\infty} = 1$ , on a

$$\sup_{z \in B_n} \|L_{\varphi}(z)\| = \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{1/2},$$

en effet notant  $\Psi^*, \Psi_1^*, \dots, \Psi_{n-1}^*$  les fonctions radiales (définies presque partout) associées aux diviseurs de Leibenson  $\Psi, \Psi_1, \dots, \Psi_n$ , on a les relations suivantes pour tout système  $(x_1, \dots, x_{n-1})_{x_j > 0}$  vérifiant

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2 < 1 \quad \text{avec} \quad x = (1 - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2)^{1/2} :$$

$$|\Psi^*(x, x_1, \dots, x_{n-1})|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |\Psi_j^*(x, x_1, \dots, x_{n-1})|^2 \leq \sigma(B_n)^2,$$

$$|\Psi^*(x, x_1, \dots, x_{n-1})|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |\Psi_j^*(x, x_1, \dots, x_{n-1})|^2$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \text{Arc sin}^2 x - \frac{2}{x^3} (1-x^2)^{1/2} \text{Arc sin } x,$$

d'où le conclusion en faisant tendre  $x$  vers 1.

Il est remarquable que  $\sigma(B_n)$  ne dépend pas de  $n \geq 2$ , alors qu'il y a un saut entre  $\sigma(B_1)$  et  $\sigma(B_2)$  puisque  $\sigma(B_1) = 1$  (c'est le classique lemme de Schwarz).

Il est non moins remarquable que le théorème précédent, énoncé et démontré dans le cas  $n \geq 2$ , donne, si l'on applique malgré tout dans le cas  $n = 1$ , le résultat bien classique

$$\sup_{z \in \partial\Omega} \left| \frac{1}{z} \varphi(z) \right| \leq \frac{1}{d(0, \partial\Omega)},$$

car  $\Theta_\Omega(0) = 1$  et  $K_\Omega(0) = 0$ .

**B. Un contre exemple :** Si  $\Omega$  est à bord régulier de classe  $C^1$  (mais non  $C^{1+\epsilon}$ ) les diviseurs de Leibenson peuvent ne pas être bornés.

1. Soit  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = -x/\log x$ ,  $f(0) = 0$ .  $f$  est de classe  $C^1$ , strictement croissante, convexe,  $f'(0) = 0$ , d'image  $]0, +\infty[$  et on a la fonction réciproque :

$$f^{-1} : ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, 1[,$$

$f^{-1}$  est réelle-analytique sur  $]0, +\infty[$  et

$$f^{-1}(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left( y - \frac{e}{2} \right)^m,$$

soit  $r$  le rayon de convergence de cette série entière; on a immédiatement  $0 < r \leq e/2$ .

2. On considère la fonction  $g$  sur  $D(e/2, r)$  :

$$g(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left( \xi - \frac{e}{2} \right)^m,$$

on démontre facilement qu'on a  $g(\xi) = \exp(-(1/\xi) g(\xi))$  puis l'inclusion

$$g\left(D\left(\frac{e}{2}, r\right)\right) \subset \mathbb{C} \setminus (]\infty, 0] \cup [1, \infty[).$$

3. Sur l'ouvert  $\mathcal{O} = \mathbb{C} \setminus (]\infty, 0] \cup \{1\})$  on considère la fonction holomorphe  $F : F(\zeta) = -(\zeta/\text{Log } \zeta)$  (détermination principale du logarithme) comme on a  $F|_{]0,1[} = f|_{]0,1[}$  on démontre aisément que  $g(D(e/2, r))$  est contenu dans  $\mathcal{O}$  et que  $g$  est biholomorphe de  $D(e/2, r)$  sur son image,  $F$  étant la fonction réciproque de  $g$ .

4. Ensuite on a l'égalité

$$|g(\xi)| \leq (\pi^2 + \text{Log}^2 |g(\xi)|)^{1/2} |\xi|,$$

qui prouve que  $g$  est bornée.

Si on suppose  $r < e/2$ ; soit  $\xi_0$ ,  $|\xi_0 - (e/2)| = r$  et soit  $(\xi_n)_{n \geq 1}$ ,  $\xi_n \in D(e/2, r)$ ,  $\lim \xi_n = \xi_0$ . Comme  $g$  est bornée, quitte à extraire une suite de  $(\xi_n)_{n \geq 1}$  on peut supposer qu'on a :

$$\lim g(\xi_n) = \zeta_0.$$

On a

$$\zeta_0 = \exp\left(-\frac{\zeta_0}{\xi_0}\right) \quad \text{et} \quad r < \frac{e}{2},$$

on obtient  $\zeta_0 \in \mathcal{O} \setminus \{e\}$ , donc  $F(\zeta_0) = \xi_0$  et  $F'(\zeta_0) \neq 0$ , de sorte que  $F$  est biholomorphe au voisinage de  $\zeta_0$ ; de là on démontre aisément que  $\xi_0$  est régulier pour la série entière définissant  $g$ . Mais toute série entière admet un point singulier sur son cercle de convergence, on a donc une contradiction et ainsi il vient  $r = e/2$ .

5. Pour tout  $\xi$  de  $D(e/2, e/2)$  on a  $g(|\xi|) \leq |g(\xi)|$ ; en effet si  $\zeta \in \mathcal{O}$  on a  $|\text{Log } \zeta| \geq |\text{Log } |\zeta||$ , donc pour tout  $\zeta$ ,

$$|\zeta| \neq 1, \zeta \in \mathcal{O} : |F(\zeta)| \leq \frac{|\zeta|}{|\text{Log } |\zeta||}.$$

Soit  $\xi \in D(e/2, e/2)$ , si  $|g(\xi)| < 1$ , on a donc

$$|F(g(\xi))| \leq \frac{|g(\xi)|}{-\text{Log } |g(\xi)|} = f(|g(\xi)|),$$

mais

$$|F(g(\xi))| = |\xi| = f(g(|\xi|)),$$

d'où l'inégalité  $g(|\xi|) \leq |g(\xi)|$ . Si  $|g(\xi)| \geq 1$  on a alors

$$g(|\xi|) = f^{-1}(|\xi|) < 1 \leq |g(\xi)|.$$

6. Sur  $U = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |w| < 1\}$  on définit la fonction de classe  $C^1$   $\rho(z, w) = |z|^2 + f(|w|) - 1$ , et on considère l'ouvert  $\Omega = \{\rho < 0\}$ . On démontre aisément que  $\Omega$  est convexe, borné, à bord régulier de classe  $C^1$  et contient l'origine ( $\Omega$  est même strictement convexe au sens géométrique).

On définit sur  $\Omega$  la fonction holomorphe  $\varphi$

$$\varphi(z, w) = \frac{w}{g(1-z^2)}.$$

On a  $\varphi(0, 0) = 0$ ;  $\varphi(0, rf^{-1}(1)) = r$  pour tout  $r$  de  $[0, 1[$ , et les inégalités :

$$|\varphi(z, w)| < \frac{f^{-1}(1-|z|^2)}{|g(1-z^2)|} \leq \frac{f^{-1}(|1-z^2|)}{|g(1-z^2)|} = \frac{g(|1-z^2|)}{|g(1-z^2)|} \leq 1,$$

donc  $\|\varphi\|_\infty = 1$ .

Considérons le diviseur de Leibenson

$$\Psi(z, w) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial w}(tz, tw) dt,$$

pour tout  $x \in ]0, 1[$  on a

$$\Psi(x, 0) = \int_0^1 \frac{dt}{f^{-1}(1-t^2x^2)} \geq \int_0^1 \frac{t dt}{f^{-1}(1-t^2x^2)},$$

effectuant le changement de variable  $1-t^2x^2 = f(y)$  il vient

$$\Psi(x, 0) \geq \frac{1}{2x^2} [\text{Log} |\text{Log} f^{-1}(1-x^2)| - \text{Log} |\text{Log} f^{-1}(1)|],$$

par suite  $\lim_{x \rightarrow 1, x \leq 1} \Psi(x, 0) = +\infty$ . Et on peut remarquer qu'effectivement le point  $(1, 0)$  de  $\partial\Omega$  n'est pas de classe  $C^{1+\epsilon}$ .

APPLICATION AU PROBLÈME DE GLEASON POUR  $H^*$ 

$\Omega$  est un ouvert convexe borné de  $\mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 2$ , à bord régulier de classe  $C^{1+\epsilon}$  (ne contenant pas nécessairement l'origine). Étant donnée une fonction holomorphe bornée  $f$  sur  $\Omega$  on définit les fonctions holomorphes  $g_j$  sur  $\Omega \times \Omega$

$$g_j(a, z) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z_j}(a + t(z-a)) dt.$$

On a évidemment

$$f(z) - f(a) = \sum_{j=1}^n (z_j - a_j) g_j(a, z).$$

On note  $g(a, \cdot)$  l'application holomorphe de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}^n$

$$g(a, z) = \sum_{j=1}^n g_j(a, z) e_j$$

et

$$\begin{aligned} \|g(a, z)\| &= (\sum_{j=1}^n |g_j(a, z)|^2)^{1/2}, \\ \|g(a, \cdot)\|_{\infty} &= \text{Sup}_{z \in \Omega} \|g(a, z)\|. \end{aligned}$$

En corollaire du théorème précédent on obtient que pour tout  $a$  de  $\Omega$  il existe une constante  $G_{\Omega}(a)$  telle que pour toute fonction holomorphe bornée  $f$  sur  $\Omega$

$$\|g(a, \cdot)\|_{\infty} \leq G_{\Omega}(a) \|f - f(a)\|.$$

La preuve est immédiate en considérant sur  $-a + \Omega$  la fonction holomorphe  $\varphi$

$$\varphi(w) = \frac{1}{\|f - f(a)\|_{\infty}} (f(w+a) - f(a))$$

la constante  $G_{\Omega}(a)$  peut s'exprimer en fonction des paramètres géométriques  $d(a, \partial\Omega)$ ,  $K_{\Omega}(a)$  et  $\Theta_{\Omega}(a)$ .

*Cas de la boule  $B_n$ ,  $n \geq 2$*

Compte tenu des expressions donnant  $K_{B_n}(a)$  et  $\Theta_{B_n}(a)$  on obtient pour  $G_{B_n}(a)$

$$\frac{1}{(1-\|a\|)^{3/2}(1+\|a\|)^{1/2}} (1+(\text{Arc cos } \|a\|)^2 + 2\|a\| \text{Arcos } \|a\|)^{1/2}$$

et

$$G_{B_n}(a) \leq \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{1/2} \frac{1}{(1-\|a\|)^{3/2}(1+\|a\|)^{1/2}}.$$

On peut remarquer que  $G_{B_n}(a)$  ne dépend pas de la dimension.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] AHERN (P.) and SCHNEIDER (R.), Holomorphic Lipschitz functions in pseudo-convex domains, *Amer. J. Math.*, vol. 101, n° 3, 1979, p. 543-565.
- [2] HENKIN (G. M.), Approximation of functions in pseudo-convex domains and the theorem of Z. L. Leibenson, *Bull. Acad. Polon. Sc., Sér. Math. Astronom. Phys.*, vol. 19, 1971, p. 37-42.
- [3] KERZMAN (N.) and NAGEL (A.), Finitely generated ideals in certain function algebras. *J. Funct. Anal.*, vol., 7, 1971, p. 212-215.
- [4] OVRELID (N.), Generators of the maximal ideals of  $A(\mathbb{D})$ , *Pacific J. Math.*, vol. 39, n° 1, 1971, p. 219-223.
- [5] RUDIN (W.), *Function theory in the unit ball of  $C^n$* , Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.