

BULLETIN DE LA S. M. F.

ABDELLATIF MARDHY

Prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$ et multiplicité

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 463-473

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__463_0

© Bulletin de la S. M. F., 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROLONGEMENT MÉROMORPHE DE $|f|^{2\lambda}$ ET MULTIPLICITÉ

PAR

ABDELLATIF MARDHY (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous commençons par donner une estimation de la fonction $F_\bullet(s) = \int_{f=s} \varphi$ obtenue par intégration sur des fibres quand s tend vers 0, et ensuite on donne une estimation du premier pôle du prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$, et enfin on termine par un exemple.

ABSTRACT. — In the present work, we begin by giving an estimation of the function $F_\bullet(s) = \int_{f=s} \varphi$ obtained by integration on the fibers when s tends to zero, and after we deduce an estimation of the first pole of the meromorphic extension of $|f|^{2\lambda}$. At last, we finish by giving an example.

Introduction

Soit x un polydisque de centre 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$, et soit $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante sur X vérifiant $f(0)=0$. Pour φ forme différentielle C^∞ à support compact de type (n, n) sur X et $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ posons :

$$G_\bullet(\lambda) = \int_x |f|^{2\lambda} \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}}.$$

Ceci définit, pour φ fixée une fonction holomorphe de λ , et qui admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier; ceci est une conséquence facile de l'existence du polynôme de Bernstein-Sato de f (voir [1] et [6]). Les pôles de ce prolongement méromorphe apparaissent en des translatés par des entiers négatifs des zéros de ce polynôme (voir [10]).

(*) Texte reçu le 19 avril 1985.

A. MARDHY, Université de Nancy-I, Faculté des Sciences, U.E.R. de Mathématiques, B.P. n° 239, 54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex.

Nous nous proposons de montrer ici que si k est la multiplicité de f à l'origine c'est-à-dire le degré minimal d'une paramétrisation locale de $\{f=0\}$ près de 0 alors $G_\bullet$ admet comme unique pôle dans la bande $\operatorname{Re}(\lambda) > -1/k$ l'origine (qui est un pôle simple de résidu égal au courant d'intégration sur $[f=0]$ à une constante près). En plus si $-1/k$ est un pôle alors son ordre est au plus égal à 3.

En terme de développement asymptotique en $s=0$ des intégrales $F_\bullet(s) = \int_{f=s} \varphi$ obtenues par intégration dans des fibres, ceci se traduit par le fait que :

$$F_\bullet(s) = F_\bullet(0) + \mathcal{O}(|s|^{2/k} (\operatorname{Log}|s|)^2) \text{ quand } s \rightarrow 0.$$

On remarque également que ce résultat ne semble pas accessible via le théorème de désingularisation d'Hironaka [8], qui fait perdre tout contrôle sur la multiplicité.

On termine en montrant que pour les singularités du type $X^a + Y^b + Z^c = 0$ avec $a \leq b \leq c$, le premier pôle est en $-1/a - 1/b - 1/c$ qui est aussi proche que l'on veut de $-1/a$ (a est la multiplicité) quand b et c sont grands.

Nous nous proposons donc de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La fonction $G_\bullet$ n'admet pas de pôles dans la bande $-1/k < \operatorname{Re}(\lambda) < 0$. (Autrement dit 0 est le seul pôle dans le demi-plan $\operatorname{Re}(\lambda) > -1/k$.) De plus si $-1/k$ est un pôle, il est d'ordre au plus égal à 3.*

Ce théorème est une conséquence de la proposition suivante dont la démonstration occupera la majeure partie de cet article.

PROPOSITION. — *Pour ε suffisamment petit on a :*

$$I_\varepsilon = \frac{1}{2\pi i} \int_{|f| \geq \varepsilon} \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} = 2 \operatorname{Log} \varepsilon \int_{f=0} \varphi + Pf(G_\bullet)(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/k} (\operatorname{Log} \varepsilon)^2),$$

où $Pf(G_\bullet)(0)$ désigne la partie finie dans le développement de Laurent de $G_\bullet(\lambda)$ en 0.

Preuve. — Pour $|f| \geq \varepsilon$ on a :

$$\varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} = d'' \left(\varphi \wedge \operatorname{Log} f \bar{f} \frac{df}{f} \right) + \frac{1}{2} d' ((\operatorname{Log} f \bar{f})^2 d'' \varphi) + \frac{1}{2} (\operatorname{Log} f \bar{f})^2 d' d'' \varphi.$$

En appliquant Stokes (deux fois) et pour des raisons de type on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{|f| \geq \varepsilon} \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} &= \frac{1}{i\pi} \text{Log } \varepsilon \int_{|f| \geq \varepsilon} d'' \varphi \wedge \frac{df}{f} \\ &\quad - \frac{1}{i\pi} (\text{Log } \varepsilon)^2 \int_{|f| \leq \varepsilon} 1 d' d'' \varphi + \frac{1}{4i\pi} \int_{|f| \geq \varepsilon} (\text{Log}(ff))^2 d' d'' \varphi. \end{aligned}$$

Et

$$\int_{|f| \geq \varepsilon} d'' \varphi \wedge \frac{df}{f} = 2 \text{Log } \varepsilon \int_{|f| \leq \varepsilon} d' d'' \varphi - \int_{|f| \geq \varepsilon} \text{Log}(ff) d' d'' \varphi.$$

Car

$$d'(\text{Log}(ff) d'' \varphi) = -d'' \varphi \wedge \frac{df}{f} - \text{Log}(ff) d' d'' \varphi.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{|f| \geq \varepsilon} \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} &= \frac{2}{i\pi} (\text{Log } \varepsilon)^2 \int_{|f| \leq \varepsilon} 1 d' d'' \varphi \\ &\quad - \frac{1}{i\pi} \text{Log } \varepsilon \int_{|f| \geq \varepsilon} \text{Log}(ff) d' d'' \varphi + \frac{1}{4i\pi} \int_{|f| \geq \varepsilon} (\text{Log}(ff))^2 d' d'' \varphi. \end{aligned}$$

Comme $\text{Log}(ff)$ et $(\text{Log}(ff))^2$ sont localement intégrables, la dernière égalité devient :

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= 2 \text{Log } \varepsilon \int_{f=0} \varphi + \frac{2}{i\pi} (\text{Log } \varepsilon)^2 \int_{|f| \leq \varepsilon} 1 d' d'' \varphi \\ &\quad + \frac{1}{i\pi} \text{Log } \varepsilon \int_{|f| \leq \varepsilon} 1 \text{Log}(ff) d' d'' \varphi \\ &\quad - \frac{1}{4i\pi} \int_{|f| \leq \varepsilon} 1 (\text{Log}(ff))^2 d' d'' \varphi + \frac{1}{4i\pi} \int_X (\text{Log}(ff))^2 d' d'' \varphi. \end{aligned}$$

En effet on a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X \text{Log}(ff) d' d'' \varphi = \frac{1}{2i\pi} \left[\frac{df}{f} \right] (d'' \varphi) = -\frac{1}{2i\pi} d'' \left[\frac{df}{f} \right] (\varphi) = -\int_{f=0} \varphi$$

(voir [11]) et pour plus de détails [9].

Pour donner une estimation de I_ε , pour ε voisin de 0 on aura besoin de deux lemmes.

Le problème étant local sur X , choisissons un système de coordonnées $(z_0, \dots, z_n)$ tel que :

La fonction $\xi \mapsto f(0, \dots, 0, \xi)$ ne soit pas identiquement nulle au voisinage de 0, et admettant k comme multiplicité à l'origine. D'après le théorème de préparation de Weierstrass [7], il existe un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ contenant 0 et $r > 0$ tels que :

$$f(t, z) = I(t, z) P_t(z),$$

avec $(t, z) \in \Omega \times D(0, r)$, et $I(t, z)$ est une fonction holomorphe sur $\Omega \times D(0, r)$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. P_t étant un polynôme unitaire de degré k en z et dépendant analytiquement de t . De plus le polynôme P_t a toutes ses racines dans $D(0, r)$ pour tout t dans Ω , on note par

$$dt \wedge d\bar{t} = dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_0 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n$$

où

$$t = (z_0, \dots, z_{n-1}) \quad \text{et} \quad z = z_n.$$

Notons par $z_j(t)$, $j \in [1, k]$ les zéros de P_t . Localement et en dehors des ramifications, on peut écrire

$$P_t(z) = \prod_{j=1}^k (z - z_j(t)).$$

LEMME 1. — Soit K un compact de Ω , alors on a :

$$\text{vol}(|f| \leq \varepsilon) \cap K \times D(0, r) \leq C \varepsilon^{2/k}$$

où C est une constante ne dépendant que de K et f .

LEMME 2. — Soit β un réel dans $]0, 1/3[$, et a un nombre complexe dans $D(0, 1/2)$ alors on a :

$$(a) \quad \int_{D(0, \beta)} |\text{Log}|z - a|| \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \leq \mathcal{A} \beta^2 |\text{Log} \beta|,$$

$$(b) \quad \int_{D(0, \beta)} (\text{Log}|z - a|)^2 \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \leq \mathcal{B} \beta^2 (\text{Log} \beta)^2,$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des constantes ne dépendant pas de a .

Preuve du lemme 1. — Posons pour ε petit :

$$H_\varepsilon = \{ (t, z) \in K \times D(0, r) \mid |f(t, z)| \leq \varepsilon \},$$

$$T_\varepsilon = \{ (t, z) \in K \times D(0, r) \mid |P_t(z)| \leq \varepsilon \}$$

et pour $t \in K$

$$T_{t, \varepsilon} = \{ z \in D(0, r) \mid |P_t(z)| \leq \varepsilon \}.$$

On a pour

$$\alpha = \frac{1}{\inf_{(t, z) \in K \times D(0, r)} (|I(t, z)|)}, \quad H_\varepsilon \subset T_{\alpha\varepsilon}.$$

Donc

$$\text{vol}(H_\varepsilon) \leq \text{vol}(T_{\alpha\varepsilon}) \leq \int_{T_{\alpha\varepsilon}} |dt \wedge d\bar{t} \wedge dz \wedge d\bar{z}|$$

et alors

$$\text{vol}(H_\varepsilon) \leq \int_K |dt \wedge d\bar{t}| \int_{T_{t, \alpha\varepsilon}} |dz \wedge d\bar{z}| \leq \int_K \text{vol}(T_{t, \alpha\varepsilon}) |dt \wedge d\bar{t}|.$$

Or, en dehors des ramifications, pour $z \in T_{t, \alpha\varepsilon}$ on a

$$\prod_{j=1}^k |z - z_j(t)| \leq \varepsilon \cdot \alpha,$$

donc il existe $j \in [1, k]$ tel que $|z - z_j(t)| \leq (\alpha\varepsilon)^{1/k}$.

Ceci montre que $T_{t, \alpha\varepsilon}$ est contenu dans la réunion des disques $D(z_j(t); (\alpha\varepsilon)^{1/k})$ $j \in [1, k]$.

On en déduit alors que :

$$\text{vol}(T_{t, \alpha\varepsilon}) \leq k \pi \alpha^{2/k} \cdot \varepsilon^{2/k}.$$

Donc

$$\text{vol}(H_\varepsilon) \leq \text{vol}(K) \cdot \alpha^{2/k} \cdot k \pi \varepsilon^{2/k}$$

et $k \pi \alpha^{2/k} \text{vol}(K)$ est une constante ne dépendant que de K et de f . $\square$

Preuve du lemme 2. — Pour $|a| > 2\beta$ et z dans $D(0, \beta)$, on a :

$$|z - a| > \beta \quad \text{et donc} \quad |\text{Log}|z - a|| \leq |\text{Log} \beta|$$

et par conséquent :

$$\int_{D(0, \beta)} |\text{Log}|z - a|| \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \leq \pi \beta^2 |\text{Log} \beta|.$$

et

$$\int_{D(0, \beta)} |\operatorname{Log} |z-a||^2 \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \leq \pi \beta^2 (\operatorname{Log} \beta)^2$$

Pour $|a| \leq 2\beta$, on a :

$$\int_{D(0, \beta)} |\operatorname{Log} |z-a|| \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \leq \int_{D(a, 3\beta)} |\operatorname{Log} |z-a|| \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \\ \leq 9\pi\beta^2 |\operatorname{Log} \beta| \quad \text{car } 0 < \beta < \frac{1}{3},$$

De même on a :

$$\int_{D(0, \beta)} (\operatorname{Log} |z-a|)^2 \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \leq \int_{D(a, 3\beta)} (\operatorname{Log} |z-a|)^2 \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \\ \leq 9\pi\beta^2 (\operatorname{Log} \beta)^2 \quad \text{car } 0 < \beta < \frac{1}{3}. \quad \square$$

Dans la suite, on va donner une estimation de chacune des intégrales de la dernière expression de I_ϵ , il suffit de le faire pour des formes différentielles de la forme suivante (voir [2], p. 380) :

$$\varphi(t, z) = \rho(t, z) dt \wedge d\bar{t},$$

où $\rho(t, z)$ est une fonction C^∞ à support compact dans $\Omega \times D(0, r)$.

On a d'après le lemme 1 :

$$\left| \int_{|f| \leq \epsilon} 1 d' d'' \varphi \right| \leq C \operatorname{vol}(|f| \leq \epsilon) \leq C_1 \epsilon^{2/k},$$

où C_1 est une constante ne dépendant que de φ et de f .

D'autre part on a :

$$\int_{|f| \leq \epsilon} 1 \operatorname{Log} |f| d' d'' \varphi = \int_{|f| \leq \epsilon} 1 \operatorname{Log} |I| d' d'' \varphi + \int_{|f| \leq \epsilon} 1 \operatorname{Log} |P_t| d' d'' \varphi, \\ \left| \int_{|f| \leq \epsilon} 1 \operatorname{Log} |I| d' d'' \varphi \right| \leq C_2 \epsilon^{2/k} \quad (\text{d'après le lemme 1}).$$

Et,

$$\left| \int_{|f| \leq \epsilon} 1 \operatorname{Log} |P_t| d' d'' \varphi \right| \leq C \int_{|f| \leq \epsilon} 1 |\operatorname{Log} |P_t|| dt \wedge d\bar{t} \wedge \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \\ \leq C \int_K |dt \wedge d\bar{t}| \int_{T_{t, \infty}} |\operatorname{Log} |P_t|| \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}.$$

En plus on a :

$$\int_{T_{t, \alpha}} |\operatorname{Log} |P_t|| \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \leq \sum_{j, l=1}^k \int_{D(z_j(t); (\alpha\epsilon)^{1/k})} |\operatorname{Log} |z - z_l(t)|| \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}.$$

Et d'après le lemme (2, a) on a :

$$\int_{T_{t, \alpha}} |\operatorname{Log} |P_t|| \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \leq C'' \epsilon^{2/k} \operatorname{Log} \epsilon,$$

où C'' est une constante qui ne dépend pas de t , donc on a :

$$\left| \int_{|f| \leq \epsilon} 1 \operatorname{Log} |f| d' d'' \varphi \right| \leq C_2 \epsilon^{2/k} + C_3 \epsilon^{2/k} |\operatorname{Log} \epsilon|.$$

Pour

$$\int_{|f| \leq \epsilon} 1 (\operatorname{Log} |f|)^2 d' d'' \varphi,$$

on fait la même chose que pour l'intégrale précédente; et en appliquant le lemme (2, b) et l'inégalité de Schwartz on obtient :

$$\left| \int_{|f| \leq \epsilon} 1 (\operatorname{Log} |f|)^2 d' d'' \varphi \right| \leq C'_2 \epsilon^{2/k} + C'_3 \epsilon^{2/k} |\operatorname{Log} \epsilon| + C'_4 \epsilon^{2/k} (\operatorname{Log} \epsilon)^2.$$

Et finalement on a :

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{|f| \geq \epsilon} \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} - 2 \operatorname{Log} \epsilon \int_{f=0} \varphi - \frac{1}{i\pi} \int_X (\operatorname{Log} |f|)^2 d' d'' \varphi \right| \leq A_1 \epsilon^{2/k} + A_2 \epsilon^{2/k} |\operatorname{Log} \epsilon| + A_3 \epsilon^{2/k} (\operatorname{Log} \epsilon)^2.$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|f| \geq \epsilon} \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} = 2 \operatorname{Log} \epsilon \int_{f=0} \varphi + \frac{1}{i\pi} \int_X (\operatorname{Log} |f|)^2 d' d'' \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^{2/k} (\operatorname{Log} \epsilon)^2).$$

En plus on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{|f| \leq \varepsilon} \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} - 2 \operatorname{Log} \varepsilon \int_{f=0} \varphi \right) = \frac{1}{i\pi} \int_X (\operatorname{Log} |f|)^2 d' d'' \varphi,$$

qui n'est autre chose que $Pf(G_\bullet)(0)$.

La démonstration de la proposition est donc achevée.

Posons, maintenant pour s dans le disque unité :

$$F_\bullet(s) = \int_{f=s} \varphi,$$

où φ est une forme différentielle C^∞ de type (n, n) à support compact dans X .

COROLLAIRE. — Pour s voisin de 0, on a :

$$\mathcal{F}_\bullet(s) = \mathcal{F}_\bullet(0) + \mathcal{O}(|s|^{2/k} (\operatorname{Log} |s|)^2).$$

Pour la preuve de ce corollaire, on aura besoin du théorème d'existence suivant [1] :

THÉOREME. — Si K est un compact de X , alors pour toute forme différentielle C^∞ φ à support compact dans K de type (n, n) , il existe $r_1, \dots, r_p$ dans $[0, 2[\cap \mathbb{Q}$ et des courants $T_{m, m'}^{r, j}(\varphi)$ de type $(1, 1)$ sur X , $j \in [0, n]$ et $(m, m') \in \mathbb{N}^2$ tels que : la fonction $\mathcal{F}_\bullet$ admet pour s voisin de 0, un développement asymptotique de la forme :

$$\mathcal{F}_\bullet(s) = \sum_{r_1, \dots, r_p} \sum_{j=0}^n \sum_{(m, m') \in \mathbb{N}^2} T_{m, m'}^{r, j}(\varphi) s^m \bar{s}^{m'} |s|^{r_1} (\operatorname{Log} |s|)^{j_1}.$$

Preuve du corollaire. — Supposons que le développement asymptotique de $F_\bullet(s) - F_\bullet(0)$ commence par le terme :

$$T_{m, m'}^{r, j}(\varphi) s^m \bar{s}^{m'} |s|^{r_1} (\operatorname{Log} |s|)^{j_1}.$$

D'après Fubini, on a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\varepsilon \leq |f| < 1} \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\varepsilon \leq |s| < 1} F_\bullet(s) \frac{ds \wedge d\bar{s}}{|s|^2}$$

On a vu que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\varepsilon \leq |s| < 1} (F_{\bullet}(s) - F_{\bullet}(0)) \frac{ds \wedge d\bar{s}}{|s|^2} = Pf(G_{\bullet})(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/k} (\text{Log } \varepsilon)^2).$$

Donc, d'après cette dernière égalité, on doit avoir

$$m + m' + r > \frac{2}{k} \quad \text{ou} \quad m + m' + r = \frac{2}{k} \quad \text{et} \quad j \leq 2 \quad (k \geq 2),$$

car, ce sont les deux seuls cas, pour lesquels, la contribution du terme $T_{m,m'}^{r,j}(\varphi) s^m \cdot \bar{s}^{m'} |s|^r (\text{Log } |s|)^j$ est contenue dans $\mathcal{O}(|s|^{2/k} (\text{Log } |s|)^2)$.

Donc

$$F_{\bullet}(s) = F_{\bullet}(0) + \mathcal{O}(|s|^{2/k} (\text{Log } |s|)^2).$$

Or, d'après Fubini, on a :

$$G_{\bullet}(\lambda) = \int_X |f|^{2\lambda} \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} = \int_D |s|^{2\lambda} F_{\bullet}(s) \frac{ds \wedge d\bar{s}}{|s|}.$$

Et d'après le corollaire, le premier pôle de $G_{\bullet}$ susceptible d'apparaître dans le demi-plan $\text{Re}(\lambda) < 0$ est produit par le terme $T_{0,0}^{2/k}(\varphi) |s|^{2/k} (\text{Log } |s|)^2$ de $F_{\bullet}(s)$, et ce pôle éventuel est donné par :

$$T_{0,0}^{2/k,2}(\varphi) \int_D |s|^{2/k+2\lambda} (\text{Log } |s|)^2 \frac{ds \wedge d\bar{s}}{|s|^2} = \frac{i\pi T_{0,0}^{2/k,2}(\varphi)}{(\lambda + (1/k))^3}.$$

Ceci nous prouve donc que le prolongement méromorphe de $G_{\bullet}$ ne peut avoir de pôles dans la bande $-1/k < \text{Re}(\lambda) < 0$.

De plus si $-1/k$ est un pôle de ce prolongement, alors il est d'ordre au plus égal à 3.

D'autre part $F_{\bullet}(0)$ nous donne le pôle 0, qui est un pôle simple, de résidu égal au courant d'intégration sur $[f=0]$, et ce pôle est donné par :

$$F_{\bullet}(0) \int_D |s|^{2\lambda} \frac{ds \wedge d\bar{s}}{|s|^2} = \frac{2i\pi F_{\bullet}(0)}{\lambda}.$$

Exemple. — Soit f une fonction définie sur $\mathbb{C}^3$ par :

$$f(X, Y, Z) = X^a + Y^b + Z^c,$$

où a, b et c sont des entiers positifs. Supposons que $a \leq b \leq c$ (a est donc la multiplicité de f à l'origine).

Si on prend $X = f^{-1}(D)$, où D est le disque unité dans $\mathbb{C}$, $f: X \rightarrow D$ est holomorphe, surjective et à singularité isolée à l'origine.

Notons $\tilde{\mathcal{M}}$ l'ensemble des germes en 0 des fonctions de la forme $F_{\bullet}(s) = \int_{f=s} \varphi$, où φ est une $(2,2)$ -forme C^{∞} à support compact dans X .

On a $C_{\mathbb{C},0}^{\infty} \subset \tilde{\mathcal{M}}$, et soit $\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}}/C_{\mathbb{C},0}^{\infty}$ muni d'une structure de $\mathbb{C}[[s, \bar{s}]]$ -module de type fini.

Le quotient

$$\mathbb{C}[X, Y, Z] / \left(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}, \frac{\partial f}{\partial Z} \right)$$

est de dimension finie égale au nombre de Milnor $\mu = (a-1)(b-1)(c-1)$, et ayant comme base $X^p Y^q Z^r$ avec

$$p \in [0, a-2], \quad q \in [0, b-2] \quad \text{et} \quad r \in [0, c-2].$$

Si on pose

$$W = bcX dY \wedge dZ + caY dZ \wedge dX + abZ dX \wedge dY$$

et

$$W_{p,q,r} = X^p Y^q Z^r \cdot W,$$

on a :

$$d(W_{p,q,r}) = \left(\frac{p+1}{a} + \frac{q+1}{b} + \frac{r+1}{c} \right) \frac{df}{f} \wedge W_{p,q,r}$$

(pour plus de détails voir [3]).

Et d'après [4], $\mathcal{M}$ est engendré par 1 et les germes en 0 des fonctions

$$\frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{f=s} \rho W_{p,q,r} \wedge \bar{W}_{p',q',r'}.$$

Le premier pôle de

$$G_{\bullet}(\lambda) = \int_X |f|^{2\lambda} \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}}$$

est donné par le terme :

$$\frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{f=s} \rho W \wedge \bar{W}.$$

Et un raisonnement simple de quasihomogénéité donne :

$$\frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{f=s} \rho W \wedge \bar{W} = A |s|^{(2/a)+(2/b)+(2/c)} + C_{\mathbb{C},0}^{\infty}.$$

$$\frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{f=s} \rho W \wedge \bar{W}_{p,q,r} \in C_{\mathbb{C},0}^{\infty} \quad \text{pour } (p, q, r) \neq 0.$$

En plus la constante A est non nulle, car si on suppose le contraire, on aura :

$$\frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{f=s} \rho W \wedge \bar{\Psi} \in C_{\mathbb{C},0}^{\infty},$$

pour toute forme différentielle de type $(2, 2)$ holomorphe et ceci est impossible d'après le théorème 2 de [5].

On peut également utiliser la méthode de [3] pour s'assurer que A est non nulle en calculant explicitement cette constante.

Le premier pôle du prolongement méromorphe de $G_{\bullet}(\lambda)$ après 0 est donc $-(1/a)-(1/b)-(1/c)$, qu'on peut rendre aussi proche de $-1/a$ en prenant b et c assez grands.

RÉFÉRENCES

- [1] BARLET (D.). — Développement asymptotique des fonctions obtenues par intégration sur des fibres, *Invent. Math.*, vol. 68, 1982, p. 129-174.
- [2] BARLET (D.). — Convexité de l'espace des cycles, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 106, 1976, p. 373-397.
- [3] BARLET (D.). — *Forme hermitienne canonique dans le cas : $X^a + Y^b + Z^c = 0$* , Inst. E. Cartan, E.R.A. n° 839, octobre 1973, Preprint.
- [4] BARLET (D.). — *Forme hermitienne canonique sur la cohomologie de la fibre de Milnor d'une hypersurface à singularité isolée*, Inst. E. Cartan, E.R.A. n° 839, septembre 1983, Preprint.
- [5] BARLET (D.). — Contribution du Cup-produit de la fibre de Milnor aux pôles de $|f|^{2x}$, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, vol. 34, n° 4, 1984.
- [6] BJÖRK (J.E.). — *Ring of differential operators*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1979.
- [7] GUNNING-ROSSI. — *Analytic functions of several variables*, Prentice-Hall I.N.C., Englewood.
- [8] HIRONAKA (H.). — Résolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I and II, *Ann. Math.*, vol. 79, 1964, p. 109-326.
- [9] JEDDI (A.). — *Thèse de 3^e cycle*, 1983, Nancy.
- [10] KASHIWARA (M.). — *B-functions and holonomic systems*, *Invent. Math.*, vol. 38, 1976, p. 33-54.
- [11] NORGUET (F.) et ANDREOTTI (A.). — Quelques propriétés des courants définis à l'aide de fonctions holomorphes, vol. 37, n° 3/4, *An. da Acad. Brasileria de Ciencias*, 31 dezembro de 1965.