BULLETIN DE LA S. M. F.

LUCE GOUYON

Classes caractéristiques et fondamentales en cobordismes et K-théories

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 475-506
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__475_0>

Bull. Soc. math. France,
113, 1985, p.475-506

CLASSES CARACTÉRISTIQUES ET FONDAMENTALES EN COBORDISMES ET K-THÉORIES

PAR

LUCE GOUYON (*)

RÉSUMÉ. — Suivant une idée de Shih Weishu, certaines classes caractéristiques et fondamentales de fibrés vectoriels réels et de cobordismes dans la K-théorie (réelle ou complexe) sont caractérisées par des séries formelles.

ABSTRACT. — Following an idea of Shih Weishu it is shown that certain characteristic and fundamental classes of real vector bundles and cobordisms of (real or complex) K-theory are characterized by means of formal series.

Dans cet article, on donnera, suivant une idée de Shih Weishu, une caractérisation, par des séries formelles, des K-classes caractéristiques du cobordisme unitaire [6] et du cobordisme orienté [7]. On montrera ainsi (§ 3) que l'ensemble des K-classes caractéristiques « stables » du cobordisme unitaire préservant les structures additives et multiplicatives s'identifie au sous-ensemble $\mathbb{Z}_1[[t]]$ de $\mathbb{Z}[[t]]$ formé des séries dont le terme constant est 1. On établira que la composition avec les opérations de Adams, qui donne des classes non stables, se traduit par la formule

$$(\psi_l \circ c)(t) = \sum_{0 \leq i \leq l-1} (1+t)^{-i} . c((1+t)^l - 1),$$

où c est une classe stable et ψ_l une opération de Adams. On montrera des résultats analogues pour les K-classes du cobordisme orienté. Ces résultats sont des conséquences de la caractérisation, par des séries formelles, des monoïdes $\mathrm{Fon}(E_{\mathbb{C}}, K)$ et $\mathrm{Fon}(E_{\mathbb{R}}^{2}{}^{*}, K)$ des K-classes fondamentales des fibrés vectoriels complexes et des fibrés vectoriels réels, orientés, de rang pair, donnée par SHIH WEISHU [12]; cette caractérisation est elle-même conséquence de celle des groupes de Grothendieck $K(MSO(2n))$ et $K(MU(n))$ des espaces de Thom du $SO(2n)$ et du $U(n)$-fibré universel.

(*) Texte reçu le 14 mai 1985.

Luce GOUYON, 2, impasse de la Pélude, 31400 Toulouse.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1985/04 475 32/$ 5.20

Dans le paragraphe 1 on démontrera donc le lemme de Shih Weishu caractérisant le groupe $K(MSO(2n))$. On montrera aussi que la complexification des fibrés induit un isomorphisme entre les groupes $KO(MSO(4n))$ et $K(MSO(4n))$ [8]. Ce résultat permettra, en particulier, de donner dans le paragraphe 2 une démonstration de la proposition de Shih Weishu et Singh Varma [13] qui caractérise le monoïde $\mathrm{Fon}(E_{\mathbf{R}}^{4}*, KO)$. Le paragraphe 2 est en effet consacré à la caractérisation des K-classes de fibrés vectoriels complexes et de fibrés vectoriels réels, orientés, de rang pair et des K et KO-classes de fibrés vectoriels complexes ou réels de rang pair.

1. Les groupes $K(MSO(2n))$, $K(MU(n))$ et $KO(MSO(4n))$

1.1. Représentations et K-théorie : rappels ([2], [9], [10])

Pour X, CW-complexe fini, $K(X)$ (resp. $KO(X)$) est le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphisme des fibrés vectoriels complexes (resp. réels) de base X. $\tilde{K}(X) = \mathrm{coker}\ K(\mathrm{point}) \to K(X)$ (resp. $\widetilde{KO}(X) = \mathrm{coker}\ KO(\mathrm{point}) \to KO(X)$) est identifié au sous-groupe $K(X, x_0)$ (resp. $KO(X, x_0)$) lorsqu'un point-base x_0 a été choisi.

Le produit tensoriel des fibrés vectoriels munit $K(X)$ et $KO(X)$ d'une structure d'anneau.

On étend la définition des foncteurs contravariants K et KO à la catégorie de tous les CW-complexes en posant

$$K(X) = \varprojlim K(P), \qquad KO(X) = \varprojlim KO(P)$$

où P parcourt les sous-complexes finis de X.

Dans ce qui suit G désignera toujours un groupe de Lie compact et connexe.

L'anneau des représentations complexes $R(G)$ (resp. réelles $RO(G)$ du groupe G est l'anneau de Grothendieck des classes d'isomorphisme des G-modules complexes (resp. réels) de dimension finie. $R(G)$ est ainsi le $\mathbf{Z}$-module libre additif engendré par les classes d'équivalence des G-modules irréductibles; la structure multiplicative provient du produit tensoriel des G-modules. $RO(G)$ est construit de façon similaire à partir des G-modules réels.

1.1.1. Notant T_n le tore de dimension n et $M(k_1, \ldots, k_n)$ sa représentation complexe de dimension un où l'action de T_n est donnée par

$$(\theta_1 \ldots, \theta_n).Z = \exp(2\pi i(k_1\theta_1 + \ldots + k_n\theta_n)).Z,$$

on a

$$R(T_n) = \mathbb{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_i, \alpha_i^{-1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}]$$

où

$$\alpha_i = M(0, \ldots, \underset{(i)}{1}, \ldots, 0).$$

1.1.2. On a des homomorphismes

$$r: \quad R(G) \to RO(G), \qquad (\otimes\mathbb{C}): \quad RO(G) \to R(G),$$

définis le premier par restriction des scalaires, le second par complexification.

L'association de son dual à un G-module complexe définit une opération $t: R(G) \to R(G)$; on a alors [4], p. 59 $(\otimes\mathbb{C}) \circ r = 1 + t$ et $r \circ (\otimes\mathbb{C}) = 2$. L'homomorphisme $(\otimes\mathbb{C})$ est donc injectif. Nous utiliserons le résultat suivant :

1.1.2.1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, les homomorphismes

$$(\otimes\mathbb{C}): \quad RO(SO(2n+1)) \to R(SO(2n+1))$$

et

$$(\otimes\mathbb{C}): \quad RO(SO(4n)) \to R(SO(4n))$$

sont des isomorphisme (*cf.* [9], p. 193).

1.1.3. Si T est un tore maximal de G et N_T le normalisateur de T, le groupe de Weyl $W(G)$ de G est le groupe quotient N_T/T. Le groupe $W(G)$ opère sur l'anneau $R(T)$.

1.1.3.1. T_n est tore maximal de $U(n)$, $SO(2n)$ et $SO(2n+1)$. Le groupe de Weyl de $U(n)$ es tle groupe des permutations des indices des α_i. Le groupe de Weyl de $SO(2n+1)$ est le produit croisé des permutations des indices des α_i avec les substitutions

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to (\alpha_1^{\varepsilon_1}, \ldots, \alpha_n^{\varepsilon_n}) \qquad \text{où} \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Le groupe de Weyl de $SO(2n)$ est le produit croisé des permutations des indices des α_i avec les substitutions

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to (\alpha_1^{\varepsilon_1}, \ldots, \alpha_n^{\varepsilon_n}) \qquad \text{où} \quad \varepsilon_i = \pm 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n = 1.$$

1.1.4. L'homomorphisme de restriction $R(G) \to R(T)$ est injectif et applique $R(G)$ sur $R(T)^{W(G)}$, anneau des invariants de $R(T)$ par l'action de $W(G)$.

Notant $\varepsilon : R(G) \to \mathbb{Z}$ l'homomorphisme « augmentation » qui associe à chaque représentation de G sa dimension et $I(G)$ le noyau de ε, le complété de l'anneau de représentation de G est

$$R(G) = \varprojlim_n \frac{\mathrm{R}(\mathrm{G})}{\mathrm{I}(\mathrm{G})^n}.$$

1.1.4.1. L'homomorphisme $\varphi : \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_n]] \to R(T_n)$ défini par $\varphi(t_i) = \alpha_i - 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ induit une bijection des complétés

$$\hat{\varphi} : \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_n]] \to \hat{R}(T_n).$$

1.1.5. Si T est un tore maximal de G, le groupe de Weyl $W(G)$ de G opère sur $R(T)$ et sur $\hat{R}(T)$ et la restriction $i : R(G) \to R(T)$ induit un monomorphisme $\hat{i} : \hat{R}(G) \to \hat{R}(T)$. Ce monomorphisme envoie $\hat{R}(G)$ bijectivement sur $(\hat{R}(T))^{W(G)} \cong R(T)^{W(G)}$.

1.1.5.1. Les composés

$$\hat{R}(U(n)) \xrightarrow{\hat{i}} \hat{R}(T_n) \xrightarrow{(\hat{\varphi})^{-1}} \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_n]],$$

$$\hat{R}(SO(2n+1)) \xrightarrow{\hat{i}} \hat{R}(T_n) \xrightarrow{(\hat{\varphi})^{-1}} \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_n]]$$

et

$$\hat{R}(SO(2n)) \xrightarrow{\hat{i}} \hat{R}(T_n) \xrightarrow{(\hat{\varphi})^{-1}} \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_n]]$$

donnent des descriptions explicites de $\hat{R}(U(n))$, $\hat{R}(SO(2n+1))$ et $\hat{R}(SO(2n))$ en terme de séries formelles à coefficients entiers.

1.1.5.2. L'anneau $\hat{R}(U(n))$ s'identifie au sous-anneau de $\mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_n]]$ constitué par les séries formelles symétriques.

1.1.5.3. L'anneau $\hat{R}(SO(2n+1))$ s'identifie au sous-anneau de $\mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_n]]$ constitué par les séries formelles symétriques et invariantes par les substitutions du type $t_j \to (1/(1+t_j)-1)$ lesquelles correspondent par $\hat{\varphi}$ aux substitutions de la forme $\alpha_j \to \alpha_j^{-1}$.

1.1.5.4. L'anneau $\hat{R}(SO(2n))$ s'identifie au sous-anneau de $\mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_n]]$ constitué par les séries formelles symétriques et invariantes par un nombre pair de substitutions du type $t_j \to (1/(1+t_j)-1)$ (qui correspondent toujours par $\hat{\varphi}$ aux substitutions de la forme $\alpha_j \to \alpha_j^{-1}$).

Un large usage sera fait également des résultats suivants dus à Atiyah et Hirzebruch pour la K-théorie complexe [2] et à Anderson pour la K-théorie réelle [1].

1.1.6. Les homomorphismes

$$\alpha : \hat{R}(G) \to K(BG) \qquad \text{et} \qquad \alpha_0 : RO(G) \to KO(BG)$$

construits à partir du G-fibré universel de base BG sont des isomorphismes.

1.1.6.1. Les applications $KO(BSO(2n+1)) \to K(BSO(2n+1))$ et $KO(BSO(4n)) \to K(BSO(4n))$ définies par la complexification des fibrés sont en vertu de 1.1.2.1 des isomorphismes.

Pour la dimension -1, on a

1.1.7.

$$K^{-1}(BG) \cong K^1(BG) = 0,$$

$$KO^{-1}(BG) \cong KO^7(BG) = \frac{\widehat{RO}(G)}{r(\hat{R}(G))}.$$

1.2. Le Groupe $\tilde{K}(MSO(2n))$

MSO(n) désigne l'espace de Thom du $SO(n)$-fibré universel; $\tilde{K}(MSO(n))$ est identifié à un sous-groupe de $K(MSO(n))$ grâce au point-base de l'espace de Thom.

THÉORÈME. — *L'homomorphisme induit par la composition de la section nulle et de l'inclusion de BT_n dans $BSO(2n)$:*

$$\tilde{K}(MSO(2n)) \to K(BSO(2n)) \to K(BT_n) \cong \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_n]]$$

est injectif. Son image dans $K(BT_n) \cong \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_n]]$ se compose des séries formelles symétriques, invariantes par un nombre pair de substitutions de la forme $t_j \to (1/(1+t_j)-1)$ et divisibles par le produit $t_1 . t_2 \ldots t_n$.

Démonstration. — Soit $ESO(2n)$ le fibré principal universel de groupe $SO(2n)$ et de base $BSO(2n)$. Soit $X = ESO(2n)_{SO(2n)} \times B^{2n}$ le fibré en boules de dimension $2n$ associé et soit $Y = ESO(2n)_{SO(2n)} \times S^{2n-1}$ le sous-fibré en sphères. On a $K(X, Y) = \tilde{K}(MSO(2n))$, d'où une suite exacte

$$K^{-1}(Y) \to K(MSO(2n)) \to K(X) \to K(Y).$$

Le choix d'un point-base de S^{2n-1} définit un homéomorphisme de Y sur $ESO(2n)/SO(2n-1)$. Notant $\rho : BSO(2n-1) \to BSO(2n)$ l'application induite par l'injection canonique $SO(2n-1) \to SO(2n)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} Y \cong & ESO(2n)/SO(2n-1) & = & BSO(2n-1) \\ \downarrow & \downarrow g & & \downarrow \rho \\ X \xrightarrow{f} & ESO(2n)/SO(2n) & = & BSO(2n) \end{array}$$

où f est l'application qui rétracte chaque boule-fibre sur son centre et g l'application naturelle de $ESO(2n)/SO(2n-1)$ sur son quotient $ESO(2n)/SO(2n)$ est commutatif. La suite exacte ci-dessus devient donc

$$K^{-1}(BSO(2n-1)) \to \tilde{K}(MSO(2n))$$

$$\to K(BSO(2n)) \xrightarrow{\rho^!} K(BSO(2n-1)),$$

or $K^{-1}(BSO(2n-1)) = 0$ d'après (1.1.7) et $\tilde{K}(MSO(2n))$ s'identifie donc au noyau de $\rho^!$.

L'injection $SO(2n-1) \to SO(2n)$ induit aussi

$$\hat{\rho} : \hat{R}(SO(2n)) \to \hat{R}(SO(2n-1))$$

et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \hat{R}(SO(2n)) & \xrightarrow{\hat{\rho}} & \hat{R}(SO(2n-1)) \\ \cong \downarrow \alpha & & \cong \downarrow \alpha \\ K(BSO(2n)) & \xrightarrow{\rho^!} & K(BSO(2n-1)) \end{array}$$

est commutatif. La caractérisation du noyau de $\rho^!$ revient donc à celle du noyau de $\hat{\rho}$.

L'homomorphisme restriction $\mu : R(T_n) \to R(T_{n-1})$ caractérisé (1.1.1) par

$$\mu(\alpha_i) = \alpha_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \qquad \mu(\alpha_n) = 1,$$

induit $\hat{\mu} : \hat{R}(T_n) \to \hat{R}(T_{n-1})$ et définit un homomorphisme
(1.1.4.1)

$$P: \quad \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_n]] \to \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_{n-1}]]$$

caractérisé par

$$P(t_i) = t_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \qquad P(t_n) = 0.$$

De la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{R}(SO(2n)) & \xrightarrow{\hat{i}} & \hat{R}(T_n) & \xrightarrow{\hat{\varphi}^{-1}} & \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_n]] \\
\downarrow \hat{\rho} & & \downarrow \mu & & \downarrow P \\
\hat{R}(SO(2n-1)) & \xrightarrow{\hat{i}} & \hat{R}(T_{n-1}) & \xrightarrow{\hat{\varphi}^{-1}} & \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_{n-1}]]
\end{array}$$

et de l'injectivité des flèches horizontales (1.1.4.1, 1.1.5) il s'ensuit qu'un élément du noyau de $\hat{\rho}$ est représenté par une série formelle $f(t_1, \ldots, t_n)$ satisfaisant aux conditions énoncées en 1.1.5.4 et appartenant au noyau de P. Cette série satisfait donc à l'égalité $f(t_1, \ldots, t_{n-1}, 0) = 0$; elle est donc divisible par t_n. La divisibilité par le produit $t_1 . t_2 \ldots t_n$ est alors conséquence de la symétrie de la série. Inversement une série formelle divisible par $t_1 . t_2 \ldots t_n$ l'est par t_n et est image d'un élément du noyau de $\hat{\rho}$.

1.3. Le groupe $\tilde{K}(MU(n))$

MU(n) désigne l'espace de Thom du $U(n)$-fibré universel. Une démonstration analogue à la précédente prouve que

LEMME. — *L'homomorphisme induit par la composition de la section nulle et de l'inclusion de BT_n dans $BU(n)$:*

$$\tilde{K}(MU(n)) \to K(BU(n)) \to K(BT_n) \cong \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_n]]$$

est injectif; son image se compose des séries formelles symétriques et divisibles par le produit $t_1 . t_2 \ldots t_n$.

1.4. Le groupe $\widetilde{KO}(MSO(4n))$.

PROPOSITION [8]. — *La complexification des fibrés induit un homomorphisme $(\otimes \mathbb{C})$: $KO(MSO(4n)) \to K(MSO(4n))$ qui est bijectif.*

Démonstration. — Il revient au même de prouver que l'homomorphisme

$$(\otimes \mathbb{C}) : \quad \tilde{K}O(MSO(4n)) \to \tilde{K}(MSO(4n))$$

est bijectif. Comme dans la démonstration de 1.2, on obtient la suite exacte

$$KO^{-1}(BSO(4n)) \xrightarrow{\rho^!_{-1}} KO^{-1}(BSO(4n-1)) \to KO(MSO(4n))$$
$$\to KO(BSO(4n)) \xrightarrow{\rho^!_0} KO(BSO(4n-1)).$$

Nous démontrerons la surjectivité de $\rho^!_{-1}$; il s'ensuivra l'exactitude de la suite

$$0 \to KO(MSO(4n)) \to KO(BSO(4n)) \xrightarrow{\rho^!_0} KO(BSO(4n-1)) \to \ldots$$

D'après (1.1.6) et (1.1.2.1) la proposition sera alors démontrée.

Or (1.1.7, 1.1.2.1)

$$KO^{-1}(BSO(4n)) = \frac{\widehat{RO}(SO(4n))}{r(\hat{R}(SO(4n)))} \cong \frac{(\otimes \mathbb{C})(\widehat{RO})(SO(4n)))}{((O\,\mathbb{C}) \circ r)(\hat{R}(SO(4n))}$$
$$\cong \frac{\hat{R}(SO(4n))}{(1+t)\hat{R}(SO(4n)}$$

et de même pour $KO^{-1}(BSO(4n-1))$.

Notant toujours

$$\hat{\rho} : \quad \hat{R}(SO(4n)) \to \hat{R}(SO(4n-1)),$$

l'homomorphisme induit par l'injection $SO(4n-1) \to SO(4n)$, la surjectivité de $\rho^!_{-1}$ résultera de la surjectivité de $\hat{\rho}$. Usant des descriptions (1.1.5.3) et (1.1.5.4) de $\hat{R}(SO(4n-1))$ et $\hat{R}(SO(4n))$, tout revient à prouver :

LEMME. — *Notant*

$$\mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_{2n-1}, t_{2n}]]^{W_{2n}}$$
$$(resp.\ \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_{2n-1}]]^{W_{2n-1}}),$$

le sous-anneau de l'anneau des séries formelles à coefficients entiers et à $2n$ (resp. $2n-1$) variables constitué par les séries symétriques et invariantes *par un nombre pair (resp. quelconque) de substitutions* S_j *du type* $t_j \to (1/(1+t_j)-1)$, *l'application*

$$\mathfrak{R}: \quad \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_{2n-1}, t_{2n}]]^{W_{2n}} \to \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_{2n-1}]]^{W_{2n-1}},$$

définie par

$$\mathfrak{R}(h)(t_1, \ldots, t_{2n-1}) = h(t_1, \ldots, t_{2n-1}, 0)$$

est surjective.

Démonstration. — Nous montrerons le résultat plus fort suivant : notant $\mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_m]]^{V_m}$ le sous-anneau de $\mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_m]]$ constitué par les séries formelles symétriques et invariantes par les substitutions $t_j \to S_j(t) = (1/(1+t_j)-1)$, l'application

$$\mathfrak{S}: \quad \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_m, t_{m+1}]]^{V_{m+1}} \to \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_m]]^{V_m},$$

définie par

$$\mathfrak{S}(h)(t_1, \ldots, t_m) = h(t_1, \ldots, t_m, 0)$$

est surjective, ce qui suffira à assurer la démonstration du lemme.

Soit donc

$$f(t_1, \ldots, t_m) = \sum_{i_1, \ldots, i_m \geq 0} a_{i_1 \ldots i_m} t_1^{i_1} \ldots t_m^{i_m},$$

un élément de $\mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_m]]^{V_m}$. Posons

$$a_0 = a_{00 \ldots 0},$$
$$a_1(t_1) = \sum_{i_1 > 0} a_{i_1 0 \ldots 0} t_1^{i_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_k(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k > 0} a_{i_1 i_2 \ldots i_k 0 \ldots 0} t_1^{i_1} t_2^{i_2} \ldots t_k^{i_k},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_m(t_1, \ldots, t_m) = \sum_{i_1, \ldots, i_m > 0} a_{i_1 \ldots i_m} t_1^{i_1} \ldots t_m^{i_m}.$$

Remarquons que la symétrie de f entraîne pour toute permutation σ de $[1, m]$ l'égalité

$$a_{i_1 \ldots i_m} = a_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(m)}};$$

on a alors

$$a_1(t_1)=f(t_1, 0, \ldots, 0)-a_0,$$
$$a_2(t_1, t_2)=f(t_1, t_2, 0, \ldots, 0)-a_1(t_1)-a_1(t_2)-a_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_k(t_1, \ldots, t_k)=f(t_1, \ldots, t_k, 0, \ldots, 0)$$
$$-\sum_{r=1}^{k-1}\big(\sum_{(\chi_1, \ldots, \chi_r)\subset[1,\, k]} a_r(t_{\chi_1}\ldots t_{\chi_r})\big)-a_0,$$

où $(\chi_1, \ldots, \chi_r)$ désigne une suite strictement croissante. On voit, par récurrence, que les séries formelles a_k sont invariantes par toute substitution S_j.

La série formelle

$$h(t_1, \ldots, t_m, t_{m+1})=a_0+\sum_{r=1}^{m}\big(\sum_{\chi_1, \ldots, \chi_r)\subset[1,\, m+1]} a_r(t_{\chi_1}, \ldots, t_{\chi_r})\big)$$

est ainsi un élément de $\mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_{m+1}]]^{V_{m+1}}$ et

$$h(t_1, \ldots, t_m, 0)=a_0 +\sum_{r=1}^{m}\big(\sum_{(\chi_1, \ldots, \chi_r)\subset[1,\, m]} a_r(t_{\chi_1}, \ldots, t_{\chi_r})\big) =f(t_1, \ldots, t_m),$$

donc $\mathfrak{S}(h)=f$.

2. Classes caractéristiques et fondamentales : rappels

2.1. Notations

Nous noterons $\mathscr{F}$ la catégorie des CW-complexes finis et $\mathscr{C}$ la catégorie de tous les CW-domplexes.

Pour X, objet de $\mathscr{C}$, nous noterons $E_{\mathbf{C}}(X)$ (resp. $E_{\mathbf{C}}^{2*}(X)$, $E_{\mathbf{R}}^{2*}(X)$, $E_{\mathbf{R}}^{4*}(X)$) le monoïde, pour la somme de Whitney, des classes d'isomorphisme des fibrés vectoriels complexes (resp. complexes de rang pair, réels orientés de rang pair, réels orientés de rang multiple de 4) de base X.

Soit A un anneau commutatif unitaire. Pour X, objet de $\mathscr{F}$, $K_A(X)$ désignera le produit tensoriel $K(X)\otimes_{\mathbf{Z}} A$. Pour X, objet de $\mathscr{C}$, $K_A(X)$ sera défini par $K_A(X)=\varprojlim K_A(P)$, où P parcourt les sous-complexes finis de X.

Un élément de $E_{\mathbf{C}}(X)$ (resp. $E_{\mathbf{R}}^{2*}(X)$) et l'élément de $K(X)$ (resp. $KO(X)$) qu'il représente seront notés de façon identique.

Nous noterons $A[[t]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans A et $A[[t]]_{\times}$ (resp. $A[[t]]_{+}$) le monoïde (resp. groupe) défini par la multiplication (resp. addition) des séries formelles.

Le sous-ensemble

$$A^{\pm}[[t]]=\left\{f \mid f(t)=\pm f\left(-\frac{t}{1+t}\right)\right\},$$

de $A[[t]]$ est un sous-monoïde de $A[[t]]_{\times}$.

Nous noterons enfin $n_{\mathbf{C}}$ (resp. $2n_{\mathbf{R}}$) le fibré trivial complexe de rang n (resp. réel, orienté, de rang $2n$) dont la base est précisée par le contexte.

2.2. Classes caractéristiques : définition

Soient E et L deux foncteurs contravariants de la catégorie $\mathscr{C}$ dans la catégorie des monoïdes commutatifs. L'ensemble $\mathrm{Hom}(E, L)$ des transformations naturelles du foncteur E dans le foncteur L est un monoïde pour l'opération de monoïde de L et ses éléments sont les classes caractéristiques de E dans L.

Lorsque $E=E_{\mathbf{C}}, E_{\mathbf{R}}^{2*}, \ldots$ et $L=K, K_A$ ou KO deux structures de monoïdes peuvent être retenues. μ représentant une paire d'opérations $(+,+), (+,\times), \ldots$, qui seront précisées dans chaque cas, on notera $\mathrm{Hom}(E, L)_{\mu}$ l'ensemble des classes caractéristiques qui respectent ces opérations. $\mathrm{Hom}(E, L)_{+,\times}$ désignera ainsi l'ensemble des classes caractéristiques c de E dans L satisfaisant à l'égalité :

$$c(x+x')=c(x).c(x').$$

L'intersection $\mathrm{Hom}(E, L)_{+,+} \cap \mathrm{Hom}(E, L)_{\times,\times}$ est un anneau que nous noterons $\mathrm{Hom}(E, L)_{\text{anneau}}$.

2.2.1. *Remarque*

L'inclusion canonique $\mathrm{Hom}(K, L)_{+,+} \rightarrow \mathrm{Hom}(E_{\mathbf{C}}, L)_{+,+}$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(K, L)_{\text{anneau}} \rightarrow \mathrm{Hom}(E_{\mathbf{C}}, L)_{\text{anneau}}.$$

2.3. EXEMPLES

L'algèbre extérieure d'un fibré définit deux éléments λ et $\bar{\lambda}$ de $\mathrm{Hom}(E_{\mathbf{C}}, K)_{+,\times}$ et un élément l de $\mathrm{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{4*}, KO)_{+,\times}$ introduits par Grothendieck. Précisément on a

$$\lambda(\xi)=\textstyle\sum_{i\geqslant 0}\Lambda^i\eta, \qquad \bar{\lambda}(\eta)=\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i\Lambda^i\bar{\eta}, \qquad l(\xi)=\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i\Lambda^i\xi,$$

où $\bar{\eta}$ désigne le conjugué de η.

2.4. CLASSES CARACTÉRISTIQUES ET SÉRIES FORMELLES

Remarquons que si η est un fibré en droites complexes de base X objet de $\mathscr{F}$, la composante de degré zéro du caractère de Chern (*cf.* [3]) de $\eta-1_{\mathbf{C}}$ est nilpotent dans $K(X)$ (*cf.* [2] et [9]). Il s'ensuit que l'opération consistant à remplacer t par $\eta-1_{\mathbf{C}}$ dans $f(t)$ élément de $A[[t]]$ définit un élément de $K_A(X)$. Si X est un objet de $\mathscr{C}$, cette opération définit encore un élément de $K_A(X)$ défini comme limite projective.

2.4.1. THÉORÈME [11]. — *On définit un isomorphisme de monoïdes*

$$\varphi:\quad \mathrm{Hom}\,(E_{\mathbf{C}}, K_A)_{+,\times}\to A[[t]]_{\times}$$

et un isomorphisme de groupes

$$\psi:\quad \mathrm{Hom}\,(E_{\mathbf{C}}, K_A)_{+,\times}\to A[[t]]_{+},$$

en posant, quel que soit η *fibré en droites complexes,*

$$\varphi(c)(\eta-1_{\mathbf{C}})=c(\eta), \qquad \psi(d)(\eta-1_{\mathbf{C}})=d(\eta).$$

En outre il existe une bijection

$$\delta:\quad \mathrm{Hom}\,(E_{\mathbf{C}}, K)_{\text{anneau}}\to\mathbb{Z}$$

unique, satisfaisant à (i) $\delta(0)=0$, (ii) *quels que soient* $c\neq 0$ *dans* $\mathrm{Hom}\,(E_{\mathbf{C}}, K)_{\text{anneau}}$ *et* η *fibré en droites complexes*

$$c(\eta)=\begin{cases}\eta^{\delta(c)} & \text{si}\quad \delta(c)>0,\\ \bar{\eta}^{|\delta(c)|} & \text{si}\quad \delta(c)<0.\end{cases}$$

L'inclusion canonique $\mathrm{Hom}\,(E_{\mathbf{C}}, K)_{\text{anneau}}\to\mathrm{Hom}\,(E_{\mathbf{C}}, K)_{+,+}$ *devient, moyennant les identifications* δ *et* ψ *la correspondance* $n\to(1+t)^n$, $n\in\mathbb{Z}$.

2.4.1.1. *Remarque.* — Les séries formelles $2+t$ et $t/(1+t)$ correspondent par φ respectivement aux classes de Grothendieck λ et $\bar{\lambda}$.

2.4.1.2. COROLLAIRE [11]. — *Les opérations de Adams* ψ_k, $k \in \mathbb{Z}$, *comme éléments de*

$$\operatorname{Hom}(E_{\mathbf{C}}, K)_{\text{anneau}} \cong \operatorname{Hom}(K, K)_{\text{anneau}}$$

sont entièrement déterminées par

$$\psi_k(\eta) = \begin{cases} \eta^k & si \quad k>0, \\ \bar{\eta}^k & si \quad k<0, \end{cases} \qquad rang\ \eta = 1.$$

Elles correspondent par ψ *aux séries* $(1+t)^k$ *et par* δ *aux entiers* k.

Remarquons que, notant ξ_n (resp. η_n) le fibré réel orienté (resp. complexe) universel de base $BSO(n)$ (resp. $BU(n)$), un élément c de $\operatorname{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{2*}, K)_{+,\times}$ (resp. $\operatorname{Hom}(E_{\mathbf{C}}, K)_{+,\times}$) est entièrement déterminé par la donnée, pour tous les n, des éléments $c(\xi_{2n})$ de $K(BSO(2n))$ (resp. $c(\eta_n)$ de $K(BU(n))$.

En particulier, à tout entier $m \in \mathbb{Z}$ correspond une classe unique de

$$\operatorname{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{4*}, K)_{+,\times} \qquad (\text{resp. } \operatorname{Hom}(E_{\mathbf{C}}^{2*}, K)_{+,\times})$$

que l'on notera m et qui est définie par

$$m(\xi_{4n}) = m^n \,(\text{resp. } m(\eta_{2n}) = m^n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Une telle classe sera appelée classe entière.

La détermination du monoïde $\operatorname{Hom}(E_{\mathbf{C}}, K)_{+,\times}$ est analogue. En fait, un élément c de $\operatorname{Hom}(E_{\mathbf{C}}, K)_{+,\times}$ est déterminé par le seul élément $c(\eta_1)$ de $K(BU(1)) \cong \mathbb{Z}[[t]]$ (1.1.4.1, 2.4.1). La démonstration de ce théorème de Shih est analogue à celle du théorème suivant qui est dû à Shih Weishu et Singh Varma; aucune démonstration n'en ayant été publiée nous en donnons une ici.

2.4.2. THÉORÈME.

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{2*}, K)_{+,\times} & \overset{\chi}{\subsetneq} & \operatorname{Hom}(E_{\mathbf{C}}, K)_{+,\times} & \overset{\varphi}{\rightarrow} & \mathbb{Z}[[t]]_\times \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w \\ \operatorname{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{4*}, K)_{+,\times} & \overset{\gamma}{\subsetneq} & \operatorname{Hom}(E_{\mathbf{C}}^{2*}, K)_{+,\times} & \overset{\alpha}{\rightarrow} & \mathbb{Z}_{\text{sym}}[[x, y]] \end{array}$$

où :

— *les inclusions horizontales sont déduites des applications* $E_{\mathbf{C}} \to E_{\mathbf{R}}^{2*}$ *et* $E_{\mathbf{C}}^{2*} \to E_{\mathbf{R}}^{4*}$ *obtenues en passant de la structure vectorielle complexe à la structure réelle orientée sous-jacente;*

— *u et v sont les applications naturelles déduites des inclusions* $E_{\mathbf{R}}^{4*} \subset E_{\mathbf{R}}^{2*}$ *et* $E_{\mathbf{C}}^{2*} \subset E_{\mathbf{C}}$;

— *φ est l'isomorphisme multiplicatif défini en* 2.4.1;

— *α l'injection qui à* $c \in \operatorname{Hom}(E_{\mathbf{C}}^{2*}, K)_{+, \times}$ *associe l'élément de* $\mathbb{Z}_{\mathrm{sym}}[[x, y]]$ *qui correspond* (1.1.6, 1.1.5.2) *à* $c(\eta_2) \in K(BU(2))$;

— *w associe à la série $f(t)$ la série $(x, y) \to f(x).f(y)$. L'image de* $\operatorname{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{2*}, K)_{+, \times}$ *dans* $\mathbb{Z}[[t]]_{\times}$ *se compose des f telles que $f(-t/(1+t)=\varepsilon f(t)$ avec $\varepsilon = \pm 1$ indépendant de t.* $\operatorname{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{4*}, K)_{+, \times}$ *se compose des multiples entiers de l'image de u,* $\operatorname{Hom}(E_{\mathbf{C}}^{2*}, K)_{+, \times}$ *se compose des multiples entiers des éléments de l'image de v et l'injection α identifie* $\operatorname{Hom}(E_{\mathbf{C}}^{2*}, K)_{+, \times}$ *à l'ensemble multiplicatif des séries de la forme $nf(x) f(y)$ (avec $n \in \mathbb{Z}$) et l'injection $\alpha \circ \gamma$ identifie* $\operatorname{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{4*}, K)_{+, \times}$ *à l'ensemble des séries de la forme*

$$nf(x) f(y) \qquad \text{où} \quad f\left(\frac{-x}{1+x}\right) = \varepsilon f(x).$$

De plus l'application $\operatorname{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{4*}, KO)_{+, \times} \to \operatorname{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{4*}, K)_{+, \times}$ *induite par la complexification $KO \to K$ est bijective.*

Démonstration. — Pour la commutativité du diagramme, il suffit de montrer que $w \circ \varphi = \alpha \circ v$, c'est-à-dire d'après 1.1.6 et 1.1.4.1

$$\alpha(v(c))(p_1^*(\eta_1) - 1, p_2^*(\eta_1) - 1) = \varphi(c)(p_1^*(\eta_1) - 1) . \varphi(c)(p_2^*(\eta_1) - 1),$$

où $p_i : BT_2 \to BT$ désigne la i-ième projection; or

$$\begin{aligned}\alpha(v(c))(p_1^*(\eta_1) - 1, p_2^*(\eta_1) - 1 &= v(c)(p_1^*(\eta_1) \oplus p_2^*(\eta_1)) \\ &= c(p_1^*(\eta_1)) . c(p_2^*(\eta_1)) = \varphi(c)(p_1^*(\eta_1) - 1) . \varphi(c)(p_2^*(\eta_1) - 1).\end{aligned}$$

Le diagramme est donc commutatif.

Pour tous p, q et $n = p + q$, notons $m_{p, q}$:

$$BU(2p) \times BU(2q) \to BU(2n)$$

et

$$l_n : \underbrace{BU(2) \times \ldots \times BU(2)}_{n} \to BU(2n)$$

les applications classifiantes de $\eta_{2p} \times \eta_{2q}$ et $\underbrace{\eta_2 \times \ldots \times \eta_2}_{n}$; elles induisent des monomorphismes

$$m_{p,q}^{*}: \quad K(BU(2n)) \to K(BU(2p) \times BU(2q))$$

et

$$l_n^{*}: \quad K(BU(2n)) \to K(BU(2) \times \ldots \times BU(2)).$$

Pour qu'une suite d'éléments $c_n \in K(BU(2n))$ définisse un élément c de $\mathrm{Hom}(E_{\mathbb{C}}^{2*}, K)_{+,\times}$ avec, pour tout n, $c(\eta_{2n}) = c_n$, il faut et il suffit que $m_{p,q}^{*}(c_n) = c_p \times c_q$ puisque

$$(m_{p,q})^{*}(\eta_{2n}) = \eta_{2p} \times \eta_{2q}.$$

Soit $(c'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une seconde suite de tels éléments; si $c_1 = c'_1$, l'injectivité de $(m_{p,q})^{*}$ implique l'égalité de $(c_n)_{\in \mathbb{N}}$ et $(c'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et par conséquent l'injectivité de α.

Un élément c_1 de $K(BU(2))$ détermine donc un élément (unique) c de $\mathrm{Hom}(E_{\mathbb{C}}^{2*}, K)_{+,\times}$ si et seulement si, pour tout n, $(c_1)^n$ appartient à $\mathrm{Im}\, l_n^{*}$ qui s'identifie (1.1.5) au sous-ensemble $\mathbb{Z}_{\mathrm{sym}}[[x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n]]$ de $\mathbb{Z}[[x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n]]$ constitué par les séries symétriques par rapport à toutes les variables.

Un élément c_1 de $K(BU(2))$ représenté par un élément $f(x, y)$ de $\mathbb{Z}_{\mathrm{sym}}[[x, y]]$ détermine donc une classe (unique) de $\mathrm{Hom}(E_{\mathbb{C}}^{2*}, K)_{+,\times}$ si et seulement si, pour tout n, les produits $f(x_1, y_1) \ldots f(x_n, y_n)$ représentant $(c_1)^n$ sont symétriques par rapport à toutes les variables.

Un raisonnement analogue prouve qu'un élément c_1 de $K(BSO(4))$ représenté (1.1.5.4) par un élément $f(x, y)$ de $\mathbb{Z}_{\mathrm{sym}}[[x, y]]$ invariant par la substitution

$$(x, y) \to \left(\frac{-x}{1+x}, \frac{-y}{1+y}\right)$$

détermine une classe (unique) c de $\mathrm{Hom}(E_{\mathbb{R}}^{4*}, K)_{+,\times}$ si et seulement si, pour tout n, les produits $f(x_1, y_1) \ldots f(x_n, y_n)$ sont symétriques par rapport à toutes les variables.

De même, compte tenu des identifications $T \cong U(1) \cong SO(2)$, un élément c_1 de $K(BSO(2))$ représenté par un élément $f(t)$ de $\mathbb{Z}[[t]]$ détermine une classe c de $\mathrm{Hom}(E_{\mathbb{R}}^{2*}, K)_{+,\times}$ si et seulement si

$$f(x).f(y) = f\left(\frac{-x}{1+x}\right).f\left(\frac{-y}{1+y}\right).$$

c'est-à-dire si

$$f(t)=\varepsilon f\left(\frac{-t}{1+t}\right) \qquad \text{avec} \quad \varepsilon=\pm 1 \text{ indépendant de } t.$$

Observons enfin la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} KO(BSO(4n)) & \rightarrow & KO(BSO(4p)\times BSO(4q)), \qquad n=p+q \\ {\scriptstyle\otimes C}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle\otimes C} \\ K(BSO(4n)) & \xrightarrow{(m_{p,q})^*} & K(BSO(4p)\times BSO(4q)) \end{array}$$

où la première flèche verticale est un isomorphisme. Il s'ensuit l'injectivité de l'application $KO(BSO(4n))\rightarrow KO(BSO(4p)\times BSO(4q))$, induite par $m_{p,q}$ et donc le fait qu'avec un raisonnement analogue appliqué à $c\in Hom(E_{\mathbb{R}}^{4*}, KO)_{+,\times}$ on voit que c est caractérisée par une série $f(x, y)$ de $\mathbb{Z}_{sym}[[x, y]]$ telle que

$$f(x, y)=f\left(\frac{-x}{1+x}\right)f\left(\frac{-y}{1+y}\right)$$

et telle que le produit $f(x_1, y_1)\ldots f(x_n, y_n)$ soit, pour tous les n, symétrique par rapport à toutes les variables.

Pour qu'une série de la forme $f(x_1, y_1)\ldots f(x_n, y_n)$ soit symétrique par rapport aux $2n$ variables, il faut et il suffit que la série $f(x, y).f(u.v)$ soit symétrique par rapport à ses quatre variables.

LEMME. — *Pour qu'une série $f(x, y)$ élément de $\mathbb{Z}[[x, y]]$ soit telle que le produit $f(x, y).f(u, v)$ soit symétrique par rapport aux quatre variables il faut et il suffit que $f(x, y)$ soit de la forme $n.g(x).g(y)$ où $n\in\mathbb{Z}$ et $g(t)\in\mathbb{Z}[[t]]$. Pour qu'en outre*

$$f(x, y)=f\left(\frac{-x}{1+x}, \frac{-y}{1+y}\right),$$

il faut et il suffit que $g(t)=\varepsilon g(-t/(1+t))$ avec $\varepsilon=\pm 1$ indépendant de t.

La démonstration de ce lemme technique figure en [8].

Soit maintenant c un élément de $\mathrm{Hom}(E_{\mathbb{R}}^{4*}, K)_{+,\times}$. D'après le lemme ci-dessus on a

$$\begin{aligned} c(\xi_2\times\xi_2) &= (\alpha\circ\gamma)(c)(p_1^*(\eta_1)-1, p_2^*(\eta_1)-1) \\ &= n.f(p_1^*(\eta_1)-1).f(p_2^*(\eta_1)-1) \end{aligned}$$

avec $f(t)=\varepsilon f(-t/(1+t))$, donc

$$(\alpha\circ\gamma)(c)(p_1^*(\eta_1)-1,\ p_2^*(\eta_1)-1)$$
$$=n.(\varphi\circ\chi)(d)(p_1^*(\eta_1)-1).(\varphi\circ\chi)(d)(p_2^*(\eta_1)-1)$$

où $d\in\mathrm{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{2*}, K)_{+,\times}$. Or

$$n.(\varphi\circ\chi)(d)(p_1(\eta_1)-1).(\varphi\circ\chi)(d)(p_2(\eta_1)-1)=n.d(\xi_2).d(\xi_2).$$

soit $c(\xi_2\times\xi_2)=\mathrm{n.\,d}(\xi_2\times\xi_2)$, soit encore, compte tenu de l'injectivité de $m_{1,1}^*$, $c(\xi_4)=\mathrm{n.\,d}(\xi_4)$ donc $c=\mathrm{n.\,d}$.

Il s'ensuit la caractérisation de l'image de $\mathrm{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{4*}, K)_{+,\times}$ dans $\mathbb{Z}_{\mathrm{sym}}[[x, y]]$ donnée dans l'énoncé.

Les démonstrations des résultats relatifs au monoïde $\mathrm{Hom}(E_{\mathbf{C}}^{2*}, K)_{+,\times}$ sont identiques.

Notons $\mathbb{Z}[[t]]^*$ (resp. $\mathbb{Z}^{\pm}[[t]]^*$) le sous-monoïde des éléments non nuls de

$$\mathbb{Z}[[t]]_\times\ (\text{resp. } \mathbb{Z}^{\pm}[[t]]_\times)$$

et

$$\frac{\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}[[t]]^*}{\sim}\quad\left(\text{resp. }\frac{\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^{\pm}[[t]]^*}{\sim}\right)$$

le monoïde quotient de $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}[[t]]^*$ (resp. $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^{\pm}[[t]]^*$) par la relation d'équivalence $(n, af)\sim(na^2, f)$ et désignons par $[n, f]$ la classe d'équivalence de l'élément (n, f) de $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}[[t]]^*$ (resp. $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^{\pm}[[t]]^*$). On voit facilement que le monoïde multiplicatif formé des éléments non nuls de $\mathrm{Im}\,\alpha$ est isomorphe à $\dfrac{\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}[[t]]^*}{\sim}$; cet isomorphisme associe à la série $n.f(x).f(y)$ classe $[n, f]$.

2.4.2.1. *Remarque.* — L'isomorphisme

$$\alpha_0:\quad \mathrm{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{4*}, KO)_{+,\times}\to\frac{\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^{\pm}[[t]]^*}{\sim}$$

déduit de α est défini comme suit : on a $\alpha_0(c)=[n, f]$ si et seulement si

$$(\otimes\mathbb{C})(c(\xi_2\times\xi_2))=n.f(\eta_1-1).f(\eta_1-1).$$

La classe de Grothendieck λ correspond par α_0 à $[1, t^2/(1+t)]$.

2.4.3. Théorème [11]

On détermine un isomorphisme de monoïdes multiplicatifs

$$\varphi_0:\quad \mathrm{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{2*}, K_A)_{+,\times}\to A^{\pm}[[t]]_\times$$

en posant, pour tout fibré réel ξ, *orienté, de dimension* 2, $\varphi_0(c)(\eta - 1_{\mathbf{C}}) = c(\xi)$, *où* η *est le fibré en droites complexes unique (à un isomorphisme près) isomorphe à* ξ *comme fibré réel.*

La démonstration de ce théorème figure dans celle du précédent.

2.4.3.1. *Remarque* [11].

Définissant un élément λ_0 de $\mathrm{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{2*}, K_A)$ par

$$\varphi_0(\lambda_0) = \left(1 + t - \frac{1}{1+t}\right)$$

on a, pour tout fibré réel ξ, orienté, de dimension 2, $\lambda_0(\xi) = \eta - \bar{\eta}$, où η désigne le fibré en droites complexes unique (à un isomorphisme près) dont ξ est le fibré réel sous-jacent.

2.5. Classes fondamentales

2.5.1. Définition.

Si $E = E_{\mathbf{C}}$, $E_{\mathbf{R}}^{2*}$ ou $E_{\mathbf{R}}^{4*}$ et si η est un élément de $E(X)$, on note $M(\eta)$ *l'espace de Thom de* η. Si $L = K$, K_A ou KO, la structure multiplicative de L induit un produit interne $\tilde{L}(X) \otimes \tilde{L}(X) \to \tilde{L}(X)$ et des produits externes

$$L(X) \otimes \tilde{L}(M(\eta)) \to \tilde{L}(M(\eta))$$

et

$$\tilde{L}(M(\eta_1)) \otimes \tilde{L}(M\eta_2)) \to \tilde{L}(M(\eta_1) \wedge M(\eta_2)) = \tilde{L}(M(\eta_1 \times \eta_2)).$$

Dans ces conditions une classe fondamentale u pour (E, L) est, par définition, la donnée pour chaque fibré vectoriel $\eta \in E(X)$ d'un élément $u(\eta)$ de $\tilde{L}(M(\eta))$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) u est fonctorielle par rapport à l'image réciproque des fibrés;

(ii) u est multiplicative, c'est-à-dire : $u(\eta_1 \times \eta_2) = u(\eta_1).u(\eta_2)$ pour η_1, $\eta_2 \in E(X)$.

L'ensemble de ces classes est noté $\mathrm{Fon}(E, L)$. La structure multiplicative de L définit une structure de monoïde sur $\mathrm{Fon}(E, L)$.

La section nulle j des fibrés induit un homomorphisme

$$j^* : \quad L(M(\eta)) \to L(X), \qquad \forall \eta \in E(X),$$

et donc un homomorphisme

$$\tilde{j} : \quad \mathrm{Fon}(E, L) \to \mathrm{Hom}(E, L)_{+,\, \times}$$

défini par

$$j^*(u)(\eta) = j^*(u(\eta)), \qquad \forall u \in \mathrm{Fon}(E, L), \quad \forall \eta \in E(X).$$

puisque $\tilde{L}(M(\eta))$ se plonge dans $L(M(\eta))$ grâce au point-base canonique de $M(\eta)$.

A toute classe u de $\mathrm{Fon}(E, L)$ on fait correspondre une application

(2.5.1.1) $\rho_u: \quad \mathrm{Hom}(E, L)_{+, \times} \to \mathrm{Fon}(E, L)$

définie par

$$\rho_u(c)=c(\eta).u(\eta), \qquad \forall c \in \mathrm{Hom}(E, L)_{+, \times}, \quad \forall \eta \in E(X).$$

2.5.2. THÉORÈME ([12], [13])

L'hormomorphisme $\tilde{J}$ est injectif dans les cas suivants :

$$\tilde{j}_1: \quad \mathrm{Fon}(E_{\mathbf{C}}, K) \to \mathrm{Hom}(E_{\mathbf{C}}, K)_{+, \times},$$
$$\tilde{j}_2: \quad \mathrm{Fon}(E_{\mathbf{R}}^{2*}, K) \to \mathrm{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{2*}, K),$$
$$\tilde{J}: \quad \mathrm{Fon}(E_{\mathbf{R}}^{4*} K) \to \mathrm{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{4*}, K)_{+, \times}$$

et

$$\tilde{J}_0: \quad \mathrm{Fon}(E_{\mathbf{R}}^{4*} KO) \to \mathrm{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{4*}, KO)_{+, \times}.$$

L'image de $\tilde{j}_1$ (resp. $\tilde{j}_2$) se compose des classes caractéristiques c satisfaisant à $c(1_{\mathbf{C}})=0$ (resp. $c(2_{\mathbf{R}})=0$). L'image de $\tilde{J}$ et celle de $\tilde{J}_0$ se compose des classes caractéristiques c satisfaisant à $c(4_{\mathbf{R}})=0$.

La démonstration va être donnée pour l'homomorphisme $\tilde{J}_0$.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} KO(MSO(4n)) & \xrightarrow{\otimes \mathbf{C}} & K(MSO(4n)) \\ \downarrow j_0^* & & \downarrow j^* \\ KO(BSO(4n)) & \xrightarrow{\otimes \mathbf{C}} & K(BSO(4n)) \end{array}$$

On sait (1.1.6.1, 1.4) que les applications $\otimes \mathbf{C}$ sont des isomorphismes et (1.2) que j^* est injective, il s'ensuit que j_0^* l'est également. L'injectivité de j_0^* entraîne celle de $\tilde{J}_0$.

Soient en effet u et v deux classes fondamentales satisfaisant à $\tilde{J}_0(u)=\tilde{J}_0(v)$, c'est-à-dire :

$$j_0^*(u(\xi_{4n}))=j_0^*(v(\xi_{4n})), \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Puisque j_0^* est injectif, on a

$$u(\xi_{4n})=v(\xi_{4n}), \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

d'où $u=v$, donc $\tilde{J}_0$ est injectif.

D'après la remarque 2.4.2.1 un élément $c=(\alpha_0)^{-1}([m, f(t)])$ de $\mathrm{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{4*}, KO)_{+, \times}$ satisfait à $c(4_{\mathbf{R}})=0$ si et seulement si $f(t)$ est divisible par t c'est-à-dire si $f(0)=0$. Soit u une classe fondamentale telle que $\alpha_0(\tilde{J}_0(u))=[m, f(t)]$. Alors, $\tilde{J}_0(u)(\xi_4)$ s'identifie dans $KO(BSO(4))$ à $m.f(x).f(y)$ où $m.f(x).f(y)$ est divisible par $x.y$ comme élément de $\operatorname{Im} j_0^*(1.4, 1.2)$; il s'ensuit que $f(t)$ est divisible par t et que donc $\tilde{J}_0(u)(4_{\mathbb{R}})=0$. Inversement, si c élément de $\operatorname{Hom}(E_{\mathbb{R}}^{4}{}^*, KO)_{+,\times}$ est tel que $\alpha_0(c)=[m, f(t)]$ et $c(4_{\mathbb{R}})=0$ alors $f(t)$ est divisible par t et

$m^n.f(x_1).f(y_1)\ldots f(y_n)$ par $x_1 y_1 \ldots x_n.y_n$;

$m^n.f(x_1)f(y_1)\ldots f(x_n)\ldots f(y_n)$ représente donc un élément u_n de $KO(MSO(4n)$, il s'ensuit qu'il existe une classe fondamentale u satisfaisant à

$$u(\xi_{4n})=u_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

et l'on a $\tilde{J}_0(u)=c$.

2.5.3. *Exemples*

2.5.3.1. L'algèbre extérieure $\bar{\lambda} \in \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_n]]$ satisfait à $\bar{\lambda}(1_{\mathbb{C}})=0$; il existe donc une classe fondamentale $u_b \in \operatorname{Fon}(E_{\mathbb{C}}, K)$ telle que $j_1(u_b)=\bar{\lambda}$. L'isomorphisme de Bott [4]

$$\varphi_K(\eta): \quad K(X) \to \tilde{K}(M(\eta)), \qquad \eta \in E_{\mathbb{C}}(X),$$

est alors donné par

$$\varphi_K(\eta)(x)=x.u_b(\eta), \qquad x \in K(X).$$

2.5.3.2. On définit un élément u_0 de Fon $(E_{\mathbb{R}}^{2}{}^*, K)$ par $\tilde{j}_2(u_0)=\lambda_0$

2.5.4. *Remarque*

La considération du fibré réel orienté sous-jacent à un fibré complexe définit un morphisme canonique ω : Fon $(E_{\mathbb{R}}^{2}{}^*, K) \to \operatorname{Fon}(E_{\mathbb{C}}, K)$ qui satisfait à $\omega(u_0)=\lambda.u_b$.

2.5.5. THÉORÈME [12].

Soit A un anneau commutatif unitaire.

L'application ρ_{u_b} *:* Hom $(E_{\mathbb{C}}, K_A)_{+,\times} \to \operatorname{Fon}(E_{\mathbb{C}}, K_A)$ *définie en* 2.5.1.1 *et* 2.5.3.1 *est une bijection. Si* 2 *est inversible dans A, l'application*

$$\rho_{u_0}: \quad \operatorname{Hom}(E_{\mathbb{R}}^{2}{}^*, K_A)_{+,\times} \to \operatorname{Fon}(E_{\mathbb{R}}^{2}{}^*, K_A)$$

définie en 2.5.1.1 *et* 2.5.3.2 *est une bijection.*

La démonstration de ce théorème figure en [8].

3. K-classes du cobordisme unitaire et du cobordisme orienté

3.1. RAPPELS

Dans ce qui suit $\mathscr{F}_0$ (resp. $\mathscr{C}_0$) désignera la catégorie des CW-complexes finis (resp. quelconques) à point-base et des classes d'homotopie d'applications continues respectant les points-bases. Pour X et Y objets de $\mathscr{F}_0$ ou de $\mathscr{C}_0$, $[X, Y]$ désigne l'ensemble des morphismes de X dans Y.

Pour X objet de $\mathscr{C}_0$, $\tilde{K}(X)$ désigne, suivant Atiyah-Hirzcbruch, le sous-groupe $K(X, x_0)$ de $K(X)$ où x_0 est le point-base de X.

Le produit tensoriel des fibrés définit un homomorphisme $\tilde{K}(X)\otimes\tilde{K}(Y)\to\tilde{K}(X\wedge Y)$. En particulier pour $Y=X$, l'application composée $\tilde{K}(X)\otimes\tilde{K}(X)\to\tilde{K}(X\wedge X)\to\tilde{K}(X)$, où la seconde application est définie par l'application diagonale définit la structure multiplicative de $\tilde{K}(X)$.

L'isomorphisme de Bott : $\tilde{K}(X)\to\tilde{K}(S^2 X)$ est la multiplication par l'élément $\beta=u_b(1)\in\tilde{K}(S^2)$ (2.5.3.1).

Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $K^n(X)$ est défini par

$$\tilde{K}^n(X)=\begin{cases}\tilde{K}(X) & \text{si } n \text{ est pair,}\\ \tilde{K}(SX) & \text{si } n \text{ est impair.}\end{cases}$$

La multiplication $\tilde{K}^n(X)\otimes\tilde{K}^m(Y)\to K^{n+m}(X\wedge Y)$ est définie comme suit : si m est pair, on prend la multiplication de la théorie $\tilde{K}$; si n est pair et m impair on prend cette multiplication jointe à l'identification de $X\wedge S^1\wedge Y$ à $S^1\wedge X\wedge Y$ par échange des deux premiers facteurs; si n et m sont impairs on utilise la multiplication de la théorie $\tilde{K}$, puis l'isomorphisme $S^1\wedge X\wedge S^1\wedge Y\approx S^2\wedge X\wedge Y$ et enfin l'inverse de l'isomorphisme de Bott.

L'isomorphisme de suspension est la multiplication à gauche par l'élément β de $\tilde{K}^1(S^1)$.

Notons η_k le fibré vectoriel universel de base $BU(k)$, $\rho_{k,h}$ l'application classifiante de $\eta_k\times\eta_h$ et $M(\rho_{k,h})$:

$$MU(k)\wedge MU(h)\to MU(k+h)$$

l'application qu'elle induit entre les espaces de Thom.

L'inclusion du fibré trivial $1_{\mathbb{C}}$ de base un point dans η_1 définit une application $\rho_0: S^2\to MU(1)$; on en déduit une application

$$S^2\wedge MU(k)\to MU(1)\wedge MU(k)\to MU(k+1).$$

Le spectre multiplicatif $\mathcal{U}$ de Thom est alors défini en posant

$$\mathcal{U}^{2k} = MU(k), \qquad \mathcal{U}^{2k+1} = S^1 \wedge MU(k);$$

l'application $S^1 \wedge \mathcal{U}^{2k} \to \mathcal{U}^{2k+1}$ est l'identité de $S^1 \wedge MU(k)$, l'application $S^1 \wedge \mathcal{U}^{2k+1} \to \mathcal{U}^{2k+2}$ est l'application $S^2 \wedge MU(k) \to MU(k+1)$ définie ci-dessus.

Le cobordisme unitaire $\tilde{U}^*$ est la théorie cohomologique généralisée [14] associée au spectre $\mathcal{U}$. Soit X un objet de $\mathcal{F}_0$ on a

$$\tilde{U}^n(X) = \varinjlim_k [S^k X, \mathcal{U}^{k+n}]$$

et donc

$$\tilde{U}^{2n}(X) = \varinjlim_k [s^{2k} X, MU(k+n)],$$

$$\tilde{U}^{2n+1}(X) = \varinjlim_k [S^{2k+1} X, MU(k+n)].$$

L'isomorphisme de suspension est la multiplication à gauche par l'élément υ de $\tilde{U}^1(S^1)$ représenté par l'application $\rho_0 : S^2 \to MU(1)$.

Notons ξ_k le fibré vectoriel universel de base $BSO(k)$, $r_{k,h}$ l'application classifiante de $\xi_k \times \xi_h$ et $M(r_{k,h})$:

$$MSO(k) \wedge MSO(h) \to MSO(k+h)$$

l'application qu'elle induit entre les espaces de Thom. Les espaces de Thom $MSO(k)$ et les applications $M(r_{k,h})$ définissent le spectre multiplicatif MSO de Milnor. Le cobordisme orienté est la théorie cohomologique généralisée associée au spectre MSO. Soit donc X un objet de $\mathcal{F}_0$, on a

$$\tilde{\Omega}^n(X) = \varinjlim_k [S^k X, MSO^{k+n}] = \varinjlim_k [S^k X, MSO(k+n)].$$

L'isomorphisme de suspension est la multiplication à gauche par l'élément ι de $\tilde{\Omega}^1(S^1)$ représenté par l'application identique de S^1.

On étend la définition du cobordisme unitaire et du cobordisme orienté à la catégorie $\mathcal{C}_0$ en posant

$$\tilde{U}^n(X) = \varprojlim \tilde{U}^n(P), \qquad \tilde{\Omega}^n(X) = \varprojlim \tilde{\Omega}^n(P),$$

où P parcourt l'ensemble des sous-complexes finis de X.

Rappelons enfin le résultat suivant :

3.1.1. Si L^* et M^* sont des théories cohomologiques graduées, tout morphisme de foncteurs $L^* \to M^*$ qui respecte le degré et est compatible avec les suspensions respecte aussi les structures additives de $L^n(X)$ et $M^n(X)$, quel que soit X objet de $\mathscr{F}_0$.

3.2. Notations

Dans ce qui suit un élément u de $\mathrm{Fon}(E_{\mathbb{C}}, K)$ (resp. v de $\mathrm{Fon}(E_{\mathbb{R}}^{2*}, K)$) (2.5.1) est considéré comme associant à tout fibré vectoriel complexe η de rang k (resp. réel, orienté ξ de rang $2k$) l'élément de $\tilde{K}^{2k}(M(\eta))$ (resp. $\tilde{K}^{2k}(M(\xi))$ correspondant à $u(\eta) \in \tilde{K}(M(\eta))$ (resp. $v(\xi) \in \tilde{K}^{2k}(M(\xi))$); c'est cet élément que l'on note désormais $u(\eta)$ (resp. $v(\xi)$).

σ désignera indifféremment l'isomorphisme de suspension dans la théorie $\tilde{U}^*$, la théorie $\tilde{\Omega}^*$ ou la théorie $\tilde{K}^*$.

$1_{\mathbb{C}}$ (resp. $2_{\mathbb{R}}$) désignera le fibré vectoriel complexe de rang 1 (resp. réel, orienté, de rang 2) dont la base consiste un un seul point.

Soit A un anneau commutatif unitaire; on notera $[\tilde{U}^*, \tilde{K}_A^*]$ (resp. $[\tilde{\Omega}^*, \tilde{K}_A^*]$) l'ensemble des classes caractéristiques de $\tilde{U}^*$ dans $\tilde{K}_A^*$ (resp. de $\tilde{\Omega}^*$ dans $\tilde{K}_A^*$) qui conservent le degré, l'addition, la multiplication et qui respectent les isomorphismes de suspension. Si $A = \mathbb{Z}$ ces ensembles seront naturellement notés $[\tilde{U}^*, \tilde{K}^*]$ et $[\tilde{\Omega}^*, \tilde{K}^*]$.

3.3. La classe caractéristique de Conner-Floyd

Cette classe $\downarrow$, élement de $[\tilde{U}^*, \tilde{K}^*]$ est définie de la façon suivante : soit x un élément de $\tilde{U}^n(X)$, il existe k entier tel que $\sigma^{2k-n}(x)$ soit représenté par une application $f : S^{2k-n}(X) \to MU(k)$; alors $\sigma^{2k-n}(\downarrow(x)) = f^*(u_b(\eta_k))$ où u_b est la classe fondamentale de Bott (2.5.3.1)

3.4. Définition

On définit un élément τ de $\mathrm{Fon}(E_{\mathbb{C}}, U^*)$ (resp. θ de $\mathrm{Fon}(E_{\mathbb{R}}^{2*}, \Omega^*)$) comme suit : soit η (resp. ξ) un fibré vectoriel complexe de rang n (resp. réel, orienté, de rang $2n$) et de base X, l'application classifiante de η (resp. ξ) soit $X \to BU(n)$ (resp. $X \to BSO(2n)$) induit une application $M(\eta) \to MU(n)$ (resp. $M(\xi) \to MSO(2n)$). Cet élement est, par définition, $\tau(\eta)$ (resp. $\theta(\xi)$). On vérifie que τ (resp. θ) est bien une classe fondamentale. En particulier, l'élément $\tau(\eta_n)$ de $\tilde{U}^{2n}(MU(n))$ (resp. $\theta(\xi_{2n})$ de

$\tilde{\Omega}^{2n}(MSO(2n))$ est défini par l'application identique de $MU(n)$ (resp. $MSO(2n)$).

Observons que la multiplication à gauche par $\tau(1_{\mathbf{C}})=\iota.\iota$ (resp. $\theta(2_{\mathbf{R}})=\upsilon.\upsilon$) (3.1) est la double suspension dans la théorie $\tilde{U}^*$ (resp. $\tilde{\Omega}^*$).

3.5. THÉORÈME

Soit $u\in\mathrm{Fon}(E_{\mathbf{C}}, K)$ (resp. $v\in\mathrm{Fon}(E^{2*}_{\mathbf{R}}, K)$) une classe fondamentale satisfaisant à $u(1_{\mathbf{C}})=\beta\in\tilde{K}^2(S^2)$ (resp. $v(2_{\mathbf{R}})=\beta\in\tilde{K}^2(S^2)$) où β est le générateur de Bott qui définit la double suspension dans la théorie $\tilde{K}^*$. Il existe alors une classe caractéristique $c:\tilde{U}^*\to\tilde{K}^*$ (resp. $d:\tilde{\Omega}^*\to\tilde{K}^*$) et une seule compatible avec les suspensions des théories $\tilde{U}^*$ et $\tilde{K}^*$ (resp. $\tilde{\Omega}^*$ et $\tilde{K}^*$), telle que (3.5.1) $c(\tau(\eta))=u(\eta)$ (resp. (3.5.2) $d(\theta(\xi))=v(\xi)$) pour tout fibré vectoriel complexe η (resp. réel, orienté, de rang pair ξ). Cette classe conserve le degré, l'addition et la multiplication.

Démonstration. — Commençons par montrer l'unicité de la classe c compatible avec les suspensions et satisfaisant à (3.5.1).

Soit x élément de $\tilde{U}^{2n}(X)$; il existe $k\geqslant 0$ tel que $\sigma^{2k}(x)$ élément de $\tilde{U}^{2n+2k}(S^{2k}X)$ soit défini par une application $f: S^{2k}X\to MU(k+n)$. Cela signifie que $\sigma^{2k}(x)=f^*(\tau(\eta_{k+n}))$. On doit donc avoir, puisque c est un morphisme de foncteurs contravariants,

$$c(\sigma^{2k}(x))=f^*(c(\tau(\eta_{k+n})))$$

soit, puisque c commute à la suspension,

$$* \qquad \sigma^{2k}(c(x))=f^*(c(\tau(\eta_{k+n}))=f^*(u(\eta_{k+n})),$$

ou encore $\beta^k.c(x)=f^*(u(\eta_{k+n}))$. L'unicité de $c(x)$ pour les x de degré pair est prouvée; il s'ensuit l'unicité pour les x de degré impair, car on doit avoir $\sigma(c(x))=c(\sigma(x))$ où le second membre est connu.

Il reste à montrer que la relation $*$ définit effectivement un élément $c(x)$ indépendant du choix de k, lorsque x est de degré pair $2n$. Remplaçons donc k par $k+1$; f est alors remplacée par $M(\rho_{k+n})\circ(1_{S^2}\wedge f)$. On doit prouver que

$$(M(\rho_{k+n})\circ 1_{S^2}\wedge f)^*(u(\eta_{k+n+1}))=\sigma^2(f^*(u(\eta_{k+n}))).$$

Or

$$M(\rho_{k+n})(u(\eta_{k+n+1}))=u(\eta_{k+n}).u(1_{\mathbf{C}})=\beta.u(\eta_{k+n})$$

et

$$(1_{S^2} \wedge f^*)^* (\beta . u(\eta_{k+n})) = \beta . f^* (u(\eta_{k+n})) = \sigma^2 (f^* (u(\eta_{k+n})))$$

Q.E.D.

On a ainsi défini la classe $c : \tilde{U}^{2n}(X) \to \tilde{K}^{2n}(X)$ pour les degrés pairs, elle commute à la double suspension et elle satisfait à 3.5.1. Elle se prolonge en une classe définie pour tous les degrés et commutant à la suspension. Il s'ensuit (3.1.1) que c respecte l'addition.

Il reste à montrer que c respecte les structures multiplicatives de $\tilde{U}^*$ et $\tilde{K}^*$. Il suffit de vérifier cette propriété pour les degrés pairs : en effet si, par exemple, x est de degré pair et y de degré impair on a

$$\sigma(c(x.y)) = c(\sigma(x.y)) = c(x.\sigma(y))$$
$$= c(x).c(\sigma(y)) = c(x).\sigma(c(y)) = \sigma(c(x).c(y));$$

ensuite si x et y sont de degrés impairs, on a

$$\sigma(c(x.y)) = c(\sigma(x.y)) = c(\sigma(x).y) = c(\sigma(x)).c(y) = \sigma(c(x).c(y)).$$

Soient donc x élément de $\tilde{U}^{2n}(X)$ tel que $\sigma^{2k}(x)$ soit représenté par

$$f : \quad S^{2k} X \to MU(k+n)$$

et y élément de $\tilde{U}^{2m}(Y)$ tel que $\sigma^{2l}(y)$ soit représenté par

$$g : \quad S^{2l} Y \to MU(l+m).$$

On a alors

$$\sigma^{2k}(x) = \upsilon^{2k}.x \qquad \text{avec} \quad (3.1)\ \upsilon^{2k} \in \tilde{U}^{2k}(S^{2k}),$$
$$\sigma^{2l}(y) = \upsilon^{2l}.y \qquad \text{avec} \quad \upsilon^{2l} \in \tilde{U}^{2l}(S^{2l})$$

et

$$\sigma^{2k+2l}(x.y) = \upsilon^{2k}.\upsilon^{2l}.x.y = (\gamma_{2k,\,2l})^* (\upsilon^{2k}.x.\upsilon^{2l}.y)$$

où

$$\gamma_{2k,\,2l} : \quad S^{2k+2l} X \wedge Y \to S^{2k} \wedge X \wedge S^{2l} \wedge Y$$

échange les deuxième et troisième facteurs. Il s'ensuit que $\sigma^{2k+2l}(x.y)$ est représenté par la composée h :

$$S^{2k+2l} X \wedge Y \xrightarrow{\gamma_{2k,\,2l}} S^{2k} X \wedge S^{2l} Y$$
$$\xrightarrow{f \wedge g} MU(k+n) \wedge MU(l+m) \xrightarrow{M(\rho_{k+n,\,l+m})} MU(k+l+n+m).$$

On a donc d'après la définition de c : $\beta^{k+l}.c(x.y)=h^*(u(\eta_{k+l+n+m}))$. Calculons ce second membre. D'abord $M(\rho_{k+n,\ l+m})^*(u(\eta_{k+l+n+m}))$ est égal à $u(\eta_{k+n}\times\eta_{l+m})$ soit à $u(\eta_{k+n}).u(\eta_{l+m})$ puisque u est multiplicative; ensuite $(f\wedge g)^*(u(\eta_{k+n}).u(\eta_{l+m}))$ est égal à

$$f^*(u(\eta_{k+n})).g^*(u(\eta_{l+m}))$$

soit à

$$\beta^k.c(x).\beta^l.c(y) \qquad \text{et} \qquad (\gamma_{2k,\ 2l})^*(\beta^k.c(x).\beta^l.c(y)) \\ =\beta^k.\beta^l.c(x).c(y)=\beta^{k+l}.c(x).c(y),$$

donc, finalement $c(x.y)=c(x).c(y)$.

La démonstration du théorème sur les K-classes du cobordisme orienté est analogue.

Remarque. — Dans l'énoncé du théorème 3.5 on peut remplacer le foncteur $\tilde{K}^*$ par le foncteur $\tilde{K}^*_A$ Il n'y a rien à changer dans la démonstration.

3.5.3. Corollaire

Le théorème 3.5 *définit une bijection de l'ensemble* $[\tilde{U}^*, \tilde{K}^*]$ (*resp.* $[\tilde{\Omega}^*, \tilde{K}^*]$) *sur le sous-ensemble de* $\mathrm{Fon}(E_{\mathbf{C}}, K)$ (*resp.* $\mathrm{Fon}(E^{2}_{\mathbf{R}}{}^*, K)$) *formé des classes fondamentales* u (*resp.* v) *satisfaisant à* $u(1_{\mathbf{C}})=\beta$ (*resp.* $v(2_{\mathbf{R}})=\beta$) *Cette bijection envoie la classe de Conner-Floyd* $\downarrow$ *sur la classe de Bott* u_b.

Démonstration. — Si c est une classe caractéristique $\tilde{U}^*\to\tilde{K}^*$ qui préserve le degré et la multiplication, la relation 3.5.1 définit un élément u de $\mathrm{Fon}(E_{\mathbf{C}}, K)$. Si de plus c est compatible avec les suspensions on a $u(1_{\mathbf{C}})=\beta$. En effet la multiplication (à gauche) par $\tau(1_{\mathbf{C}})$ est la double suspension dans la théorie $\tilde{U}^*$ donc la multiplication (à gauche) par $c(\tau(1_{\mathbf{C}}))=u(1_{\mathbf{C}})$ est la double suspension dans la théorie $\tilde{K}^*$, ce qui impose $u(1_{\mathbf{C}})=\beta$.

La démonstration du corollaire sur les classes du cobordisme orienté est identique.

3.5.4.1. Corollaire

L'ensemble $[\tilde{U}^*, \tilde{K}^*]$ s'identifie au sous-ensemble $\mathbb{Z}_1[[t]]$ de $Z[[t]]$ formé des séries formelles dont le terme constant est 1. La classe de Conner-Floyd $\downarrow$ correspond à la série constante 1.

En effet la bijection $(\rho_{u_b})^{-1}$ (2.5.5) envoie le sous-ensemble de $\mathrm{Fon}(E_{\mathbf{C}}, K)$ formé des classes u satisfaisant à $u(1_{\mathbf{C}})=\beta$ sur le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(E_{\mathbf{C}}, K)_{+,\times}$ formé des classes c satisfaisant à $c(1_{\mathbf{C}})=1\in K(\text{point})$. L'isomorphisme $\varphi(2.4.1)$ identifie ce sous-ensemble à $\mathbf{Z}_1[[t]]$. La caractérisation de $\downarrow$ est une conséquence triviale de la définition de la bijection ρ_{u_b}.

3.5.4.2. COROLLAIRE

Soit A un anneau commutatif unitaire dans lequel 2 est inversible. L'ensemble $[\tilde{\Omega}^*, \tilde{K}_A^*]$ s'identifie au sous-ensemble $A_{1/2}^{\pm}[[t]]$ de $A^{\pm}[[t]]$ (2.1) formé des séries formelles dont le terme constant est 1/2.

Démonstration. — La bijection

$$(\rho_{u_0})^{-1}: \quad \mathrm{Fon}(E_{\mathbf{R}}^{2*}, K_A)\to \mathrm{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{2*}, K_A)_{+,\times} \quad (2.5.5)$$

envoie le sous-ensemble de $\mathrm{Fon}(E_{\mathbf{R}}^{2*}, K_A)$ formé des u satisfaisant à $u(2_{\mathbf{R}})=\beta$ sur le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{2*}, K_A)_{+,\times}$ formé des b satisfaisant à $b(2_{\mathbf{R}})=1/2\in K_A(\text{point})$. Soit en effet $b=(\rho_{u_0})^{-1}(u)$; par définition de ρ_{u_0}, on a, pour tout ξ, fibré vectoriel réel de rang 2, $b(\xi).u_0(\xi)=u(\xi)$ et, en particulier $b(2_{\mathbf{R}}).u_0(2_{\mathbf{R}})=\beta$. Il s'agit donc de calculer $u_0(2_{\mathbf{R}})$; or (2.5.4) $\omega(u_0)=\lambda.u_b$ donc

$$\omega(u_0)(1_{\mathbf{C}})=u_0(2_{\mathbf{R}})=\lambda(1_{\mathbf{C}}).u_b(1_{\mathbf{C}})=2\beta.$$

Il vient donc $2\beta.b(2_{\mathbf{R}})=\beta$, soit $b(2_{\mathbf{R}})=1/2$.

3.6. REMARQUE

Soit a un élément inversible d'un anneau A commutatif unitaire. A toute classe caractéristique c dans $[\tilde{U}^*, \tilde{K}^*]$ faisons correspondre la classe c_a : $\tilde{U}^*\to\tilde{K}_A^*$ définie par

$$c_a(x)=a^n.c(x), \qquad \forall x\in\tilde{U}^n(X).$$

La correspondance $c\to c_a$ est bijective. En ce qui concerne la suspension, on a $c_a\circ\sigma=a.(\sigma\circ c_a)$ et la relation 3.5.1 définit une classe u_a dans $\mathrm{Fon}(E_{\mathbf{C}}, K_A)$ satisfaisant à $u_a(1_{\mathbf{C}})=a^2.\beta=c_a(\tau(1_{\mathbf{C}}))$. Ainsi, compte tenu de la bijectivité de la correspondance définie ci-dessus, on obtient une bijection entre l'ensemble des classes caractéristiques c : $\tilde{U}^*\to\tilde{K}_A^*$ qui respectent le degré, l'addition, la multiplication et satisfont à l'identité $c\circ\sigma=a.(\sigma\circ c)$ et le sous-ensemble de $\mathrm{Fon}(E_{\mathbf{C}}, K_A)$ formé des classes u

satisfaisant à $u(1_{\mathbb{C}})=a^2.\beta$. Ce dernier ensemble s'identifie au sous-ensemble $A_{a^2}[[t]]$ de $A[[t]]$ formé des séries formelles dont le terme constant est a.

De la même façon la relation 3.5.2 définit une bijection entre les classes caractéristiques $c : \tilde{\Omega}^* \to \tilde{K}_A^*$ qui conservent degré, addition, multiplication et satisfont à l'identité $c \circ \sigma = a.(\sigma \circ c)$ et le sous-ensemble de Fon $(E_{\mathbb{R}}^{2*}, K_A)$ formé des classes u qui satisfont à $u(2_{\mathbb{R}})=a^2.\beta$. Lorsque 2 est inversible dans A, ce dernier ensemble s'identifie au sous-ensemble $A^{\pm}_{a^2/2}[[t]]$ de $A^{\pm}[[t]]$ formé des séries formelles dont le terme constant est $a^2/2$.

3.7.1. Proposition

Soient c un élément de $[\tilde{U}^*, \tilde{K}^*]$ et ψ_l une opération de Adams (2.4.1.2). *Leur composée $\psi_l \circ c$: $\tilde{U}^* \to \tilde{K}^*$ est une classe caractéristique préservant degré, addition et multiplication et satisfaisant à $(\psi_l \circ c) \circ \sigma^2 = l.\sigma^2 \circ (\psi_l \circ c)$. La composition des classes caractéristiques et la relation* 3.5.1 *définissent alors une injection*

$$F: \quad \mathrm{Hom}\,(E_{\mathbb{C}}, K)_{\text{anneau}} \times [\tilde{U}^*, \tilde{K}^*] \to \mathrm{Fon}\,(E_{\mathbb{C}}, K),$$

qui moyennant les identifications aux séries formelles (2.4.1, 3.5.4.1) *associe à un élément (l, f_1) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_1[[t]]$ l'élément f_l de $\mathbb{Z}[[t]]$ défini par*

$$f_l(t) = \sum\nolimits_{0 \leqslant i \leqslant l-1} (1+t)^{-i}.f_1\ (1+t)^l - 1).$$

Démonstration. — Rappelons que l'isomorphisme

$$\varphi: \quad \mathrm{Hom}(E_{\mathbb{C}}, K)_{+,\times} \to \mathbb{Z}[[t]]_{\times} \quad (2.4.1)$$

est uniquement déterminé par $\varphi(b)(\eta-1)=b(\eta)$, quel que soit η fibré en droites complexes. L'opération « composition »

$$\mathrm{Hom}\,(E_{\mathbb{C}}, K)_{\text{anneau}} \times \mathrm{Hom}(E_{\mathbb{C}}, K)_{+,\times} \to \mathrm{Hom}(E_{\mathbb{C}}, K)_{+,\times}$$

se traduit alors par

$$\varphi(\psi_l \circ b)(t) = \varphi(b)((1+t)^l - 1).$$

En effet

$$\varphi(\psi_l \circ b)(\eta-1) = \psi_l(b(\eta)) = \psi_l(\varphi(b)(\eta-1)),$$

ψ_l préservant les structures d'anneau, il vient

$$\psi_l(b(\eta)) = \varphi(b)(\psi_l(\eta)-1) = \varphi(b)(\eta^l - 1)$$

soit

$$\varphi(\psi_l \circ b)(t) = \varphi(b)((1+t)^l - 1).$$

Rappelons le comportement des opérations de Adams vis-àvis de l'isomorphisme de Bott (2.5.3.1) : le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{\psi_l} & K(X) \\ {\scriptstyle \varphi_K(\zeta)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \varphi_K(\zeta)} \\ \tilde{K}(M(\zeta)) & \xrightarrow{\psi_l} & \tilde{K}(M(\zeta)) \end{array}$$

n'est pas commutatif; de façon précise, definissant [4] un élément unique θ_l de $\mathrm{Hom}(E_{\mathbf{C}}, K)_{+, \times}$ par $\theta_l(\eta) = 1 + \bar{\eta} + \ldots + \bar{\eta}^{l-1}$ quel que soit η, fibré en droites complexes, on a

$$(\psi_l \circ \varphi_K(\zeta))(x) = \varphi_K(\zeta)(\theta_l(\zeta) \cdot \psi_l(x)), \qquad \forall x \in K(X),$$

soit

$$\psi_l(u_b(\zeta) \cdot x) = u_b(\zeta) \cdot \theta_l(\zeta) \cdot \psi_l(x), \qquad \forall x \in K(X).$$

Soit (ψ_l, c) un élément de $\mathrm{Hom}(E_{\mathbf{C}}, K)_{\mathrm{anneau}} \times [\tilde{U}^*, \tilde{K}^*]$. Notant $\tilde{F}$ la composée $(\rho_{u_b})^{-1} \circ F$, la série formelle f_1 associée à c (3.5.4.1) est aussi par définition de F, la série formelle associée à $\tilde{F}(\psi_1, c)$. Cherchons la série formelle f_l associée à $\tilde{F}(\psi_l, c)$. Il suffit de connaître $\tilde{F}(\psi_l, c)(\eta)$ pour η fibré vectoriel en droites complexes; or par définition de F,

$$\begin{aligned} F(\psi_l, c)(\eta) = u_b(\eta) \cdot \tilde{F}(\psi_l, c)(\eta) &= \psi_l(c(\tau(\eta))) = \psi_l(F(\psi_1, c)(\eta)) \\ &= \psi_l(u_b(\eta) \cdot \tilde{F}(\psi_1, c)(\eta)) = u_b(\eta) \cdot \theta_l(\eta) \cdot \psi_l(\tilde{F}(\psi_1, c)(\eta)) \end{aligned}$$

donc

$$\tilde{F}(\psi_l, c)(\eta) = \theta_l(\eta) \cdot \psi_l(\tilde{F}(\psi_1, c)(\eta))$$

et

$$\varphi(\tilde{F}(\psi_l, c))(t) = \textstyle\sum_{0 \leq i \leq l-1} (1+t)^{-i} . \varphi \tilde{F}(\psi_1, c))((1+t)^l - 1)$$

soit

$$f_l(t) = \textstyle\sum_{0 \leq i \leq l-1} (1+t)^{-i} . f_1((1+t)^l - 1).$$

Montrons alors, que F, ou de façon équivalente $\tilde{F}$ est injective. Soient donc ψ_l et ψ_k deux opérations de Adams, c et c' deux éléments de $[\tilde{U}^*, \tilde{K}^*]$ tels que $\tilde{F}(\psi_l, c) = \tilde{F}(\psi_k, c')$. Notant f_l et f_1 (resp. f_l' et f_1') les séries formelles associées à

$$\tilde{F}(\psi_l, c) \quad \text{et} \quad \tilde{F}(\psi_1, c) \quad (\text{resp. } \tilde{F}(\psi_l, c') \text{ et } \tilde{F}(\psi_1, c'))$$

on a $f_l(0)=l=k=f_k(0)$. De l'égalité $f_l(t)=f'_l(t)$ on déduit, puisque $\mathbb{Z}[[t]]$ est intègre, que

$$f_1((1+t)^l-1)=f'_1((1+t)^l-1)$$

c'est-à-dire $f_1=f'_1$ donc, d'après le corollaire 3.5.4.1, $c=c'$.

3.7.2. PROPOSITION

Soit A un anneau d'intégrité commutatif, unitaire dans lequel 2 est inversible.

Si c est un élément de $[\tilde{\Omega}^*, \tilde{K}_A^*]$ et ψ_l une opération de Adams, la composée $(\psi_l \otimes 1_A \circ c : \tilde{\Omega}^* \to \tilde{K}_A^*$ préserve le degré, l'addition et la multiplication et satisfait à

$$(\psi_l \otimes 1_A)\circ c \circ \sigma^2 = l.(\sigma^2 \circ (\psi_l \otimes 1_A) \circ c).$$

La composition des classes caractéristiques et la relation 3.5.2 définissent alors une injection

$$G: \quad \mathrm{Hom}(K, K)_{\text{anneau}} \times [\tilde{\Omega}^*, \tilde{K}_A^*] \to \mathrm{Fon}(E_{\mathbf{R}}^{2*}, K_A)$$

qui moyennant les identifications aux séries formelles (3.5.4.2, 2.4.3) *associe à un élément (l, g_1) de $\mathbb{Z} \times A_{1/2}^{\pm}[[t]]$ l'élément g_l de $A^+[[t]]$ défini par*

$$g_l(t)=\sum\nolimits_{i+j=l-1}(1+t)^i.(1+t)^{-j}.g_1((1+t)^l-1).$$

Démonstration. — Soit u l'élément de $\mathrm{Fon}(E_{\mathbf{R}}^{2*}, K_A)$ défini par $u(\xi)=\psi_l(u_0(\xi))$ pour tout ξ fibré vectoriel réel, orienté et de rang pair. D'après la définition de ρ_{u_0}, il existe un élément Θ_l de $\mathrm{Hom}(E_{\mathbf{R}}^{2*}, K_A)_{+, \times}$ satisfaisant à $\Theta_l . u_0=u$. Si ξ est de rang 2, on a

$$\Theta_l(\xi).j^*(u_0(\xi))=j^*(u(\xi))=\psi_l(j^*(u_0(\xi)) \quad (cf.\ 2.5)$$

donc $\Theta_l(\xi).(\eta-\bar{\eta})=\eta^l-\bar{\eta}^l$ où η désigne le fibré en droites complexes dont ξ est le fibré réel sous-jacent (2.4.3.1); Θ_l est alors déterminée par l'égalité

$$\Theta_l(\xi)=\sum\nolimits_{i+j=l-1}\eta^i.\bar{\eta}^j$$

et

$$\varphi_0(\Theta_l)(t)=\sum\nolimits_{i+j=l-1}(1+t)^i.(1+t)^{-j} \quad (2.4.3)$$

Soit (ψ_l, c) un élément de $\mathrm{Hom}(K, K)_{\text{anneau}}[\tilde{\Omega}^*, \tilde{K}_A^*]$. Notons $\tilde{G}$ la composée $(\rho_{u_0})^{-1} \circ G$, g_1 la série formelle (3.5.4.2) associée à c donc à $\tilde{G}(\psi_1, c)$ et g_l la série formelle associée à $\tilde{G}(\psi_l, c)$.

On a alors, pour tout fibré vectoriel réel ξ, orienté et de rang pair

$$\tilde{G}(\psi_l, c)(\xi) . u_0(\xi) = (\psi_l \otimes 1_A)(c(\theta(\xi))$$

et

$$\tilde{G}(\psi_1, c)(\xi) . u_0(\xi) = c(\theta(\xi))$$

donc

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\psi_l, c)(\xi) . u_0(\xi) &= (\psi_l \otimes 1_A)(u_0(\xi) . \tilde{G}(\psi_1, c)(\xi)) \\ &= \psi_l(u_0(\xi)) . (\psi_l \otimes 1_A)(\tilde{G}(\psi_1, c)(\xi)) \\ &= \Theta_l(\xi) . u_0(\xi) . (\psi_l \otimes 1_A)(\tilde{G}(\psi_1, c)(\xi)), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\tilde{G}(\psi_l, c)(\xi) = \Theta_l(\xi) . (\psi_l \otimes 1_A)(\tilde{G}(\psi_1, c)(\xi))$$

donc

$$\varphi_0(\tilde{G}(\psi_l, c))(t) = \varphi_0(\Theta_l)(t) . \varphi_0((\psi_l \otimes 1_A) \circ \tilde{G}(\psi_1, c)))(t)$$

soit

$$g(t) = \textstyle\sum_{i+j=l-1} (1+t)^j . (1+t)^{-j} . g_1((1+t)^l - 1).$$

L'injectivité de G est alors conséquence du corollaire 3.5.4.2

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDERSON (D. W.) The Real K-Theory of Classifying Spaces, *Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.*, 51, 1964.

[2] ATIYAH (M. F.) and HIRZEBRUCH (F.). – Vector Bundles and Homogeneous Spaces, *Differential Geometry, Proceedings of Symposium in Pure Mathematics*, Amer. Math. Soc., vol. 3, 1961.

[3] BOREL (A.) and HIRZEBRUCH (F.). – Characteristic Classes and Homogeneous Spaces, I, *Amer. J. Math.*, vol. 80, 1958.

[4] BOTT (R.). – Lectures on $K(X)$, *Mineographed notes*, Harvard, 1962.

[5] CONNER (P. E.) and FLOYD (E. E.). – The Relation of Cobordism to K-Theories, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 28, 1966.

[6] GOUYON (L.). – Une remarque sur le cobordisme unitaire et la K-théorie, *C.R. Acad. Sc.*, t. 274, 1972, p. 1892-1894.

[7] GOUYON (L.). – Relations entre cobordisme orienté et K-théorie, *C.R. Acad. Sc.*, t. 280, 1975.

[8] GOUYON (L.). – Classes caractéristiques et fondamentales en cobordismes et K-théories, *Thèse*.

[9] HUSEMOLLER (Dale). — *Fibre Bundles*, McGraw-Hill, Series in Higher Mathematics, 1966.

[10] MILNOR (J.). — The representation rings of some classical groups, *Mineographed notes*, May 1963.

[11] WEISHU (Shih). — Characteristic Classes as Natural Transformations and Topological Index of Classical Elliptic Operators. *Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle*, vol. X, n° 4, 1968.

[12] WEISHU (Shih). — Une remarque sur les classes de Thom, *C.R. Acad. Sc.*, t. 260, 1965, p. 6259-6262.

[13] WEISHU (Shih) et SINGH VARMA (H. O.). — Sur les *KO*-classes des fibrés réels, *C.R. Acad. Sc.*, t. 273, 1971, p. - .

[14] WHITEHEAD (G. W.). — Generalized Homology Theories, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 102, 1962.